**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

“Умумий математика “

к а ф е д р а с и

5460100- математика таълим йўналиши бўйича бакалавр даражасини олиш учун

**АБДУРАХМОНОВА ШОИРА БАХРОМАЛИЕВНА**

**“Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг чекли айирмалар усули”**

мавзусидаги

# Битирув малакавий иши

**Илмий рахбар: доц. Жамуратов К.**

Гулистон-2013

## Р Е Ж А

## КИРИШ

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси узоқ вақт математик физиканинг тенгламалари ва масалаларини ўрганиш йўлида ривожланди. Сўнги ўнг йилликлар давомида умумий хусусий тенгламалар назарияси катта муваффақиятларга эришган бўлсада, бироқ математик физика яна узоқ вақтлар бу фаннинг таркибий қисми ва энг муҳим йўналиши бўлиб қолаверади.

“Математик физика” даган ном хусусий хосилали дифференциал тенгламалар назарияси физиканинг содда аммо муҳим масалаларни ўрганиш натижасида шаклланганлигидир.

Физик жараёнларнинг математик модели асосан иккинчи тартибли чизиқли ёки квазичизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар бўлади. Бу тенгламаларни одатда учта: эллиптик, параболик ва гиперболик типларга ажратилади. Стационар жараёнларнинг математик модели эллиптик типдаги тенгламалар билан ифодаланса ностационар жараёнлар параболик ва гиперболик типдаги тенгламалар билан ифодаланади.

Мазкур битирув-малакавий иш параболик типдаги тенгламаларга қўйилган турли чегаравий маласалаларни ечишнинг сонли усуллари билан ўрганишга бағишланган.

Параболик типдаги тенгламаларга олиб келадиган айрим физик жараёндарга тўхталиб ўтамиз.

**1. <u>Иссиқлик тарқалиш ҳақида масала.</u>**

Фурье қонунига кўра $\Delta S$ чексиз кичик ва юзадаги $\Delta t$ вақт ичида ўтаётган иссиқлик миқдори $\Delta Q$

$$\Delta Q = \kappa(x, U)\frac{\partial U(x, t)}{\partial n}\Delta S \Delta t \qquad (1)$$

тенглик билан характерланади. Бу ерда $n-$ иссиқлик берилаётган томонга қараб йўналган $\Delta S$ юзанинг нормали, $K(x,U)$ ички иссиқлик ўтказувчанлик коэффиценти, $U(x,t); x=(x_1x_2,x_3)$ нуқталарнинг $t$ вақт моментидаги температура.

Агар ташқи иссиқлик манбаи интенсивлигини $F(x,t)$ орқали белгилаб, сўнгра барча иссиқлик миқдори температура ўзгариши (орттирмаси)га тенглигини эътиборга олсак

$$U_t = a^2 \Delta U + f(x,t) \qquad (2)$$

тенгламага келамиз. Бу ерда $a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$, $c(x)-$иссиқлик сиғими, $\rho -$ зичлик.

**2. Диффузия масаласи.**

$\Omega$ соҳада жойлашган муҳитга бошқа $U(x,t)$ зичликка эга модда киритилса, натижада муҳит ва модда зарралари химиявий реакцияга киришади.

Нэрнст қонунига кўра сиртнинг $ds$ элементи орқали оқиб ўтган зараллар оқими $dQ$

$$dQ = -D(x)\frac{\partial U}{\partial n}dS \qquad (3)$$

тенглик билан аниқланади. Бу ерда $D(x)-$ диффузия коэффиценти, $n-ds$ сиртнинг нормали, $\rho(x)$-муҳитнинг ғоваклик коэффиценти. Агар баланс тенгламасини тузсак

$$\rho(x)U_t = div(D(x)gradU) - qU + F(x,t) \qquad (4)$$

диффузия тенгламасига келамиз.

**3. Гидродинамика тенгламалари.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho V) = f \qquad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, gradV) + \frac{1}{\rho}gradp = F \qquad (6)$$

$$\Phi(p,\rho) = 0 \qquad (7)$$

Бу учала тенгламалар биргаликда ёпиқ системани ташкил этсада, уларнинг ҳар бири алоҳида номланади. (5) ни идеал газнинг туташишлик тенгламаси, (6) ни Эйлернинг ҳаракат тенгламаси (7) ни эса ҳолат тенгламаси дейилади.

**4. Максвелль тенгламалари.** Бирор муҳитда ўзгарувчан электромагнит майдони мавжуд бўлсин. $E(x,t)=(E_1,E_2,E_3)-$электр майдони кучланиши, $H(x,t)=(H_1,H_2,H_3)-$магнит майдони кучланиш, $\rho(x)$-зарядлар зичлиги, $\varepsilon-$муҳитнинг диэлектрик ўзгармаси, $\mu-$муҳитнинг магнит ўзгарувчанлик коэффиценти, $I(x,t)=(I_1,I_2,I_3)$- ўзгарувчанлик токи. У ҳолда бу катталиклар Максвелль тенгламалари деб аталувчи чизиқли дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$div(\varepsilon E)=4\pi\rho, \quad div(\mu H)=0, \qquad (8)$$

$$rotE=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \qquad (9)$$

$$rotH=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\varepsilon H)}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}I, \qquad (10)$$

бу ерда $c=3\cdot10^{10}$см/сек-ёруғликнинг бўшликда тарқалиш тезлиги. Булардан (8) Фарадей қонунини, (9) эса Ампер қонуни ифодалайди.

Агар жараён стационар (вақтга боғлиқ бўлмаса) Максввелль тенгламалари

$$div(\varepsilon E)=4\pi p, \quad rotE=0 \qquad (11)$$

Электростатика тенгламасини ва

$$div(\mu H)=0, \quad rotH=\frac{4\pi}{C}I \qquad (12)$$

магнитостатика тенгламасига келади.

**5. Шредингер тенгламаси.** Фараз қилайлик $m_0$ массали квант зарраси ташқи куч майдонида $V(x)$ потенциал билан ҳаракатланаётган бўлсин. $\Psi(x,t)$ орқали бу зарранинг тўлиқ функциясини белгилаймиз. Бу ҳолда $|\Psi(x,t)|^2dx$-бу зарранинг $dx$ ҳажмда жойлашиш эҳтимолини ($x$-нуқтадаги $t$моментидаги)ифодалайди. У ҳолда $\Psi$ Шредингер тенгламаси деб аталувчи

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m_0}\Delta\Psi + V\Psi, \qquad (13)$$

тенгламани қаноатлантиради. Бу ерда $h = 1{,}054\cdot 10^{-27}$ эгр.сек-Планк доймийси.

**<u>Битирув-малакавий ишнинг структураси.</u>** Мазкур иш тўртта: кириш, асосий қисм, хулоса ва таклифлар ҳамда фойдаланилган адабиётлар ва манбалар деб аталувчи қисмлардан ташкил топган.

Кириш қисмида қисқача адабиётлар таҳлили, мавзунинг долзарблиги, тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари, мавзунинг илмий ва амалий аҳамияти ҳақида сўз боради. Шунингдек хусусий хосилали дифференциал тенгламалардан бири бўлган параболик типдаги тенгламаларга олиб келувчи бешта физик жараён ва уларнинг математик модели бўлган параболик типдаги тенгламаларга алоҳида тўҳтаб ўтилган.

**<u>Адабиётлар таҳлили.</u>** $[1]-[5]$ номерли адабиётларда Фарадей Басирович Абуталиев ва у кишининг шогирдлари, шунингдек Абдували Бегматов ва у кишининг шогирди Кенгаш Жамуратовнинг параболик типдаги тенгламаларга қўйилган фильтрация масалаларини сонли усуллар-чекли айирмали схемалар, интеграл-интерполяция методи ва консерватив биржинсли схемаларни қўллашга бағишланганни илмий ишлари ўз аксини топган. $[10]-[17]$ номерли адабиётлар эса Москвадаги Бауман номидаги олий техника билим юрти ҳамда Сибирьдаги Краснаярск ва Новосибирск шаҳри олимларнинг сўнги ўн йилликда яратган чекли айирмали схемаларга бағишланган илмий ва услубий ишлари ўзи аксини топган.

Ўзбек тилида берилган асосий адабиёт сифатида Маъруф Исроиловнинг $[18]$ китобини алоҳида таькидлаб ўтмоқ лозим. Шунингдек Маҳмуд Салоҳидиновнинг $[31]$ китоб параболик типдаги тенгламаларнинг фундаментал ва тақрибий ечимларини топиш усулларига бағишланганлиги эслатиб ўтамиз.

Шуни таъкидлаш керакки ҳисоблаш мастематикаси, хусусан чекли айирмали методлар биржинсли консерватив схемалар, уларнинг яқинлашиш ва турғунлик шартларини ўрнатиш ва хатоликларни баҳолаш усулларини ишлаб чиққан киши А.А.Самарский, Г.И.Маргук [25],[28]–[32] эканлигинин алоҳида эьтироф зазурлигини ўзимизнинг бурчимиз деб биламиз.

Шунингдек адабиётлар рўйхатида параболик тенгламаларга олиб келадиган техник масалаларни ўрганган йигирмага яқин авторларнинг илмий мақола ва китоблари ҳам ўрин олган.

**Мавзунинг долзарблиги.** Ҳозирги кунда барча жараёнларни математик моделлаштириш фанда, техникада ўз ечимини кутаётган жуда кўп масалаларни ечишга, ўрганишга олиб келмоқда. Хусусан кўплаб ностационар жараёнлар параболик типдаги (чизиқли ёки чизиқли бўлмаган) тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни ечишни тақоза этади. Чизиқли бўлмаган тенглама ва чегаравий шартли масалаларни сонли усуллар-чекли айирмали схемалар ёрдамида ечиш ҳамон **долзарб** масала бўлиб келмоқда.

**Тадқиқот мавзуси.** Муаммо шундан иборатки чегаравий масалаларни ечиш ҳаммо вақт ҳам сонли усулда амалга оширилавермайди. Шунинг учун мавзуни, тадқиқотни айнан чекли айирмали схемалар ичидан яроқлисини танлашга қаратилади.

**Тадқиқот мақсад.** Аввало параболик типдаги тенгламаларни ва чегарвий шартларни чекли айирмалар кўринишда тасвирлаб ҳосил бўлган системани ўнг хайдаш ва ошкормас схемалар тузиш билан юқори аниқликда ва турғун ечимни олиш асосий мақсад қилиб белгиланган.

**Тадқиқот муаммоси.** Ўз ечимини кутаётган чегарвий масалага мос биржинсли ва консерватив (ўз ячейкасида сақланиш қонунлари мужассам бўлган) схемаларни танлаш ва излаб топиш ҳар бир тадқиқотда бўлганидек бу ишда ҳам асосий **муаммо** бўлиб қолган.

**Тадқиқот объекти.** Ўрганиш-тадқиқ қилиш объекти сифатида дастлаб чизиқли параболик масалалар, сўнгра эса квазичизиқли ва ҳатто чизиқли бўлмаган масалалар қаралган. Иккинчи бобнинг 4 параграфида сув омборлари яқинидаги фильтрация жараёнининг математик модели бўлган номаълум (қўзғалуван) чегарали чегарвий масала ҳам биржинсли консерватив схема ёрдамида ечилганлигини таъкидлаш кифоя.

**Тадқиқот предмети.** Узлуксиз жараёнларнинг математик ифодаси бўлмиш дифференциал тенглама унинг дискрет модели ҳисобланмиш чекли айирмалар билан алмаштирилади. Чекли айирмаларда ўрганилган объектнинг реал объектга яқинлигини таъминлайдиган айирмали схемаларни излаш ва ўрганиш тадқиқотнинг асосий **предмети** ҳисобланган.

**Тадқиқот фарази.** Ишнинг ҳимояга олиб чиқадиган ҳолатларидан бири чекли айирмали схемалардан бири биржинсли консерватив схема саналмиш интеграл-интерполяция методининг афзалликлари ва қулайлигини намойиш этишдир.

**Тадқиқот вазифалари**. Чегаравий масаланинг сонли усулида топилган сон қийматлари билан экспремент натижаларини солиштириб, сонли усулнинг амалий аҳамиятини аниқлашдан иборат.

**Тадқиқот янгилиги.** Шундан иборатки ер ости сувлари саҳтининг кўтарилиб натижада ҳосилдор қатламларни шўрлантиришнинг олдини оладиган тадбирларнинг қаерда ва қачон ўтказиш лозимлиги ҳақида конкрет тавсиялар берилган ва чизмада бу ҳолат турли ҳолларда тасвирланган.

**Фан учун ахамияти** эса қўйилган масаланинг корректлигини асослашда сонли усулларнинг ҳам ўрни борлигини кўрсатишда набоён бўлди.

**Асосий қисм.** Иккита бобдан иборат бўлиб, **биринчи боб** учта параграфни ўз ичига олган. Биринчи парагрфда иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага қўйилган чегарвий масалани чекли айирмали метод билан ечишга, иккинчи параграфда ечимнинг ягоналигини текширишда максимум принципидан фойдаланиш йўллари кўрсатилган.

**Учинчи парграф** асосан чизиқли бўлмаган чегаравий масалаларни қандай қилиб чекли айирмалар билан ифодалаш, хусусан чизиқли бўлмаган хадларни чизиқлаштириш йўлларини излаб топишга бағишланган.

**Иккинчи боб** асосан хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, аниқроғи параболик типдаги тенгламалар учун сетка (тўр) методини қўллашга бағишланган. Бу боб тўртта параграфни ўз ичига олади. Биринчи паграфда икки қатламли айирмали схемаларнинг яқинлашишини, аниқлиги ва тўрғунлиги текширилган. Иккинчи ва учунчи параграфларда икки қатламли айирмали схемалардан тежамкор схемаларни ажратиб олиш ва уларнинг тўғрилигини таъминлаш муаммоси қаралган.

**Тўртинчи параграфда** битирув-малакавий ишнинг илмийлигини ва амалийлигини ифодаловчи бўлиб, унда ҳам математик маънода ҳам ҳисоблаш нуқтаи назардан янги бўлган конкрет масала қаралган. Бу масалани чекли айирмали усуллар ичида энг самарали ва юқори аниқликдаги метод бўлган интеграл-интерполяцион схема ўрганилган ва уни қўллаш натижасида реал картинага мос келувчи ечим олинган ва бу ечим чизмада ҳам тасвирланган.

# I БОБ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ.

## 1. 1-§ Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масалани чекли айирмали метод билан ечиш ғояси.

Фараз қилайлик, $a \le x \le b$ орлиқда

$$L(u) = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \qquad (1.1.1)$$

дифференциал тенглама ва

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_1, \quad |\alpha_0| + |\alpha_1| \ne 0 \qquad (1.1.2)$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_2, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \ne 0 \qquad (1.1.3)$$

чегаравий шартлар берилган бўлиб, бу чегаравий масала ягона ечимга эга бўлсин.

Қаралаётган $[a,b]$ ораликни тугунлар деб аталувчи

$$x_i = a + ih \ \ (i = 0,1,\ldots,N; h = (b-a)/N) \qquad (1.1.4)$$

нуқталар ёрдамида $N$ та тенг бўлакларга бўлиб, тўр хосил қиламиз. Ҳар бир тугунга (1.1.1)-(1.1.3) лардаги ҳосилаларни сонли дифференциаллаш формулалари бўйича функциянинг айрим нуқталардаги қийматларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаймиз. Натижада $i = 1,2,\ldots,N-1$ ҳолда $u(x_i)$ларни топиш учун $N-1$ та тенгламага эга бўламиз.

Агар булар билан чегаравий шартлардан $(i = 0 \text{ ва } i = N)$ келиб чиқадиган тенгламаларни ҳам бирлаштирсак, у ҳолда $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_N)$га нисбатан $N+1$та тенгламалардан иборат системага эга бўламиз.

Чекли айирмали методни қўллаганда қуйидаги қўйидиги масалалар ечилиши керак.

1) сонли дифференциаллаш формулаларини шундай танлаш керакки, улар ҳосилани яхши яқинлаштирсин ва бу формулада функциянинг тугун (нуқта)лардаги қийматлари қатнашсин.
2) ҳосил бўлган система ечимининг мавжудлиги текширилсин.
3) бу системани ечиш методи кўрсатилсин.

4) ҳосил бўлган натижанинг аниқлиги баҳолансин.

***Оддий дифференциал тенглама ва чегаравий шартларни алгебраик тенгламалар системаси билан алмаштириш***. Биз бу ерда $[a,b]$ оралиқда (1.1.4) тугун нуқталарни танлаб, (1.1.1) дифференциал тенгламани фақат ички тугунларда қараймиз, яъни $x = x_i(i = 1,2,...,N-1)$ ва $(1.1.2)$-(1.1.3) чегаравий шартларни мос равишда $x_0 = a$ ва $x_N = b$ нуқталарда қараймиз; (1.1.1) тенгламага $x = x_i$ деб оламиз:

$$u''(x_i) + \rho(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \qquad (1.1.5)$$

$$i = 1,2,...N-1$$

ва бунда қатнашадиган $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ларни $u(x)$ функциянинг $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ нуқталардаги қиймати, яъни $u(x_{i-1}), u(x), u(x_{i+1})$ орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $x_i$ нуқта атрофида $u = u(x)$ фуцункция $[a,b]$ оралиқда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз, $u(x_{i-1})$ ва $u(x_{i+1})$ функцияларнинг Тейлор формуласи бўйича ёйилмасини ёзамиз (қолдиқ ҳадни эса Лагранж формуласида оламиз).

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{h}{1!}u^{I}(x_i) + \frac{h^2}{2!}u^{II}(x_i) + \frac{h^3}{3!}u^{III}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i + \theta h), 0 < \theta < 1, \qquad (1.1.6)$$

$$u \cdot (x_{i-1}) = u(x_i) - \frac{h}{1!}u^{I}(x_i) + \frac{h^2}{2!}u^{II}(x_i) - \frac{h^3}{3!}u^{III}(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i - \theta h), 0 < \theta < 1 \qquad (1.1.7)$$

Бу формулалардан қуйидагиларга эга бўламиз.

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + 0(h), \qquad (1.1.8)$$

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} = u'(x_i) + 0(h), \qquad (1.1.9)$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = u'(x_i) + 0(h). \qquad (1.1.10)$$

Бу формулаларнинг чап томони мос равишда ***ўнг ҳосила, чап ҳосила*** ва ***марказий ҳосила*** дейилади. Шунга ўхшаш $u''(x_i)$ учун қуйидаги симметрик ифодага эга бўламиз:

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=u''(x_i)+0(h^2) \qquad (1.1.11)$$

Энди (1.1.5) тенгликда $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ларнинг ўрнига (1.1.10), (1.1.11) ларни қўйиб ва $o(h^2)$ ни ўнг томонга ўтказиб, қуйидаги ҳосил қиламиз:

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}+p(x_i)\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}+q(x_i)u(x_i)=f(x_i)+0(h^2) \qquad (1.1.12)$$

ёки

$$\left[1-\frac{h}{2}p(x_i)\right]u(x_{i-1})-\left[2-h^2q(x_i)\right]u(x_i)+\left[1+\frac{h}{2}p(x_i)\right]u(x_{i+1})=h^2p(x_i)+0(h^4), \qquad (1.1.13)$$

$$i=1,2,..,N-1$$

Шунга ўхшаш (1.1.8), (1.1.9)лардан фойдаланиб, (1.1.2), (1.1.3) чегаравий шартлар учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$(\alpha_0h-\alpha_1)u(x_0)+\alpha_1u(x_1)=h\gamma_1+0(h^2) \qquad (1.1.14)$$

$$-\beta,u(x_{N-1})+(\beta_1+h\beta_0)u(x_N)=h\gamma_2+0(h^2) \qquad (1.1.15)$$

Энди (1.1.13)-(1.1.15)ларнинг ўнг томонида $0(h^4)$ ва $0(h^2)$ қолдиқ ҳадларни ташлаб юборамиз, натижада

$$\left[1-\frac{h}{2}p(x_i)\right]y_{i-1}-\left[2-h^2q(x_i)\right]y_i+\left[1+\frac{h}{2}p(x_i)\right]y_{i+1}=h^2f(x_i), i=1,2,...,N-1 \qquad (1.1.16)$$

$$(\alpha_0h-\alpha_1)y_0-\alpha_1y_1=h\gamma_1, \qquad (1.1.17)$$

$$-\beta_1y_{N-1}+(\beta_1+h\beta_0)y_N=h\gamma_2 \qquad (1.1.18)$$

ҳосил бўлади.

