

**УЗБЕКСКОЕ АГЕНСТВО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ  
ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Кафедра “Программное обеспечение информационных  
технологий”**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ  
ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»  
для студентов направления образования  
5521900-«Информатика и информационные технологии»**

**ТАШКЕНТ - 2008**

**Авторы:** Камилов М.М., Салахутдинов В.Х. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Математическое моделирование» /ТУИТ.59с.Ташкент, 2008

Методические указания по курсу «Математическое моделирование» предназначены для студентов направления 5521900-«Информатика и информационные технологии». Учебным планом предусмотрено проведение практических занятий в 5-м семестре в объеме 16 часов.

Практические занятия включают в себя освоение широко распространенных методов математического моделирования технических, экономических, управленческих, медицинских и т.д. задач. Приводится постановка задач моделирования, их математические модели, описываются их специфические особенности и подходы к решению. Даются варианты заданий составления моделей различных прикладных задач для самостоятельного изучения предмета.

Рекомендована к размножению НМС ТУИТ (протокол №\_\_от \_\_\_\_2008г).

Рецензенты:

Зав.кафедрой «Информатика»

ТГТУ им. А.Р.Беруни, д.т.н., проф

Соатов.М.

Доц. кафедры «Информационные системы  
в железнодорожном транспорте»

ТИИЖТ. , к.т.н.

Ибрагимов Р.И.

Ташкентский университет информационных технологий. 2008

## Содержание

Практическое занятие №1 .....	4
Система линейных алгебраических уравнений	
Практическое занятие №2 .....	7
Задача управления движением	
Практическое занятие №3 .....	19
Почему строят ступенчатые ракеты	
Практическое занятие №4 .....	28
Теория свободных струй Гельмгольца - Кирхгофа	
Практическое занятие №5 .....	30
МОДЕЛИ молекул	
Практическое занятие №6 .....	32
Сверление лазером	
Практическое занятие №7 .....	36
Исследование напряжений в конструкциях и начала метода конечных элементов	
Практическое занятие №8 .....	38
Модели популяций	
Практическое занятие №9 .....	44
Дифференциальная модель сахарного диабета	
Практическое занятие № 10 .....	49
Стохастические модели дорожного движения	

## Практическое занятие №1

### СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

#### СТАНДАРТНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗЕ (НА ПРИМЕРЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МНК)

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся задачи анализа и синтеза реальных систем различной природы: Механических, гидравлических, электрических и т.п. экономических транспортных, энергетики, и т.д.

Рассмотрим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными :

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

или в векторно – матричной форме :  $Ax = b$ .

Есть соответственно матрица коэффициентов вектор-столбец свободных членов и вектор-столбец неизвестных.

Если матрица невырожденная, т.е. если ее определитель не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение. Значения неизвестных  $x_i$   $i=1, \dots, n$  могут быть получены по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Здесь  $\det A_i$ ,  $i=1, n$ , и  $\det A$  – соответственно определители матрицу  $A_i$ ,  $i=1, n$ , и  $A$ . Матрица  $A_i$  образуется из матрицы  $A$  заменой ее  $i$  – го столбца столбцом свободных членов.

#### Прямые и итерационные методы решения СЛАУ

Однако этот метод с вычислительной точки зрения неэффективен и на практике не принимается, так как его реализация требует выполнения значительного количества арифметических операций и соответственно больших затрат машинного времени. Кроме того, он очень чувствителен к ошибкам округления.

Применяемые на практике численные методы решения в систем линейных алгебраических уравнений по принципом организации вычислений делятся на два класса : прямые (точные) и итерационные (приближение).

1.Прямыми называются методы, позволяющие получить точное решение за конечное число арифметических операции. К числу таких методов относится метод Гаусса с выбором главного элемента.

2. Итерационные методы даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, дают приближенное решение системы с наперед заданной точностью. Точное решение в данном случае теоретически может быть получено как результат бесконечного процесса. Характерным представителем этого класса является метод Зейделя.

### Метод Гаусса с выбором главного элемента

Процесс решения СЛАУ данным методом делится на два этапа:

1. На первом этапе (прямой ход) последовательным исключением неизвестных составляется преобразование эквивалентная система уравнений с треугольной матрицей, в которой все элементы под главной диагональю равны нулю. При этом одно из уравнений содержит только одну неизвестную, а в каждом следующем добавляется еще по одной переменной.

2. На втором этапе (обратный ход) решают преобразованную систему, последовательно с помощью элементарных вычислений значения неизвестных.

Рассмотрим алгоритм метода.

1. Прямой ход: Среди элементов  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, n$ , матрицы  $A$  выбирается наибольший по модулю  $a_{pq}$ , называемый главным элементом. Соответствующая строка матрицы  $A$  с номером  $p$  называется главной строкой. Предположим, что  $a_{pq} = a_{11}$ . Если не так, то меняют местами первую строку со строкой  $p$  и первый столбец со столбцом  $q$  и осуществляют соответствующую перенумерацию коэффициентов и неизвестных.

Информация о перенумерации запоминается. В результате этих операции первая строка становится главной.

2. Полученное на предыдущем этапе первое уравнение системы делят на

$$a_{11} = a_{pq} : x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1,$$

где  $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ ;  $d_1 = b_1/a_{11}$

3. Исключают неизвестную  $x_1$  из каждого уравнения исходной системы, начиная со второго, путем вычитания уравнения шага 2, умноженного на коэффициент  $a_{i1}$ ,  $i=2, \dots, n$ , при  $x_1$  в соответствующем уравнении. Отбрасывают главную строку и первый столбец матрицы  $A$  и получают преобразованную систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \text{-----} \\ c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \dots + c_{nn}x_n = d_n \end{array} \right\},$$

где:  $c_{ij} = a_{ij} - c_{ij} a_{i1}$ ;  $d_i = b_i - d_1 a_{i1}$ ,  $i=2, \dots, n$ ;  $j=2, \dots, n$ .

4. Над системой шага 3 повторяют операции пп 1-3, в результате чего получают систему уравнений, содержащую неизвестные  $x_3, \dots, x_n$ . Такие преобразование продолжают до тех пор, пока не получают одно уравнение с одним неизвестным  $c_{nn}x_n = d_n$ . Это уравнение также считается главным.

5. Объединяют все главные уравнения, в результате чего образуется система уравнений с треугольной матрицей, эквивалентной исходной:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \text{-----} \\ c_{nn}x_n = d_n \end{array} \right\}$$

Обратный ход: из системы шага 5 неизвестные  $x_1, \dots, x_n$  определяют в обратном порядке по формулам:

$$x_n = d_n / c_{nn};$$

$$x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1, n} x_n;$$

-----

$$x_1 = d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \dots - c_{1n}x_n$$

В случае вырожденной матрицы  $A$  в процессе формирования системы уравнений шага 5 будет получено значение  $c_{nn} = 0$

Выбор в качестве главного наибольшего по модулю элемента матрицы  $A$  обеспечивает наименьшую величину  $a_{iq}/a_{pq}$ , на которую умножается главная строка в процессе последовательного исключения неизвестных. Метод Гаусса с выбором главного элемента надежен, прост и широко принимается при решении СЛАУ на ЭВМ

#### Метод Зейделя

Суть итерационного метода Зейделя состоит в следующем.

Задаются некоторым произвольным вектором  $x[0]$ , являющимся начальным приближением к искомому решению  $x^*$ . Затем строят последовательность приближенных значений  $\{x[k]\}, k=0,1,2,\dots$ , сходящихся к точному решению системы  $x^*$ .

Говорят, что последовательность векторов  $x[0], x[1], x[k], \dots$  сходится к вектору  $x^*$  ( $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = x^*$ ), если для любого  $\epsilon > 0$  существует натуральное число  $N$ , начиная с которого ( $k \geq N$ ) выполняется условие  $\|x^* - x[k]\| < \epsilon$

Здесь символом  $\|\dots\|$  обозначена норма вектора.

#### Алгоритм метода Зейделя состоит в следующем.

1. Исходную СЛАУ разрешают относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_n$ , т.е. приводят к виду:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \text{-----} \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{array} \right\}$$

Такое преобразование всегда выполнима для системы, определитель которой не равен нулю, и может быть осуществлено различными способами.

2. Задают начальное приближение  $x[0] = \{x_1[0], \dots, x_n[0]\}$ .

Начальный вектор может быть выбран произвольно, однако, необходимо использовать всю имеющуюся информацию о системе уравнений, чтобы  $x[0]$  располагался как можно ближе к точному решению системы  $x^*$ .

3. В первое уравнение системы подставляют координаты точки  $x[0]$  и вычисляют новое значение первой координаты:

$$X_1[1] = c_{11}x_1[0] + c_{12}x_2[0] + \dots + c_{1n}x_n[0] + d_1$$

Используя вычисленное значение  $X_1[1]$  и начальные значения остальных переменных  $X_2[0], \dots, X_n[0]$ , из второго уравнения системы определяют новое значение второй координаты:

$$X_2[1] = c_{21}x_1[0] + c_{22}x_2[0] + \dots + c_{2n}x_n[0] + d_2$$

Используя аналогично уже вычисленные приближения, получают значения всех остальных координат. Так, последняя координата будет иметь значение :

$$X_n[1] = c_{n1}x_1[0] + c_{n2}x_2[0] + \dots + c_{nn}x_n[0] + d_n$$

В результате будет определено первое приближение  $X[1]$  к решению системы  $x^*$ .

4. Начальный вектор  $x[0]$  заменяют вектором  $X[1]$  и вычисляют следующее приближение. В общем случае  $k+1$  приближение определяют по формулам :

$$X_1[k+1] = c_{11}x_1[k] + c_{12}x_2[k] + \dots + c_{1n}x_n[k] + d_1;$$

$$X_2[k+1] = c_{21}x_1[k] + c_{22}x_2[k] + \dots + c_{2n}x_n[k] + d_2;$$

$$X_n[k+1] = c_{n1}x_1[k] + c_{n2}x_2[k] + \dots + c_{nn}x_n[k] + d_n;$$

---

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока все  $X_i[k+1]$  не станут достаточно близкими к  $X_i[k]$ . Итерации прекращают при выполнении условия :

$$\max_i |X_i[k+1] - X_i[k]| \leq \epsilon, \quad i=1, n$$

где  $\epsilon$  – некоторое заданное положительное число (точность вычисления).

## Практическое занятие №2

### ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

#### 2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управление транспортным средством (велосипедом, автомобилем, кораблем), движущимся от одной заданной точки к другой, добавлена общая задача, важная в таких весьма сложных прикладных областях, как планирование полета к Луне или проектирование управляемой ракетой. Задачи такого типа принадлежат к более широкому классу задач теории управления, сутью которых является перевод системы из одного состояния в другое по экономически выгодному и практически реализуемому пути (часто называемому траекторией системы). К этому обширному классу задач

принадлежит, например, планирование постройки здания с минимальными затратами. В более простых задачах, относящихся к управлению наземными или морскими транспортными средствами, автомобиль или корабль можно моделировать геометрической точкой, движущейся в двумерном пространстве, в котором введена декартова система координат  $(x, y)$ . Траектория точки представляет собой параметрическую кривую, задаваемую соотношениями  $x=x(t), y=y(t)$ . В большинстве случаев в качестве параметра используется текущее время  $t$ , но в некоторых задачах оказывается возможным исключить этот параметр и получить более простое уравнение траектории. (В более общих задачах управления просто используется больше координат  $x_1(x), x_2(x), x_3(x), \dots, x_n(x)$ , и движение системы соответствует движению точки в многомерном пространстве. Решение задачи управления состоит из двух этапов. Во-первых, путь системы должен удовлетворять определенным условиям, например следующим:

- 1) Проходить от точки  $(x, y) = (0, 0)$  до точки  $(x, y) = (a, b)$ .
- 2) Лежать в заданной области (в данной части плоскости, например для корабля, который движется лишь по воде, но не по суше).
- 3) Минимизировать какую-либо величину экономического характера, которой может быть стоимость израсходованного топлива, затраченное время или общие затраты управляющего.

Второй этап решения состоит в преобразовании его в последовательность инструкций оператору; путь автомобиля, например, выбирается при помощи вращения руля. Если проградуировать поворот руля  $a$  (по часовой стрелке или в обратном направлении, отсчитывая от нейтрального положения), то инструкцию оператору можно записать в форме: «в момент времени  $t$  установить положение  $a=F(t)$ , где функция  $F$  определяется по времени  $t$  согласно сопроводительной таблице». С самого начала удобно делать различие между «переменными состояниями»  $(x, y)$ , которые задают положение и, возможно, ориентацию системы, и «переменными управления»  $a$ , являющимися в действительности точными инструкциями водителю. В модели это различие состоит в том, что  $a$  меняет положение объекта в плоскости

$(x, y)$ , но значения  $x, y$  непосредственно не влияют на  $a$ , так что водитель может в определенных границах по своему выбору изменять  $a$  достаточно произвольным образом. Существование ограничений на  $a$  весьма очевидно в задаче об управлении рулем. В самом деле, невозможно вращать руль в одном направлении до бесконечности!

Суммируя сказанное, получим, что математическая модель задачи управления состоит из двух систем функций

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ a(t) &= (a_1, a_2, \dots, a_m), \end{aligned}$$

где векторы принадлежат к векторным пространствам различных размерностей, и уравнений, которые могут быть как алгебраическими вида

$$f(x, a, t) = 0,$$

так и дифференциальными вида

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(x, \alpha, t), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n. \alpha$$

Может показаться странным, что в уравнения входят только первые производные. Это, однако, естественно, так как мы имеем право ввести любое число переменных  $x$ . Так, например, в одномерном пространстве можно использовать переменную  $x_1(t)$  для обозначения положения точки,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  для обозначения скорости и  $x_3(t) = \ddot{x}_1(t)$  для обозначения ускорения.

## 2.2. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОБЛАСТИ

Для иллюстрации возможных типов возникающих задач удобно воспользоваться простыми примерами, в которых основная модель включает лишь двумерное движение точки. Первый пример показывает влияние ограниченности области, внутри которой осуществляется управление.