Бу ерда $y_i$ орқали $u(x_i)$нинг тақрибий қиймати белгиланган. Кейинчалик қулай бўлиши учун қуйидаги белгилнишл киритамиз.

$$\left.\begin{array}{l} A_i=1-\frac{h}{2}p(x_i), C_i=2-h^2q(x_i), \ \beta_i=1+\frac{h}{2}p(x_i), \\ x_i=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-h\alpha_0}, \vartheta_1=\frac{h\gamma_1}{h\alpha_0-\alpha_1}, x_2=\frac{\beta_1}{\beta_1+h\beta_0}, \vartheta_2=\vartheta_2=\frac{h\gamma_2}{\beta_1+h\beta_0}. \end{array}\right\} \qquad (1.1.19)$$

Бу белгилашларда (1.1.16)-(1.1.18) системани қуйидагича ёзиб оламиз.

$$\left.\begin{aligned}&A_i y_{i-1} - Cy_i + By_{i+1} = h^2 f_i,\\&y_0 = x_1 y_1 + v_1,\\&y_N = x_2 y_{N-1} + v_2\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.20)$$

Бу системанинг матрицаси унинг дигоанали бўлиб, қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A & -C_1 & B_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Шунини таъкидлаш керакки, (1.1.16) ифода дифференциал тенгламани $O(h^2)$ хатолик билан, (1.1.17) ва (1.1.18)лар эса чегарвий шартларни $O(h)$ хатолик билан алмаштирилади. Кўриниб турибдики, дифференциал тенглама чегаравий шартларга нисбатан каттароқ аниқликда алмаштирилади. Будан аниқлик мақсадга мувоффиқ бўлмай қолиш мумкин, у ҳолда $u'(a)$ ва $u'(b)$ аникроқ формулалар билан алмаштирилади.

$$u'(x_0) = \frac{1}{3h}\left[-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}u''(\xi)$$

ва
$$u'(x_N) = \frac{1}{2h}\left[u(x_{N-2}) - 4u(x_{N-1}) + 3u(x_N)\right] + \frac{h^2}{3}u''(\xi)$$

Умуман олганда, қўшимча $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i-3}, x_{i+3}$ ва ҳ.к тугунларда $u(x)$ функциянинг қийматини олиб, чегаравий масалани каттароқ аниқликда алмаштириш мумкин. Аммо бу алгебраик системани мураккаблаштириб юборади, табиийки, бундай системани сонли ечиш ҳам оғир масалага айланади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш амалитида шундай системалар қараладики, уларнинг аниқлиги катта бўлмаса ҳам кўриниши содда бўлиши керак. Аниқликни ошириш учун $h$ кичикроқ қилиб олинади. Шу сабабларга кўра, кўпинча (1.1.1)-(1.1.3) чегарвий масалани ечиш учун (1.1.20) кўринишдаги система олинади.

Мисол №1. Чекли айирмалар усули қўлланилиб, ушбу $u'' - x^2u' = 4,\ u(1) = 0,\ u(1.4) = 0.2492$ чегаравий масала йечимининг $u(1.1),\ u(1.2),\ u(1.3)$ қийматлари топилсин.

Ечиш: $u'',u'$ ҳосилаларни айирмали ҳосилалар билан алмаштириб, қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i^3 \frac{y_{i+1} - y_i - 1}{2h} = 4$$

ёки

$$2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i-1} - x_i^3 h y_{i+1} + x_i^3 h y_{i-1} = 8h^2$$

ёки

$$\left(2 + x_i^3 h\right) y_{i-1} - 4y_i + \left(2 - x_i^3 h\right) y_{i+1} = 8h^2$$

$$x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad x_i = x_0 + ih, \qquad h = \frac{a-b}{n}, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \beta_0 = 1 \quad \beta_1 = 0 \quad A = 0$$

$$x_1 = 1{,}1 \quad x_2 = 1{,}2 \quad x_3 = 1{,}3 \quad y_0 = 0 \quad B = 0{,}2492$$

$$\begin{cases} (2 + 1{,}1^3 \cdot 0{,}1) y_0 - 4y_1 + (2 - 1{,}1^3 \cdot 0{,}1) y_2 = 8 \cdot 0.1^2 \\ (2 + 1{,}2^3 \cdot 0{,}1) y_1 - 4y_2 + (2 - 1{,}2^3 \cdot 0{,}1) y_3 = 8 \cdot 0.1^2 \\ (2 + 1{,}2^3 \cdot 0{,}1) y_2 - 4y_3 + (2 - 1{,}2^3 \cdot 0{,}1) y_4 = 8 \cdot 0.1^2 \end{cases}$$

$$1{,}8669 y_2 - 4y_1 + 2{,}1331 y_0 = 8 \cdot 0{,}1^2$$

$$1{,}8272 y_3 - 4y_2 + 2{,}1728 y_1 = 8 \cdot 0{,}1^2$$

$$1{,}7803 y_4 - 4y_3 + 2{,}2197 y_2 = 8 \cdot 0{,}1^2$$

$$y_1 = \frac{1}{4} \cdot 1{,}8669 y_2 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}08 = 0{,}44667 y_2 - 0{,}02$$

$$1{,}8272 y_3 - 4y_2 + 2{,}1728(0{,}4667 y_2 - 0{,}02) = 0{,}08$$

$$(4 - 1{,}01405) y_2 = 1{,}8272 y_3 - 0{,}04346 - 0{,}08$$

$$y_2 = \frac{1{,}8272}{2{,}98595} y_3 - \frac{0{,}12346}{2{,}98595}$$

$$y_2 = 0{,}61193 y_3 - 0{,}07135$$

$$1{,}7803 y_4 - y_4 - 4y_3 + 2{,}2197(0{,}61193 y_3 - 0{,}04135) = 0{,}08$$

$$1{,}7803 y_4 - 4y_3 + 1{,}3583 y_3 - 0{,}09178 - 0{,}08 = 0$$

$$1{,}7803 y_4 - 2{,}6417 y_3 - 0{,}17178 = 0$$

$$2{,}6417 y_3 = 1{,}7803 y_4 - 0{,}17178$$

$$y_3 = \frac{0,1718}{2,6417} + \frac{1,7803 \cdot 0,2492}{2,6417}$$

$$y_3 = -0,065 + 0,1679 = 0,1029$$

$$y_2 = 0,61193 \cdot 0,1029 - 0,04135 = 0,0216$$

$$y_1 = 0,4667 \cdot 0,0216 - 0,02 = 0,0099$$

## 1. 2-§. Максимум принципи ва уни чекли-айирмали тенгламалар системаси ечимининг мавжудлигини текширишга қўллаш

Олдинги бобда (1.1.20) система ечимининг мавжудлигини кўрсатиш учун саноқли бош диагоналга эга бўлган матрицалар ҳақидаги леммани қўллаш мумкин. Аммо биз бу ерда бошқача иш тутамиз. Аввало, максимум ҳақидаги леммани келтирамиз. Бу принципнинг қўллаш доираси анча кенг, нафақат оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш натижасида ҳосил бўладиган (1.1.20) кўринишдан системани текшириш учун, балки бу методларнинг яқинлашишини текшириш ва хатосини баҳолаш учун ҳам ишлатилади.

Фараз қилайлик, қуйидаги икки шарт бажарилган бўлсин:

$$\frac{h}{2}\max_{a\le x\le b}\left|p(x)\right|<1 \qquad (1.2.1)$$

$$q(x)\le 0,\ \ a\le x\le b \qquad (1.2.2)$$

Бу шартлар $A_1,\ \ B_i,\ C_i$ коэффицентларнинг мусбатлигини таъминлайди. Кейинги мулоҳозаларни соддалаштириш мақсадида (1.1.2)-(1.1.3) чегаравий шартларга $\alpha_1=\beta_1=0$ деб оламиз, у ҳолда $x_1=x_2=0$ бўлиб, (1.1.20) система қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$\left.\begin{array}{l} A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=hf_i,\ i=\overline{1,N-1} \\ u_0=v_1,\ u_N=v_2, \end{array}\right\} \qquad (1.2.3)$$

Бу система ечишнинг мавжудлигини кўрсатиш учун бунга мос келадиган

$$A_i y_{i-1}-C_i y_i+B_i y_{i+1}=0,\ \ i=\overline{1,N-1},\ \ y_0=0 \qquad (1.2.4)$$

бир жинсли система фақат $y_0=y_1=...=y_N=0$ тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатишимиз керак, чунки бу ҳолда (1.2.4) системани дитерминанти

$$D=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} \end{vmatrix}$$

нолдан фарқли бўлади. Аммо бу детерминат (1.2.3) системанинг ҳам детерминати бўлиб, $D\neq 0$ тенгсизлик бу система ечимининг мавжуд ва ягоналигини таъминлайди.

Фараз қилайлик қандайдир $z_0, z_1, ..., z_N$ сонлар берилган бўлиб, $z_i \neq const$ бўсин. Ушбу айирмали операторни киритамиз:

$$\wedge(z_i)=A_i z_{i-1}-C_i z_i+B_i z_{i+1}, \qquad i=1,2,...,N+1$$

**1-лемма (максимум принципи).** Агар (1.2.1), (1.2.2)шартлар бажарилса ва $i=1,2,...,N-1$ учун

$$\wedge(z_i)\geq 0 \ \ (\wedge(z_i)\leq 0)$$

бўлса, у ҳолда $z_0, z_1, ..., z_N$ сонлар орасидаги $z_0$ ёки $z_N$ энг катта мусбат қийматга (энг кичик масофий қийматга)эга бўлиши мумкин.

**Исботи.** Айтайлик

$$\wedge(z_i)\geq 0 \quad i=1,2.,..,N-1$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин. Тескарисини фараз қиламиз, айтайлик, $z_i$ лар ўзининг энг катта мусбат қиймати $M$ ни $i=\kappa \quad (1\leq \kappa\leq N-1)$ бўлганда қабул қилсин, яъни $\max\limits_{1\leq i\leq N-1} z_i = z_\kappa = M$ бўлиб, $z_{\kappa+1}$ ёки $z_{\kappa-1}$ сонларнинг ҳеч бўлмаганда $M$ дан кичик бўлсин.

У ҳолда

$$\wedge(z_\kappa)=A_\kappa z_{\kappa-1}-C_\kappa z_\kappa+B_\kappa z_{k+1}=\left[1-\frac{h}{2}p(x_\kappa)\right]z_{\kappa-1}-\left[2-h^2q(x_\kappa)\right]M+\left[1+\frac{h}{2}p(x_\kappa)\right]z_{\kappa+1}<$$

$$<\left[1-\frac{h}{2}p(x_\kappa)\right]M-\left[2-h^2q(x_\kappa)\right]M+\left[1+\frac{h}{2}p(x_\kappa)\right]M=h^2q(x_\kappa)M\leq 0,$$

чунки лемма шартига кўра $A_k, B_k, C_k$ коэффицентлар мусбат бўлиб, $z_{\kappa+1}$ ёки $z_{\kappa-1}$ сонлардан хеч бўлмаганда бири $M$ дан кичик. Демак, $\wedge(z_\kappa)<0$. Бу эса лемма шартларга зиддир. Бундан эса бизнинг фаразимизнинг нотўғрилиги ва энг катта мусбат қиймат фақат $z_0$ ёки $z_N$ бўлиши мумкинлиги келиб чиқади. Лемманинг тасдиғи $\wedge(z_i)\leq 0$ учун ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Энди (1.2.4) системанинг фақат тривал ечимига эга эканлигини кўрсатамиз. Яна тескарисини фараз қилиб, бу система нолдан фарқли ечимга эга деб ҳисоблаймиз, яъни $y_1, y_2,..., y_{N-1}$ сонларнинг орасида хеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. бу ерда ҳам (1.2.1), (1.2.2) шартлар бажарилган деб фараз қиламиз ва бундан ташқари, барча $i = 1,2,..., N-1$ учун $\wedge(y) = 0$ тенгликлар ўринли эканлигини ҳисобга оламиз. Шунинг учун ҳам леммаларнинг тасдиғига кўра $y_i$ сонларнинг энг катта мусбат қиймати (энг кичик манфий қиймати) фақат $y_0$ ва $y_N$ бўлиши мумкин. Лекин $y_0 = y_{N=0}$, демак $y_1, y_2,..., y_{N-1}$лар нолга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, (1.2.4) система фақат тривал ечимга эга бўлиб, (1.2.3) система ягона ечимга эга.

***Айирмали ҳайдаш методи ва унинг турғунлиги.***

Бизга умумий кўринишдаги матрицага эга бўлган $N-$тартибли системани Гаусснинг номаълумларни йўқотиш методи билан ечишда $O(N^3)$ миқдорда арифметик амаллар бажарилиши маълум. Агар матрица унинг диагнолидан иборат бўлган (1.1.20) системани ечишга Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастурга мурожат қилсак, ЭҲМ $\mathrm{O}(N^3)$ миқдорда амал бажарилади. Аммо (1.1.20) системада нолдан фарқли элементлар миқдори $O(N)$. Шунинг учун ҳам $O(N^3)$ миқдоридаги амалдан $O(N)$ таси ***мазмундор амал*** бўлиб, қолган $O(N^3)$ таси ***мазмунсиз амалдир***, чунки улар нолни бирор сонга кўпайтириш (бўлиш) ва нолни нўлга қошиш (айириш)дан иборат. Демак, (1.1.20) системани Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастур ёрдамида ечиш ортиқча амал бажаришга олиб келиб, мақсадга мувофиқ бўлмайди.

Ўтган асирнинг эллигинчи йилларида бу нуқсонлардан қутилиш мақсадида уч диогналли матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун Гаусс методини шундай вариант ишлаб чиққиладики, у матрицанинг фақат нолдан фарқли элементлари устида амал бажарди. Бу вариант ***ҳайдаш методи*** деб номланади. Ҳайдаш методида арифметик амалларнинг сони $O(N)$ га тенг ҳозирги вақтда ҳайдаш методнинг ҳилма-хил вариантларга эга ва улар ҳилма-хил мақсадларни ечишга мўлжалланган.

Шундай қилиб

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = h^2 f_i, i = 1,2,...,N-1 \qquad (1.2.5)$$

айирмали тенгламалар системаси ва

$$y_0 = x_1 y_1 + v_1, \qquad y_N = x_2 y_{N-1} + v_2 \qquad (1.2.6)$$

чегаравий шартлар берилган бўлсин. Бу ерда $A_i, B_i, C_i, f_i, x_1, x_2, v_1, v_2$ берилган сонлар (1.2.5) системанинг ечимини қуйидаги

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} \cdot y_i + \beta_{i+1}, i = 0,1,...,N-1 \qquad (1.2.7)$$

кўринишида излаймиз, бу ерда $\alpha_{i+1}$ ва $\beta_{i+1}$ ҳозиргача номаълум сонлар (1.2.7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз.

$$y_i = \alpha_i \cdot y_{i-1} + \beta_i,$$

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1} = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i-1} + \alpha_{i+1}\beta_i + \beta_{i+1}$$

Бу ифодаларни (1.2.5) тенгламага қўйсак,

$$[A_i - \alpha_i (C_i - B_i \alpha_{i+1})] y_{i-1} + \beta_i (B_i \alpha_{i+1} - C_i) + B_i \beta_{i+1} + h^2 f_i ] = 0$$

келиб чиқади. Кўриниб турибдики, агар

$$A_i - \alpha_i (C_i - B_i \alpha_{i+1}) = 0, \quad \beta_i (B_i \alpha_{i+1} - C_i) + B_i \beta_{i+1} = h^2 f_i$$

тенгликда бажарилса, у ҳолда (1.2.5) тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, $\alpha_1$ ва $\beta_1$ ларни топиш учун ушбу рекуррент формулаларига эга бўламиз.

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{B_i \beta_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \qquad i = 1,2,...,N-1;$$

$\alpha_N$ ва $\beta_N$ миқдорларини эса (1.2.6) чегарвий шартлардан ва (1.2.7) тенгликда $i = N-1$ бўлганда ҳосил қиламиз.

$$\alpha_N = x_2, \qquad \beta_N = \vartheta_2$$

(1.2.7) формула ёрдамида ҳисоблашни бажариш учун $y_0$ нинг қийматини топиш керак, бу эса (1.2.6) чегарвий шартдан ва (1.2.7) тенгликдан $i = 0$ бўлганда ҳосил бўлади.

$$y_0 = \frac{x_1\beta_1 + \vartheta_1}{1 - x_1\alpha_1}$$

Шундай қилиб, (1.2.5)-(1.2.6) чегарвий масалани аниқ ечимини топиш учун ***хайдаш методи*** деб аталувчи алгебраик тенгламаларга эга бўламиз.

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{B_i\alpha_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}}, \\
&i = 1,2,\ldots,N-1; \qquad\qquad (1.2.8.) \\
&\alpha_N = x_2, \ \beta_N = \vartheta_2, \\
&y_{i+1} = \alpha_{i+1}y_i + \beta_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \\
&y_0 = (\vartheta_1 + x_1\alpha_1)/(1 - x_1\alpha_1)
\end{aligned}$$

Бу ерда $y_i$ лар чегаранинг чап нуқтасидан бошлаб кетма-кет топилади, шунинг учун ҳам (1.2.8) формулалар ***чапдан хайдаш*** формулалари дейилади. Шунга ўхшаш ***ўнгдан ҳайдаш*** формулаларини ҳам чиқариш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \xi_i A_i}, \eta_{i+1} = \frac{\eta_i A_i - h^2 f_i}{C_i - \eta_i A_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1; \\
&\xi_i = x_1, \eta_1 = \nu_1, \\
&y_i = \xi_{i+1}y_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad i = 0,1,2,\ldots,N-1; \\
&y_N = (\nu_2 + x_2\eta_N)/(1 - x_2\xi_N)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.9)$$

***Айрим ҳоллардан чапдан ва ўнгдан хайдаш методларининг комбинациясини олиб, қарама-қарши ҳайдаш методи деб айтувчи методни ишлатиш маъқулдир***.

**1-машқ. (1.2.9) ўнгдан ҳайдаш формулаларини исботлансин.**

Агар $\alpha_i$ коэффицентлар модули билан бирдан кичик бўлса, у ҳолда (1.2.8) <u>**ҳайдовчи формулалар**</u> ***турғун*** деб аталади. Бундай холда (1.2.7) рекуррент формулалар бўйича ҳисоблаш олиб борилганда келиб чиқадиган яхлитлаш хатолари ўсмайди.

**Т е о р е м а.** Агар қуйидаги шартлар

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ \ C_i \geq A_i + B_i,\ \ i = 1,2,...,N-1; \qquad 0 \leq x_1,\quad x_2 < 1 \tag{1.2.10}$$

бажарилса, у ҳолда ҳайдашни бажариш мумкин ва турғун бўлади.

**И с б о т и.** Ҳақиқатдан ҳам, $0 \leq \alpha_N = x_2 < 1$ эканлиги теорема шартидан келиб чиқади. Фараз қилайлик $0 \leq \alpha_{i+1} < 1$ бўлсин, у ҳолда

$$0 < \alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\alpha_{i+1}} = \frac{A_i}{(C_i - B_i - A_i) + A_i + (1-\alpha_{i+1})B_1} < 1$$

бўлади, чунки сурат ва маҳражнинг ҳадлари мусбат бўлиб маҳраж суратдан катта. Шундай қилиб, барча $i < 1,2,...,N-1$ учун $0 < \alpha_i < 1$. Энди $0 \leq x_i < 1$ шарт $0 < \alpha_1 < 1$ шарт билан бирга $y_0$ ни аниқлайдиган формуладан махражнинг нолдан фарқлилигини таъминлайди. Шуни исбот қилиш керак эди.

**Э с л а т м а.** Шуни ҳам таъкидаш керакки, $x_i$ га қўйилаган шартларни юмшатиш мумкин. Масалан, агар (1.2.10) шартлар ўрнига ушбу

$$A_1 > 0,\ B_1 > 0,\ C_i \geq A_i + B_i, \qquad C_i \neq A_i + B_i, \tag{1.2.11}$$
$$0 \leq x_1,\ x_2 < 1,$$

ёки
$$A_i > 0, B_i > 0,\quad C_i \geq A_i + B_i, 0 \leq x_1, x_2 < 1, \tag{1.2.12}$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$

шартлар бажарилса, у ҳолда теореманинг тасдиғи ўринлигича қолади.

***Чекли айирмали методнинг яқинлашиши.***

Асосий ғоя тушунарли бўлиши учун чегаравий шарти энг содда бўлган ушбу чегаравий масалани қараймиз.

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\quad u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2 \tag{1.2.13}$$

Олдингидек фараз қилайлик, $u(x)$ ечим $[a,b]$ га тўғрилиги тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда (1.1.6), (1.1.7) формуладан

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=u''(x_i)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i+\theta h),\quad |\theta|<1,$$
$$\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{2h}=u'(x_i)+\frac{h^2}{6}u'''(x_i+\theta_1 h),\quad |\theta_1|<1$$

ҳосил бўлади. Энди.

$$\wedge(z_i)\equiv A_i z_i - c_i z_i + B_i z_{i+1}$$

деб оламиз, бу ерда $A_i, C_i, B_i$ коэффицентлар (1.1.19)формулалар билан аниқланади.

Фараз қилайлик, $u(x)-$чегарвий масалаларнинг изланаётган ечими бўлсин. У ҳолда қуйидаги ифодаларни (1.1.2)га қўйсак,

$$\frac{1}{h^2}\wedge\left(u(x_i)\right)=f_i+R_i \qquad (1.2.14)$$

ҳосил бўлади, бу ерда $f_i=f(x_i)$,

$$R_i=\frac{h^2}{12}\left[u^{IV}(x_i+\theta h)+2p(x_i)u'''\left(x_i+\theta_1 h\right)\right]$$

Аммо $A_i, C_i, B_i$коэффицентлар $f_i$ни яхлитлаш билан ҳисобланади, шунинг учун ҳам реал ҳисобланади $y_i$ лар ўринга $\tilde{y}_i$тақрибий қийматлар

$$\frac{1}{h^2}\wedge\left(\tilde{y}_i\right)=f_i-\alpha_i,\quad i=1,2,...,N-1,\qquad \tilde{y}_0=\gamma_1,\quad \tilde{y}_N=\gamma_2 \qquad (1.2.15)$$

муносабатларни қаноатлантиради, бу ерда $\alpha_i$ яхлитлаш ҳисобдан хосил бўлган хатолик. Ечимнинг аниқ қиймати билан унинг тақрибий қиймати орасидаги фарқи

$$\varepsilon_i=u(x_i)-\tilde{y}_i$$

деб белгилаймиз, $|\varepsilon_i|$ни баҳолаймиз ва қайси ҳоллардан яқинлашишини аниқлаймиз. Энди (1.2.14), (1.2.15) формулалардан фойдаланиб $\varepsilon_i$ни аниқлаш учун

$$\wedge\left(\varepsilon_i\right)=h^2\left(R_i+\alpha_i\right),\qquad i=1,2,...,N-1$$
$$\varepsilon_0=0, \varepsilon_N=0 \qquad (1.2.16)$$

системага эга бўламиз.

Биз $|\varepsilon_i|$ ни баҳолаш учун шундай $V_i(x)$ функция кўрамизки, у $|\varepsilon_i|$ учун мажоранта бўлсин, яъни

$$|\varepsilon_i| \le V(x_i), \quad V(x) \ge 0$$

Мажоранта қуриш учун шундай леммадан фойдаланамиз: Фараз қилайлик, $t_0, t_1, ..., t_N$, ва $T_0, T_1, ..., T_N$ $(T_i \ge 0)$ қандайдир сонлар бўлсин.

**Лемма (мажоранта ҳақида).** Фараз қилайлик, қуйидаги шартларни бажарилсин:

1) $\frac{h}{2}\max|p(x)| < 1;$

2) $q(x) \le 0$;

3) $\wedge(T_i) \le -|\wedge(t_i)|, \quad i = 1,2,...,N-1;$

4) $|t_0| \le T_0, \quad |t_N| \le T_N$

У ҳолда $|t_i| \le T_i, i = 1,2,...,N-1$

**Исботи:** Ушбу $t_1 + T_i$ йиғиндини қараймиз. Лемманинг учунчи шартига кўра

$$\wedge(t_1 + T_i) = \wedge(t_i) + \wedge(T_i) \le 0$$

Максимум принципи ҳақидаги леммага кўра $t_1 + T_i$ сонлар орасида энг кичик қийматини $t_0 + T_0$ ёки $t_N + T_N$ қабул қилиш мумкин. Лемманинг тўртинчи шартига кўра бу сонлар манфий эмас, демак, барча $i$ учун $t_1 + T_i \ge 0$. Шунга ўхшиш $t_1 - T_i \ge 0$эканлигини кўрсатиш мумкин. Охирги иккита тенгсизлик кўрсатиш мумкин. Охирги иккита тенгсизлик кўрсатадики, $-T_1 \le t \le T_i$ ёки $|t_i| \le T_i$. Лемма исботланади.

Энди ёрдамчи масалани қараймиз:

$$\begin{aligned} &L(u)^0 V'' + p(x)V' + q(x)V = -1 \\ &V(a) = 0, \ V(b) = 0 \end{aligned}$$

ва унинг ечимини $\tilde{V}(x)$деб белгилаймиз. Барча $a < x < b$ учун $\tilde{V}(x) > 0$ эканлиги кўрсатамиз. Ҳақиқатан хам, агар $(a,b)$ га $V(x) \le 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар топилса, у ҳолда $V(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлганлиги учун шу оралиқнинг бирор $\xi$ нуқтасида унинг мусбат бўлмаган минимумига эришади. Бу ҳолда $\tilde{V}''(\xi)\geq 0, \tilde{V}'(\xi)=0, \tilde{V}(\xi)<0$ ва $q(\xi)\leq 0$ бўлганлиги учун биз $L\left(\tilde{V}(\xi)\right]\geq 0$ тенгсизликка эга бўлар эдик. Бу эса қарама қаршиликка олиб келади, чунки $\tilde{V}(x)$ функция $L\left(\tilde{V}\right)=-1$ тенгламанинг ечимидир. Демак, барча $xe(a,b)$ учун $\tilde{V}(x)>0.$

Энди

$$W(x)=\tau V(x)$$

функцияни киритиб $\tau$ мусбат параметрни шундай тенглаймизки, $W(x_i)$ сонлар $|\varepsilon_i|$ лар учун мужоранта бўлсин. Бунинг учун $u(x)$ функция $L(u)=f(x)$ тенгламанинг ечими деб фараз қилиб (1.2.14) формулани

$$\frac{1}{h^2}\wedge[u(x_i)]=L[u(x_i)]+R_i(u)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шунга ўхшаш $W(x)$ учун

$$\frac{1}{h^2}\wedge(W(x_i))=L(W(x_i))+R_i(W)=-\tau+R_i(W)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$R_i(W)=\frac{\tau h^2}{12}\left[W^{IV}(x_i+\theta h)+2p(x_i)W'''(x_i)+\theta_1 h\right],\quad |\theta|<1, |\theta_1|<1$$

Демак,

$$\wedge(W(x_i))=-\tau h^2\left[1-\frac{h^2}{12}W^{IV}(x_i+\theta h)-2p(x_i)W'''(x_i+\theta_1 h)\right] \qquad (1.2.17)$$

Қуйидаги белгиларни киритамиз

$$p=\max_{a\leq x\leq b}|p(x)|,\qquad M_3=\max_{a\leq x\leq b}|W'''(x)|,$$

$$M_4=\max_{a\leq x\leq b}\left|W^{IV}(x)\right|,\qquad M=\frac{1}{12}M_4+\frac{1}{6}pM_3$$

Буларни эътиборга олиб, (1.2.17)дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\wedge(W(x_i))\leq -\tau h^2\left(1-h^2M\right),\ i=1,2,...N-1,\qquad W(x_0)=W(x_N=0) \qquad (1.2.18)$$

Энди (1.2.16) дан кўрамизки,

$$\left|\wedge(\varepsilon_i)\right| \le h^2\left(h^2\tilde{M} + \delta\right),\ i = 1,2,\dots,N-1 \qquad (1.2.19)$$

бунда $\tilde{M} = \frac{1}{12}\tilde{M}_4 + \frac{1}{6}p\tilde{M}_3,\ \tilde{M}_3 = \max\limits_{a\le x\le b}\left|u'''(x)\right|,\ \ \tilde{M}_4 = \max\limits_{a\le x\le b}\left|u^{IV}(x)\right|,\ |\alpha_i| \le \delta$

Агар биз $\tau$ параметрирни

$$\wedge\left(W(x_i)\right) \le -xV|\varepsilon_i|$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак, у ҳолда $\varepsilon_i = \varepsilon_N = 0$ ҳисобга олинганда мажоранти ҳақидаги леммани қўллашимиз мумкин. Бунинг учун (1.2.18) ва (1.2.19) тенгсизликларга кўра $-\tau h^2\left(1 - h^2M\right) \le -h^2\left(h^2M + \delta\right)$ ёки $\tau \ge \frac{\tilde{M}h^2}{1 - Mh^2} + \frac{\delta}{1 - Mh^2}$

Шундай тенгсизликларни қаноатлантирадиган $\tau$ учун 2-лемма

$|\varepsilon_i| \le W(x_i) = \tau \vee (x_i)$

ёки

$$|\varepsilon_i| \le \left(\frac{\tilde{M}h^2}{1 - h^2M} + \frac{\delta}{1 - h^2M}\right)\vee(x_i),\ \ i = 0,1,\dots,N \qquad (1.2.20)$$

баҳога эга бўламиз; $[a,b]$ оралиқда $V(x)$ узлуксиз бўлганлиги учун у чегаралангандир.

Шунинг учун хам, агар $h \to 0$ га $\delta \le \delta_0 h^2$ бўлса, у ҳолда (1.2.20) тенгсизлигидан $\varepsilon(h) = \max\limits_{0\le i\le N}|\varepsilon_i| = 0\left(h^2\right)$ қилиб чиқади.

**Т е о р е м а:** Фараз қилайлик

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\ \ u(a) = \gamma_1,\ \ \ u(b) = \gamma_2$$

чегарваий масаланинг $u(x)$ ечими $[a,b]$ оралиқда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин ва қуйидаги шартлар бажарилса.

1) $\frac{h}{2}\max|p(x)| < 1,$ 2) $q(x) < 0$, 3) $\delta \le \delta_0 h^2$

у ҳолда қаралаётган чегаравий масала учун айирмали метод $O\left(h^2\right)$ аниқликда текис яқинлашади.

**Э с л а т м а:** Агар $\alpha_0\alpha_1 \le 0$ ва $\beta_0\beta_1 \ge 0$ тенгсизликлар уринли бўлса, теорема (1.1.1) ва (1.1.3) чегарвий масала учун ҳам ўринли бўлади.

Бу ва бунга ўхшаш теремаларнинг нуқсони шундай иборатки унга номаълум ечимнинг учига ва тўртинчи ҳосилари қатнашади. Одатда, бу ҳосилаларни баҳолаш оғир масала. Шунинг учун бу теорема фақат назарий аҳамиятга эга.

**Мисол №2** $y''-2xy'-2y=-4x,\ \ y(0)-y'(0)=0,\ y(1)=3{,}71828$ чегаравий масаланинг $x_i=0{,}1i\left(i=\overline{1;10}\right)$ нуқталардаги ечими хайдаш усулда қўлланилиб топилсин ва натижа $u(x)=1+e^{x^2}$ аниқ ечимининг қийматлари билан солиштирилсин.

Ечиш: Масалани тўр масаласига келтирамиз

$$\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{h^2}-2x_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-2y_i=-4x_i$$

ёки

$$\begin{cases} y_{i+1}-2(1-x_ih)y_{i+1}+\left(1+2x_ih-2h^2\right)y_i=-4x_ih^2, \\ y_0-\dfrac{y_1-y_0}{h}=0,\ \ y_{10}=3{,}71828,\ \ h=0{,}1 \end{cases}$$

Бунда $\alpha_0=1,\ \alpha_1=-1,\ A=0,\ \beta_0=1,\ \beta_1=0,\ B=3{,}71828,\ m_i=-\alpha(1+0{,}1x_i),$

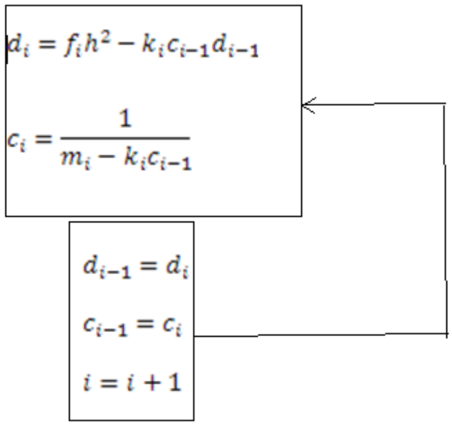
$\kappa_i=0{,}98+0{,}2x_i,\ f_i=-4x_i,\ x_i=0{,}01i,\ i=\overline{0;10}$

Тўғри юриш: жадвалга $i=\overline{0;8}$ учун $x_i, m_i, \kappa_i, f_ih^2$ қийматларни киритамиз. Ҳисоблаш схемаси: $x_i=x_{i-1}+0{,}1;\ m_i=m_{i-1}-0{,}02,\ \ \kappa_i\ \ \kappa_{i-1}+0{,}02,$ $f_ih^2=f_{i-1}h^2-0{,}004$(жадвалнинг 1-5-устунлари); $c_0$ ва $d_0$ ларни ҳисоблаймиз.

$$c_0=\frac{\alpha_1-\alpha_0h}{m_0(\alpha_1-\alpha_0h)+k_0\alpha_1}=\frac{-1{,}1}{-2(-1{,}1)-0{,}98}=-0{,}90164$$

$$d_0=\frac{k_0Ah}{\alpha_1-\alpha_0h}+f_0h^2=0$$

Қолган $d_i, c_i\left(i=\overline{1;8}\right)$ киймтларни ҳисоблаш схемаси (6-7) устунлар:




| $i$ | $x_i$ | $m_i$ | $k_i$ | $f_i \cdot h^2$ | Тўғри юриш | | Тескари юриш | Контроль $y(x)$ аниқ қуйидаги |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **(1)** | **(2)** | **(3)** | **(4)** | **(5)** | **(6)** | **(7)** | **(8)** | **(9)** |
| 0 | 0,0 | -2 | 0,98 | 0 | 0 | -0,90164 | 1,11785 | 1,00000 |
| 1 | 0,1 | -2,02 | 1 | -0,004 | -0,004 | -0,89413 | 1,22963 | 1,11005 |
| 2 | 0,2 | -2,04 | 1,02 | -0,008 | -0,01165 | -0,88653 | 1,36377 | 1,24081 |
| 3 | 0,3 | -2,06 | 1,04 | -0,0012 | -0,02274 | -0,87873 | 1,52125 | 1,39417 |
| 4 | 0,4 | -2,08 | 1,06 | -0,0016 | -0,03718 | -0,87067 | 1,70431 | 1,57351 |
| 5 | 0,5 | -2,10 | 1,08 | -0,0020 | -0,05496 | -0,86231 | 1,91678 | 1,78403 |
| 6 | 0,6 | -2,12 | 1,10 | 0,0024 | -0,07613 | -0,86364 | 2,16432 | 2,03333 |
| 7 | 0,7 | -2,14 | 1,12 | 0,0028 | -0,10079 | -0,84465 | 2,45494 | 2,33232 |
| 8 | 0,8 | -2,16 | 1,14 | 0,0032 | -0,12905 | -0,83535 | 279972 | 2,79648 |
| 9 | 0,9 | | | | | | 3,21387 | 3,14791 |
| 10 | 1 | | | | | | 3,71828 | 3,71828 |

Тескари юриш $y_{10} = \frac{\beta_1 c_8 d_8 + Bh}{\beta_1(1+c_8)+\beta_0 h} = \frac{Bh}{\beta_0 h} = B = 3{,}71828$. Қолган $y_i (i = 9,8,\ldots,1)$ қийматлар $y_i = c_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$лардан фойдаланиб топилади: $y_0 = 1{,}11785$ (8-устун). Контрол мақсадида (9) устунда аниқ ечим $y = x + e^{x^2}$ нинг қийматлари келтирилган

## § 1. 3. Чекли айирмали метод ёрдамида иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган чегаравий масалаларни ечиш

Қуйидаги чизиқли бу леммадан

$$u''=f(x,u,u,u') \qquad (1.3.1)$$

дифференциал тенгламага ва

$$\alpha_0 u(\alpha)-\alpha_1 u'(a)=\gamma_1, \quad \beta_0 u(b)-\beta_1 u'(b)=\gamma_2 \qquad (1.3.2)$$

чегарвий шартлар белгиланган бўлсин, бунда $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ бир хил ишорага эга. Шу билан бирга, фараз қилайлик $f(x,y,z)$ функция $Oxyz$ фазонинг $y$ ва $z$ ларга нисбатан қаварик бўлган бирор $G$ соҳасида узлуксиз функция бўлсин.

Олдингидек $x_i=a+ih$ $(i=0,1,...N, \ (b-a)h=N)$ турғунлар ёрдамида $[a,b]$ ораликни $N$ га тенг бўллака бўлиб, (1.3.1) тенглама ва (1.3.2) чегарвий шартларни тақрибий равишда алмаштириб, $(N+1)$ та $y_0, y_1,...., y_N$ номаълумларга нисбатан ушбу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=f\left(x_i.y_{i,}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right), i=1,2,...,N-1 \\ &\alpha_0 y_0-\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1,\ \beta_0 y_N+\frac{\beta_1-y_{N-1}}{h}=\gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.3)$$

$(N+1)$ та чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\left.\begin{aligned} &R_0(y)=\alpha_0 y_0-\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}, \\ &R_N(y)=\beta_0 y_N-\beta_1\frac{y_N-y_{N-1}}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.4)$$

Юқоридаги (1.3.3) системасини ечиш учун интерация методини қуйидаги схема бўйича қўллаймиз.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y_{i+1}^{(j+1)}-2y_i^{(j+1)}+y_{i-1}^{(j+1)}}{h^2}=f\left(x_i.y_{i,}\frac{y_{i+1}^{(j)}-y_{i-1}^{(j)}}{2h}\right),\\&i=1,2,...,N-1,\qquad R_N\left[y^{(j+1)}\right]=\gamma_2\\&R_0\left[y^{j+1}\right]=\gamma 1\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.5)$$

Бу ерда юқоридаги $j$ интекис интерациясининг номерини билдиради. Интерациянинг ҳар бир қадамида чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Бу система махсус кўринишга эга бўлгани учун унинг ечимини ошкор кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned}&y_i^{(j+1)}=\frac{h}{\Delta}\left[\beta_0\gamma_1(b-a)+\beta_1\gamma_1+\alpha_1\gamma_2\right]+\\&+\frac{i}{\Delta}(\alpha_0\gamma_2-\beta_0\gamma_1)+h^2\sum_{\kappa=1}^{N-1}g_{ik}f_\kappa^{(j)},\qquad(1.3.6)\\&f_\kappa^{(j)}=f\left(x_\kappa,y_\kappa^{(j)},\frac{y_{\kappa-1}^{(j)}-y_{\kappa-1}^{(j)}}{2h}\right)\end{aligned}$$

бунда $a,b,\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1,\gamma_1,\gamma_2$ – маълум сонлар бўлиб, $\Delta$ ва $g_{i\kappa}$ қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\begin{aligned}&\Delta=\frac{1}{h}\left[\alpha_0\beta_0(a-b)+\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0\right],\\&g_{i\kappa}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}\left(i\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(\kappa\beta_0-\beta_1N-\dfrac{\beta_1}{h}\right)(i\le\kappa)\\\dfrac{1}{\Delta}\left(\kappa\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{h}\right)\left(i\beta_1-\beta_0N-\dfrac{\beta_1}{h}\right)(i\ge\kappa)\end{cases}\qquad(1.3.7)\end{aligned}$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, (1.3.7) формулада $g_{i\kappa}$лар интерация номлари боғлиқ эмас, шунинг учун уларни бир марта ҳисоблаб қўшиш кифойядир.

Қаралаётган методнинг яқинлашишини текшириш анча мураккаб бўлиб, $R(x,y,z)$ функция $G$ соҳага $y$ ва $z$ ларга нисбатан

$$\left|R(x,y,z)-f(x,\bar{y},\bar{z})\right|\le\alpha_1|y-\bar{y}|+\alpha_2|z-\bar{z}|$$

Кимпиц шартини қаноатлантирадиган ҳол учун бундай тадқиқот.

## II- БОБ. ПАРАБОЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР.

### § 2. 1.Икки тартибли айирмали схемалар.

Фараз қилайлик $G=\{0<x<l,\ 0<t<T\}$ соҳада ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (2.1.1)$$

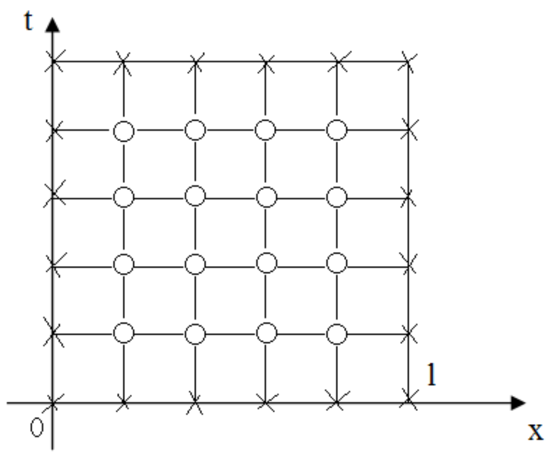
параболик тенгламанинг

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad (2.1.2)$$

дастлабки шарт ва

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l)=\mu_2(t) \qquad (2.1.3)$$

чегаравий шартларни қаноатлавчан $u(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинсин. Бу ерда $u_0(x),\mu_1(t),\mu_1(t)$ берилган функциялар. Маълумки, (2.1.1)-(2.1.3) масаланинг барча керакли ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.