### ПРИМЕР 1

Найдем кратчайший путь от точки  $A$  с координатами  $(x, y) = (-2, 0)$  до точки  $B$  с координатами  $(x, y) = (2, 0)$  на плоскости, из которой исключена область  $D$ , определенная неравенством  $x^2 + y^2 < 1$ . (Рассматриваемый пример описывает, в частности, как обойти круглое озеро, не промочив ног!) Пример иллюстрируется на рис. 2.1.

По определению, кратчайшим расстоянием между двумя точками на плоскости является соединяющий их отрезок прямой.

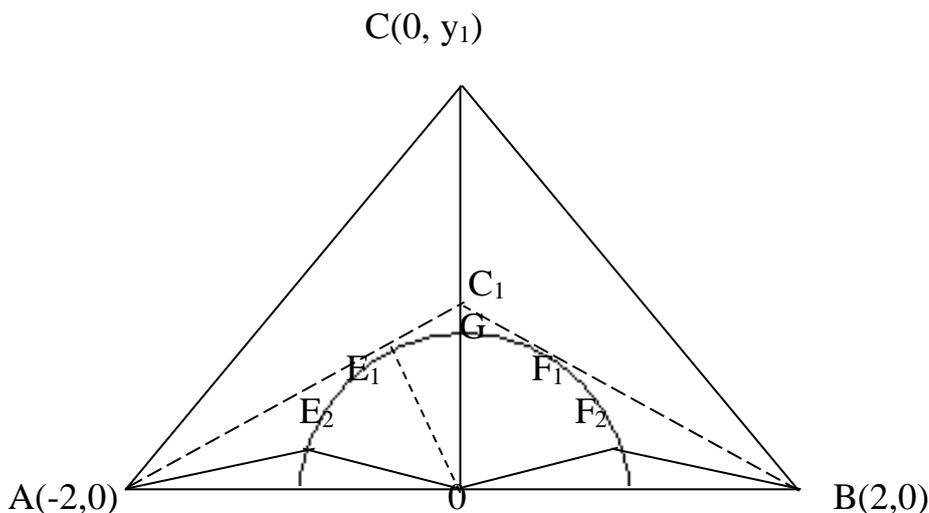


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга

Так, если  $P, Q$  — некоторые точки пути, обладающие тем свойством, что прямая линия  $PQ$  не имеет пересечений с областью  $D$ , то искомым путь  $PQ$  должен быть прямолинейным. Рассмотрим теперь путь  $ACB$ , где  $C$  имеет координаты  $(0, y_1)$ , а  $y_1$  достаточно велико, чтобы отрезки  $AC$  и  $CB$  не пересекались с  $D$ . Тогда по теореме Пифагора

$$ACB = 2(4 + y)$$

и, следовательно, при убывании  $y_1$  путь сокращается. Будем уменьшать  $y_1$  до тех пор, пока  $AC$  не коснется окружности ( $C_2$ ). Тогда  $\angle OAC_1 = \pi/6 = 30^\circ$ . Этот путь является наилучшим среди путей, составленных из двух отрезков прямых линий. Если теперь учесть, что  $\angle E_1OC_1 = \alpha \operatorname{tg} \alpha$ , дуга  $E_1F$ , равна  $2\alpha$ , и что  $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$  для всех  $\alpha$ , принадлежащих интервалу  $0 < \alpha < \pi/2$ , то найдем, что путь, состоящий из отрезка  $AE_2$ , дуги  $E_2F_2$  и отрезка  $F_2B$ , является более коротким, чем  $AC_1B$ . На той стадии решения задачи, которой мы сейчас достигли, ясно, что кратчайший путь состоит из двух отрезков прямых линий и дуги окружности. Для окончательного решения задачи рассмотрим путь  $(AE_2, \text{дуга } E_2F_2, F_2B)$ , где  $\angle LAOE_2 = \angle ZBOF_2 = \beta$ . Длина этого пути равна  $2s$ , где

$$s = AE_2 + \text{arc}E_2F_2 = \{(2 - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta\}^{1/2} + \pi/2 - \beta.$$

$$\cos \beta = 1/2.$$

Тогда  $\beta = 60^\circ$ .

Следовательно, путь  $AE_2GF_2B$  действительно кратчайший.

Полученный результат иллюстрирует две важные теоремы. Кратчайший путь состоит из дуг, которые представляют собой либо естественные кратчайшие пути в пространстве, либо ограничивают область, в которой допускается движение; переход кратчайшего пути с одной дуги на другую происходит по касательной.

#### ДВИЖЕНИЕ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Вторая весьма поучительная задача — это хорошо известная проблема выбора наилучшего курса яхты, если постоянны скорость и направление ветра (см. рис. 2.2). Пусть ветер дует с востока.

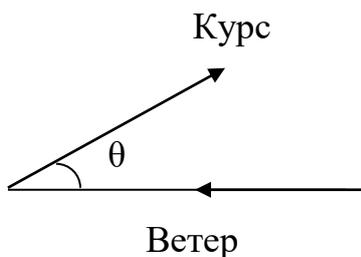


Рис. 2.2. Ветер и курс

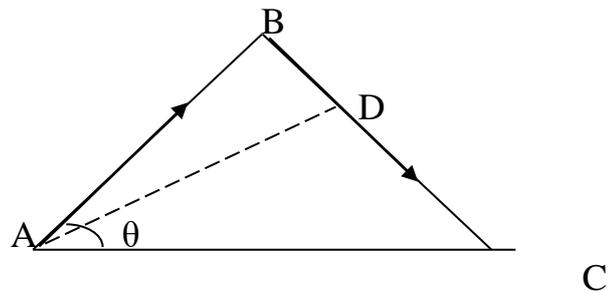


Рис 2.3. Плавание с переменным галсом

Рассмотрим курс, пролегающий под углом  $\theta$  к востоку. Тогда скорость яхты зависит от угла  $\theta$ , и если  $\theta$  достаточно близко к нулю, скажем  $-\beta < \theta < \beta$ , продвижение прямо по заданному курсу невозможно. Однако при  $\theta > \beta$  или  $0 < -\beta$  с увеличением значения  $|\theta|$  скорость движения яхты возрастает.

При условии  $\beta < \pi/2$  продвижение в восточном направлении всегда возможно, если выбрать путь с изменением курса. Формулировка задачи состоит в следующем: «Когда выгоднее идти галсами, чем прямо по заданному курсу?»

## ПРИМЕР 2

Чтобы придать определенность изложенным выше соображениям, рассмотрим модель, в которой скорость  $v$  равна

$$v = v_0(1 - 2 \cos \theta)$$

при  $0 < \theta < \pi/3 = 60^\circ$ , где  $v_0$  — положительное действительное число. Курс, соответствующий наиболее быстрому движению в восточном направлении, получается в случае, когда угол  $\theta$  выбран так, чтобы величина

$$\frac{dx}{dt} = v_0(1 - 2 \cos \theta) \cos \theta$$

имела максимальное значение, т. е. когда

$$v_0 \{1/8 - 2(\cos \theta - 1/4)^2\}$$

максимально. Максимум достигается при  $\theta = \theta_0$ ,  $\cos \theta_0 = 1/4$  и, следовательно,  $v = \sqrt{2} v_0$ .

Естественно, что лучше всего идти галсами, если место назначения расположено на востоке. Теперь, однако, предположим, что конечный пункт лежит на прямой  $AD$ , так что  $\angle CAD = \gamma > \beta$ . Тогда время плавания галсами равно

$$\frac{AB}{(1/2)v_0} + \frac{CD}{(1/2)v_0} = \frac{AD}{\sin 2\theta_0} \left\{ \frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin(\theta_0 + \gamma)}{(1/2)v_0} \right\}$$

а время, затраченное на плавание по прямолинейному курсу  $AD$ , есть  $AD/v_0(1 - 2 \cos \gamma)$ . Плавание галсами более выгодно, когда

$$\frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin(\theta_0 + \gamma)}{(1/2)v_0} < \frac{1}{1 - \cos \gamma}$$

или, что эквивалентно, при условии

$$4(1 - 2 \cos \gamma)(\sin \theta_0 \cos \gamma) < \sin 2\theta_0 \quad (= 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0).$$

Запишем это неравенство в виде

$$2 \cos^2 \gamma - \cos \gamma - 1/8 > 0,$$

т. е.

$$\left(\cos \gamma - \frac{1 + \sqrt{2}}{4}\right) \left(\cos \gamma + \frac{\sqrt{2} - 1}{4}\right)$$

Изложенные выше соображения применимы, однако, лишь при  $\gamma < \theta_0$ ,  $\cos \gamma > 1/4$  и, следовательно, плавание галсами несомненно предпочтительно при условии

$$1/4 < \cos y < (1 + \sqrt{2})/4.$$

Когда  $y > 0$ , курс  $AD$  короче, чем  $AB + BD$ , а скорость выше, так что прямолинейный курс, конечно, выгоднее (см. рис. 2.4).

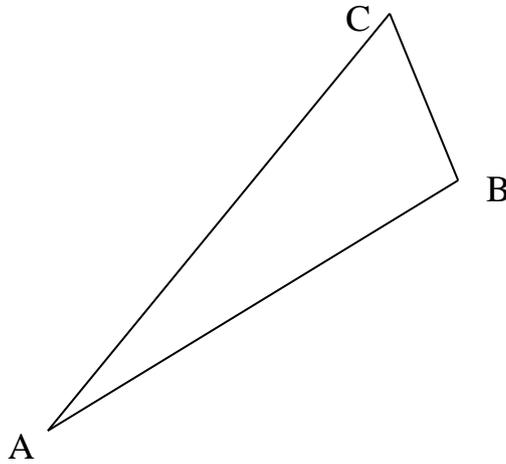


Рис. 2.4. Когда не следует менять галс.

путь. Этот результат для конкретного примера. Однако он применим при любых разумных соотношениях между скоростью и курсовым углом.

Значение этого примера состоит в иллюстрации того факта, что оптимальное решение не всегда должно быть гладкой кривой. В классическом вариационном исчислении проводится различие между наилучшим решением в классе гладких функций (слабые вариации) и наилучшим решением в классе непрерывных, но не обязательно гладких функций (сильные вариации). Общая теория вариационного исчисления позволяет рассматривать задачи, в которых скорость зависит как от положения в пространстве, так и от направления движения — например, задачу управления яхтой в случае, когда принимаются во внимание и течение, и ветер. Однако решение таких задач требует гораздо более глубоких математических знаний, поэтому интересующимся читателям следует прежде прочесть какую-либо хорошую книгу по вариационному исчислению.

### 2.3 ДВИЖЕНИЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОИЗВОДНЫЕ

Следующими в порядке возрастания сложности являются задачи, в которых различными способами ограничиваются скорости изменения переменных состояния. Это важный класс задач, так как в большинстве случаев непосредственно управлять скоростью или положением движущегося тела невозможно; лишь компоненты ускорения или даже производные более высоких порядков поддаются управлению. Задачи с ограничениями на ускорения могут быть

чрезвычайно сложными. Существует, однако, важный подкласс, состоящий из задач с управлением только по одной переменной, ограничения

значений которой и обуславливают существование оптимального решения. При этом оказывается, что решение должно соответствовать граничным значениям переменной управления, и задача сводится к тому, чтобы определить, когда нужно переключить управление с одного граничного значения на другое.

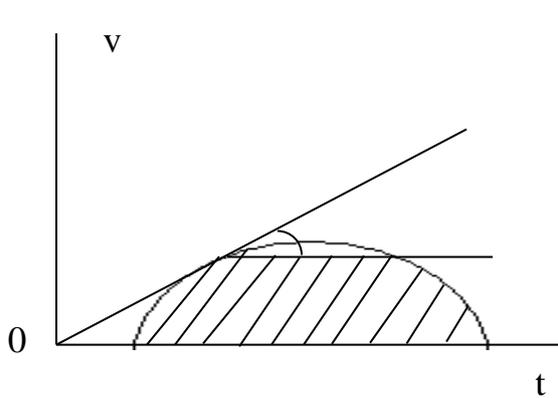


Рис. 2.5. График зависимости скорости автомобиля

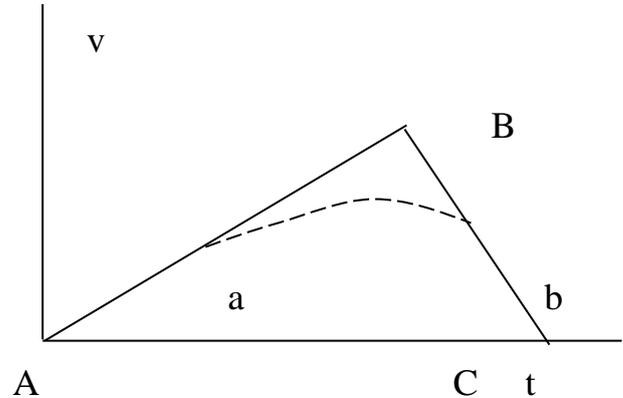


Рис. 2.6. Ускорение и замедление от времени.

Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению. Лишь силы, тянущие или толкающие машину. Направление движения будем считать положительным; предположим также, что можно развить ускорение, не превышающее в положительном направлении величины  $a$ , а замедление по абсолютной величине не превышает  $b$ . Тогда ускорение  $f$  ограничено значениями

$$-b < f < a.$$

Полезным методом представления результатов является диаграмма скорость — время, показанная на рис. 2.5. Задача состоит в том, чтобы найти минимальное время, необходимое для прохождения данного расстояния, в случае, когда начальная и конечная точки соответствуют состояниям покоя.

Решение получается естественным образом при использовании наибольших числовых значений ускорения ( $f=a$ ) и замедления ( $f=-b$ ). Из рис. 2.6 сразу видно, что если ускорение меньше  $a$  или численная величина замедления меньше  $b$  (штриховая кривая), то расстояние, проходимое за данное время, уменьшается. Метод решения этой задачи состоит в том, чтобы использовать заданные ограничения для определения границ области изменения переменных, а затем отыскивать решения на границах области.