**1-чизма**

Айирмали схема кўриш учун $G$ созани $x$ ва $t$ координаталар бўйича мос равишда $h=\frac{l}{M}$ ва $\tau\frac{T}{N}$ тўғри тўрри бурчак тўртбурчак тўр билан қолмаймиз. (1-чизма) кейин $\overline{G}_{h,\tau}=\left\{ih,\tau\kappa),\ i=\overline{OM},\ \kappa=\overline{ON}\right\}$ тўр соҳанинг $(i,\kappa)=(ih,\tau\kappa)$ тугунларида аниқланган $v^{(h)}$ функцияни қидирамиз, $v^{(h)}$

функция $u$ функциянинг $\overline{G}_{h,\tau}$ тўрда аниқланган $y(x,t)$, функция учун $y_i^\kappa = y(x_i, t_\kappa)$ белгилаш киритамиз.

Энди (2.1.1) тенгламани аппроксилация қилиш учун $\frac{\partial u}{\partial t}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ҳосилаларни $(ih, \kappa\tau)$ нуқтада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(ih,\kappa\tau)} \approx \frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^\kappa}{\tau}, \tag{2.1.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(ih,\kappa\tau)} \approx \frac{y_i^{\kappa} - y_i^{\kappa+1}}{\tau}, \tag{2.1.5}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}\right|_{(ih,\kappa\tau)} \approx \frac{y_{i-1}^\kappa - 2y_i^\kappa + y_{i+1}^\kappa}{h^2}, \tag{2.1.6}$$

тақрибий формулалар билан алмаштирамиз. Айирмали масалани ҳосил қилиш учун (2.1.4) билан (2.1.6)ни (2.1.1) ва (2.1.3) дастлабки чегарвий шартларни аппроксамация қиламиз. Натижада қўлидаги айирмани масала ҳосил бўлади.

$$\frac{y_i^{\kappa-1} - y_i^k}{\tau} = \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2} + \varphi_i^k \tag{2.1.7}$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$y_0^k = \mu_1(t_k),\ y_M^k = \mu_2(t_k),\ k = \overline{O, N} \tag{2.1.8}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{O, M}$$

Агар (2.1.6) га $k$ ни $(k+1)$га алмаштириб, натижани ҳамда (2.1.4)ни (2.1.1) тенгламага қўйсак, қуйидаги айирмали масалага эга бўламиз:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{\tau} = \frac{2y_{i-1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1} + y_{i+1}^{\kappa+1}}{h^2} + \varphi_i^{k+1} \qquad i = \overline{1, M-1}, k = \overline{0, N-1} \tag{2.1.9}$$

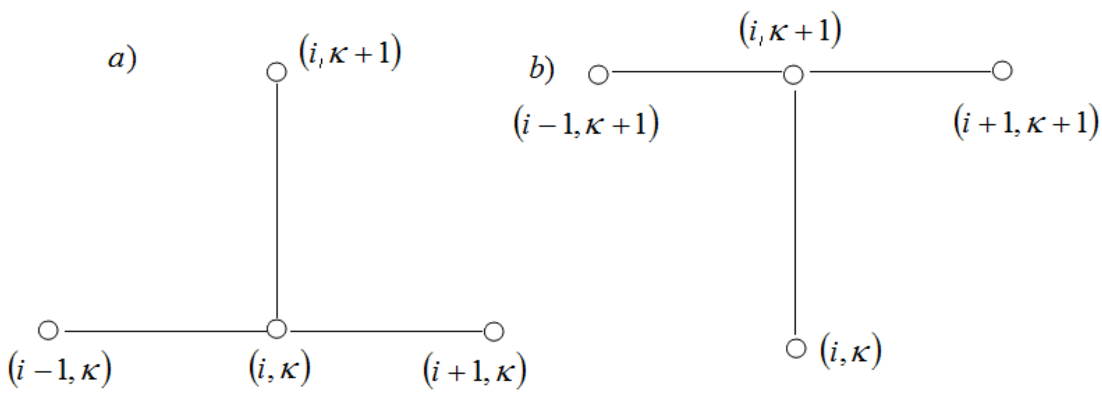
$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}),\ y_M^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}), k = \overline{O, N-1} \qquad y_i^0 = u_0(x_i),\ i = \overline{O, M} \tag{2.1.10}$$

Бу ерда $\varphi_i^k$ сифатида қуйидаги ифодаларни бирортасини олиш мумкин.

$$f(x,t),\frac{1}{h}\int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} f(x,t_k)dx,\ \frac{1}{h\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} f(x,t)dx$$

Шундай қилиб, (2.1.1)-(2.1.3) параболик тенгламаларнинг аппроксимацияси сифатида биз (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9) айирмали тенгламаларга эга бўлсин.

бирор $Lu = f$ дифференциал масаланинг $(x_i, t_k)$ тугунда $Ly(u^{(h)}) = f^h$ айирмали масала билан алмаштиришда иштирок этилган тўпламни андаза дейилади. Юқоридаги (2.1.8) ва (2.1.9) айирмали схемалар 2-чизмага кўрсатилган андазаларга мос қилади.




**2-чизма**

а) икки қатламли ашкор схема,

в) икки қатламли соф ошкормас схема.

Энди (2.1.7) ва (2.1.8) айирмали схеманинг аппроксимацияси тартибини аниқлаймиз. Равшнки,

$$\frac{u(x,\kappa,\tau+\tau)-u(x,\kappa\tau)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{(x,\kappa\tau)} + \frac{\tau\partial^2 u}{2\partial t^2}\bigg|_{(x,\kappa\tau+\xi)}, 0 \le \xi \le \tau,$$

$$\frac{u((i-1)h,t)-2u(ih,t)+u((i+1)h,\tau)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(ih,t)} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\bigg|_{(ih,+\eta,t)}, 0 \le \eta \le h.$$

Ушндай учун ҳам

$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau}-\frac{u(x-h,t)-2u(x,t)+u((x+h,t))}{h^2}-\varphi(x,t)=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{(x,t+\xi)}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{(x+\eta,t)}-\varphi(x,t)=f(x,t)-\varphi(x,t)+0(\tau+h^2)$$

Агар $\varphi_i^k=f(ih,\kappa\tau)$ деб олсак, у ҳолда (2.1.7), (2.1.8) айирмали масала аппроксимация ҳатолигининг тартиби $0(\tau+h^2)$ бўлади, чунки дастлабки ва чегаравий шартлар аниқ бажарилади. Шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, (2.1.1)-(2.1.3) масаланинг (2.1.9), (2.1.10) айирмали схема билан аппроксимациясининг тартибли $0(\tau+h^2)$.

Шуни айтиш керакки, (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9), (2.1.10) схемалар (2.1.1)-(2.1.3) тенгламани бир хил холати билан аппроксимация қилишса ҳам, улар ўртасида катта фарқ бўр. Ҳақиқиатдан ҳам, (2.1.7)дан қуйидаги муносабат келиб чиқади.

$$y_i^{k+1}=y_i^k+\frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^k-2y_k^k-y_{i+1}^k\right) \qquad (2.1.11)$$

$y_i^0\left(i=\overline{O,M}\right)$ маълум бўлганидан бирин-кетин барча $y_i^1\left(i=\overline{1,M-1}\right)$ ва ҳаказоларни топиш мумкин. Шундай қилиб, $u^{(h)}$ функцияларни (2.1.11) формула бўйича ошкор равишда топиш мумкин. Шунинг учун хам (2.1.7), (2.1.9) схема ошкор дейилади.

Энди (2.1.8) тенгламани ўзгартириб, қуйидагича ёзамиз.

$$-\frac{\tau}{h^2}y_{i-1}^{\kappa+1}+\left(1+\frac{2\tau}{h^2}\right)y_i^{\kappa+1}-\frac{\tau}{h^2}y_{i+1}^{\kappa+1}=y_i^{\kappa}+\tau\varphi_i^{\kappa+1},\ i=1,2,...,M-1, \qquad (2.1.12)$$

$$y_0^{\kappa+1}=\mu_1^{\kappa+1}\equiv\mu_1((\kappa+1)\tau),\qquad y_M^{\kappa+1}=\mu_2^{\kappa+1}\equiv\mu_2((\kappa+1)\tau),$$

Барча $y_i^{\kappa}\left(i=\overline{1,M-1}\right)$ маълум бўлганида бу мунсабатлар $y_i^{\kappa+1},\ i=\overline{M-1}$ номаълумларга нисбатан чизиқ алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Шунинг учун ҳам (2.1.9), (2.1.10) схема ошкормас дейидали. (2.1.12) системани қуйидагича ёзиш тмумкин.

$$A\vec{y}=\vec{b}$$

бундай $\vec{y}=\left\{y_1^{\kappa+1},...,y_{M+1}^{\kappa+1}\right\}$-номаълум вектор,

$$A=\begin{bmatrix} 1+\frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & 0 & ... & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{h^2} & 1+\frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1+\frac{1\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & -\frac{\tau}{h^2} & 1+\frac{2\tau}{h^2} \end{bmatrix}$$

$\vec{b}$ векторнинг координаталари эса

$$b_j=\begin{cases} y_1^{\kappa}+\tau\varphi_1^{\kappa+1}+\frac{\tau}{h^2}\mu_1^{\kappa+1},\ j=1, \\ y_1^{\kappa}+\tau\varphi_1^{\kappa+1}, \quad 2\le j\le M-2, \\ y_{M-1}^{\kappa}+\tau\varphi_{M-1}^{\kappa+1}+\frac{\tau}{h^2}\mu_2^{\kappa+1},\ j=M-1 \end{cases}$$

*A* матрица  уч диагналли бўлганлиги учун (2.1.13) ҳайдаш методи билан ечиш мумкин.

Энди (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9), (2.1.10) схемалар ўз ичига олган умумий схемани қўриб чиқамиз.

Ушбу

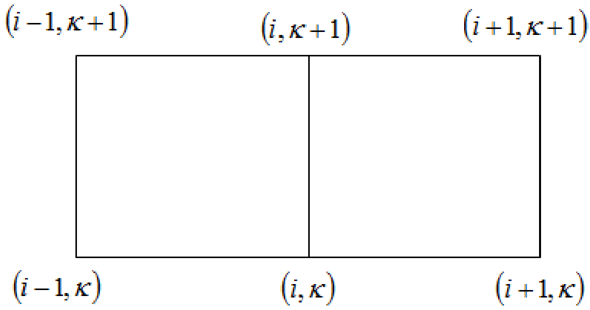
$$\Delta v_1=\frac{1}{h^2}\left(v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}\right),\quad \Delta u\Big|_{(x,t)}=\frac{1}{h_2}\left[\left(u+h,t\right)-2u\left(x,t\right)+u\left(x-h,t\right)\right]$$

белгиланишни киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{\kappa-+1}-y_i^{\kappa}}{\tau}=\tau\Delta y_i^{\kappa-1}+\left(1-\tau\right)\Delta y_i^{\kappa}+\varphi_i^{\kappa},\quad \kappa=\overline{1,M-1} \qquad (2.1.14)$$

Бу схемада $\tau\in[0,1]$ ўзгармас сон вазн дейилади. Хусусий ҳолда (2.1.14)дан $\tau=0$га $\tau=1$ га (2.1.9) келиб чиқади. (2.1.14) ва (2.1.8) схема вазний схема дейилади. Бу схема фақат $\tau=0$ бўлгандагина ошкор бўлади. $0<\tau<1$ бўлганда эса ошкормас бўлади. (2.1.9), (2.1.10) схема бошқа ошкормас схемалардан фарқ қилиши учун соф ошкормас ошкормас дейилади. Агар $\tau = \frac{1}{2}$ бўлса, биз қуйидаги олти нуқтали симметрик схема деб аталувчи схемани ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\Delta y_i^{\kappa+1} - \Delta y_i^{\kappa}\right) + \varphi_i^{\kappa} \qquad (2.1.15)$$




**3-чизма**

Бу схема 3-чизмадаги олти нуқтали андоза бўйича тузилади.

Энди (2.1.1)-(2.1.3) дифференциални (2.1.14) айирмали схема билан аппроксимация қилганда ҳосил бўладиган хатоликни аниқлаймиз. Бунинг учун (2.1.14) масаланинг ечимини $y_i^{\kappa} = u(x_i, t_{\kappa}) + z_i^{\kappa}$ кўринишида ёзамиз, бу ерда $u(x,t)$ функция (2.1.1), (2.1.3) дифференциал масаланинг аниқ ечими. Хатолик учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\frac{z_i^{\kappa+1} - z_1^{\kappa}}{\tau} = \tau\Delta z_i^{\kappa+1} + (1-\tau)\Delta z_i^{\kappa} + z_i^{\kappa}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{0, N-1} \qquad (2.1.16)$$

$$z_0^{\kappa+1} = z_N^{\kappa+1} = 0, \quad \kappa = \overline{0, N-1},\ z_i^0 = 0,\ i = \overline{O, M}$$

Унг томонга қатнамайдиган $\tau_i^{\kappa}$ тўрдаги функция қуйидагига тенг.

$$\tau_i^{\kappa} = -\frac{u(x_i, t_{i+1}) - u(x_i, t_{\kappa})}{\tau} = \tau\Delta u\Big|_{(x_i, t_{\kappa+1})} + (1+\tau)\Delta u\Big|_{(x_i, t_{\kappa})} + \varphi_i^{\kappa} \qquad (2.1.17)$$

Бу функция (2.1.1), (2.1.3) масала ечимидаги (2.1.14) схема аппроксимациясининг хатолигидир. Бу хатолик тартибини аниқлаш учун (2.1.17) ифодага қатнашадиган барча функцияларни $(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)$ нуқта атрофида Тейлер қаторига ёяамиз.

$$\frac{u(x_i,t_{\kappa+1})-u(x_i,x_\kappa)}{\tau}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_i,t_\kappa+\tau/2}+\frac{\tau^2}{24}\cdot\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{(x_i,t_k+\xi)}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_i,t_k+\tau/2)}+0(\tau^2);$$

$$\left.\Delta u\right|_{(x_i,t_k+\tau)}=\left.\Delta u\right|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}+\frac{\tau}{2}\Delta\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}++0(\tau^2)=$$

$$=\left.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\tau}{2}\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}+0(\tau^2+h^2).$$

Шунга ўхшаш

$$\Delta u=\Bigg|_{(x_i,t_k)}=\left.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\tau}{2}\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}+0(\tau^2+h^2).$$

Бу ифодаларни (2.1.17) га қўйчак,

$$\tau_i^\kappa=\left.\left[-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tau\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}+\varphi_i^\kappa+0(\tau^2+h^2).$$

ни ҳосил қиламиз. Энди

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

дан фойдалансак, у ҳолда

$$r_i^\kappa=\varphi_i^\kappa-f(x_i,t_\kappa+\tau/2)+\tau\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\Delta\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_i,t_\kappa+\tau/2)}+0(\tau^2+h^2)$$

келиб чиқади. Демак, $\varphi_i^\kappa=f(x_i,t_\kappa+\tau/2)$ деб олсак, у ҳолда $r_i^\kappa=0(\tau+h^2)$, агар $t\neq 0{,}5$ бўлса ва $r_i^\kappa=0(\tau^2+h^2)$, агар $\tau=0{,}5$ бўлса.

Шундай қилиб, (2.1.15), олти нуқтали симметрик схема $\left(\tau=\frac{1}{2}\right)$ учун $r_i^\kappa=0(\tau^2+h^2)$..

**Мисол** $\tau=0.5$ бўлган ҳол учун.

$u_i,j+1=(1-2\tau)u_{ij}+\tau(u_{i+1},j)$ (1) тенгламадан фойдаланиб,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=sin\pi x\ (0\leq x\leq 1),\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ (0\leq t\leq 0{,}025)$$

масала йечилсин.

Ечиш. $x$ аргумент бўйича қадам $x=0{,}1$ бўлсин,

$$\tau = \frac{l}{h^2} = 0{,}5$$

Шунга кўра $t$ аргумент бўйича қадам $l = 0{,}5h^2 = 0{,}005$ бўлади. Чегара қийматлари симметрик . Шу сабабли жадвалга $x = 0; 0{,}1; 0{,}2; \dots; 0{,}5$ га мос қийматларни киритамиз. Ҳисоблашлар

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$$

формула бўйича бажарилади. Ҳисоблашлардан намуналар:

$j = 0$ учун

$$u_{11} = 0{,}5(u_{20} + u_{00}) = 0{,}5(0{,}5878 + 0) = 0{,}2939, u_{21} = 0{,}5(u_{30} + u_{10}) = 0{,}5(08090 + 0{,}3090) = 0{,}5590$$

Бу мисолга тўпламлар усули

| ж | х / т | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0,3090 | 0,5878 | 0,8090 | 0,9511 | 1,0000 |
| 1 | 0,005 | 0 | 0,2939 | 0,5590 | 0,7699 | 0,9045 | 0,9511 |
| 2 | 0,010 | 0 | 0,3795 | 0,5316 | 0,7318 | 0,8602 | 0,2045 |
| 3 | 0,015 | 0 | 0,2658 | 0,5056 | 0,6959 | 0,8182 | 0,8602 |
| 4 | 0,020 | 0 | 0,2528 | 0,4808 | 0,6619 | 0,7780 | 0,8182 |
| 5 | 0,025 | 0 | 0,2404 | 0,4574 | 0,6294 | 0,7400 | 0,7780 |
| $\bar{u}(x,t)$ | 0,025 | 0 | 0,2414 | 0,4593 | 0,6321 | 0,7431 | 0,7813 |
| $\lvert\bar{u} - u\rvert$ | 0,025 | 0 | 0,0010 | 0,0019 | 0,0027 | 0,0031 | 0,0033 |

## § 2. 2. Икки қатламли айирмали схемаларнинг тўғрилигинини текшириш.

Қулайлик учун қуйидаги векторларни киритамиз.

$$\vec{y}_\kappa = \left(y_0^\kappa, y_1^\kappa, ..., y_M^\kappa\right), \ \varphi^\kappa = \left(\left(\varphi_1^\kappa, ..., \varphi_M^\kappa\right)_1\right),$$
$$\vec{\mu}_1 = \left(\mu_0^1, \mu_1^1, ..., \mu_1^N\right), \ \vec{\mu}_2 = \left(\mu_2^1, \mu_{21}^1, ..., \mu_2^N\right)^T$$

Ушбу $(x_0, t_\kappa), (x_1, t_\kappa), ..., (x_M, t_\kappa)$ турғунлар тўпламини $\kappa-$қатлами деймиз, шунинг учун ҳам $\vec{y}_\kappa$ ва $\varphi^\kappa$ векторларни $u^h$ ва $\varphi^h$ функцияларнинг $\kappa-$қатламдаги қийматидаги қараш мумкин. Қуйидаги нормаларни киритамиз:

$$\left\|\vec{y}_\kappa\right\| = \max_{0 \le i \le M}\left|y_i^\kappa\right|, \quad \left\|\vec{\varphi}_\kappa\right\| = \max_{0 \le i \le M}\left|\varphi_i^\kappa\right|,$$
$$\left\|\vec{\mu}_1\right\| = \max_{0 \le \kappa \le M}\left|\mu_1^\kappa\right|, \quad \left\|\vec{\mu}_2\right\| = \max_{0 \le \kappa \le M}\left|\mu_2^\kappa\right|.$$

**Т а ъ р и ф.** Айирмали схема $C$ **фазонинг тўрдаги номасида турғун** дейилади, агар $h$ ва $\tau$ га боғлиқ бўлмаган шундай ўзгармас $c_1$ сон топилиб, унинг учун

$$\max_{0 \le \kappa \le N}\left\|\vec{y}_\kappa\right\| = c_i(\max)\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{y}^0\right\|\right) = \max_{0 \le \kappa \le M}\left\|\vec{\varphi}^\kappa\right\|\Bigg) \qquad (2.2.1)$$

баҳо ўринли бўлса.

Энди (2.1.7), (2.1.8) айирмали схеманинг тўғрилигини текширамиз.

**1-теорема.** Агар $\tau \le h^2/2$ бўлса у ҳолда (2.1.7), (2.1.8) айирмали схема $C$ фазонинг турдаги нормасида турғундир.