#### ПРИМЕР 4

Описанная выше модель может быть улучшена многими способами, например следующим образом.

1) Можно учесть трение или сопротивление вязких сил. Тогда уравнение движения при максимальной силе, действующей в положительном направлении, можно представить в виде

$$m\dot{v} + k_1 v + k_2 = a,$$

где  $m$  — масса; ограничения теперь накладываются на силу  $a$ , а не на ускорения. Влияние указанных сил на решение учитывается простой заменой линий  $AB$ ,  $BC$  кривыми, которые можно определить, владея способом вычисления. Здесь остается неизменной

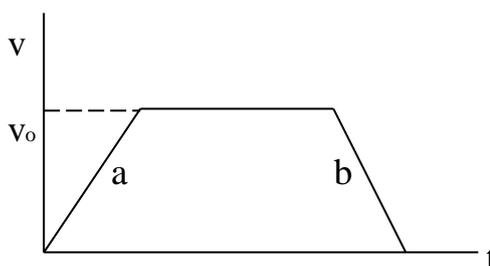


Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

основная идея, состоящая в том, что решение должно соответствовать максимальному ускорению, сменяемому затем максимальным замедлением.

2) В задаче о движении между двумя точками можно учесть наличие максимальной безопасной скорости  $v=v_a$  наряду с максимальным ускорением  $a$  и замедлением  $b$ . На диаграмме скорость — время решение, полученное при условии минимальных затрат времени на движение, будет теперь изображаться не двумя, а тремя линиями (рис. 2.7).

3) Определение «оптимального решения» может быть изменено. Например, с целью снижения затрат на горючее водитель должен добиваться минимального расхода топлива, а не максимальной скорости. В этом случае пользоваться тормозом расточительно, и решение, при котором автомобиль движется по инерции к состоянию покоя в конце пути, будет более предпочтительным по сравнению с тем, которое требует резкого торможения.

## 2.4 МАНЕВРИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕМ

Применим предложенную модель для исследования управления транспортным средством при движении в двух измерениях. Так как существует минимально допустимый радиус поворота, ограничения теперь будут накладываться на кривизну пути. В качестве простейшей модели более сложных траекторий движения четырехколесного аппарата можно исследовать кратчайшие пути для геометрической точки, траектории движения которой имеют ограниченную кривизну. Можно потребовать, чтобы полное решение состояло из прямолинейных участков (кратчайшие пути в пространстве) и отрезков окружности минимального радиуса; оказывается, однако, что и в общем случае никаких других путей рассматривать не нужно. В приведенных ниже примерах радиус кривизны пути равен  $a$ .

## ПРИМЕР 5

Автомобиль начинает двигаться из точки  $A$  перпендикулярно прямой  $AB$ . Определить минимальные пути от  $A$  до  $B$  без использования заднего хода при следующих предположениях.

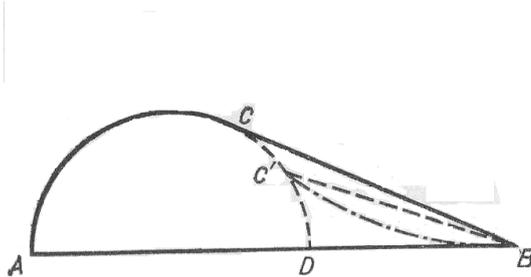


Рис. 2.8. Пути при  $AB > 2a$

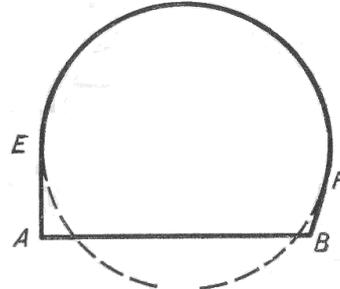


Рис. 2.9. Прямолинейные и криволинейные участки пути.

1) Случай  $AB > 2a$  (см. рис. 2.8). Очевидно, что нужно начинать с поворота по направлению к  $B$  по окружности  $ACD$  радиуса  $a$ . Проведем касательную  $CB$ . Тогда искомым путем будет  $ABC$ .

Из примера 1 видно, что такой путь, как  $AC'B$ , даже если отсутствует излом в точке  $C$ , будет длиннее, а путь от  $C$  до  $B$ , содержащий криволинейный участок для исключения излома (штрихпунктирная линия) должен быть больше, чем  $CB$ . Отсюда и следует указанный выше результат.

2) Случай  $AB < 2a$ . Если точка  $B$  лежит внутри  $AD$ , круговой участок пути не может проходить через  $B$ . Ниже предлагаются два возможных решения.

Можно сначала двигаться по прямой линии  $AE$ , затем использовать окружность, касательную к  $AE$ , и касательный к ней отрезок прямой  $FB$ , проходящий через точку  $B$  (рис. 2.9).

Другое решение заключается в использовании сначала дуги окружности  $AE$ , изогнутой в направлении от точки  $B$ , а затем перехода на сопряженную окружность  $EB$ , имеющую противоположную кривизну (рис. 2.10).

В качестве интересного упражнения по элементарной геометрии можно вычислить расстояния в обоих случаях. При этом оказывается, что второй путь лучше.

## ПРИМЕР 6

Автомобиль, расположенный в точке  $A$  так, что он может начать двигаться под углом  $\Theta_0$  к линии  $AB$ , необходимо переместить в точку  $B$ , расположив его под углом  $\Theta_1$  к  $AB$  (на автомобильных стоянках часто требуется ставить машины между разметочных линий, начерченных под определенным углом, см. рис. 2.11).

Метод решения состоит в том, чтобы нарисовать окружности (радиуса  $a$ ), касающиеся заданных направлений как в точке  $A$ , так и в

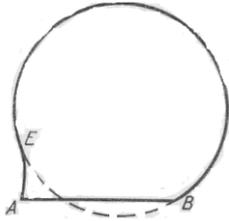


Рис. 2.10. Кривые с кривизной противоположных знаков



Рис. 2.11. К постановке задачи

точке  $B$ , нанося на них стрелки для обозначения направления движения (рис. 2.12). Соединим теперь одну окружность с другой общей касательной, учитывая направление движения на ее концах, например  $EH$ ,  $FG$ . Отсюда в общем случае нетрудно определить, какой путь будет самым коротким.

В качестве упражнений можно аналогичным образом рассмотреть, во-первых, что произойдет, если водителю будет разрешено включать задний ход, и, во-вторых, что произойдет в общем случае, когда одна или обе окружности, проходящие через точку  $A$ , пересекают окружности, проходящие через точку  $B$ .

## 2.5 ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Как утверждалось выше, рассмотренные здесь примеры являются сравнительно простыми случаями задач разных типов, поставляющих подготовительный материал для вариационного исчисления и оптимального управления.

Задачи управления движением теории оптимального управления.

В математике эти дисциплины соответствуют некоторым углубленным исследованиям в области дифференциальных уравнений и топологической динамики. Практические приложения включают выбор траектории с минимальными защитами топлива для полетов к Луне и планетам, выбор

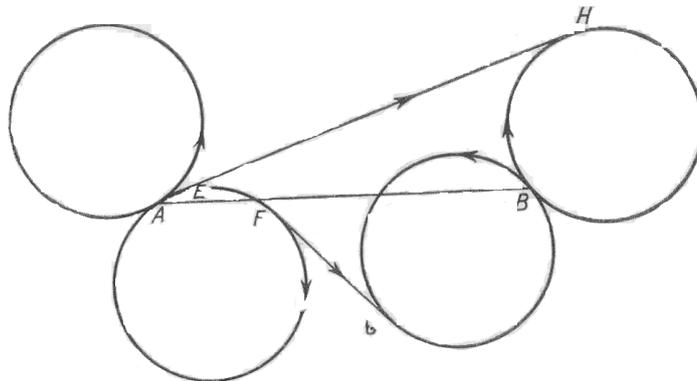


Рис. 2.12. Выбор траектории с минимальными защитами топлива для полетов к Луне и планетам

курса в океане с минимальными затратами времени для яхт и других парусных судов, а также все аналогичные транспортные задачи. Много других

приложений обусловлено конструированием управляющих механизмов для автоматических устройств. Стругальный станок, Например, должен обладать медленным рабочим ходом и свободным обратным ходом. Управляющее устройство должно минимизировать потребление мощности машиной. Автоматическая печь для Обжига глиняной посуды должна быть оборудована транспортером, движущимся через нагревательную камеру и обеспечивающим соответствующие времена пребывания при разных температурах; при этом мощность, затрачиваемая на обогрев камеры, должна быть минимизирована.

## 2.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Евклид определял прямую линию как кратчайшее расстояние между двумя точками. Идея этого определения состоит, грубо говоря, в том, что вы фиксируете один конец лески, например, а в другой точке наматываете леску. Когда наматывать больше невозможно, вы получите кратчайшее расстояние.

а) Как можно измерить талию, если определить ее как часть туловища, имеющую наименьшую окружность?

б) «Английская горная дорога» имеет с обеих сторон кирпичные стены, в которых проделаны садовые калитки. Как следовало бы указывать кратчайший маршрут по такой дороге? Что вместо линейки и натянутой струны является в этом случае более подходящим для определения прямой линии?

в) Берег водоема имеет форму трилистника; такая фигура получается, если провести через данную точку на поверхности земли три равных симметрично расположенных окружности, а затем выкопать землю, принадлежащую хотя бы одному из нарисованных кругов. Поверхность воды представляет собой

«объединение» площадей кругов. Найти кратчайший замкнутый путь, огибающий водоем. Как нужно организовать прогулку по этому пути? Как обозначить эту дорогу для слепого при помощи веревки, натянутой на колышки?

2. Перечислить как можно больше случаев, когда путешественник, передвигаясь при помощи транспорта или пешком, найдет, что скорость его движения зависит от направления. (Пример: езда на велосипеде при сильном ветре.)

а) Лыжник, взбирающийся на гору, использует то обстоятельство, что трение между снегом и лыжами в направлении, поперечном к лыжам, больше, чем в продольном. Каким образом лыжник взбирается на крутые горы?

б) Если коэффициент трения вдоль лыжи равен 0,05, а поперек — 0,40, наклон снежной горы (отношение длины горы к ее высоте) составляет 5 к 1, каков кратчайший маршрут (и пройденное расстояние), ведущий к желаемой вершине?

в) Если скорость под углом  $\theta$  к данной линии составляет  $1+20/\pi$  ( $0<\theta<\pi$ ), какой путь является самым быстрым в направлении  $\theta=0$ ?

3. Если движущийся аппарат способен совершить поворот по любой окружности радиуса, большего  $a$ , кратчайший путь будет состоять из дуг окружностей радиуса  $a$  и отрезков прямых. Если задний ход не разрешен,

круговой путь должен идти лишь в «прямом» направлении. Если задний ход возможен, круговой путь может быть пройден в обоих направлениях. Нарисуйте три окружности равного радиуса  $a$ ; центры  $A$  и  $B$  двух окружностей находятся на расстоянии  $2b=4a \sin \theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ), третья касается первых двух, как показано на рис. 2.13. Проведите с другой стороны общую касательную  $CD$  к пересекающимся окружностям. Вычислите теперь длину дуги  $PQ+QR+RS$  и длину  $PC+CD+DS$ , где точки  $P$  и  $S$  принадлежат общему диаметру  $AB$ . Какая величина больше? Зависит ли это от  $\theta$ ? Могут ли они быть равными? Далее, сравните длину дуги  $LR+RQ+QM$  с длиной дуги  $LD+DC+CM$ . Ответьте теперь на следующие вопросы.

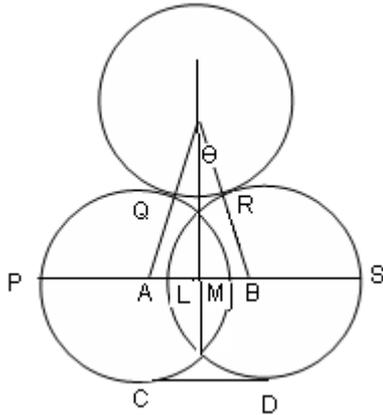


Рис. 2.13. К задаче 3.

а) Автомобиль, расположенный в точке  $P$  и направленный вверх (в плоскости рисунка), нужно передвинуть в точку  $S$  так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь такого перемещения?

б) Автомобиль, расположенный в точке  $L$  и направленный вверх, нужно передвинуть в точку  $M$  так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь, если разрешен задний ход и если задний ход запрещен?

в) Автомобиль, направленный в точке  $S$  вверх, остановить в точке  $P$  в таком же положении. Какой путь является кратчайшим при разрешенном заднем ходе и при запрещенном заднем ходе?

4. Требуется обеспечить транспортом данную планету. Поверхность ее настолько неровная, что колесные или гусеничные машины использовать практически невозможно. Планета не имеет атмосферы. Предлагается аппарат, оборудованный управляемым ракетным двигателем, который может быть установлен под некоторым углом к вертикали, чтобы обеспечить подъем и горизонтальное ускорение. Потребление топлива ракетой за единицу времени приблизительно пропорционально квадрату силы тяги (пояснить, почему). Обсудить задачу определения пути, требующего минимальных затрат топлива, между двумя точками на поверхности планеты.

5. Выходная мощность электродвигателя пропорциональна квадрату потребляемого тока. Однако ток может быть уменьшен (при постоянном напряжении питания) только при использовании сопротивления, которое само потребляет мощность, пропорциональную разности между максимально

допустимым и используемым током. Двигатель применяется для приведения транспортного средства в движение со средней скоростью  $V$ , зависящей от сопротивления  $F$ . Выяснить вопрос о потребляемой мощности в следующих случаях:

- а) когда сопротивление используется для управления током с целью достижения постоянной скорости;
- б) когда ток быстро включается и выключается так, что периоды подачи тока занимают определенную долю каждой секунды.