**Исботи.** (2.1.7) тенгламани қуйидаги кўринишга ёзиб оламиз. $y_i^{\kappa+1} = (1-2\rho)y_i^\kappa + \rho y_{i-1}^\kappa + \rho y_{i+1}^{\kappa+1} + \tau\varphi_i^\kappa$, бунда $\rho = \tau / h^2$. Агар $\max_i\left|y_i^{\kappa+1}\right|$га ички $(i_0, \kappa+1)$ нуқтада эришилса, у ҳолда

$$\max_i\left|y_i^{k+1}\right| = \max_i\left|(1-2\rho)y_i^k + \rho y_{i-1}^k + \rho y_{i+1}^k + \tau\varphi_i^\kappa\right| \le (1+2\rho)\left\|\vec{y}_\kappa\right\| + 2\rho\left\|\vec{y}_\kappa\right\| + \tau\left\|\varphi^\kappa\right\| = \left\|\vec{y}_\kappa\right\| + \tau\left\|\varphi^\kappa\right\|$$

Акс ҳолда

$$\max_i\left|y_i^{k+1}\right| \le \max_i\left(\left|\mu_1^{\kappa+1}\right|, \left|\mu_2^{\kappa+1}\right|\right) \le \max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|\right)$$

Демак,

$$\left\|y_i^{k+1}\right\| \le \max\left(\left\|\mu_1\right\|, \left\|\mu_2\right\|, \left\|\vec{y}_\kappa\right\| + \tau\left\|\varphi^\kappa\right\|\right). \qquad (2.2.2)$$

Энди (2.1.7), (2.1.8) масаланинг ечимини

$$y^\kappa = \vartheta^\kappa + w^\kappa$$

кўринишда оламиз, бунда $\vartheta^\kappa$ (2.1.7), (2.1.8) масаланинг ўнг томони $\varphi^{\kappa=0}$ бўлгандаги ечими, $w^\kappa$ эса (2.1.7), (2.1.8) масаланинг чегарвий ва бошланғич шартини нолга тенг бўлган ечими (2.12.2) га кўра $\vartheta^\kappa$ учун қуйидаги кўринишни ҳосил қиламиз.

$$\left\|\vec{\vartheta}^{\kappa+1}\right\| \le \max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{\vartheta}^\kappa\right\|\right) \le \ldots \le \max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{\vartheta}^0\right\|\right)$$

Иккинчи томондан $w^\kappa$ учун (2.2.2) га кўра

$$\left\|\vec{w}^{\kappa+1}\right\| \le \left\|\vec{w}^\kappa\right\| + \tau\left\|\varphi^\tau\right\| \le \left\|\vec{w}^{\kappa-1}\right\| + \tau\left(\left\|\vec{\varphi}^\kappa\right\| + \left\|\vec{\varphi}^{\kappa+1}\right\|\right) \le \ldots \le \sum_{j=0}^{\kappa} \tau\left\|\vec{\varphi}^j\right\| \le T \max_{0 \le j \le N}\left\|\vec{\varphi}^j\right\|,$$

Бу ерда $(\kappa+1)\tau \le T$ дан фойдалндик. Шундай қилиб қуйидагига эга бўламиз.

$$\left\|\vec{y}_\kappa\right\| \le \left\|\vec{v}^\kappa\right\| + \left\|\vec{w}^\kappa\right\| \le \max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{v}^0\right\|\right) + T \max_{0 \le j \le N}\left\|\vec{\varphi}^j\right\| \le$$
$$\le c_1\left[\max\left(\left\|\vec{\mu}_1\right\|, \left\|\vec{\mu}_2\right\|, \left\|\vec{v}^0\right\|\right) + T \max_{0 \le j \le N}\left\|\vec{\varphi}^j\right\|\right]$$

бунда $c_1 = mav(1, T)$. Бу тенгсизлик барча $\kappa, 0 \le \kappa \le N$ учун ўринли, демак, айирмали схема $C$ фазонинг турдаги нормаси учун турғун экан. Терема исботланади.

Бундан кўрамизки,(2.1.14) схема турғун бўлиши учун $|\lambda_n| \le 1$ тенгсизлик бажарилиши керак . Демак , биз $\sigma$ ва $\tau$ ларга нисбатан шундай шартларни топишимиз керакки,

$$-1 \le \frac{1 - \tau(1-\alpha)\vartheta_n}{1 + \tau\alpha\vartheta_n} \le 1$$

Тенгсизликлар ўринли бўлсин . Агар $\tau > 0$ бўлса у ҳолда $\vartheta_n > 0$ бўлганлиги учун юқоридаги тенгсизликлар $\vartheta_n(1 - 2\sigma) < 2$ муносабат билан тенг кучли бўлади. Агар $\tau \geq \frac{1}{2}$ бўлса, охирги тенгсизликлар барча $\tau > 0$ лар учун бажарилади. Агар $\tau < \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\tau \leq \frac{2}{(1-2\sigma)\max v_n} \leq \frac{h^2}{2(1-2\sigma)} \qquad (2.2\ 4)$$

бўлиши қилиб,(2.1 14), (2.1,8) айирмали схема дастлабки маълумотларга нисбатан турғунлигининг етарли шартларини ўрнатдик. Жумладан $4^k$ =0, $\mu_1 = \mu_2$=0 бўлса, у ҳолда $\sigma \geq \frac{1}{2}$ бўлганда (2.1.14),(2.1.8) айирмали схема шартсиз равишда турғун бўлиб, $\sigma < \frac{1}{2}$ бўлганга (2.1.1 4),(2.1.8) схема (2.2 4) шарт бажарилганда турғун, яъни шартли равишда турғун бўлади.

Агар дифференциал оператор ёки чегаравий шартлар биз қараган (2.1.1) – (2.1.3) чегаравий масалага нисбатан мураккаб бўлса, у ҳолда айирмали масала ҳам мураккаб бўлади ва унинг турғунлигини максимум принципи ёки Фурье методи билан текшириши маълум қийинчиликлар туғдиради ёки умуман мумкин бўлмайди .Бундай ҳолда энергетик баҳолар методидан фойдаланилади.

Юқоридаги $\overrightarrow{y\kappa}$ орқали унинг k-қатламдаги қийматини белгилаймиз, яъни $\vec{y}\ \kappa$=(0, $y_i^k, \ldots, y_{M-1}^k$,0) яна ушбу

$$\vec{y}_t^k = \frac{\vec{y}k + 1 - \vec{y}k}{\tau} \qquad (2.2.5)$$

Белгилашни киритамиз. Бунда биз қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\vec{y}^{\,k+1} = \frac{1}{2}(\vec{y}^{\,k+1} + \vec{y}^{\,k}) + \frac{r}{2}\ y_t^k, \quad \vec{y}^{\,k} = \frac{1}{2}(\vec{y}^{\,k+1} + \vec{y}^{\,k}) - \frac{r}{2}\ \vec{y}_t^k$$

Белгилашни киритамиз. Бунда биз қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\overset{\rightarrow\kappa+1}{y} = \frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow\kappa+1}{y} + \overset{\rightarrow\kappa}{y}\right) + \frac{r}{2}\overset{\rightarrow\kappa}{y_t}, \quad \overset{\rightarrow\kappa}{y} = \frac{1}{2}\left(\overset{\rightarrow\kappa+1}{y} + \overset{\rightarrow\kappa}{y}\right) - \frac{\tau}{2}y_t^\kappa \qquad (2.2\ 6)$$

Энди вектор учун $w_2^1$ фазонинг тўрдаги скалвр кўпайтмасини ва нормасини киритамиз.

$$\left(\vec{v},\vec{\omega}\right)=\sum_{i=1}^{\mu-1} hv_i\vec{\omega}, \quad \left\|\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{v},\vec{v}\right),$$

$$\left\|\vec{v}\right\|_1^2=\sum_{i=0}^{M-1} h\left(\frac{v_{i+1}-vi}{h}\right)^2$$

Равшанки,(2.1.14) тенгламанинг қуйидаги кўринишда ёзиш мумкун.

$$\vec{y}_t^{\kappa}=\iota\Delta\vec{y}^{\kappa+}+(1-\iota)\Delta\vec{y}^{\kappa}+\vec{\varphi}^{\kappa}$$

Бу тенгламанинг (2.2.5) ва (2.2.6) тенгликлар асосида куйидагича ёзиб оламиз;

$$\vec{y}_e^{\kappa}=\frac{1}{2}\Delta\left(\vec{y}^{\kappa+1}+\vec{y}^{\kappa}\right)+\tau(\iota-0{,}5)\Delta\vec{y}_t^{\kappa}+\vec{\varphi}^{\kappa}$$

Охирги тенгликларнинг ҳар иккала томонинг $2\tau\vec{y}_t^{\kappa}=2\left(\vec{y}^{\kappa+1}-\vec{y}^{\kappa}\right)$ векор билан скаляр кўпайтирамиз. Натижада қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$2\tau\left\|\vec{y}_t^{\kappa}\right\|_1^2=\left(\Delta\left(\vec{y}^{\kappa+1}\vec{y}^{\kappa}\right),\quad \vec{y}^{\kappa+1}-\vec{y}^{\kappa}\right)+2\tau^2(\sigma-0{,}5)$$

$$\left(\Delta\vec{y}_t^{\kappa},\vec{y}_t^{\kappa}\right)+2\left(\vec{y}_t^{\kappa},\vec{\varphi}^{\kappa}\right). \qquad (2.2.7)$$

Ушбу $\sum_{i=1}^{M-1} h\cdot\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{h}b_i=a_Mb_M-a_1b_0+\sum_{i=1}^{M} h\cdot\frac{b_i-b_{i-1}}{h}a_i$

қисмий йиғим формиласида $a_i=\frac{v_i-v_{i-1}}{h},\quad b_i=v_i$ деб $b_0=v_0=0 \quad b_m=v_m=0$ тенгликни ҳисобга оламиз:

$$(\Delta V,V)=\sum_{i=1}^{\mu-1} h\cdot\frac{V_{i+1}-2V_i+V_{i-1}}{h}=-\sum_{i=1}^{\mu-1} h\left(\frac{V_i-V_{i-1}}{h}\right)^2=-\left\|\vec{V}\right\|_1^2$$

ни хосил қиламиз. Энди $\Delta$ операторнинг симетриклигидан фойдаланиб,

$$\left(\Delta\vec{y}^{\kappa+1}+\vec{y}^{\kappa}\right),\quad \vec{y}^{\kappa+1}-\vec{y}^{\kappa}\Big)=\left(\Delta\vec{y}^{\kappa+1},\vec{y}^{\kappa+1}\right)-\left(\Delta\vec{y}^{\kappa},\vec{y}^{\kappa}\right)=\left\|\vec{y}^{\kappa}\right\|_1^2-\left\|\vec{y}^{\kappa+1}\right\|_1^2$$

тенгликларга эга бўламиз охирги иккита муносабатларда фойдаланиб (2.2.7) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$2\tau\left\|\vec{y}_t^{\kappa}\right\|^2+\left\|\vec{y}^{\kappa+1}\right\|_1^2+2\tau^2(\iota-0{,}5)\left\|\vec{y}_t^{\kappa}\right\|_1^2=\left\|\vec{y}^{\kappa}\right\|_1^2+2\tau\left(\vec{y}_t^{\kappa},\vec{\varphi}^{\kappa}\right). \qquad (2.2.8)$$

Бу тенглик $W_2^1$ фазонинг тўрдаги нормаси бўйича энергетик айният дейилади.

Энди ушбу

$$|ab| \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

$\varepsilon$ тенгсизликда $a = \left\| \vec{y}_t^{\,\kappa} \right\|,\quad b = \left\| \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right\|$ доеб олиб, $\left( \vec{y}_t^{\,\kappa}, \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right)$скаляр кўпайтма учун қуйидаги

$$\left\| \vec{y}_t^{\,\kappa}, \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right\| \le \varepsilon \left\| \vec{y}_t^{\,\kappa} \right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right\|^2 .$$

тенгсизликни хосил қиламиз. Бунинг нати жасида (2.2.8) дан қуйидаги баҳо ҳосил бўлади;

$$2\tau \left[ (1-\varepsilon) \left\| \vec{y}_t^{\,\kappa} \right\|^2 + \tau(\sigma - 0{,}5) \left\| \vec{y}^{\,\kappa+1} \right\|_1^2 \right] + \left\| \vec{y}^{\,\kappa+1} \right\|_1^2 \le \left\| \vec{y}^{\,\kappa} \right\|_1^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\| \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right\|^2 \qquad (2.2.8)$$

Ҳозиргача $\varepsilon$ ихтиёрий сон эди, энди $0 < \varepsilon \le 1$деб оламиз. У ҳолда $\sigma \ge 0{,}5$ шарт бажарилганда катта қавслар ичидаги ифода манфи бўлмайди. Шунинг учун ҳам (2.2.9) дан ушбу

$$\left\| \vec{y}^{\,\kappa+1} \right\|_1^2 \le \left\| \vec{y}^{\,\kappa} \right\|_1^2 \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\| \vec{\varphi}^{\,\kappa} \right\|^2 \qquad (2.2.10)$$

баҳо қилиб чиқади..

кўрсатиш мумкинки$\tau < 0{,}5$бўлганда (2.2.10) баҳо ўринли бўлиши учун

$$\tau \le \frac{(1-\varepsilon)p^2}{4(0{,}5-\iota)} \qquad (2.2.11)$$

Шарт ба жарилиши керак эди (2.2.11) баҳони кетма-кет қўллаб

$$\left\| \vec{y}_1^{\,\kappa} \right\|_1^2 \le \left\| \vec{y}^{\,\circ} \right\|_1^2 + \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\| \vec{\varphi}^{\,j} \right\|^2, \quad n\tau \le T$$

баҳони ҳосил қиламиз. Ўнг мамонлдаги йиғинди.

$\frac{1}{2}\int\limits_{\circ}^{\kappa\tau}\|f(t)\|^2 dt$ интеграл учун квадрат йиғинди бўлганлиги сабабли шундай $C_1$ топиладики,

$$\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{\tau}{2\varepsilon}\left\|\vec{\varphi}^{\,j}\right\|^2 \le C_1\int\limits_0^{\tau}\|f(t)\|^2 dt$$

тенгсизлик бажарилади.

бу ерда $\qquad \|f(t)\| = \left(\int\limits_{\circ}^{1} f^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$

Демак, $\qquad \left\|\vec{y}^{\,\kappa}\,{}^2_1\right\| \le \left\|\vec{y}^{\,\circ}\right\|_1^2 + C_1\int\limits_{\circ}^{T}\|f(t)\|^2 dt.$

Бу тенгсизлик эса (2.1.14), (2.1.8) оширмали схема $\tau \ge$ 0,5 бўлганда шартсиз равишда турғун бўлади ,$\tau > 0{,}5$ бўлганда $\tau$ ва h қадамлар орасида (2.2.11) шарт бажарилгандагина турғун бўдади.

Биз бошланғич шартлар ва ўнг томонга нисбатан турғунланган масаласини кўриб чиқиб ,чегаравий шартга нисбатан турғунланган масаласига эътибор бермадик. Агар $\mu(t)$ ва $\mu_2(t)$ формулалар дифференциаловчи бўлса,у ҳолда чегаравий шартларни нолга айлантириш мумкин. Ҳақиқаттан ҳам , $f(x,t) = \mu_1(t)\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + \mu_2(x)\frac{x}{\ell}$ формулани олсак ,у ҳолда $V(x,t) = u(x,t) - F(x,t)$формула (2.1.1)тенгламанинг ўнг томони $\left(f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}F(x,t)\right)$дан иборат бўлиб, нолни чегаравий ва бошланғич шартларини қаноатлантирадиган ечимини беради.

Шунга ўхшаш бир жинсли бўлмаган (2.1.1 4),(2.1.8) айирмали масалани бир жинсли чегаравий шартли масалага келтириш мумкин.

Фараз қилайлик , $y_i^{\kappa}$ айирмали масаланинг ечими бўлсин . Қуйидаги $\mathrm{V}_i^k$ тўр формуласини киритамиз .

$$V_i^{\kappa} = \begin{cases} y_I^k \, агар 1 \le i \le м-1 булса \\ 0, агар i = 0 ва i = м бўлса \end{cases}$$

Бу формула чегаравий шартлари бир жинсли бўлган ушбу айрмали масалани қаноатлантиради.

$$\frac{V_i^{\kappa+1}-v_i^{\kappa}}{\tau}=\iota\Delta v_i^{\kappa+1}(1-\iota)\Delta V_i^{\kappa}+\psi_i^{\kappa}, \quad i=\overline{1,\mu-1},$$

$$V_i^0=V(ih), \quad V_0^{\kappa}=0 \quad V_{\mu}^{\kappa}=0,$$

Бунда

$$\psi_i^{\kappa}=\begin{cases}\varphi_i^{\kappa}-\dfrac{1-\iota}{h^2}-\dfrac{\iota}{h^2}\mu_i^{\kappa+1}, \quad агар \quad i=1 \quad булса,\\ \varphi_i^{\kappa}, \quad агар \quad 2\le i\le\mu-2 \quad бўлса,\\ \varphi_{\mu-1}^{\kappa}-\dfrac{1-\iota}{p^2}\mu_2^{\kappa}-\dfrac{\iota}{h^2}\mu_2^{\kappa+1}, \quad агар \quad i=\mu-1 бўлса.\end{cases}$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ўнг томонини бироз ўзгартириб,бир жинсли бўлмаган (2.1.1 4) айирмали масалани чегаравий шартлари бир жинсли бўлган айирмали масалага келеириш мумкин.

22. Яқинлашиш тезлигини баҳолаш.Фараз қилайлик ,(2.1.1) дефференциал масаланинг ечими бўлиб, $y_i^k$ эса (2.1.14),(2.1.8)айирмали масаланинг ечими бўлсин $r^k=\{r_i^k\}$орқали эса аппроксимация=хатолигини белгилаймиз. Агар биз $u^{(h)}$орқали аниқ ечимининг турдаги қийматини белгиласак, у ҳолда $z=u^{(h)}-y_i^k$ айирмасини тўр устидаги хатолиги бўлиб,

$$\frac{z_i^{k+1}-z_i^k}{\tau}=\iota\Delta z_i^{\kappa}+(1-\iota)\Delta z_i^{\kappa}+\varphi_i^{\kappa}-f_i^{\kappa}+z_i^{\kappa},$$

$$i=1,2,\ldots,\mu-1$$

тенгламани қаноатлантиради. Агар $\varphi_i^{\kappa}=f\left(x,t_{\kappa}+\dfrac{\tau}{2}\right)$деб олсак, у ҳолда $z_i^k$ ушбу

$$\frac{z_i^{\kappa+1}-z_i^{\kappa}}{\tau}=\iota\Delta z_i^{\kappa+1}+(1-\iota)\Delta z_i^{\kappa}+\tau_i^{\kappa}, \quad i=\overline{1,\mu-1},$$

$$z_i^0=u_0^{\kappa}=u_{\mu}^{\kappa}=0.$$

масалани ечими бўлади. Агар қаралаётган масала турғун бўлса,у ҳолда (2.2.11) баҳо ўринли бўлади. Бундан эса

$$\left\|z^{\kappa}\right\|_1^2 \le \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\|\vec{\tau} j\right\|^2 \le \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\|\vec{\tau} j\right\|^2 \le \frac{T}{2\varepsilon} 0 \le j \overset{\max}{\le} N-1 \left\|\tau j\right\|^2 .$$

б) Айирмали схема қуришнинг баланс методи. Иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, тебраниш, ва шунингдек турли хил физик жараёнлар иссиқлик, масса, ҳаракат микдори энергия ва ҳокозо , сақланишнинг интеграл формадаги қонунлари билан тоифаланади. Математик физиканинг дифференциал тенгламаларини чиқариш кичик ҳажми учун сақланиш қонунини ифодаловчи муайян интеграл муносабатдан ишни бошлашади. Тенгламада қатнашадиган функцияларнинг барча керакли ҳосилаларини мавжуд деб фараз қилиб ва баланс тенглама ҳосил қилинади. Чекли айирмали методнинг физик маъноси шундан иборатки, биз узлуксиз муҳитдан унинг қандайдир дискрет моделига ўтамиз. Табийки,бундай ўтишда физик жараённинг асосий хоссалари сақланишини талаб қилиш керак. Бундай ҳоссалар қаторида,биринччи навббатда,сақланиш қонунлари туради. Тўр соҳада сақланиш қонунларини ифодалайдиган айирмали схемалар консерватив схемалар дейилади. Консерватив айирмали схемаларни ҳосил қилиш учун тўр соҳада элементар ҳажм учун ёзилган баланс тенгламаларида қатнашадиган интегралларни ва ҳосилаларни тақрибий айирмали схемаларни ҳосил қилишнинг бундай усули баланс методи ва интеграл-интерполяцион метод дейилади. Баланс методини қўллашга мисол сифатитида иссиқлик ўтказувчанликнинг қўллашга мисол сифатида иссиқлик ўтказувчанликнинг стационар тенгламаси учун 1-чегаравий масалани қараймиз.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + f(x) = 0 \quad 0 < x < 1, \qquad (2.2.12)$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \qquad (2.2.13)$$

бунда $p(x), q(x), f(x)$ лар етарлича силлиқ функциялар бўлиб, $\mathrm{p(x)} \ge \mathrm{p}_0 > 0, \quad \mathrm{q(x)} \ge 0$ шартларини қаноатлантиради, $\alpha$ ва $\beta$ эса берилган сонлар. Бу шартлар бажарилганда (2.2.12),(2.2.13) чегаравий масала ягона етарлича силлиқ u(x) ечимига эга бўлади. Айирмали схема қуриш учун $[0,1]$ кесмада мунтазам

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad hN = 1\}$$

тўрини оламиз. Қуйидаги

$$x_{i\pm\frac{1}{2}=} x_i \pm \frac{h}{2}, \quad \omega(x) - p(x)\frac{d}{dx}u(x), \quad \omega_{i\pm\frac{1}{2}} = \omega\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}\right)$$

белгилашни киритиб, (2.2.12) тенгламани $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ оралиқда интеграллаймиз, натижада

$$\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} f(x)dx - 0 \qquad (2.2.14)$$

Тенг ламани хосил қиламиз, у $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ кесмада иссиқнинг баланс тенгламасини аниқлайди. Энди:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx.$$

Интегрални учун $u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx$ таркриби қиймат билан алмаштириб, қўядигон белгилашларни киритамиз:

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx, \quad \varphi_i - \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx. \qquad (2.2.15)$$

Натижада (2.2.14) тенглама

$$\frac{\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0 \qquad (2.2.16)$$

Кўринишига эга бўлад. Энди $\omega_{i\pm\frac{1}{2}}$ ни $u(x)$

Нуқталар даги қийматлари орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $du/_{dx} = \omega(x)/p(x)$ ифодани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмада интеграллаймиз. Натижада

$$u_{i-u_{i-1}} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{p(x)} dx \approx \omega_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \qquad (2.2.17)$$

Ҳосил бўлади агар.