### Практическое занятие №3

## ПОЧЕМУ СТРОЯТ ТРЕХСТУПЕНЧАТЫЕ РАКЕТЫ?

[Необходимые предварительные сведения: элементарная механика и обыкновенные дифференциальные уравнения]

### 3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель ракеты — это упрощенная схема реальной ракеты. Сущность и моделирования состоит в том, что модель должна быть похожа на оригинал одной или несколькими существенными характеристиками. Например, при моделировании ракеты мы можем интересоваться воспроизведением в модели лишь внешнего вида реальной ракеты (и тогда модели вовсе не нужен работающий двигатель) или, напротив, сконцентрировать усилия на создании работающей модели ракетного двигателя (в таком случае внешний вид ракеты для нас уже менее важен). Мы будем иметь дело с умозрительной моделью ракеты. Цель моделирования состоит в том, чтобы понять, почему реальная ракета сконструирована так, а не иначе. Хорошо известно, что для запуска спутника на орбиту используются ракетные ускорители, состоящие из трех ступеней. Сначала работает Первая ступень; когда топливо в этой ступени кончается, топливный бак отделяется от ракеты. Аналогично работает вторая и, наконец, третья ступень. Хотелось бы понять, почему мы строим трехступенчатые, а, скажем, не одно-, двух- или четырехступенчатые ракеты.

Наиболее трудным шагом в математическом моделировании является первый. Сначала мы должны решить, какие факторы существенны, а какие можно не принимать во внимание. Ракета — система очень сложная. Она должна иметь мощный двигатель, прочную конструкцию, низкое аэродинамическое сопротивление и т. д. Очевидно, что основное требование состоит в том, чтобы двигатель был достаточно мощным для сообщения ракете довольно высокой скорости. Если конечная скорость окажется слишком низкой, ракета просто упадет на Землю.

Существует соблазн рассмотреть, как спутник выводится на орбиту: ракета-носитель взлетает вертикально из состояния покоя на земной поверхности и затем летит по орбите, вращаясь вокруг Земли. Однако в

первую очередь нас будет интересовать требование, чтобы конечная скорость ракеты была достаточно большой. Это приводит к первому вопросу:

1. Как быстро спутник движется по орбите?

Далее нужно рассмотреть, как достичь этой скорости. В любой задаче динамики первым побуждением будет попытаться применить законы движения Ньютона. Второй закон Ньютона для тела постоянной массы утверждает, что

Сила = масса  $\times$  ускорение

Для достижения большой конечной скорости за достаточно малое время необходимо большое ускорение, т. е. большая сила и маленькая масса. Это приводит к двум следующим вопросам:

2. Что определяет силу тяги ракетного двигателя?

3. Что определяет массу системы ракета — спутник?

После количественного ответа на эти вопросы мы обнаружим, что строить одноступенчатую ракету для вывода спутника на орбиту непрактично.

### 3.2. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Оказывается, что здесь ключевым фактором является сила тяжести. Качественно ситуация изображена на рис. 3.1; сплошной линией  $C$  обозначена поверхность Земли, а штриховая линия изображает траекторию движения спутника.

В точке  $S$  на спутник не действовали никакие силы,

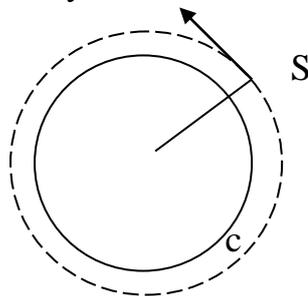


Рис. 3.1 Траектория движения спутника.

Если бы он двигался бы вдоль касательной  $ST$  к траектории (согласно первому закону Ньютона). В действительности сила тяжести, действующая вдоль прямой  $SO$  по направлению к центру Земли, заставляет спутник двигаться по пути, форму которого можно приближенно рассматривать как круговую.

Для простоты можно предположить, что Земля фиксирована в пространстве, имеет сферическую форму, а плотность ее вещества

*Почему строят трехступенчатые ракеты?*

распределена сферически симметрично. Ньютоновский закон тяготенья гласит, что сила, с которой каждая материальная частица во  $N$ -ой тленной притягивается другой частицей, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Широко известно следствие этого закона, состоящее в том, что сила притяжения, действующая со стороны сферы, имеющей постоянную плотность, на массу, расположенную вне сферы, та же что и в случае, если вся

масса сферы сосредоточена в ее центре (см. задачу 1). В такой простой модели Поля тяготения Земли сила притяжения, действующая на тело массы  $m$ , находящееся на расстоянии  $r$  от центра Земли (здесь  $r$  превышает радиус Земли), определяется выражением

$$\frac{km}{r^2} (k = \text{const})$$

Эта сила направлена к центру Земли. Для того чтобы определить величину  $k$ , заметим, что, если  $g$  — ускорение силы тяжести на

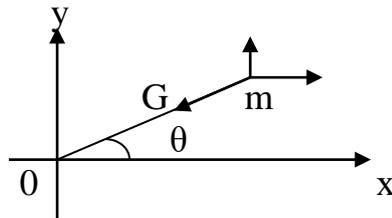


Рис. 3.2. Направление силы притяжения.

поверхности Земли, второй закон движения Ньютона для тела постоянной массы дает

$$mg \text{ — Сила тяжести, } \frac{km}{R^2}$$

где  $R$  — радиус Земли. Следовательно,  $k=gR^2$ , и сила притяжения, действующая на спутник массы  $m$ , движущийся на расстоянии  $r$  от центра Земли, определяется выражением

$$G - mg \left( \frac{G}{g} \right)^2.$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы написать уравнения движение спутника в плоскости, проходящей через центр нашей идеализированной Земли. Выбирая в этой плоскости фиксированные

координатные оси  $X$  и  $y$  так, как показано на рис. 3.2, получим  $m\ddot{x} = -G \cos \theta$ ,  $m\ddot{y} = -G \sin \theta$ .

Подставляя  $\cos \theta = x/r$ ,  $\sin \theta = y/r$ , для круговой орбиты ( $r=\text{const}$ ) прямым интегрированием найдем

$$v^2 = g \frac{R^2}{r}. \quad v^2 = g \frac{R^2}{r}$$

$$\text{Здесь } v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$g$  = ускорение силы тяжести,  $R$  = радиус Земли,  
 $r$  = радиус орбиты спутника.

Заметим, что значения  $g=9,81$  м/сек<sup>2</sup> и  $R=6400$  км можно определить при помощи измерений непосредственно на земной поверхности. Кроме того, значение  $g$  не зависит от массы спутника, и его можно грубо считать не зависящим от  $r$  для орбит, удаленных меньше чем на несколько тысяч миль от

земной поверхности. Для того чтобы дать практический ответ на поставленный выше вопрос, предположим, что спутник движется по орбите на расстоянии 600 км от земной поверхности. Тогда

$$v = R \left( \frac{g}{r} \right)^{1/2} \approx 7,6 \text{ км/сек.}$$

$$v = R(g/r)^{1/2} \approx 7,6 \text{ км/сек}$$

### 3.3. СИЛА ТЯГИ РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрим далее второй вопрос: что можно сказать о тяге ракетного двигателя? Простейшая модель ракеты состоит из двигателя и топливного бака. Получающиеся в результате сгорания топлива газы вытекают в кормовой части ракеты. Поток газа в направлении, противоположном движению ракеты, создает силу, действующую на ракету в направлении движения.

Действие ракетного двигателя можно объяснить при помощи закона сохранения импульса. Импульс отдельной частицы определяется как ее масса, умноженная на скорость. Для того чтобы найти полный импульс системы, нужно сложить импульсы всех ее отдельных частей. Закон сохранения импульса утверждает, что в замкнутой системе, на которую не действуют никакие внешние силы, полный импульс системы не меняется со временем.

Мы можем использовать этот закон для того, чтобы достичь некоторого понимания действия ракетного двигателя, рассматривая упрощенную модель, схематически изображенную на рис. 3.3. Представим себе ракету, движущуюся по прямой линии под действием газов, выбрасываемых из ее кормовой части. (Мы пренебрегаем здесь другими силами, такими, как гравитация, сопротивление воздуха и т. д.) Предположим, что во время  $t$  масса ракеты равна

Почему строят трехступенчатые ракеты?

$m(t)$  а ее скорость  $v(t)$ . Во время  $t + \Delta t$  масса ракеты становится равной  $m(t + \Delta t)$ . Уменьшение массы определяется соотношением

$$- \{m(t + \Delta t) - m(t)\} = - (dm/dt) \Delta t + O(\Delta t^2),$$

полученным при помощи теоремы Тейлора. В рассматриваемой упрощенной модели мы предполагаем, что это уменьшение массы происходит благодаря истечению газов с постоянной относительно

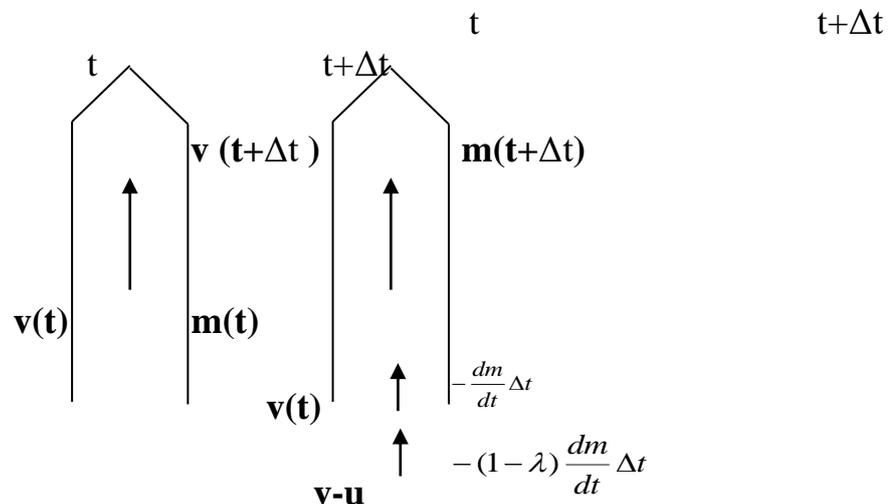


Рис. 3.3.

ракеты скоростью  $u_0$ . Это означает, что скорость газа относительно Земля равна  $v(t)-u$ . Можно применить закон сохранения импульса к системе, показанной на рис. 3.3. Это дает

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - ((dm/dt)\Delta t)(v(t) - u) + O(\Delta t^2)$$

импульс ракеты импульс ракеты импульс, переданный ни время  $t$  во время  $t + \Delta t$  газу во время  $t + \Delta t$ .

(Импульс газов, вышедших из двигателя до момента времени  $t$ , Может быть учтен просто добавлением одинаковых членов к обеим сторонам этого равенства и, следовательно, может не приниматься во внимание.)

Разлагая величину  $m(t + \Delta t)$  в ряд при помощи теоремы Тейлора и вычисляя предел при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u.$$

Левая часть представляет силу инерции. Следовательно, создаваемая истечением газов сила тяги  $T$  ракетного двигателя определяется выражением

$$T = - \frac{dm}{dt} u,$$

которое означает, что тяга равна произведению скорости сгорания топлива на скорость истечения газов относительно ракеты. Это дает ответ на второй вопрос.

Дифференциальное уравнение (1) может быть записано в виде  $do d(\ln m)$

$$\frac{dv}{dt} = -u \frac{d(\ln m)}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение при  $u = \text{const}$ , получим

$$v(t) = v_0 + u \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right), \quad (2)$$

где  $m_0$  — начальная масса ракеты, а  $v_0$  — ее скорость в момент времени  $t=0$ . Этот простой результат показывает, что изменение скорости ракеты зависит только от двух величин:

а) скорости  $u$  истечения газов относительно ракеты (предполагаемой здесь постоянной), б) отношения массы ракеты во время  $t=0$  к ее массе во время  $t$ .

### 3.4. МАССА СИСТЕМЫ РАКЕТА—СПУТНИК

Перейдем теперь к третьему вопросу: что определяет массу системы ракета — спутник?

Рассмотрим ракету массы  $m_0$ , состоящую из

а) «полезного груза», имеющего массу  $m_p$ ,

б) топлива массы  $m_p$ ,

в) структурной массы, т. е. массы топливного бака и двигателей  $m_s$ .

Сначала рассмотрим простейшую модель, согласно которой сгорает все топливо, а оставшаяся масса равна  $m_p - m_s$ . Топливный бак и двигатель в процессе подъема отделяются от ракеты, оставляя полезный груз, движущийся со скоростью, определяемой соотношением (2):

$$v = u \ln \left( \frac{m_0}{m_p + m_s} \right)^2.$$

*Почему строят трехступенчатые ракеты?*

На практике трудно построить двигатель и топливные баки, общая масса которых была бы меньше одной восьмой или одной десятой массы топлива. Введем постоянную  $X$ , определяемую соотношением

$$m_s = X (m_F + m_s) = X (m_0 - m_p),$$

т. е. представляющую отношение структурной массы к сумме структурной массы и массы топлива. Тогда формула (3) дает,  $v = u \ln \left( \frac{m_0}{\lambda m_0 + (1 - \lambda) m_p} \right)$ .

Это сразу приводит к важному результату. При данной величине  $u$  максимальная скорость, которая может быть развита ракетой, достигается, как и ожидалось, если масса полезного груза равна нулю величина этой

максимальной скорости  $v = u \ln \left( \frac{1}{\lambda} \right)$ .

Для современных топлив характерная величина  $u$  равна 3 км/сек.

Если  $\lambda = 0,1$ , то  $V = 7$  км/сек.

Так как спутник движется по орбите со скоростью около 7,6 км/сек, а найденное нами максимальное значение скорости получено при пренебрежении сопротивлением воздуха, тяготением и в предположении, что ракета не несет полезного груза, ясно, что ракета такого типа не может использоваться для выведения спутника на орбиту.

Одна из причин этого осложняющего обстоятельства состоит в том что двигатель должен ускорять весь мертвый структурный вес пилот до достижения конечной скорости. Когда топливо почти исправно, двигатель затрачивает большую часть своей мощности на ускорение почти пустого топливного бака. Работу двигателя можно было бы сделать более эффективной, если сбрасывать бесполезный вес по мере выгорания топлива. Рассмотрим идеализированную ситуацию, схематически изображенную на рис. 3.4.