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \qquad (2.2.18)$$

Деб белгилаб олса, (2.2.17) дан қуйидаги тақрибий тенгликларни ҳосил қиламиз

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \omega_{i+\frac{1}{2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1} u_i}{h}.$$

бу ифодаларни (2.2.16) тенгламалар қўйиб изланоётган функциянинг $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ нуқталаридаги қийматини ўз ичига олади ушбу

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - a_i(u_i - u_{i-1})\right] - d_i u_i + \varphi_i = 0 \qquad (2.2.19)$$

Айрилмали тенгламалар эга бўламиз (2.2.19) тенгламани $\omega_h$ тўр соҳанинг барча ички $(\cdot)/u$, яъни $i = 1,2,\ldots,N-1$ учун ёзсак, у ҳолда $N+1$ та $u_{0,} u_1 \ldots, u_N$ номаълумли $N-1$ тенгламалар системасига эга бўламиз. Иккига етмаган тенгламанинг (2.2.13) дастлабки шаратдан ҳосил қиламиз:

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \qquad (2.2.20)$$

айирмали масаланинг ечимини дифферинциал масаланинг ечимидан фарқ қилиш учун уни $y$ орқали белгилаймиз, демак $y_i = y(x_i), \quad x_i \in \omega_h.$ энди. (2.2.19) ва (2.2.20) тенгламаларни. Бирлаштирамиз (2.2.12),(2.2.13) чегаравий масалалар учун қуйидаги айрилмали схемага эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] - d_i y_i + \varphi_i = 0, \\ i = 1,2,\ldots, \quad N-1, \\ y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta. \end{array}\right\} \qquad (2.2.21)$$

Бу системани ҳайдаш методи билан ечиш маысадга мувофиқ бўлади. Бунинг (2.2.21) системани ыуйидаги кщринишда ёзиб оламиз:

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + BY_{i+1} = -F_i, \quad C = 1,2,\dots N-1 \quad Y_0 = \alpha, \quad Y_N = \beta$$

бунди

$$A_i = a_{i-1}, \quad B_i = a_{i+1}, \quad C_i = a_i + a_{i+1} = h^2 d, \quad F_i = h^2 \varphi_i.$$

Чегаравий масалалар коэффецентларига қўйилган шартлардан $a_i > 0$ ва $d_i \geq 0$ келиб чиқади, бундан эса $C_i \geq A_i + B_i$ ни сони ҳайдаш методнинг турғунлик шартини ҳосил қилдик. Демек (2.2.21) айрилмали масалалар ягона ечимга эга ва бу ечимнинг ҳайдаш методи билан топиш мумкун.

Энди. (2.2.21)т дифферинциал тенгламани (2.2.21) айрилмали тенглама билан алмаштираганда юзага келмайдиган аппракфсималция хатолигин текширамиз $Lu(x)$ ва (2.2.21) тенгламанинг чап томонини $L_n Y_i$ орқалий белгилаймиз, яъни.

$$Lu(x) = \frac{d}{dx}\left( p(x)\frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) + f(x),$$

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2}\left[ a_{i+1}\left(Y_{i+1} - Y_i\right) - a_i\left(Y_i - Y_{i-1}\right)\right] - d_i Y_i + \varphi_i.$$

Фароз қилайлик, $v_{(x)}$ етарлича силлиқ функция бўлиб $v_i = v(x_i)$ $y = \omega_h$ тўрдиги қиймати бўлсин. Эди

$$L_h v_i = \frac{1}{h_i}\left[ (v_i - v) - a_i\left(v_i - v_{i-1}\right)\right] - d_i Y_i + \varphi_i.$$

Баҳо ўринли эканлигини курсатамиз. Бунинг учун $L_h V_i$ оператор таркибидаги $V_{i\pm1} = V(x_i \pm h)$ ни $x_i$ нуқта атрофид жойлар қаторига ----

Рав ишда

$$\frac{v_{i\pm1} - v_i}{\pm} = v_i \pm \frac{h}{2} vV_i + \frac{h^2}{6}{}''_i + 0\left(h^3\right)$$

Демак

$$L_h v_i = \frac{a_i - a_i}{h} v_{i'}' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} v_i'' + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} v_i - d_i v_i + \varphi_i + 0\left(h^2\right)$$

Иккинчи томондан

$$Lu(x_i) = p(x_i)v_i'' + p'(x_i)v_i' - q(x_i)v_i + f(x_i)$$

Бу муносабатлардан

$$L_h v_i - Lv(x_i) = \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - p'(x_i)\right)V_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - p(x_i)\right)V_i'' +$$

$$+ \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}V_i''' - (d_i - q(x_i))V_i + (\varphi_i - f(x_i)) + > ((h^2)$$

ни ҳосил қиламиз. (2.2.22) шарт бижарилиши учун

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = p'(x_i) + 0(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = p(x_i) + 0(h^2), \tag{2.2.23}$$

$$\varphi_i = f(x_i) + 0(h^2), \quad d_i = q(x_i) + 0(h^2) \tag{2.2.24}$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак

Энди $K(x) = \dfrac{1}{p(x)}$ деб белгилаймиз ва $\kappa(x)$ ни $x_{i-\frac{1}{2}}$ нуқта атрофида Тайлер қаторига ёзамиз натижада

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i} \kappa(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\kappa_{i-\frac{1}{2}} + \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)\kappa'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 \kappa''_{i-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^3 \kappa'''_{i-\frac{1}{2}} + 0(h^4)\right]dx = \kappa_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{24}\kappa''_{i-\frac{1}{2}} + 0(h^3)$$

ҳосил бщлади. Демак,

$$a_i P_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{x_{i-0,5}}{\kappa_{i-0,5}} + 0(h^4) = P_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{x_i''}{\kappa_i} + 0(h^3).$$

Шунга ўхшаш

$$a_{i+1} = P_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{\kappa_i''}{\kappa_i} > 0(h^3).$$

Бунадан эса

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = \frac{P_{i+\frac{1}{2}} + P_{i-\frac{1}{2}}}{2} + 0(h^2) = P_i + 0(h^2), \qquad \frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{P_{i+\frac{1}{2}} + P_{i-\frac{1}{2}}}{h} + 0(h^2) = P'(x_i) + 0(h^2)$$

ларга эга бўламиз, булар эса (2.2.22)ни исботлайди. (2.2.24) тенгликларнинг бажарилишни кўрсатиш қийин эмас, ҳақиқатан ҳам, $d_i$ ва

$\varphi_i$ ни мос равиш да $q(x_i)$ ва $f(x_i)$ билан алмаштириш (2.2.25) интегралини ўрта тугунли тўғри бурчакли тўртбурча формиласи билан ҳисоблашдан ибoрадир мълумки, бундай формиланинг қолдиқ ҳади $0(h^2)$. Шун дай қилиб, биз (2.2.23), (2.2.24) тенгликларни ваш у билан бирга (2.2.22) баҳони кўрсатдик. Бу эса $L_hY_i$ оператор $Lu(x)$ ни (2.2.12),(2.2.13) масаланинг ечимида $h$га нисбаттан иккичи тартибли аппраксимация қилишшини кўрсатади.

**1-эслатма** (2.2.21) айирмали схемани амал да тўплаш, унинг коэффицентларини топиш учун (2.2.15) ва (2.2.18) интег ралларни аниқ ҳисоблаш шарт эмас. Коэффицентларни топиш учун $0(h^2)$ ёки бундан юқори аниқликка эга бўлган квадратур формилалар билан тақрибий ҳисоблаш мумкун. Масалан: (2.2.15) ва (2.2.18) интегралларга тўғри тўртбурчаклар формеласини қўлласак, коэффицентлар қуйидагича топилади:

$$d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i), \quad a_i = p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Агар трапециялар формиласини қўласак,

$$a_i = \frac{2p_i p_{i-1}}{p_i + p_{i+1}}, \quad d_i = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \varphi_i = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

Ларни ҳосил қиламиз

Кўрсатишимиз мумкилики, (2.2.21) айирмали масалаларнинг ечимлари кетма-кетликлари $\{Y_h(x_i)\}$ $h \to 0$ да $C(\omega_h)$тўрли фазода дастлабки (2.2.12), (2.2.13) дифференциал масалларнинг $u(x)$ечимига иккинчи турлар билан яқинлашади, бошқача қилиб айтганда

$$\|Y_m - u\|c(\omega_h) = \max_{x_i \in \omega_h}|Y_n(x_i) - u(x_i)| \le \mu h^2.$$

Баҳо ўринли бўлади.

**2- эслатма:** баланс методини бошқа чегаравий масалалари учун ҳам тўп лаш мумкин бундан тақари, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, формилалар узилишига эга бўлган ҳолда ҳам айрилмали схеманинг яқинлаштири шни текшириш учун коэффицентларни (2.2.15) ва (2.2.18) интеграллар орқали ифодалаш катта аҳамиятга эга.

## § 2. 3. Тежамкор айрилмали схемалар.

Фараз қилайлик чегараси $\Gamma$ бўлган $G=\{0<x_1,x_2<1\}$соҳада ушбу икки ўлчовли иссиқлик ўтказувчан $V$ тенгламанинг ечиш талаб килинсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad x(c\, x_1,\, x_2)\in C.$$

$$u(x_1 t)=\mu(x_1 t), \quad x\in\Gamma, \quad 0<t<T, \qquad (2.3.1)$$

$$u(x_1 0)=u_0(x) \quad x\in G+\Gamma.$$

Бунинг учун вақт ва фазо бўйича қуйидаги туртларни киритамиз:

$$\omega_\tau=\{t_k=x\tau, \kappa=\overline{0,N-1}, \quad N\tau=1\},$$

$$G_h=\{x_{ij}=(x_{1i}x_{2j}), x_{1i}=ih, x_{2j}=jh, \quad j=\overline{0\cdot N}, hN=1\}$$

$G_h$ турнинг ички нуқталар тўплами $(i,j=1,=1\ldots,N-1)$ ни $\Omega h$ орқали ва $G_h$ нинг чегарсини $\Gamma_h$ орқали белгилаймиз

Юқорида бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечишда ошикор ва ошикормас схемаларни қўллаган эдик. Бу йерда ҳам шундай схемаларни киритамиз. Бунинг учун қуймдаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_1 y_{ij}=\frac{1}{h^2}\left(y_{i+1,j}-2y_{ij}+y_{i-1,j}\right) \qquad (2.3.2)$$

$$\Delta_2 y_{ij}=\frac{1}{h^2}\left(y_{i,j+1}-2y_{ij}+y_{i,j-1}\right) \qquad (2.3.3)$$

$$\Delta_2 y_{ij}=\Delta_1 y_{ij}+\Delta_2 y_{ij} \qquad (2.3.4)$$

Бу белгилашда ошкор схема куйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{k+1}-y_{ij}^k}{\tau}=\Delta y_{ij}^k, \quad x_{ij}\cdot\in\omega_h, \quad t_k\in\omega_\tau, \\ y_{ij}^k=\mu(x_{ij},t_{k+1}), \quad x_{ij}\in\Gamma_h, \quad t_k\in\omega_\tau, \\ y_{ij}^0=u_0(x_{ij}), \quad x_{ij}\in G_h, \quad k=0. \end{cases} \qquad (2.3.5)$$

Ошкормас схема эса куйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k}}{\tau} = \Delta y_{ij}^{k}, \quad x_{ij} \cdot \in \omega_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{k+1} = \mu\left(x_{ij}, t_{k+1}\right), \quad x_{ij} \in \Gamma_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{0} = u_0\left(x_{ij}\right), \quad x_{ij} \in G_h, \quad k = 0. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Дастлабки ва чегаравий шартларнинг фойдаланиб, (2.3.5) айирмали схеманинг ечими навбатдаги қатламида

$$y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^{k} + \tau \Delta y_{ij}^{k}, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad x_{ij} \in \omega h$$

Ошкор формула ёрдамида топилалиди. Бу ошкор сехеманинг устунларидир. Аммо бу схеманинг муҳим камчилиги унинг шартли равишда турғунлигдадир. Кўрсатиш мумкинки, (2.3.5) схема тўрғун бўлиши учун $\tau$ бўйича қадим $\tau \le \frac{1}{4} h^2$ шартни қаноатлантириш керак. Агарда толиш учун $N = 40.000$ та қадам бажарилиши зарур. Агар фазовий ўзгарувчи $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ларнинг сони $p$ та булса , у ҳолда ошкор схема тургун булиш учун $\tau \le \frac{1}{2p} h^p$ тенгсиз бажрилиш $x - k$ .

Шу сабабларга кура параболик тенгламаларни ечишда ошкор схема кам ишлатилади. Биз қийинги бандди кўрамизки, гиперболик тенглами учун ахвол бошқача бўлиб, ошокор схемада $t = 0(h)$ бўлганда хам турғунлик сақланади.

Энди ошкормас схемани кўриб чиқайлик, (2.3.6) схемада $\tau$ ва $h$ ни қандай олсак, хам у турғун бўлаверади. Бу схеманинг камчилиги шундан иборатки, хар бир вақт қатламида

$$y_{ij}^{k+1} - \tau \Delta y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^{k}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad i_1 j = 1,2,\ldots, N-1,$$

$$y_{ij}^{k+1} = \mu_{ij}^{k+1}, \quad x_{ij} \in \tilde{A}_h \tag{2.3.7}$$

тенгламалар системаларсини ечиш лозим. Бу системади $y_{ij}^{k+1}$ номаълум сони $(N+1)^2$ та. Агар бу системанинг Гаусс методи билан ечадиган бўлсак, $0(N^6)$ та арифмичек амал бажариш, бундай системани авктнинг хар бир қатламида ечиш лозим, бу эса хисоблаш ишини яна ҳам кўпайтириб юборади.

Фазовий ўрарувчанликнинг сони иккита ёки кўп бўлганда (2.3.7) система матрицасининг кўринишини хисобга олган холда системани ечиш методларини кўриш мақсадга мувофиқдир. Бу методларнинг бири – Фурьенинг тез алмаштириши билан 2.2. *а* да танишган эдик Бу методлар кўп ўлчовли масалаларни бир ўлчовли масалалар кетма–келигига келтириб ечишга асосланган. Бундай келтириш натижасида шундай оширилмали методлар вужудга келадики, улар ошокор ва ошкорамас схемаларнинг икки яхши хусусийяти: абсалют турғун ва ечишнинг соддалигини ўзида мужассалаштиради. Бу мегод эллигинчи йиллардан бошлаб хар хил номлар ўзгарувчан йуналишли мегодлари, каср қадамли мегодлар, лакал бир улчовли методлар остида матиматик физика масалаларини ечишда кенг қўлланиши бошланди. Хозир бу методлар умумий тежамкор методлар номи билан аталади.

а) Ўзгаручан йуналишли метод. Биз хозир шу ўзгарувчан йўналшда методлардан бири бўлган бўйлама-кўндаланг айрилмали схемалар ёки Писмер-Рэчфорд схемаси деб аталувчи методни кўриб чикамиз.

Бу методда к-қатламидан *(к+1)* қатнашган **.........и**кки боскичдан иборат. Биринчи боскичда

$$\frac{y_{ij}^{k+1}-y_{ij}^{k}}{\frac{1}{2}\tau}=\Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+\Delta_2 y_{ij}^{k},\quad x_{ij}\in\Omega_h \qquad (2.3.8)$$

Системадан орадаги $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қиймат аниқланади. Иккинчи босқичда топилган $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қийматлардан фойдаланиб,

$$\frac{y_{ij}^{k+1}-y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau}=\Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}+\Delta_2 y_{ij}^{k+1};\quad x_{ij}\in\Omega_h \qquad (2.3.9)$$

Системадан $y_{ij}^{k+1}$ лар топилади. Бунда $\Delta_1 y_{ij}$ ва $\Delta_2 y_{ij}$ айрилмали нисбатлар (2.3.2) ва (2.3.3) формилалар билан аниқланади. (2.3.8) тенглама фақат $x_1$ ўзгарувчи бўйича ошкормасдир. Шунинг учун хам бу (2.3.8) ва (2.3.9) тенгламалар системалари аввал $x_1$ йўналиш бўйича, кейин $x_2$ йўналиш бўйича бир ўлчовли хайдаш методи ёрдамида ечилади методнинг номи хам шундан келиб чиққан.

Бу системалар ечиш алгаритимлари қуйидагидан иборат: (2.3.8) системани

$$\frac{1}{2}\gamma y_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + (1-\gamma) y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma y_{i+1,j}^{1+\frac{1}{2}} = -F_{ij}^{k} \qquad (2.3.10)$$

кўринишда ёзи б оламиз, бунда

$$\gamma = \tau h^{-2},\ F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\tau \Delta_2 y_{ij}^{k}$$

Бу системани $j(j = 1,2\ldots, N-1)$ нинг хар бир белгиланган кийматларида $i$ ўзгарувчи бўйича хайдаш методи билан ечамиз. Хайдаш методини қўллаш учун $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}$ ва $y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}}(j = 1,2,\ldots, N-1)$ чегаравий кийматларни белгилаш керак бунинг учун (2.3.9) тенгламадан (2.3.8) тенгламани айирамиз, натижада

$$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{y_{ij}^{k} + y_{ij}^{k+1}}{2} - \frac{\tau}{4}\Delta_2\left(y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k}\right)$$

ҳосил бўлади бу формула асосида $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}, y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}}$ чегаравий қийматларни қуйидагича топамиз:

$$y_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{0j}^{k} + \mu_{0j}^{k+1}}{2} = \frac{\tau}{4}\Delta_2(\mu_{0j}^{k+1} - \mu_{0j}^{k},$$

$$y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{Nj}^{k} + \mu_{Nj}^{k+1}}{2} = \frac{\tau}{4}\Delta_2(\mu_{Nj}^{k+1} - \mu_{Nj}^{k},$$

$$j = 1,2,\ldots, N-1.$$

$j$ нинг хар бир белгилан қийматида (2.2.10) ситеманинг $x_1$ йўналиш бўйича хайдаш методи билан йечганда $0(N)$ та арифметик симал бажарилади. Демак $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ топиш учун $0(N^2)$ та арифметик симал бажарилади.

Барча $y_i^{k+\frac{1}{2}}$ лар топилгандан кейин (2.3.9) тенгламалар ситемасини ечамиз. Бу тенгламалар системасини куйидагича ёзиб оламиз.

$$\frac{1}{2}\gamma y_{i,j-1}^{k+1} + (1-\gamma)y_{ij}^{k+1} + \frac{1}{2}\gamma y_{i,j-1}^{k+1} = -\Phi_{ij}^k,$$
$$\gamma = \tau h^2, \quad \Phi_{ij}^k = y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \quad \Delta\tau_2 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \qquad (2.3.11)$$

Кўриниб турибдики, хар бир белгиланган, $i(i=1,2,\ldots,N-1)$ учун бир система $j$ ўзгарувчан бўйича ҳайдаш методи билан ечиш мумкун. Бунда чегаравий шартлар (2.3.1) масала бўйича

$$y_{i0}^{k+1} = \mu(x_{i0}, t_{k+1}), \quad y_{iN}^{k+1} = \mu(x_{iN}, t_{k+1})$$

Кўринишда аникланади: (2.3.1) системадан барча $y_{ij}^{k+1}$ ларни топиш $0(N^2)$ га арифметик амални талаб қилади.

Шундай қилиб (метод бўйча) маълум $y_{ij}^k$ ларга кўра $y_{ij}^{k+1}$ ларни топиш ўзгарувчан йўнашлишли метод бўйича $0(N^2)$ та арифметик амалини талаб қилади. Кўрсатиш мумкунки, бўйлама-кўндаланг метод абсалют тўрғун бўлиб $u(x,t)$ етарлича силлик бўлса, аппрокимация тартиби $0(\tau^2+h^2)$ бўлади ва $I_2$ нинг турдаги нормасида тақриби ечим аниқ ечимга $0(\tau^2+h^2)$ тезликда яқинлашди.

б) ўзгарувчан коэффицентли иссиқлик ўтказувчан тенгламасини ечиш.

Коэффицентлари ўзгарувчан бўлган қуйидаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масалаларни қарайлик:

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \left(\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t) \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\ell,t)=\mu_2(t), \qquad (2.3.12)$$

бунда $\rho(x,t), \rho(x,t), f(x,t)$ етарлича силик $\phi-k$ лар билан,

$$c_1 \geq \rho(x,t) \geq c_2 > 0,\ \rho(x,t) \geq c_3 > 0 \qquad (2.3.13)$$

шартларни қаноатлантирсин. Хар бир бенсиналлик $t$ учун $(x,t)$ нуқтада $Iu=\frac{\partial}{\partial k}\left(\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial k}\right)$ дифференциал ифодани

$$\Lambda_1(t)y_i=\frac{1}{h}\left[a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-a(x_i,t\frac{y_i-y_{i-1}}{h})\right] \qquad (2.3.14)$$

айирмали нисбат билан аппроксимация қўшамиз бунда $a(x,t)$ коэффицент баланс методикадагидек иккинчи тартибли аппроксиманиция шартларини қаноатлантириши керек

$$\left.\begin{aligned}\frac{a(x_{i+1},t)+a(x_i,t)}{2}&=\rho(x,t)+0(h^2),\\ \frac{a(x_{i+1},t)-a(x_i,t)}{2}&=\rho'(x,t)+0(h^2).\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.15)$$

Баланс методида кўрганимиздек, $a(x,t)$ ни қуйидаги

$$a(x,t)=\frac{\rho(x_i,t)+\rho(x_{i-1},t)}{2},\quad a(x,t)=\rho\left(x_i-\frac{h}{2},t\right),$$

$$a(x,t)=\frac{2\rho(x_{i-1},t)\rho(x_i,t)}{\rho(x_i,t)+\rho(x_i,t)}$$

формиланинг бирортаси билан ҳисобласак, (2.3.15) муносабатлар ўринли бўлади. Шундай қилиб, (2.3.12) дефференциал тенгламага ушбу вазний айрилмали масалалар мос келади:

$$\rho(x,t)\frac{y_{i,}^{k+1}-y_i^k}{\tau}=\Delta(t)\left(\alpha y_{i,}^{k+1}+(1+\alpha)y_i^k\right)+f(x_i,t) \qquad i=1,2,\ldots,\mu-1, \qquad (2.3.16)$$

$$y_i^0=u_0(x_i),\ y_0^\kappa=\mu_1(t_\kappa),\ y_\mu^\kappa=\mu_2(t_\kappa).$$

Бунда $t=t_\kappa+0{,}5\tau$ ва $\alpha=0{,}5$ бўлса, у ҳолда (2.3.16) схема аппроксимациясининг холига $\tau=0(\tau^2+h^2)$, бўлиб $\alpha\neq 0{,}5$ белгида $\tau=0(\tau+h^2)$, бўлди. Шундай қилиб, биз ошкормас схемага эга бўлади. Бу системани ечиш учун хайдаш методи тўплаш мумкин. Айрилмали схеманинг туркумлигини текширишда олидинги бандларда харакатларимиздан ташкари, каффицентларни, музлатиш принципи ҳам ишлатилади. Бу принцип ўзгарувчан каэффицентли масалани ўзгармас каэффицентли масалга келтиради мисол учун (2.3.16) схемада $\alpha = 0$ ва $f(x,t) = 0$ деб олиб, куйдаги ошкор схемани қараймиз

$$\rho(x,t)\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{1}{h} = \left( a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}^{\kappa} - y_i^{\kappa}}{h} - a(x_i,t)\frac{y_i^{\kappa}}{h} \right). \qquad (2.3.17)$$

Фараз қилайлик, с каэффицентлар ўзгармас бўлсин, яьни $\rho(x_1,t) = \rho = coct, \quad a(x_i,t) = a = const$. У ҳолда (2.3.17) тенгламани қуйдагича ёзиш мумкун:

$$\rho\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{a}{h^2}\left(y_{i+1}^{\kappa} - 2y_i^{\kappa} + y_{i-1}^{\kappa}\right)$$

ёки

$$\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau_1} = \frac{y_{i+1}^{\kappa} - 2y_i^{\kappa} + y_{i-1}^{\kappa}}{h^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau a}{\rho}$$

Маълумки, бу ошкор схема $\tau_1 \le \frac{1}{2}h_2$ бўлганда, яни

$$\frac{\tau\, a}{\rho} \le \frac{h^2}{2} \qquad (2.3.18)$$

бўлганда тургун булади

каэффицентларни музлатиш принципи шуни тасдиклайдики, агар барча $x_i$ ва $t = t_\kappa + 0{,}5\tau$ лар учун

$$\frac{\tau\, a(x_i,t)}{\rho(x_i,t)} \le \frac{h^2}{2} \qquad (2.3.19)$$

тенгсизлик бажарилса, у холда (2.3.17) схема бўлади. Агар $c_1 \ge a(x_i t) \ge c_2 0,\ \rho(x_i,t) > c_3 > 0$ муносабатлар маълум бўлса, у ҳолда $\frac{\tau}{h^2} \le \frac{c_3}{2c_1}$ .

Бажарилганда (2.3.19) тенгсизлик ўринли бўлади. (2.3.17) схеманинг турғунлигини катьий равишда асосланади.

Агар $\tau \geq 0{,}5$ бўлса, у ҳолда каэффицентлрни музлаш принципидан (2.3.16) схеманинг абсалют турғунлиги келиб чиқади. С) Чизиқли бўлган иссиқлик ўтказувчанлик тангламасини ечиш. Қуйидаги чегаравий массалани қараймиз:

$$\frac{\partial г}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T, \tag{2.3.20}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) = \mu_2(t)$$

Одатда чизиқли бўлмаган тенгламаларда $\rho(u)$ функциянинг ўзгариш соҳаси олдиндан маълум бўлмаса ошкор схемалар ишлатилмайди.

Соф ошкормас схема $y_i^{\kappa+1} (i = \overline{1, \mu - 1})$ намаьлумларга нисбатан чизиклик ситемани ҳам, чизикли бўлмаган сестамани ҳам ташкил этиш мумкун. Ушбу схема

$$\frac{y_i^{\kappa+1}}{\tau}\frac{1}{h}\left[a_{i+1}\cdot\frac{y_{i+1}^{\kappa+1}+y_i^{\kappa+1}}{h} - a_i\cdot\frac{y_i^{\kappa+1}-y_i^{\kappa+1}}{h}\right] + f\left(y_i^{\kappa}\right) \tag{2.3.21}$$

да $a_i = \dfrac{1}{2}\left[\rho\left(y_i^{\kappa}\right) + \rho\left(y_{i-1}^{\kappa}\right)\right]$ деб олсак, у ҳолда $y_i^{\kappa+1} (i = \overline{1, \mu - 1})$ намаълумларга нисбатан чизиқлик, абсолют турғун бўлиб, аппрок симация хатолиги $\tau = 0\left(\tau + h^2\right)$ бўлади. Бу системанинг ечими хайдаш методи (2.312) тенглама учун ушбу

$$\begin{gathered}\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a\left(y_{i+1}^{\kappa+1}\right)\frac{y_{i+1}^{\kappa+1}+y_i^{\kappa+1}}{h} - a_i\left(y_i^{\kappa+1}\right)\frac{y_i^{\kappa+1}-y_{i-1}^{\kappa+1}}{h}\right] + \\ + f\left(y_i^{\kappa+1}\right)a\left(y_i^{\kappa+1}\right) = \frac{\rho\left(y_i^{\kappa+1}\right)+\rho\left(y_{i-1}^{\kappa+1}\right)}{2}\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

Соф схема ошкормас ишлатилади. Бу схемани қўллаш учун у ёки бу итерацион метод қўлланилади масалан, итерацион жараённи қуйданича олиб боришимиз мумкин:

$$\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\left(y_{i+1}^{(s)}\right)\frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a\left(y_i^{(s)}\right)\frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h}\right] + f\left(y_i^{(s)}\right)$$

$$S = 0,1,\ldots,L-1, \quad y_i^{(0)} = y_i^{\kappa}, \quad y_i^{(L)} = y_i^{\kappa+1}, \tag{2.3.23}$$

Бу ерда $s$ - итериция номери. Бу итероцион жараёнда кўрамизки, чизиқли бўлмаган каэффицентлар олдинги итьерационда, яни $y_i^{\kappa+1}$ нинг даслабки яқинлашиш шунча яхши бўлади. Агар коэффицентлар силлиқ булиб, $\rho(u) \geq c_2 > 0$ шарт бажарилса, одамда, икки-учта итерация қониқарли натижага олиб келади. Хар бир янги итерацияда $y_i^{(s+1)}$ нинг қийматлари (2.3.23) ситемади хайдаш метод билан аниқланада. Шунингдек (2.3.23) системани ечиш учун иккинчи тартибли аниқликка эга бўлган предиктор-норректор схемаси хам ишлатилади. Бунда к-қатламдда $(\kappa+1)$ қатламга ўтиш икки боскичда бажарилади. Биринчи боскичда хайдаш методи билан ошкормас чизикли система

$$\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa}}{0{,}5\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\left(y_{i+1}^{\kappa}\right)\frac{y_{i+1}^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}}{h} - a\left(y_i^{\kappa}\right)\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}}{h}\right] + + f\left(y_i^{\kappa}\right), \; c = 1,2,\ldots,\mu-1,$$

$$y_0^{\kappa+\frac{1}{2}} = \mu_1\left(t_\kappa + 0{,}5\tau\right), \quad y_\mu^{\kappa+\frac{1}{2}} = y_2\left(t_\kappa + 0{,}5\tau\right)$$

ечиб орадиги $y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}\left(c = 0,1,\ldots,\mu\right)$ кийматлар топилади иккинчи боскичда эса

$a(y), t(y)$ чизикли бўлмаган каэффицентлар $y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}$ларни топиш қуйидаги олти нуқтали семетрик схема

$$\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa}}{2} = \frac{1}{2h}\left[a_{i+1}\left(y_{i+1}^{\kappa+\frac{1}{2}}\right)\frac{y_{1+i}^{\kappa+1} - y_i^{\kappa+1}}{h} - a\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa}}{h}\right] + f\left(y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}\right),$$

$$i = 1,2,\ldots,\mu-1, \quad y_0^{\kappa+1} = \mu_1\left(t_\kappa + 1\right), \quad y_\mu^{\kappa+1} = \mu_2\left(t_{\kappa+1}\right)$$

асосида олиб борилади.

Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун ҳайдаш усули.

Мисол: ҳайдаш усули қўлланилиб

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламани ва $u(x,0)=4x(1-x), u(0,t)=u(1,t)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ечим топилсин.

Ечиш: Айтайлик $h=0{,}1;\, l=0{,}01$ бўлсин. Унда $S=\frac{h^2}{l}=1$ бўлади. $u(x,t)$ функциянинг $t=0{,}01$ қатламдаги қийматини аниқлаймиз.

Тўғри юриш: жадвал тузиб, унинг $u_{i0}-$ сатрига $f(x_i)$ $(i=\overline{0;10})$ бошланғич қийматларни тўлдирамиз ва $j=0$ учун

$$a_{1,j+1}=\frac{1}{(2+S)},\quad b_{1,j+1}=\varphi(t_{j+1})+u_{1j}S \qquad (1)$$

$$a_{i,j+1}=\frac{1}{2+S-a_{i-1,j+1}},\qquad b_{i,j+1}=a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1}+Su_{ij}\quad (i=\overline{2;n})\quad (2)$$

формулалар бўйича қуйидагилар ҳисобланади:

$$a_{11}=\frac{1}{3},\qquad b_{11}=u_{10}=0{,}36,\qquad a_{21}=\frac{1}{3-a_{11}}=\frac{3}{8}=0{,}375,$$

$$b_{21}=a_{11}b_{11}+u_{20}=0{,}12+0{,}64=0{,}76,\qquad a_{31}=\frac{1}{3-a_{21}}=\frac{1}{2{,}625}=0{,}381,$$

$$b_{31}=a_{21}b_{21}+u_{30}=0{,}375\cdot 0{,}760+0{,}84=1{,}125$$

Ҳайдаш жадвали

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_{io}$ | 0 | 0,360 | 0,640 | 0,840 | 0,960 | 1,000 | 0,960 | 0,840 | 0,640 | 0 |
| $a_{i1}$ | | 0,333 | 0,375 | 0,381 | 0,382 | 0,382 | 0,382 | 0,382 | 0,382 | |
| $b_{i1}$ | | 0,360 | 0,760 | 1,125 | 1,389 | 1,530 | 1,544 | 1,430 | 1,186 | |
| $u_{i1}$ | 0 | 0,310 | 0,764 | 0,764 | 0,882 | 0,921 | 0,882 | 0,764 | 0,571 | 0 |

Тескари юриш: Чегаравий шартлардан $u_{10,1}=0,(26)$ формулалар бўйича еса $u_{i1}$ $(i=9,8,\ldots,1)$ қийматларни ҳисоблаймиз. Жумладан, $j=0$ да

$u_{91}=(u_{10,1}+b_{91})a_{91}=0{,}813\cdot 0{,}382=0{,}310$

$u_{81}=(u_{91}+b_{81})a_{81}=(0{,}310+10182)0{,}382=0{,}571$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$u_{11}=(u_{21}+b_{11})a_{11}=(0{,}572+0{,}360)0{,}333=0{,}310$

## § 2. 4. Биржинсли консерватив айрилмали схеманинг чегаравий масалаларини ечишга тадбики

Чекли айирмалар методининг физик моҳияти шундан иборатки, жараён кечаётган узлуксиз муҳит унинг дискрет моделига алмаштирилади. Табиийки бу ҳолда жараённинг физик хоссалари сақланиши талаб этилади. Бундай хоссалардан асосийси энг авволо сақланиш қонунларидир. Тўрда (сеткада) сақланиш қонунларини ифодалайдиган чекли айирмаларни **Консерватив айирмалар** дейилади. Маълум чегаравий масалалар синфига тегишли барча масалалар учун ҳисоблаш жараёнининг бир ҳиллигини таъминлайдиган схемани **биржинсли схема** дейилади. Биржинсли чекли айрилмали схема деганда, унинг кўриниши маълум калссга тегишли масаладан ҳам, айрилмали схемани танлаш усулидан ҳам боғлиқ бўлмаган айирмали схемани тушунмиз.

Математик физиканинг узулишга эга коэффицентли стационар ҳамда ностационар масалалари класси учун тузилган биржинсли айирмали схеманинг яқинлашувчи бўлишлиги учун уларнинг консерватив бўлиши **зарурий шарт** ҳисобланади.

Консерватив биржинсли айирмали схема яратиш учун (сетка) тўрда баланс тенгламаларини тузиш керак бўлади. Сўнгра бу баланс тенгламаларида иштирок этган интераллар ва ҳосилалар тақрибан алмаштирилиши лозим. Натижада биржинсли айрилмали сеҳемага эга бўламиз. Консерватив биржинсли айирмали схемани яратишнинг бу усулига интеграл интерноляция усули ёки баланс усули дейилади. Самарский А.А. Теория разностных схем .-М,: Наука, 1977. Интеграл-интерполяция методига А.Н.Тихонов, А.А.Самарскийлар асос солган, кейниги ривожланиши Г.И.Марчукнинг ишларида ўз аксини топган.

Биржинсли консерватив айирмали схемани ва унинг сеткадаги ячейкаларда баланслар тангламалари (сақланиш қонунлари) таркибида қатнашаётган интеграл ва ҳосилаларни чекли айирмалар билан алмаштирилиш принципига асосланган интеграл –интерполяция усулини фильтрация назариясидан олинган конкрет масалада тадбиқ қилишни намойиш этамиз.

Сув омбори ёки канал деворидан $L$ масофада жойлашган доимий $h_{\partial p}$ напорга эга очиқ горизантал зовур (дренаж) қазилган бўлсин. $U(x,t)$ функциянинг зувурдаги $h_{\partial p}$ напордан юқоридаги ер ости сувлари сотҳини ифодалансин.

Сув омборида сув сатҳининг кўтарилиши чизиқли қонуният билан амалга ошсин, шунингдек сув омбор билан зовур орасида жойлашган ер майдони-пласт икки хил фильтрация коэффициентига эга ($\kappa_1$ ва $\kappa_2$), яъни ер майдони бўлак-бўлак бир жинсли бўлсин.

Зовур туби сув ўтказмайдиган жинсдан иборат деб ҳисоблаб, $h_m$ орқали зовур тубидан ер сатҳигача бўлган баландликни, $h_{\kappa p}$ орқали зовур тубидан буғланиш бошланадиган қатламгача бўлган баландликни белгилаймиз, $\psi_0 = h_{\kappa\rho} - h_{\partial p}$

Табийки $U(x,t) > \psi_0$ бўлганда буғланиш содир бўлади, $U(x,t) \le \psi_0$ бўлганда эса буғланиш садир бўлмайди, бу иккала зонанинг чегарасини $x = \ell(t)$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб юқоридаги фаразларни ҳисобга олсак ер ости сувлари сатҳининг кўтарилиб-пасайишини ифодаловчи $U = U(x,t)$ номаълум функцияни топиш учун қуйидаги чегаравий масалани ечишга келинади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left( K_{(x)} \frac{\partial \left(U + h_{\partial p}\right)^2}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{\mu}, \qquad (2.4.1)$$

$$U(x,t)\big|_{t=0} = 0, U(x,t)\big|_{x=0} = \alpha \cdot t, U(x,t)\big|_{x=L} = 0, \qquad (2.4.2)$$

$$\left[U(x,t)\right]\Big|_{x=\ell(t)} = \left[K(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\ell(t)} = 0, \qquad (2.4.3)$$

$$\left[U(x,t)\right]\Big|_{x=\ell_1} = \left[K(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\ell_1} = 0. \qquad (2.4.4)$$

Бу ерда $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0(t)}{Y_0^n}\cdot(U-\psi_0)^n, U>\psi_0;\quad \varepsilon = 0, U<\psi_0;\qquad y_0 = h_m - h_{кр};$

$\alpha -$ ўлчови м/сут бўлган ўзгармас; $K(x) = K_1 \equiv \cos t, 0 < x < \ell_1; K(x) = K_2 \equiv const, \ell_1 < x < L;\quad \varepsilon_0(t) -$ вақтини бўлак-бўлак ўзгармас функцияси (2.4.1)-(2.4.4)масалада қатнашаётган барча $x, t, u, h$ ва ҳакозо ўзгарувчилар турли ўлчовли бўлгани учун, дастлаб уларни ўлчовсиз бўлган ўзгарувчилар билан ифодалашимиз зарур. Шу мақсадда янги функция ва ўзрувчиларни куйидагича киритамиз:

$$H = \frac{U}{U_0},\quad y = \frac{x}{L}, \tau = \frac{K_0' U_0}{\mu\cdot L^2}t;\quad K(y) = \frac{K(y)}{K_0}; \qquad (2.4.5)$$

Бу ерда $K_0 = \max\{K_1, K_2\};\quad \delta = \max\limits_t \varepsilon_0(t)$ бу ҳолда (2.4.5) га асосан (2.4.1)-(2.4.4) ўрнига қўйиб куйидагига эга бўламиз.