Предположим, что между моментами времени  $t$  и  $t + \Delta t$  изменение отношения масс  $k$  обусловлено только отделяемой структурной массой, а  $(1 - \lambda)$  есть доля массы, сгоревшей и в виде газа выброшенной в пространство со скоростью  $u$ . (Конечно, построить ракету, работающую таким образом, было бы невозможно, но возражения такого рода не относятся к делу, так как мы сейчас рассматриваем работу идеализированной модели. Если такая модель даст нам желаемый результат, тогда можно будет попытаться приблизиться к идеалу на практике.)

Закон сохранения импульса имеет теперь вид

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - \lambda \frac{dm}{dt} \Delta t v(t) - (1 - \lambda) \frac{dm}{dt} \Delta t (v - u)$$

Проводя необходимые преобразования и устремляя  $\Delta t$  к нулю, получим соотношение

$$m \frac{dv}{dt} = (1 - \lambda) u \frac{dm}{dt}$$

интегрируя которое, найдем

$$v(t) = (1 - \lambda) u \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right).$$

По виду оно напоминает формулу, полученную ранее, но есть и одно существенное отличие. Это отличие состоит в том, что конечная масса, остающаяся после того, как топливо полностью использовано, есть просто масса полезного груза, так как ко времени, когда сгорит все топливо, вся структурная масса отделяется. Следовательно, конечная

$$v = (1 - \lambda) u \ln \left( \frac{m_0}{m_p} \right) \quad \text{скорость равна}$$

При заданных значениях величин  $u$ ,  $\lambda$  и начальной массы  $m_0$  полезный груз может быть ускорен до любой нужной скорости, хотя чем больше требуемая скорость, тем меньше будет допустимый полезный груз.

Предположим, что с учетом таких факторов, как сопротивление воздуха, гравитация и т. д., наша идеализированная ракета должна быть сконструирована так, чтобы она могла достичь конечной скорости 10,5 км/сек (вместо полученных ранее 7,6 км/сек). Пусть, как и ранее,  $\lambda = 0,1$ ,  $u = 3$  км/сек. Тогда

т. е. полезный груз в рассмотренном примере составляет одну пятидесятую начальной массы всей системы. Для полезного груза весом в одну тонну нужна пятидесятитонная ракета.

### 3.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИДЕАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Следующим является вопрос: как можно приблизиться к этой идеальной конструкции на практике? Ответ состоит в том, что нужно построить ракету, состоящую из отдельных ступеней, и в процессе полета отбрасывать каждую ступень после того, как топливо в ней будет полностью использовано. Пусть

$m_i$  — общая масса топлива и структуры  $i$ -й ступени.

Предположим также, что  $\Delta T_i$  определяет структурную массу, а  $(1 - \lambda) m_i$  — массу топлива, и для упрощения считается, что  $\lambda$  одинаково для всех ступеней. Кроме того, для простоты полагаем, что скорость истекающих газов  $u$  для всех ступеней одна и та же.

Проанализируем характеристики трехступенчатой ракеты. Начальная масса ракеты определяется выражением

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

Когда все топливо первой ступени израсходовано, оставшаяся масса равна,  $m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$

я скорость (согласно первоначальной модели)

$$v_1 = u \ln \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right).$$

После этого структурная масса  $m_1$  отделяется и включается вторая ступень. Когда топливо второй ступени израсходовано, достигается скорость

$$v = v_2 + u \ln \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right)$$

Аналогично, скорость после окончания работы третьей ступени равна

$$v_2 = v_1 + u \ln \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right)$$

Сейчас мы подошли к тому, чтобы определить параметры трех ступеней, дающие максимальное значение массы полезного груза. Чтобы сформулировать вопрос более точно, предположим, что известна конечная скорость  $v$ , которую необходимо развить, скорость истечения газов относительно ракеты  $u$  и структурный параметр

$\lambda$ . Как нужно выбрать  $m_1, m_2, m_3$ , чтобы получить максимальное значение массы полезного груза  $m_p$  для данной полной начальной массы  $m_0$ ?

Математическая формулировка задачи такова: для данных значений  $m_0, V, u, \lambda$  найти максимальное значение  $m_p$  при условиях

$$m_p + m_1 + m_2 + m_3 = m_0$$

и

$$\frac{v}{u} \ln \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right).$$

Решение этой задачи в принципе несложно, но без упрощения исходных выражений некоторые детали решения могут стать слишком громоздкими. Наиболее легким путем решения задачи является введение новых переменных

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3} \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3} \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}$$

Тогда задача может быть сведена к следующей: минимизировать произведение  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  при условии

$$\frac{v}{u} = \ln \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\}$$

При такой формулировке удачным является то обстоятельство что задача симметрична по отношению к  $a_1, a_2, a_3$ . Это немедленно приводит к выводу, что оптимум должен достигаться, когда  $a_1=a_2=a_3$ . Если обозначить их общую величину через  $a$ , легко увидеть что

$$\frac{\alpha}{1 + \lambda(\alpha - 1)} = \exp\left(\frac{v}{3u}\right)$$

или

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{P - \lambda} \quad \text{где } P = \exp\left(-\frac{v}{3u}\right)$$

Напомним, что мы оптимизируем произведение к  $a_1, a_2, a_3$  которое равно отношению  $m_0/m_p$ , так что величина максимального полезного груза определяется формулой

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda}\right)^3 \quad \text{где } P = \exp\left(-\frac{v}{3u}\right)$$

Так как, имеем  $v/u=3,5$ ,  $\lambda=0,9$ ; таким образом, находим

$$\frac{m_0}{m_p} = 77$$

Отсюда следует, что для полезного груза весом в одну тонну нужна трехступенчатая ракета весом 77 тонн. Это значение существенно отличается от тех 50 тонн, которые мы нашли ранее для идеализированной ракеты, отбрасывающей в процессе полета свою структурную массу непрерывным образом.

Исследуем теперь вопрос о том, не является ли более выгодным строить вместо трехступенчатой ракеты двух- или четырехступенчатую. Из анализа трехступенчатой ракеты становится ясно, что оптимальное значение отношения  $m_0/m_p$  для  $n$ -ступенчатой ракеты I предположении, что  $u$  и  $\lambda$  одинаковы для всех ступеней, определяется выражением

Для проверки правильности этого результата устремим  $n$  к бесконечности; тогда это отношение будет стремиться к выражению, найденному ранее для идеальной ракеты, структурная масса которой отбрасывается непрерывным образом по мере подъема.

$\frac{m_0}{m_p} = \exp\left(\frac{v}{(1 - \lambda)u}\right)$ . Теперь можно составить таблицу масс  $n$ -ступенчатой ракеты, предназначенной для вывода на орбиту спутника массой в одну тонну, при значениях  $v/u$  и  $\lambda$ , предполагаемых равными использованным выше:

$n =$  число ступеней 1 2 3 4 5  $\infty$  масса (в тоннах) — 149 77 65 60 50

Очевидно, что имеет смысл использовать три ступени вместо двух. Однако уменьшение массы ракеты, достигаемое при использовании четырех ступеней вместо трех, компенсируется сложностью и большими затратами на создание сложных двигателей и топливных баков. На практике три ступени соответствуют оптимальной конструкции.

До настоящего момента наш анализ представлялся не зависящим от размера ракетного двигателя, хотя очевидно, что для подъема над Землей ракеты весом

77 тонн нужно использовать большой двигатель. Один из удачных моментов анализа состоял в том, что при Определении необходимых параметров ракетного двигателя можно было не учитывать влияние силы тяжести. Однако сейчас мы должны рассмотреть процесс выведения спутника на орбиту. В начальный момент ракета находится в состоянии покоя на поверхности Земли а затем взлетает вертикально вверх. Это означает, что двигатель должен быть мощным настолько, чтобы преодолеть действующие на ракету силу тяжести.

## Практическое занятие №4 ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЕМКОСТИ

[Необходимые предварительные сведения: элементы гидро динамики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений]

### ВВЕДЕНИЕ

Очевидная постановка рассматриваемой в этой главе задачи возникает из повседневной практики доставки молока в полиэтиленовых пакетах. Чтобы перелить молоко из пакета, его сначала останавливают в «дозировующее устройство» так, чтобы пакет в процессе опорожнения с большой точностью сохранял свою форму. на каждом из двух свободных углов пакета проделывают небольшие отверстия, одно для вытекания молока, а другое для поступления воздуха. Целью главы является вычисление времени, требуемого для того, чтобы все молоко вытекло из пакета.

#### 4.1. ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ СТРУЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА-КИРХГОФА

Используемая ниже модель основана на идеях и результатах теории свободных струй Гельмгольца — Кирхгофа. Рассмотрим большую емкость, заполненную жидкостью плотности  $\rho$  при давлении  $p_1$ . Вне емкости находится жидкость гораздо меньшей плотности, давление в которой равно  $p_0$  где  $p_0 < p_1$ . Если открыть малое отверстие в стенке емкости, жидкость будет вытекать в область более низкого давления в форме струи, граница которой с окружающей (более легкой) жидкостью свободна. Когда устанавливается стационарное течение, скорость струи  $u$  можно вычислить указанным ниже способом.

Рассмотрим линию тока  $AB$  на рис. 4.1.

В стационарном течении из интеграла Бернулли в пренебрежении силами тяжести следует, что величина  $p + (1/2)\rho u^2$  вдоль линии тока постоянна, так что

$$p_A + (1/2)\rho u_A^2 = p_B + (1/2)\rho u_B^2.$$

Учитывая теперь закон сохранения массы для каждой трубки тока и то, что линии тока в окрестности точки  $B$  гораздо ближе одна к другой, чем в окрестности точки  $A$ , получим

Поэтому, выражение (1) может быть записано в виде

$$p_A \simeq p_B + (1/2)\rho u_B^2. \quad p_A \cong p_B + (1/2)\rho u_B^2$$

Кроме того, так как частицы жидкости вблизи точки  $A$  находятся почти в состоянии покоя, имеем

$$p_A = p_i$$

Следовательно,

$$u_B^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}.$$

Объем жидкости, вытекающей из емкости за единицу времени, равен

$$V = u_B A_B,$$

где  $A_B$  — поперечное сечение полностью развитой струи в окрестности точки  $B$ . Площадь  $A_B$  в общем случае не равна площади отверстия  $A_0$ , так как после выхода из отверстия струя стремится сузиться. Причина сужения состоит в невозможности мгновенного изменения направления течения жидкости вблизи точек  $O$  и  $O'$ ;

*Истечение жидкости из емкости 51*

эффект сужения увеличивается с ростом угла поворота линий тока.

Коэффициент сужения

$$C = A_B/A_0$$

зависит поэтому от угла  $\alpha$ , который образуют обе стенки емкости с осью симметрии струи.

Для плоского течения задачу можно решить точно, используя теорию функций комплексной переменной. Результаты вычисления Коэффициента сужения в этом случае приведены для разных углов  $\alpha$  в табл. 4.1 вместе с некоторыми экспериментальными данными.

Коэффициент сужения

Таблица 3.1

$\alpha$	0	22,5°	45°	67,5°	90°	180°
C (теория)	1	0,855	0,745	0,666	0,611	0,500
C (экспер.)	—	0,882	0,753	0,684	0,632	0,541

следует отметить, что опытные величины несколько выше предсказываемых теорией; отличие лежит в пределах от 1 до 8%.

В случае пространственного осесимметричного истечения из круглого отверстия ситуация несколько иная. Можно показать что  $C=1/2$  при  $\alpha = 180^\circ$  и, очевидно,  $C=1$  при  $\alpha=0$  (так как все линии тока в этом случае являются прямыми линиями). При  $\alpha=90^\circ$  в случае, Показанном на рис. 4.1, весьма изящное исследование показывает, что коэффициент сужения очень близок к 0,58 (с точностью до двух значащих цифр). Учитывая, что опытные величины в случае плоского течения слегка превышают вычисленные теоретически, а результаты теории осесимметричного течения несколько ниже, чем для плоской струи, следует заключить, что, вероятно, не будет большой ошибки,

если везде далее использовать теоретические величины Рассмотрим теперь емкость, открытую с обоих концов, и учтем действие силы тяжести. Например, рассмотрим истечение из воронки половина угла конусности которой равна  $\alpha$ . Из интеграла Бернулли следует, что в случае стационарного течения величина  $p + (\rho/2) v^2 + \rho g y$  постоянна вдоль каждой линии тока.

## Практическое занятие №5

### МОДЕЛИ МОЛЕКУЛ

[Необходимые предварительные сведения: элементарная алгебра матриц]

### ВВЕДЕНИЕ

Современная органическая химия имеет дело с разнообразными свойствами огромного множества молекул. Невозможно построить простую теорию, которая описывала бы все молекулы. Отбор молекул, близких по своему строению, дает возможность создать для них модель, проясняющую их свойства при помощи анализа количественной связи этих свойств с геометрическими или топологическими характеристиками молекулярных графов.

Обсуждаемые ниже модели основаны преимущественно на использовании классических представлений о молекулярных связях и валентных структурах. Хотя квантовомеханическая теория движения электронов в молекуле может помочь объяснить успех, достигаемый при применении таких моделей, она не требуется для их описания.

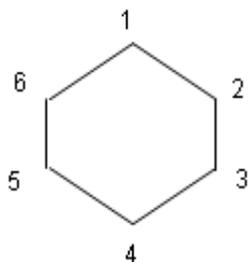
#### 5.1 ПЛОСКИЕ УГЛЕВОДОРОДНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Существует большой класс углеводородных молекул, имеющих большое значение для органической химии и тем не менее достаточно простых как геометрически, так и по электронной структуре, чтобы описывать их при помощи моделей, включающих только характеристики атомных связей. Молекулы эти плоские и имеют скелет, состоящий только из атомов углерода. Каждый атом углерода связан с тремя ближайшими соседними атомами так, что углы между связями равны  $120^\circ$ , а длины связей приблизительно одинаковы. Соседние позиции, не занятые атомами углерода, заняты атомами водорода. По соседству с каждым атомом водорода находится единственный атом углерода.