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(K^*(y)\frac{\partial H^2}{\partial y}\right) + \beta_4\frac{\partial}{\partial y}\left(K^*(y)\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \rho\gamma_n\cdot\varepsilon^* \qquad (2.4.6)$$

$$H\big|_{\tau=0} = 0;\quad U\big|_{y=0} = \beta_0\cdot\tau;\quad H\big|_{y=0} = 0; \qquad (2.4.7)$$

$$\left[H\right]\Big|_{y=\ell_1^*(\tau)} = \left[K^*(y)\frac{\partial H}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=\ell_1^{*(}(\tau)} = 0; \qquad (2.4.8)$$

$$\left[H\right]\Big|_{y=\ell_1^*} = \left[K^*(y)\frac{\partial H}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=\ell_1^{*(}(\tau)} = 0; \qquad (2.4.9)$$

бу ерда

$$\beta_4 = \frac{h_{\partial p}}{U_0};\quad \beta_0 = \beta_1\cdot\beta_3;\quad \beta_1 = \frac{\delta}{K_0};\quad \beta_3 = \left(\frac{L}{U_0}\right)^2;$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha}{K_0}\cdot\mu; \quad \gamma_n = \frac{\beta_1\cdot\beta_3}{(1-\varphi_0)^n}; \quad \ell_1 = \frac{\ell_1}{L}; \quad \rho = \begin{cases}1, H>\psi_0\\ 0, H<\psi_0\end{cases};$$

(2.4.6)-(2.4.9) масалани интеграл-интерноляция методига асосланган чекли айирмалар методи билан ечамиз.

$$\overline{W}_{\Delta h,\Delta\tau} = \left\{(i\Delta h, j\Delta\tau): \quad i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M}\right\},$$

$$\overline{W}_{\Delta h,\Delta\tau} = \left\{(i\Delta h, j\Delta\tau): \quad i=1_0\overline{0,N},\ j=1_1\overline{0,M-1}\right\},$$

сеткани (тўрни) тузамиз. Бу ерда $\Delta h$-фозовий ўзгарувчи бўйича олинган қадам, $\Delta\tau$-вақт бўйича олинган қадам. Шуни таъкидлаш лозимки $\Delta h$ ва $\Delta\tau$ қадамлар шундай танлаганки айрим сетканинг айрим тугун нуқталари $K^*(y)$ ва $\varepsilon_0^*(y)$ функциялар узулиш нуқталари билан устма-уст тушади. Бундай сеткаларни одатда махсус сеткалар деб аталади.

Потокларни (оқимларни)

$$W_1(y,\tau) = -K^*\frac{\partial H}{\partial y}, \quad W_2(y,\tau) = -K^*(y)\frac{\partial H^2}{\partial y} \qquad (2.4.10)$$

кўришда киритиб (2.4.6) тенглама учун

$$y_{i-\frac{1}{2}} \le y = y_{i-\frac{1}{2}}, \quad \tau_j \le \tau \le \tau_{j+1};$$

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta h \pm \frac{\Delta h}{2}, \quad \tau_j = j,\Delta\tau, \quad i = 1,\overline{N-1}, \quad j = 1,\overline{M-1},$$

тўғри тўртбурчакда баланс тенгламаларини тузамиз. Бу тенглама куйидаги кўринишда бўлади.

$$\int_{yi-\frac{1}{2}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} dy \int_{\tau j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial H}{\partial y}\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{Y_{i+\frac{1}{2}}} dy \int_{\tau j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\omega_2(yi\tau)\right)d\tau + \beta_4\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} dy \int_{\tau j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\omega_1(y,\tau)\right)d\tau - \rho\gamma_n\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} dy \int_{\tau j}^{\tau_{j+1}} \varepsilon^*(y)\,d\tau.$$

(2.4.11) тенгламанинг ҳар бири қўшилувчисини чапдан ўнга қараб мос равишда $J_1, J_2, J_3, J_4$ орқали белгилайлик

$H_{ij} = H(y_i, \tau_j)$,белгилаш киритиб $J_1$ ни

$$J_1 \approx \Delta h(H_{i,j+1} = H_{ij}), \quad \Delta h = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \qquad (2.4.12)$$

Каби аппроксимациялаймиз.

(2.4.8) дан қуйидагини оламиз

$$\frac{\partial H^2}{\partial y} = -\frac{W_2(y,\tau)}{K^*(y)}, \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\omega_1(y,\tau)}{K^*(y)}. \qquad (2.4.13)$$

Иккала (2.4.13) тенгликларни $[Y_{i-1}, Y_i], [Y_i, Y_{i+1}]$ кесмалар бўйича интеграллаймиз. (2.4.8) , (2.4.9) шартларига асосан $\omega_i(y,\tau), \quad \tau = 1{,}2$ патоклар (оқимлар) узлуксиз функциялар бўладилар, $\frac{1}{K^*}$ эса ҳар бир $(y_i, y_{i+1}), i = 0,1,2,\ldots, N-1$ интервалларда мусбат ўзгармасдир. У холда бу интегралларга интеграл ҳисобнинг умумлашган ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин бўлади:

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{W_2(y,\tau)}{K^*(y)} dy = W_2(c,\tau) \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)} \qquad (2.4.14)$$

бу ерда $c \in [y_{i-1}, y_i]$. (2.4.14.) тенгламадаги $W_2(c,\tau)$ ни тақрибан $W_2(y_{i-\frac{1}{2}}, \tau)$ қиймат билан алмаштирсак, $y_{i-1} \le y \le y_i$ бўлганда

$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{W_2(y,\tau)}{K^*(y)} dy \approx \omega_2(y_{i-\frac{1}{2}}, \tau) \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)}$ бўлади.

Худди шундай аппроксимацияни (2.4.13) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларда ҳам амалга олширсак, $J_2$ ва $J_3$лар учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left\{ a_{i+1} \frac{H^2(y_{i+1},\tau) - H^2(y_i,\tau)}{\Delta h} - a_i \frac{H^2(y_i,\tau) - H^2(y_{i-1},\tau)}{\Delta h} \right\} d\tau, \qquad (2.4.15)$$

$$J_3 = \beta_4 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left\{ a_{i+1} \frac{H(y_{i+1},\tau) - H(y_i,\tau)}{\Delta h} - a_i \frac{H(y_i,\tau) - H(y_{i-1},\tau)}{\Delta h} \right\} d\tau,$$

бу ерда $a_i = \left[ \frac{1}{\Delta h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)} \right]^{-1}, a_{i+1} = \left[ \frac{1}{\Delta h} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{K^*(y)} \right]^{-1}.$

Энди $J_2, J_3$ ва $J_4$ ларни кейинчалик ошкормас схемага эга бўладиган қилиб аппроксимациялаймиз. У ҳолда (2.4.11) тенгламани қуйидаги алгебраик тенгламалар (айрилмали схема) кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta h(H_{i,j+1} - H_{i,j}) = \frac{\Delta\tau}{2-\Delta h}\left[a_{i+1}(H^2_{i+1,j+1} - H^2_{i,j+1}\right] - $$
$$- a_i\left(H^2_{i,j+1} - H^2_{i-1,j+1}\right)\Big] + \frac{\beta_4\cdot\Delta\tau}{\Delta h}\Big[a_{i+1}\left(H_{i+1,j+1} - H_{i,j+1}\right) - \qquad (2.4.16)$$
$$- a_i\left(H_{i,j+1} - H_{i-1,j+1}\right)\Big] - \rho\gamma_n\cdot\Delta\tau\cdot\Delta h\cdot в_{j+1}\left(H_{i,j+1} - \varphi_0\right)^n,$$

бу ерда

$$в_{j+1} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau j}^{\tau_{j+1}} \varepsilon^*(\tau)d\tau$$

(2.4.16) система $H_{i,j+1}$ номаълумларга нисбатан чизиқли бўлмаган учун, уни ечишда Ф.Б.Абуталиев ва унинг шогирдлари томонидан муваффақият билан қўлланган чизиқсиз ҳадларни квазичизиқлилаштириш методини қўллаймиз. Бу методга асосан (2.4.16) системадиги $\varphi(H_{i,j+1})$ чизиқсиз ҳадларни қуйидагича чизиқли ҳадлар билан алмаштирилади.

$$\varphi(H_{i,j+1}) \approx \varphi(\widetilde{H}_{i,j+1}) + \left(H_{i,j+1} - \widetilde{H}_{i,j+1}\right)\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\Big|_{z=\widetilde{H}i,j+1}, \qquad (2.4.17)$$

бу ерда $\widetilde{H}_{i,j+1} = H^{(s)}_{i,j+1}$, $S$ - итерация номери. Бу ҳолда $H_{i,j+1}^{(0)} = H_{i,j}$ ни оламиз. Интерация жараёни $\max\limits_j\left|H^{(s)}_{i,j+1} - H^{(s+1)}_{i,j+1}\right| < \widehat{\varepsilon}$, ($\widehat{\varepsilon}$ - берилган кичик миқдор) шарт бажарулгунча давом эттирилади. (2.4.16) системадаги чизиқли бўлмаган ҳадларда (2.4.17) квазилинеаризацияни амалга ошириб сўнгра $n=0$, $n=1$, $n=2$ ва $n=3$ ҳолларни алоҳида қараб 4 та чизиқли чекли айирмали системага эга бўламиз. Бу ҳолда $a_i, a_{i+1}$ ва $в_{j+1}$ коэффецинтлар

$$a_i = K^*(y_{i-1/2}), a_{i+1} = K^*(y_{i+1/2}), в_{j+1} = \varepsilon_0^*\left(\tau_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

формулалар билан ҳисобланади. Юқорида таъкидлангандек сетка (тўр) шундай танлаганки $K^{*}(y)$ ва $\varepsilon_0^{*}(c)$ функциялар ҳар бир $\left[y_i, y_{i+1}\right]\times\left[\tau_j, \tau_{j+1}\right]$ тўғри тўрт бурчакда узлуксиз бўлиб қолади.

Ҳосил бўлган 4та чизиқли чекли айирмали системани ўнг прогонка методи билан ечамиз. Айирмали схемалар назариясидан агар соф ошкормас айирмали схема билан иш кўрилса прогонка методи сўзсиз турғун бўлади,яъни ҳисоблашдаги яхлитлаш хатолиги ўсмайди.

Шунинг таъкидлаш лозимки квазичизиқли ва чизиқли бўлмаган параболик типидаги тенгламаларга қуйилган чегаравий масалаларни интеграл-интерполяция методи билан ечишда ошкормас схемаларни аппроксимациялаш пайтидаги хатоликларини баҳолаш масаласи А.А.Самарский томонидан ҳал қилинган. Бу масала ҳақидаги батафсил маълумот ушбу А.А.Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных задач параболического типа. ЖВМ и МФ, 1962,Т2№1, А.А.Самарский. Теория разностных схем.
-М;Наука, 1977, А.А.Самарский., Е.С.Николаев Методы решения сеточных уравнений.-М:Наука,1978. адабиётларида ўз аксини топган.

Чекли айрилмали схеманинг яқинлашувчи бўлишлиги олинган ечимнинг яхши сифатли (аниқлиги юқори) бўлишлигига кафолат беролмайди.

Олинган сетка (тўр) анча йирик бўлганда яқинлашувчи схема билан ишлаганда ҳам айрим ҳолларда олинган ечимини амалётга яроқсиз қилиб қўядиган “чекланиш”лар учраб туради. Шунинг учун ҳам схемаларни эксперимент текширувидан ўтказилади, яъни бирор соддароқ тест билан текшириб кўрилади. Бундай тестлар сифатида қўйилган масаланинг автомодел ечими олинади. Ушбу параграфда ўрганилган (1)-(3) масаланинг ҳам автомодел ечими қурилган ва уни тест сифатида ишлатиш мумкин.

Таклиф қилинган бир жинсли консерватив схемак-интеграл-интерполяция методи билан сонли ечим олинган ва $\kappa_1 / \kappa_2$ нисбат турлича бўлгандан ечим таҳлил қилган. Шунингдек олинган сонли ечимлар ўша ҳарактеристикали автомодел ечим билан солиштирилиб кўрилган.

Бунда $\varepsilon_{\circ}(t)$ сифатида дала эксперименти натижаларига суяниб буғланиш интенсивлиги ҳар бир ой учун ўртача-суткалик қиймати қуйидаги жадвалда кўрсатилгандек олинди:

**Жадвал**

| Ойлар | Январ | Феврал | Март | Апрель | Май | Июнь |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Буғланиш интенсивлиги ш/сут | 0,0000 | 0,0000 | 0,0036 | 0,0046 | 0,0620 | 0,0700 |
| Ойлар | Июль | Август | Сентябрь | Октябрь | Ноябрь | Декабрь |
| Буғланиш интенсивлиги ш/сут | 0,0750 | 0,0700 | 0,0600 | 0,0500 | 0,0080 | 0,0000 |

Бу холда буғланиш интесивлиги ўрта йиллик ҳисобда 0, 0324 м/сут.ни ташкил этади.

Ҳисоблашлар натижаларини келтирамиз. Улар қуйидаги қийматларда олиб борилди:

$h_e = 20m,\quad h_{\kappa\rho} = 21m,\quad h_m = 24{,}68$ (ҳаракат автомодел бўлганда $h_m = 25$ м), $\alpha = 0{,}013$м/сут:;

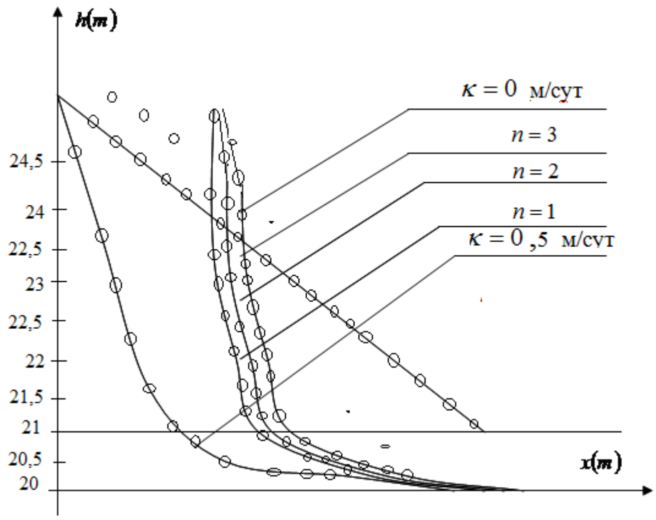
$L = 1000m,\quad \ell_1 / L = 0{,}025;\quad 0{,}05;\quad 0{,}1;\quad 0{,}25;\quad 0{,}5;$

$0{,}75;\quad K_1 / K_2 = 0{,}005;\quad 0{,}05;\quad 1, K_2 = 10$м/сут,

$\frac{K_1}{K_2} = 1,\quad 20{,}40{,}60{,}100,\quad K_1 = 0{,}5$ м/сут. Бу ердаги

$L, \ell_1, h_{g\rho}, h_{\kappa\rho}, h_m, K_1, K_2$ ва $\alpha$ орқали шу параграфлар бошидан эслатилаган миқдорларини англатади.

Сетка (тўр) тузилганда қадамлар фазовий кординаталар бўйича 215м.,вақт бўйича 30 сутка қилиб олинади.




**4-расм.**

$\varepsilon_\circ(t)$ учун жадвал 3 дан қиймат олинган, $K_1 = 10$ м/сут; $K_2 = 0{,}5$м/сут., $t = 360$ сут ҳолдаги депрессия чизиғи.

## III. Хулоса ва таклифлар

1. Оддий дифференциал тенглама ва хусусий хосилали дифференциал тенгламалар ҳамда чизиқли бўлмаган оддий ёки хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган турли чегаравий масалаларнинг ечишнинг тақрибий методларини синфларга ажратилган.

2. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалани чекли айирмали метод билан ечиш ғояси асосланан.

3. Оддий ҳосилани, хусусий ҳосилаларни ва юқори тартибли ҳосилаларни чекли айирма билан тақрибан алмаштиришда Тейлор формиласидан фойдаланиш ғояси асосланган.

4. Чекли айирмали схемалар ёрдамида дфферкнциал тенглама ва чегаравий шартлар алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келиниши ва бу системанинг ечими мавжуд ва ягона бўлишлигини кўрсатилган.

5. Чекли айирмали тенгламалар системасининг ечими ягоналигини исботлашда максимум принципидан фойдаланилган.

6. Айирмали схеманинг биржинсли бўлиши ва консерватив бўлиши чегаравий масалаларнинг берилган классига нисбатан яроқли бўлишлиги асосий мезон деб олинган.

7. Параболик типдаги тенгламалар учун тўр (сетка) методини асослаш ва ҳосил бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усулларидан айирма қаралган.

8. Айирмали тенгламаларни ҳайдаш ўндан ҳайдаш ва чапдан ҳайдаш методлари ишлаб чиқилган.

9. Конкрет чегаравий чегаравий масалани ечишда ўлчовли ўзгарувчиларни ўлчовсиз ўзгарувчанларга ўтказиш усули ишлаб чиқарилган.

10. Номаълум чегарали (қўзғалувчан чегарали) чегаравий масалаларни ечишда интегра-интерполяция методини қўллаш батафсил ўрганилган.

11. Интеграл-интерполяция методининг афзаллиги, шунингдек матиматик анализнинг ўрта қиймат ҳақидаги теореманинг қўланилиши ҳақида тавсиялар берилган.

12. Чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламаларни квазичизиқлаштириш ёрдамида чизиқли системага келтириш мумкинлиги кўрсатилган.

13. Чекли айирмали схеманинг яқинлашиши тезлиги, яқинлашувчи, турғун бўлиши ҳақида амалий мисоллар ёрдамида тушунтиришлар олиб борилган.

14. Ҳар бир бобда назарияни мус тахкамловчи машқлар-мисоллар келтирилган. Мисолларнинг ечимлари турғунлик шартини қаноатлатирувчи эканлиги кўрсатилган.

15. Икки қатламли айирмали схемалар ва уларнинг турғунлиги текширилган.

16. Тежамкор айирмали схемалар ва уларнинг қўлланиш соҳаси ҳамда яқинлашиши масаласи қаралган.

17. Интеграл-интерполяция методи асосида ошкормас схема тузилган ва FORTAN олгоритим тилда сонли ечим олинган сенли ечишни график кўринишда тасвирланган.

## IV фойдаланилган адабиётлар ва манбалар.

1. Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б. ва бошқа Анализ динамики подземных вод аналитическими и численными методами.-Ташкент; ФАН, 1975.
2. Абуталиев Ф.Б., Хожибоев Н.Н., Умаров У.У., Измайлов И.И., Методы математического моделирования гидролических процессов.-М.:Недра,1972.
3. Абуталиев Ф.Б., Мирзаев А.Н. Способ построяния автомодельных решений для задач вытеснеция в многопластовых системах. В сб. “Вопросы вычислительной и прикладной математики” – Ташкент:1980, вы п.60.
4. Бегматов А., Жомуротов К. О приближенном ришении одной задачи филтрации при наличии нелинейного испарения.
   В сб.и “Краевые здачи для уравнений математической физики”.-Ташкент, ФАН,1980.
5. Беллман Р., Калаба Р. Квази линаризация и нелинейные краевые задачи.-М.:Мир,1968.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциа льные уравнения) М-:Наука,1975.
7. Бабенко К.И. (ред) Теоретические основы и констри урование численных алгоритмов задач математический физики. М.наука,1979
8. Ванберг А.М. Матемаческое моделеривание процессов переноса. Решение нелинейных краевых задач. Москва-Йерусалим. 2009.
9. Ващенко Г.В. Вычислительная математика. Основы конечных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Красноярск: Сиб ГТУ,2005.
10. Вашенко Г.В. Вычислительная математика Основы алгебраической и тригонометричекой интерноляции. Кросноярси: СибГТУ,2008.

11. Власов а Б.А., Зарубин В.С. Кувыркин Г.Н. Приближженные методы математической физики: Учебн. для вузов.М.Изд-во МГТУим Н.ЭБаумана,2001.
12. Ворожцов Е.В Разностные методы решения задач механики сплошных сред (учебное пособие). Новосибирск: НГТУ,1998
13. Ворожцов Е.В. Сборник задач по теории разносиных схем (учебние посбие). Н, овосибирс:НГТУ,2000.
14. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука 1971.
15. Грунд Ф. Программирование на языке ФОРТРАН IV.-М:Мир,1976
16. Демидович Б-П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967.
17. Ильгамов М.А., Гильмонов А.Н. Неотражоющие условия на границах расчетной области. М.: физмат мт.2003.
18. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари, Ташкент, 2002.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука 1978.
20. Князева А.Г. Различные варианты метода прогнки. Метадические указания К выполнению лабораторных работ. Томск: ТПУ,2006.
21. Крылов В.И., Бобков В.В Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II/ М.: Наука 1977.
22. Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сппошных сред. Курс лекций. М.: МАТИ, 2006.
23. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделировние дефформирования, повреждаемости. И разрушения жупругих материалов и конструкций.М.: МФТИ, 2008
24. Ладиженская о,а., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейниые и квазилинейные уравнения параболического типа.М.:Наука,1967.
25. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.-М.:Наука,1977.

26. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.-М.:Высшая школа,1977.
27. Рубинштейн Л.И. Проблема Стерана.-Рига:Звайзгне,1967.
28. Самарский А.А. Однородные разностные схемы для нелинейных задач параболического тыпа.ЖВМ и МФ,1962,т.2.№1
29. Самарский А.А. Теория разносных схем.М.:Наука 1977.
30. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методырешения сетогных уравнений. М.:Наука, 1978
31. Салоҳитдинов М. Матиматик физика тенгламалари. Ташкент, "Ўзбекистон",2002
32. Тихонов А.Н., Самариский А.А. Об однородных схемах. ЖВМи МФ,1961.Т.1,№1
33. Фридман А. Уравнения с гастными производными параболичекого типа М.: Мир, 1968.