#### 5.2. ГРАФИЧЕСКИЕ И МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Описанные выше молекулярные графы дают возможность находить и исследовать определенные особенности молекул. Однако они не совсем пригодны для численных расчетов, поэтому необходимы также и другие

модели. Одна из них состоит в представлении молекулы топологической матрицей  $T$ , которая дает возможность описать граф при помощи чисел. Элемент матрицы  $T_{rs}$  равен 1, если атомы  $r$  и  $s$  связаны, и равен 0 в противном случае. Так, молекула бензола, граф которой представляет простой шестиугольник, имеет топологическую матрицу модели молекул.



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Так, как  $T$  содержит всю информацию о графе, любое свойство графа может быть соотнесено со свойством  $T$ .

Для большинства молекул этого класса топологическая матрица слишком велика. До тех пор пока угол между связями остается равным  $120^\circ$ , эти молекулы не могут образовать кольца, содержащего нечетное число вершин. Отсюда следует, что атомы могут быть пронумерованы так, что любые два связанных соседних атома всегда будут иметь различную четность. Это свойство обычно называют чередованием; в теории графов оно эквивалентно утверждению о том, что вершины можно различить по цвету, если при этом использовать лишь две краски. Число углеводородов, в молекулах которых чередование отсутствует, т. е. содержащих кольца с пятью или семью элементами, сравнительно невелико и в рассматриваемую здесь теорию такие углеводороды не включены. При расположении всех атомов с нечетными номерами следом за четными атомами топологическая матрица принимает блочный вид

$$T = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

где  $B$  — матрица смежности,  $B$  — матрица, полученная транспонированием  $B$ . Матрица  $B$  включает все ненулевые элементы матрицы  $T$  и, таким образом, содержит всю существенную информацию). Для бензола матричная модель сводится теперь к

$$B = \begin{matrix} & 2 & 4 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Некоторые элементарные свойства молекулы могут быть доста просто получены из  $B$ . Общее число атомов углерода  $n$  должно или суммой строк и

столбцов  $B$ . Подобным образом полное число С-С-связей  $N$  является суммой всех элементов  $B$ . Значение  $N$  удобно представить в виде

$$N = \text{Tr}(B^T B),$$

где  $\text{Tr } A$  обозначает след матрицы  $A$ . Важной особенностью графа является число колец  $r$ , которое получается из  $B$  уже не столь очевидным образом.

Однако  $r$  связано с  $n$  и  $N$  соотношением

$$r = N - n + \lambda,$$

откуда  $r$  можно сразу определить.

При соблюдении требования чередования можно найти много способов нумерации атомов в молекуле, которые будут изменять

некоторые свойства  $B$ . Важно заметить, что ряд свойств, таких, как значения величин  $r$ ,  $N$  и  $n$ , инвариантен по отношению к изменению способа нумерации.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

### СВЕРЛЕНИЕ ЛАЗЕРОМ

[Необходимые предварительные сведения: дифференциальные уравнения и преобразование Лапласа]

### ВВЕДЕНИЕ

Резание и сварка металлов весьма важны для многих областей техники. Так как пила и сварочный аппарат все еще являются самыми распространенными инструментами для такого рода работ, значительный интерес представляет создание новых устройств, предназначенных для специальных материалов, а также для тех случаев, когда желательно обеспечить некоторую степень автоматизации указанных процессов.

Различные стадии образования выемки:

В последнее время как для резания, так и для сварки были предприняты попытки использования мощных лазеров (а также электронных пучков).

Основная идея состоит в том, чтобы сфокусировать значительную мощность на малой площади поверхности металла, создавая таким образом интенсивный нагрев и испарение с последующим образованием отверстия. При резке необходимо постараться обеспечить такие условия процесса, чтобы проделанное отверстие прямо проходило сквозь материал, и избежать, таким образом, затекания расплавленного металла обратно в отверстие и застывания его там. При сварке ситуация противоположная: два куска металла соединяют и нагревают их вдоль линии соединения так, чтобы металл, расплавленный с обеих сторон, перемешался и после устранения источника тепла застыл.

В этой главе мы рассмотрим математическую модель, главная область применимости которой — глубокая сварка и резание. При помощи модели попытаемся ответить на вопрос, как быстро можно проделать отверстие, используя пучок излучения высокой мощности.

## 6.1. ОСНОВНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим высокоэнергетический пучок лазерного излучения или электронов, сфокусированный на малом участке поверхности металла. Определенная доля энергии поглощается, а остальная часть отражается. Поглощение энергии происходит внутри слоя, толщина которого обычно гораздо меньше миллиметра, что вызывает поверхностный нагрев материала и рост температуры поверхности. Последняя, однако, растет не безгранично. Существуют два процесса, ограничивающие рост температуры. Первым является перенос тепла в глубь материала от нагретых к холодным участкам, обусловленный теплопроводностью. Вторым обусловлен испарением. Когда температура материала достигает точки кипения, скрытое тепло поглощается без дальнейшего увеличения температуры в процессе испарения материала. При удалении пара от поверхности материала в металле образуется выемка. Задача количественного описания этого процесса и вызывает необходимость математического моделирования.

В течение по крайней мере начальных стадий образования выемки гидродинамические явления не играют существенной роли. В рассматриваемой модели предполагается, что процесс образования выемки не осложнен подобными рода явлениями. Для того чтобы показать внутреннюю непротиворечивость этого предположения, на некотором этапе решения задачи будет необходимо сравнить характерное время образования выемки, полученное по модели, основанной на теории теплопроводности, с характерным временем движения жидкости. Таким образом, рассматриваемая модель описывает, по существу, процесс разрушения материала, при котором энергия лазерного излучения не отражается поверхностью, а уходит частично на испарение и частично переносится за счет теплопроводности внутрь материала.

В простейшем для анализа случае считается, что вся энергия, поступающая на поверхность, используется для испарения материала. Этот предельный режим испарения может возникать двумя путями. Первый реализуется, когда энергия поступает на поверхность слишком быстро, так что тепло не успевает распространиться в глубь металла. Во втором случае плотность мощности пучка постоянна, а распределение температуры впереди границы области испарения приближается к стационарному.

Предположим, что мощность  $W$  распределена равномерно по некоторой площади  $A$  поверхности; пусть излучение приложено по нормали к поверхности. За интервал времени  $\delta t$  поступает энергия, равная  $W\delta t$ . Пусть глубина возникающей выемки равна  $S_s$ , тогда объем испарившегося материала равен  $A\delta s$ . Используя закон сохранения энергии, получим

$$hpA\delta s = W\delta t.$$

Здесь  $h$  — количество тепла, требуемое для испарения единицы массы материала,  $\rho$  — плотность материала. Преобразуя это выражение и полагая  $bt \rightarrow 0$ , получим скорость роста глубины выемки и виде

Уравнение показывает, что для любого материала предельная скорость

$$\frac{ds}{dt} = \frac{W/A}{h\rho}$$

пропорциональна плотности энерговыделения  $W/A$ . Например, для плотности энерговыделения пучка  $1 \text{ кВт/мм}^2$ , направленного на поверхность стали, предельная скорость равна  $17 \text{ мм/с}$ . интегрируя уравнение (1) и полагая  $s=0$  при  $t=0$ , найдем глубину выемки в произвольный момент времени  $t$

Или

$$s(t) = \frac{E(t)}{h\rho A}$$

$$s(t) = \frac{1}{h\rho A} \int_0^t W dt$$

Где  $E(t)$  — полная энергия, выделенная источником за промежуток времени  $(0, t)$ .

Таким образом, в предельном режиме испарения глубина выемки зависит только от полной энергии, поступившей на поверхность.

## 6.2. БОЛЕЕ ТОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: УЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

На практике всегда существует перенос некоторого количества

тепла в материал за счет теплопроводности, так что скорость в предельном режиме испарения представляет собой верхнюю границу скорости роста глубины выемки в металле. Интересно вычислить характерное время достижения этой предельной скорости. Общая задача движения границы раздела фаз с учетом теплопроводности известна как задача Стефана; также хорошо известно, что ее решение представляет определенные математические трудности.

Предположим сначала, что тепло переносится в направлении, нормальном к поверхности. (Учет влияния потерь тепла в боковых направлениях оставлен в качестве задачи для самостоятельного изучения). По существу, необходимо решить одномерное нестационарное уравнение теплопроводности для температуры внутри материала  $T(z, t)$  вместе с граничными условиями на движущейся границе  $z=s(t)$  и на тыльной поверхности материала. Здесь  $D=K/(\rho c)$  — коэффициент температуропроводности,  $K$ ,  $\rho$ ,  $c$  — коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость соответственно.

Условие на движущейся границе получается в результате применения закона сохранения энергии в виде

(скорость поглощения (скорость преобразования - (скорость переноса энергии = энергии в скрытую + тепла в глубь поверхность) теплоту испарения) материала)

т. е.

$$\frac{W}{A} = L_v \rho \frac{ds}{dt} - K \frac{\partial T}{\partial t}$$

где  $\lambda_v$  — скрытая теплота испарения на единицу массы. Другое граничное условие состоит в том, что температура движущейся границы приближенно равна температуре точки кипения, так что

$$T = T_v \text{ при } z = s(t). \quad (4)$$

На практике для всех материалов всегда существует некоторое испарение при температурах ниже действительной точки кипения. Однако давление пара при этом обычно незначительно по сравнению с атмосферным давлением, за исключением случая, когда температура очень близка к точке кипения. Таким образом, условие (4) представляет собой вполне удовлетворительную аппроксимацию.

При сверлении толстого слоя материала наличие тыльной поверхности оказывает несущественное влияние. Поэтому целесообразно для удобства перенести эту поверхность в бесконечность, где полагаем  $T=0$ , считая без потери общности температуру окружающей среды равной нулю. Для завершения постановки задачи необходимо также выставить граничные условия на другой границе раздела фаз, т. е. между твердым материалом и жидкостью. Однако для многих важных для практики материалов отношение скрытых теплот плавления и парообразования мало по сравнению с единицей  $V$  в результате, сохраняя достаточную точность, можно не учитывать нарушение непрерывности на этой фазовой границе.

Эта задача Стефана по сравнению с ее классическим вариантом оказывается более сложной благодаря наличию слагаемого, описывающего тепловыделение на движущейся границе. Обычным подходом к решению задачи является использование численных методов, что вызвано сложностью краевых задач теории теплопроводности с подвижной границей раздела фаз. Здесь, однако, стоит обратить внимание на простоту решения в предельном режиме испарения.. Можно ли использовать эту простоту?

Интуиция подсказывает возможность получения достаточно простого решения по крайней мере в том случае, когда скорость движения границы близка к скорости в предельном режиме испарения. В -пом случае порядок отношения характерной величины потерь тепла за счет теплопроводности к величине скрытой теплоты парообразования с использованием соотношения

(1) можно записать в виде

$$\left| \frac{K(\partial T / \partial t)}{L_v \rho (d\hat{a})} \right| = \frac{KO(T_v / t)}{L_v \rho O(W / h\rho A)}$$

где  $\lambda$  представляет собой некоторое характерное расстояние, на котором происходит падение температуры в материале. Это расстояние определяется соотношением

$$l = \frac{D}{(W / h\rho A)}$$

Подставляя значения  $\lambda$  и  $D$  и полагая  $h = \lambda_v + cT_v$ , найдем

Где

$$\varepsilon = \frac{cT_v}{L_v} = \frac{\text{(тепло,требуемоедлянагревания материаладо точки кипения)}}{\text{(тепло,затрачиваетсяна испарениепри температуре кипения)}}$$

является величиной, постоянной для данного материала. Для многих материалов, представляющих практический интерес,  $\varepsilon$  обычно Шло по сравнению с единицей. Следовательно, решение при  $\varepsilon=0$  соответствует приемлемому приближению при условии, что эффекты, связанные с теплопроводностью, малы. Полное решение будем искать в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , хотя на практике обычно используются только первые два или три члена любого ряда, полученного при помощи такого рода разложений по малому параметру.

### Практическое занятие №7

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ И НАЧАЛА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

[Необходимые предварительные сведения: теория матриц, векторное исчисление и элементарная механика]

### ВВЕДЕНИЕ

Основная задача, возникающая в инженерной практике проектирования тех или иных конструкций, в настоящее время состоит не в том, чтобы создать подходящую математическую модель, а больше связана с расчетами на основании уже имеющихся теорий. Условия совместности деформаций и равновесия внутренних напряжений в форме дифференциальных уравнений установлены еще в начале девятнадцатого столетия в классических трудах основоположников теории упругости и остались неизменными до наших дней. И лишь в проблеме построения так называемых «определяющих» соотношений, описывающих свойства реальных материалов в форме связи между напряжениями и деформациями, остались кое-какие возможности для создания новых моделей, но даже здесь простейшее из таких соотношений — линейная теория упругости — была обоснована достаточно хорошо. На самом деле данная форма определяющих уравнений является достаточно надежной основой для решения многих задач проектирования конструкций; к сожалению, с этой задачей математика (и математики) оставляют инженера наедине, так как аналитические решения дифференциальных уравнений можно построить лишь для самых простых случаев.

К счастью, в числе «тривиальных» решений находятся решения для таких элементов конструкций, как балки и стержни. Из этих простых элементов — после предварительного определения основных зависимостей для каждого из них — можно составлять достаточно сложные конструкции, с которыми приходится иметь дело на практике. Процедуры синтеза и расчета таких сложных систем являются чисто алгебраическими и, несмотря на то что их численная реализация может оказаться достаточно трудоемкой, с появлением

ЭВМ эти затруднения особых хлопот не доставляют. В настоящее время для решения этой задачи создана доведенная до весьма высокой степени стандартизации методика, краткое описание которой будет приведено в следующем параграфе.

Подлежащие расчету конструкции во многих случаях представляют собой «сплошные» тела, в которых элементы простой структуры отсутствуют, и мы встречаемся здесь, очевидно, с краевой задачей для уравнений в частных производных, общее решение которой неизвестно.

На первый взгляд кажется, что единственный выход из создавшегося положения состоит в переходе к некоторой идеализированной модели или использовании грубых аппроксимаций, однако этот путь недопустим в тех случаях, когда речь идет о безопасности и жизни людей. Поскольку инженер должен достичь успеха в работе.

Исследование напряжений в конструкциях независимо от того, имеет он опору в математике или нет, и — как хорошо известно — он должен нести полную ответственность за результаты своего труда, то ему ничего не остается делать, как положиться на свою изобретательность. Инженер здесь рассуждал следующим образом: поскольку сложные стержневые конструкции типа ферм поддаются расчету, если их расчленить на основные составляющие их элементы, то не исключено, что и в случае сплошной среды применима аналогичная процедура разделения на небольшие конечные элементы» простой формы, соединенные между собой в конечном числе точек. Интуиция ему подсказывала, что с помощью такой аппроксимации можно будет достичь удовлетворительной для практики точности расчеши, если только базисные элементы выбирать достаточно малыми. Это путь (интуитивный) обоснования выбора таких конечных элементов позже был «систематизирован», и сразу же было обнаружено, что такая процедура на самом деле применима практически ко всем задачам, для которых имеется математическая постановка. В настоящее время метод конечных элементов изучается не только инженерами, но и математиками, которые исследуют его с позиций более «чистой» науки — как общий метод приближенного решения уравнения в частных производных.

В этой главе мы попытаемся дать набросок основных положений, включая историю их развития, и показать, как было достигнуто обобщение. По нашему мнению, данный пример, показывающий, каким образом из потребностей практики возникает метод, весьма поучителен.

## 7.1. ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА

«Решение» простой задачи для балки, показанной на рис. 7.1 (элемент  $e$  связан с другими в точках  $l, m$ ), в случае, когда материал линейно-упругий, представляет собой связь (линейную) между усилиями  $f$  и  $f$  перемещениями  $u$  и  $f$ , т. е.  $f_i^e = K_{ij}^e u_j^e + f_{0i}^e$ ,

где  $u$  элементов в конструкцию мы приравниваем перемещения узла элемента и  $f$  — векторные величины, имеющие три компоненты,

соответствующие трем направлениям координатных осей. Ясно, что при объединении соответствующего узла конструкции, т. е. полагаем

$$u_i^e = u_i$$

Для того чтобы данный узел находился в равновесии, нужно потребовать, чтобы суммарное усилие здесь было равно нулю:

$$\sum_{e=1}^n f_i^e = 0,$$

где  $n$  — число элементов, пересекающих рассматриваемый узел. Таким образом получается замкнутая система уравнений для всей конструкции; эта система такова:

$$Ku + f_0 = 0,$$

где

$$u^T = (u_1^T, u_2^T, \dots)^T$$

$$f^T = (f_{01}^T, f_{02}^T, \dots)^T$$

и читатель может самостоятельно убедиться в том, что данная система имеет очень простую структуру. Здесь

$$K_{ij} = \sum K_{ij}^e$$

$$f_{0i} = \sum f_{0i}^e$$

причем суммирование распространяется по всем элементам. Полный расчет ансамбля элементов — задача не более сложная, чем решение системы линейных уравнений высокого порядка с симметричной матрицей ленточной структуры — проблема, в которой инженеры уже успели применить свою изобретательность. ЭВМ, которыми мы располагаем в настоящий момент, позволяют без труда решать системы с числом неизвестных порядка тысячи, мощные же ЭВМ в действительности дают возможность работать с системами, содержащими 20—30 тыс. неизвестных.

## Практическое занятие №8

### МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИЙ

[Необходимые предварительные сведения: теория обыкновенных дифференциальных уравнений]

#### ВВЕДЕНИЕ

Проблема роста населения стала привлекать внимание во всем мире с тех пор, как Мальтус предложил свою «мрачную теорию»: человечество может выжить, только если периоды роста в геометрической прогрессии будут прерываться эпидемиями и стихийными бедствиями. Сравнительно недавно Эрлих и Эрлих (1999) и Медоуз и др. (1999) рассмотрели в таком же свете экспоненциальный рост населения и истощение невозобновляемых природных ресурсов.

Хотя мы не можем отрицать важность проблемы роста населения Земли, было бы нереально предполагать, что модель Мальтуса — единственно возможная для биологических популяций.

Действительно, она удовлетворительно описывает только очень короткие периоды жизненного цикла организмов и не является универсальной.

Можно создавать модели, описывающие с определенной степенью точности отдельные события, касающиеся роста численности вида. Значительно труднее строить модели с широким диапазоном применимости. Возникает вопрос, какую пользу можно извлечь из моделей и в какую форму их следует облекать.

Модели могут быть самыми разнообразными — от описательного, эмпирического типа до моделей общего характера. Это различие особенно важно в связи с конкретными приложениями.

Конузэй и Мэрдри (1997) описывают модели, которые могут быть использованы при выборе средств борьбы с вредителями. Однако диапазон этих моделей сравнительно узок: от моделей вспомогательного характера, описывающих, например, половое и территориальное поведение, до моделей, предназначенных для описания очень небольших фрагментов биологической системы, например для изучения популяции одного вредителя хлопчатника на данном поле. Модели такого типа созданы для ответа на вопросы, касающиеся отдельного вида, а не для изучения общих экологических законов. По терминологии Холлинга такие модели называются «тактическими».

Общая «стратегическая» модель «жертвует точностью в попытке охватить общие законы». Именно стратегическим моделям и посвящена практическая работа. Они создают на формальном языке схему важнейших биологических процессов, таких, как рождение и смерть. Анализ моделей используется для проникновения в сущность этих биологических процессов, особенно процессов биологического взаимодействия, которое может в дальнейшем определить области, где исследование приведет к объяснению основных механизмов регуляции численности в природных популяциях.

Тот факт, что наше внимание будет сосредоточено на моделях популяций, отражает не степень их важности по отношению к другим моделям, а просто соответствует интересам экологов, занимающихся обширной проблемой количественной оценки природных популяций, особенно в области борьбы с насекомыми-вредителями.

Существующие в наше время опасения по поводу загрязнения окружающей среды и использования ядохимикатов делают весомее аргументы тех ученых, которые высказываются за применение преимущественно мер биологического контроля путем использования естественных врагов вредителей. Для изучения возможности использования естественных врагов нам необходимо иметь некоторые сведения о динамике сообществ, состоящих как минимум из двух видов, а скорее даже многовидовых систем. Однако, прежде чем перейти к изучению аспектов этих взаимодействий, полезно разобрать основные черты относительно простой одновидовой системы.

## 8.1 ОДНОВИДОВЫЕ МОДЕЛИ

Простейшая модель Мальтуса для темпа роста численности популяции организмов, размножающихся при постоянных условиях, гласит:

где  $b$  — мгновенная рождаемость в популяции. Интегрируя и полагая  $N=N_0$  при  $t=0$ , получим мгновенную численность популяции, равную

$$N_t = N_0 \exp(bt) \quad (2)$$

В модель можно ввести мгновенную смертность  $d$ . Полагая

$r_m = b - d$ , получим

$$N_t = N_0 \exp(r_m t) \quad (3)$$

Параметр  $r_m$  служит мерой внутренней способности популяции к численному росту

В естественных условиях редко приходится иметь дело с промежутками времени, достаточно короткими для того, чтобы можно было считать параметр  $r_m$  постоянным. В общем случае  $r_m = r(t)$  и

$$N_t = N_0 \exp\left(\int_0^t r_m(t) dt\right) \quad (4)$$

Несмотря на то что закон неограниченного экспоненциального роста и был предложен для естественных популяций. Но следует помнить, что природные ресурсы, например пространство, количество пищи и воды, ограничены. Это приводит к наличию верхнего уровня численности популяции, который мы обозначим через  $K$ . К нему стремится численность, и при достижении этого уровня или его превышении она снова падает, так как недостаток пищи вызывает голодание, что увеличивает смертность и подавляет размножение. Темп возобновления истощенных ресурсов, например, вследствие увеличения производства пищи, определяет время восстановления популяции. Эти процессы приводят к тому, что численность популяции не поддерживается на постоянном уровне, а колеблется, иногда в очень широких пределах, около своего среднего значения, не превышающего максимальной численности, которую может обеспечить окружающая среда. Разработка моделей популяций помогает изучению механизмов стабилизации этих колебаний.

Из соотношения (3) следует, что  $N_t \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда  $r_m > 0$ , и  $N_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда  $r_m < 0$ . Если  $r_m = 0$ , то популяция устойчива, ее численность не растет и не уменьшается. Малые возмущения равновесного значения  $r_m = 0$  приведут к неограниченным отклонениям численности популяции от положения неустойчивого равновесия. Однако обычно существуют ограничения темпа роста популяции, которые связаны с ее численностью  $N_t$  в момент времени  $t$ . Это означает, что существует внутренний механизм регуляции, зависящий от плотности. Следовательно, при скорости изменения численности, равной

$$\frac{dN_t}{dt} = (b - d - cN_t)N_t \quad (5)$$

где  $c$  — постоянная, изменение величины  $r_m$  пропорционально  $(K - N_t)/K$ .  
Линейная зависимость

$$r = r_m \left( \frac{K - N_t}{K} \right) \quad (6)$$

означает, что если  $N_t$  приближается к величине максимальной численности  $K$ , которую может обеспечить окружающая среда, то  $r$  стремится к нулю, а при  $N_t \rightarrow 0$  величина  $r$  стремится к максимально возможному для вида значению  $r_m$ . Выражение  $(K - N_t)/K$  является мерой неиспользованных ресурсов. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dN_t}{dt} = r_m \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) N_t$$

и интегрируя, получим так называемое уравнение логистической кривой Верхалста — Перла

$$N_t = \frac{N_0 K \exp(r_m t)}{K - N_0 \{1 - \exp(r_m t)\}}$$

(При  $N_t < K$  величина  $r$  положительна, а при  $N_t > K$  отрицательна.)

Таким образом, плотность популяции приближается к равновесной плотности  $K$  сверху или снизу. При  $N = K$  имеем  $r = 0$  и существует положение устойчивого равновесия, около которого происходят колебания численности. Любые отклонения уравновешиваются противоположными силами, которые пропорциональны  $K - N_t$  и возвращают численность популяции обратно к равновесному уровню. Линейные поправки для  $r_m$ , разумеется, не меняют сути дела, так как рассуждения остаются справедливыми и для криволинейных функций.

Серьезным недостатком описанных выше моделей является использование мгновенных значений рождаемости и смертности, полностью определяемых состоянием популяции в данный момент. Несомненно, что рождаемость зависит от событий в более или менее отдаленном прошлом, и её регулирование более естественно связать с численностью популяции в то время. Так, имеется промежуток времени между зачатием и рождением. С другой стороны, по-видимому, с меньшей ошибкой будет связано предположение, что смертность зависит от состояния популяции в данный момент, хотя можно и представить, что какие-то недостатки питания в прошлом могут усилить восприимчивость к заболеваниям в настоящий момент и таким образом увеличить смертность. В природе наличие такого запаздывания по времени легко проследить. Так, например, имеются длительные периоды созревания у млекопитающих, вследствие чего число созревающих особей зависит от численности популяции в предыдущий период размножения, и поэтому на рождаемость во время  $t$  влияют условия, существовавшие в момент времени  $t - t_1$ . С учетом запаздывания по времени логистическое уравнение становится дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dN_t}{dt} = b_0 \left( 1 - \frac{N_{t-t_1}}{K} \right) N_{t-t_2} - d_0 N_t$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — времена запаздывания, а  $b_0$  и  $d_0$  — соответственно основные значения рождаемости и смертности.

Приведенные выше соображения относятся к видам с дискретными поколениями (например, в случаях, когда размножение происходит только в данное время года). Если же поколения перекрывается, мы должны учитывать также определенную возрастную структуру, которую могут иметь некоторые популяции. Например, молодые (еще не размножающиеся) и взрослые особи сильно различаются по смертности, причем молодые, так как они не размножаются, вносят совершенно иной вклад в популяцию. Соображения возрастных характеристик популяций использовались демографами и статистиками, и на их основе развиты специальные методы для популяций с возрастной структурой, хотя и существуют общие закономерности, применимые к любым популяциям.

Для любых популяций можно заключить, что если  $l_x$  — вероятность достижения индивидуумом возраста  $x$ , то  $l_0 = 1$  и  $l_{\infty} = 0$ . Удобно посматривать только самок, т. е. репродуктивную часть популяции, обозначив число самок в потомстве одной взрослой самки возле  $x$  через  $m_x$ . Общая численность популяции может быть получена теперь путем умножения числа самок на коэффициент соотношения полов. Если принять время между поколениями за единицу, то скорость роста популяции от поколения к поколению составит

$$R = \sum_0^{\infty} l_x m_x = \frac{N_{t+1}}{N_t}$$

Если теперь обозначить через  $n_{x,t}$  число особей в возрасте от  $x$  до  $x+1$  в момент времени  $t$ , то число особей, родившихся в популяции за время  $t$ , будет равно

$$n_{0,t} = \sum_{x=0}^{\infty} n_{x,t} m_x$$

При изучении популяции с возрастной структурой важным является вопрос об устойчивости распределения по возрасту. Если существует постоянное возрастное распределение, то существует и постоянный относительный прирост численности популяции за один период размножения,

$$R = \frac{\sum n_{x,t+1}}{\sum n_{x,t}}$$

Тогда для популяций, разделенных числом периодов (т. е. поколений)  $T$ , получим

$$n_{x,t} = n_{x,t-T} R^T \quad (13)$$

Поскольку

$$n_{0,t-x} = n_{0,t} R^{-x} \quad (14)$$

и, таким образом,

$$n_{0,t} = n_{0,t} \sum R^{-x} l_x m_x \quad (15)$$

то уравнение

$$1 = \sum R^{-x} l_x m_x \quad (16)$$

определяет  $R$  для данной возрастной таблицы выживания ( $l_x$ ) и рождаемости ( $m_x$ ) при постоянной возрастной структуре. При постоянных условиях в случае размножения более чем одной возрастной группы численность будет иметь колебательный характер с затуханием, и стабильное возрастное распределение с постоянными соотношениями численностей всех возрастных групп будет достигнуто.

Следует упомянуть еще две характеристики статистической таблицы ожидаемой продолжительности жизни для разных возрастных групп.

1. Часть популяции, доживающая до возраста  $x$ , но умирающая в возрасте от  $x$  до  $x+1$ , равна

$$d_x = -\lambda_{x+1} + \lambda_x \quad (17)$$

Тогда

$$l_{x+1} = 1 - \sum d_x = l_{x-1} - d_{x-1} \quad (18)$$

2. Смертность в данной возрастной группе  $q_x$ , представляющая собой вероятность смерти особи в возрасте от  $x$  до  $x+1$ , равна

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (19)$$

При неизменных характеристиках таблицы продолжительности жизни возрастных групп популяции, т. е. при отсутствии лимитирующих условий, популяция всегда будет достигать постоянного возрастного распределения. По достижении этого распределения скорость увеличения численности дойдет до постоянного конечного значения  $R$ , оценкой которого является величина  $e^2 m$  в случае непрерывно размножающейся популяции. Чтобы оценить  $r_m$ , можно преобразовать соотношение (16) для случая непрерывного распределения к виду

$$1 = \int e^{-r_m x} l_x m_x dx \quad (20)$$

Несмотря на возможность оценить оба параметра  $R$  и  $r_m$ , следует подчеркнуть, что они имеют смысл только при достижении постоянного возрастного распределения. Вместе с тем, хотя постоянное возрастное распределение достигается редко, эти параметры служат важными характеристиками способности вида к увеличению его численности.

#### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Рассмотрим логистическое уравнение

$$\dot{N} = N \{1 + a \exp(-\lambda N)\}$$

Требуется показать, что максимальная скорость роста достигается в точке  $(1/k)$  и численность популяции в этот момент равна  $N_{eq}/2$ .

Кривая роста по Гомпертцу подобна логистической кривой, т. е.

$$N_t = N_{eq} \exp \left[ -b \exp(-kt) \right].$$

Указать точку перегиба этой кривой и значение  $N_t$  в этой точке.

2. Используя модель Хасселла — Варл, исследовать колебания численностей популяций хозяина и паразита, полагая  $Q=0,20$ ;  $f=2,0$ ;  $P_0=Ю$  и  $N_0=50$  для случаев

а)  $m=0$ , т. е. в отсутствие взаимодействия и при условии выполнимости модели Никольсона — Бейли (37), (38),

б)  $m=0,2$  (слабое взаимодействие),

в)  $m=0,6$  (сильное взаимодействие).

Лабораторные эксперименты с гороховой тлей дали следующие результаты.

Модели популяций

Возраств дней	Крупные особи		Мелкие особи	
	$L_x$	$m_x$	$L_x$	$m_x$
0—4	1,0	0	1,0	0
5—8	1,0	0	1,0	0
9—12	1,0	24,04	1,0	15,00
13—16	0,978	29,94	0,962	20,88
17—20	0,913	23,34	0,889	19,42
20—24	0,783	10,00	0,796	14,10
25—28	0,522	2,94	0,648	6,28
29—32	0,370	0,36	0,574	1,74
33—36	0,217	0	0,370	0
37—40	0,130	0	0,111	0

### Практическое занятие №9

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ САХАРНОГО ДИАБЕТА

[Необходимые предварительные сведения: простейшие дифференциальные уравнения]

### ВВЕДЕНИЕ

Болезнь, известная под названием сахарного диабета, широко распространена. При диабете нарушаются определенные процессы в организме, связанные с процессами окисления сахара, приводящими к выработке энергии. Если нарушено функционирование соответствующего механизма, регулирующего содержание сахара в крови, то оно возрастает. Основное влияние на гомеостаз оказывает инсулин, который участвует в процессах метаболизма сахара. По тем или иным причинам нарушается действие именно этого механизма.

В общем случае дифференциальные модели связаны с теми встречающимися в природе процессами, в которых существенны скорости изменения переменных, другими словами, — с динамическими процессами, определяемыми различными величинами, непрерывно изменяющимися со временем. Наблюдения или эксперименты позволяют установить правила, которым подчиняются эти изменения. Эти правила приводят к уравнениям, включающим как сами переменные, так и их производные, т. е. к дифференциальным уравнениям. Учет большего числа процессов может привести к более совершенной модели, но сейчас наши усилия будут направлены на получение простейшей дифференциальной модели диабета.

#### ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Две основные переменные, включенные в модель, представляют собой величины, которые можно измерять или управлять ими в клинической практике; это уровень сахара в крови  $x$  и уровень инсулина в крови  $y$ . Несколько меньшую роль играют также две дополнительные переменные — ввод пищи  $g$  и, для больных диабетом, ввод инсулина  $w$ .

#### УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Качественное описание биохимических процессов в организме здорового человека можно кратко изложить так. Устойчивое состояние, принимаемое за очку отсчета, есть уровень сахара в крови при голодании,  $x_0$ , при нулевом уровне инсулина. Если эти уровни отличаются от соответствующих устойчивому состоянию, то они изменяются в результате действия нескольких независимых механизмов.

1. Если уровень сахара в крови превышает устойчивый, то поджелудочная железа секретирует инсулин в кровеносное русло. Это явление можно описать кусочно-линейной моделью

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_1 = \begin{cases} b_1(x - x_0) & \text{при } x > x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0 \end{cases}$$

Содержание самого инсулина уменьшается под влиянием нескольких биохимических процессов; в живом организме половина свободного инсулина инактивируется за время от 10 до 25 мин. Следовательно, можно записать

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_2 = -b_2 y, \quad y \geq 0$$

Любой внешний источник инсулина будет точно описываться слагаемым, соответствующим внешней силе в дифференциальном уравнении. Для здорового организма это слагаемое тождественно равно нулю; для больных диабетом оно будет функцией времени, определяемой графиком инъекций

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_3 = b_3 w(t)$$

Три постоянных  $b_i$ ,  $b_s$  и  $b_s$  по определению положительны. Они могут быть названы чувствительностями и представляют собой соответственно чувствительности градиента инсулина к а) высокому уровню сахара в крови, б) уровню инсулина и в) к вводу инсулина. Некоторую сложность учета фактора (а) можно отразить при помощи ступенчатой функции, определяемой соотношениями

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0 \\ 1 & \text{при } \xi \geq 0 \end{cases}$$

так что суммарный градиент уровня инсулина можно теперь выразить в виде

$$\frac{dy}{dt} = b_1 w(t)(x - x_0)H(x - x_0) - b_2 y + b_3 w(t)$$

При рассмотрении градиента уровня сахара выделяются следующие составляющие:

Присутствие инсулина приводит к метаболизму сахара, что понижает содержание его в крови. Чем выше содержание сахара в крови или уровень инсулина, тем быстрее происходит это понижение. Отсюда следует, что по крайней мере для малых изменений переменных этот эффект будет достаточно хорошо описываться произведением указанных двух уровней

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_1 = -a_1 xy,$$

2. Уровень сахара в крови может падать ниже равновесного (например, вследствие большой физической нагрузки при голодании). Для того чтобы поднять его до нормального уровня, высвобождаются запасы углеводов из печени. Следовательно,

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_2 = \begin{cases} a_2(x_0 - x) & \text{при } x < x_0 \\ 0 & \text{при } x \geq x_0 \end{cases}$$

3. Имеет место также незначительное естественное падение концентрации сахара, влияние которого на результаты, полученные согласно рассматриваемой модели, мало. Следовательно, хотя в действительности этот фактор и включен в модель, далее мы его не будем рассматривать, а также не будем учитывать и при последующем обсуждении результатов.

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_3 = a_2'(x - x_0)$$

Внешним источником сахара в крови является потребляемая пища, что можно описать явной функцией времени

$$\left[ \frac{dy}{dt} \right]_4 = a_3 z(t)$$

Постоянные  $a_b$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  и  $a_3$  также положительны и являются соответственно чувствительностями градиента уровня сахара к а) присутствию инсулина, б) низкому уровню сахара в крови, в) высокому уровню сахара в крови и г) приему пищи. С использованием уже введенной ступенчатой функции

выражение для суммарного градиента уровня сахара в крови может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a_1xy + a_2(x_0 - x)H(x_0 - x) - a'_2(x - x_0)H(x - x_0) + a_3z(t)$$

Отметим, что отклонения содержания сахара в сторону повышения или понижения относительно равновесного уровня компенсируются двумя различными стабилизирующими процессами, так что система является существенно нелинейной. Кроме того, протекание основного процесса удаления сахара зависит от содержания как сахара, так и инсулина. Следовательно, слагаемое, определяющее убыль сахара, также существенно нелинейно, поэтому использованное выше представление его в виде произведения концентраций соответствует, вероятно, самому простому варианту модели.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая модель - самая простая из тех, которые могут представлять реальность. Входящие в уравнения модели различные слагаемые являются кусочно-линейными, за исключением слагаемых, описывающих взаимодействие, которые представляют собой произведения линейных членов. Однако и действительности наблюдаются пики, разрывы, а также возникают явления гистерезиса; для описания таких явлений предлагаемая модель слишком груба.

## 9.1 ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Наличие в уравнениях модели произведения  $xu$  делает невозможным их элементарный анализ. Кусочно-линейная функция поступления инсулина в систему и различные слагаемые, описывающие внешние источники, не представляют существенных трудностей для исследования, и если бы не было слагаемого с произведением  $xu$ , можно было бы получить некоторые алгебраические соотношения. Однако область применения этих соотношений была бы чрезвычайно ограниченной в связи с тем, что такого рода моделирование существенно упрощает взаимодействие сахара и инсулина даже в случае двух переменных. В действительности хотелось бы иметь лишь общие сведения относительно особенностей отклика системы на введение различных веществ, а для этого достаточно графиков. Была составлена простая программа для численного решения системы уравнений и для представления результатов с помощью устройства графического вывода.

сахар

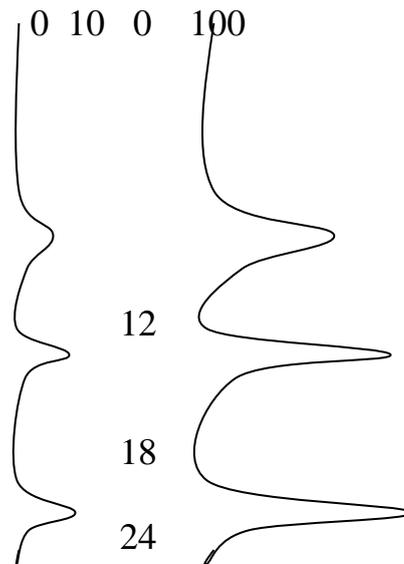


Рис. 9.1. Нормальный отклик уровней сахара и инсулина.

## 9.2 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 9.1 показан построенный на основании данной модели отклик уровней сахара и инсулина в организме здорового человека т.е. не страдающего диабетом) на три приема пищи в течение дня. При каждом приеме пищи уровень сахара в крови поднимается, стимулируя тем самым производство инсулина; наличие инсулина в крови приводит к снижению содержания сахара, и в свою очередь уровень самого инсулина снижается вследствие естественного процесса распада. Численные данные для этой модели следующие:

Чувствительности:

$$a_1 = 0,05,$$

$$a_2 = 1,0,$$

$$a_3 = 4,0,$$

$$b_1 = 0,5,$$

$$b_2 = 2,0,$$

$b_3$  — значение несущественно.

диетой и инъекциями инсулина. Тест на толерантность к глюкозе дает три величины уровня сахара в крови через 1/2, 1 и 2 часа после введения с пищей стандартного количества (100 г) глюкозы при устойчивом состоянии голодания и служит для отличия здорового человека от больного диабетом. И, наконец, отклик черного ящика на прежнее лечение обуславливает дальнейшее лечение. Нечего и говорить, что состояние самого черного ящика играет главную роль при проведении лечения.

Трудности, возникающие при анализе рассматриваемой проблемы, совершенно очевидны. Любая система метаболизма сахара соответствует ярко выраженному гомеостатическому процессу. Можно установить два ключевых параметра — взаимные чувствительности уровней сахара и инсулина.

Следовательно, любая модель, включающая эти параметры, будет с некоторой степенью точности отражать действительность, как и обстоит дело в случае предложенной выше двухпараметрической модели. Рассматриваемая модель является в техническом отношении самой простой моделью низшего порядка, учитывающей указанные ключевые чувствительности.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Найти уравнение, связывающее  $v_3$  с периодом полураспада инсулина.
2. Ввести в модель слагаемое, описывающее секрецию инсулина с учетом насыщения (т. е. максимальной скорости секреции) а) кусочно-линейным образом, б) в виде гладкой функции.
3. Указать, для какой системы величина  $z(t)$ , соответствующая поступлению сахара, является откликом ее подсистемы на введение, описываемое дельта-функцией.
4. Функция поступления инсулина  $w(t)$  является на самом деле грубым кусочно-линейным представлением введения, описываемого распределением Гаусса со сдвигом; привести формулу этого распределения. Указать, какая конкретная подсистема будет откликаться подобным образом и на какое введение.
5. Дополнительно включить в модель «быстро используемый» запас гликогена в печени в количестве  $K(t)$ . Этот запас будет источником поступления сахара при его низком уровне в крови. Записать сравнение для  $X(t)$ , вводя потоки сахара, истощающие и пополняющие запасы в печени. (Указание: это уравнение будет нелинейным, так как при  $l=0$  сахар в кровь не поступает.)
6. Если не учитывать наличия отсечки, описываемой функцией Хевисайда, структура рассмотренной модели соответствует известной задаче Вольтерра о лисах и кроликах. Выяснить, что это за задача и сравнить роли переменных в обоих случаях.

### Практическое занятие №10

#### СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

[Необходимые предварительные сведения: элементы теории вероятностей и преобразования Лапласа]

#### 10.1. МОДЕЛИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Возрастание интенсивности современного дорожного движения ставит острые и неотложные проблемы. С точки зрения общества они имеют огромное социальное воздействие, а для математика открывают область приложения различных теорий, охватывающих большое число математических методов.

Математическому исследованию поддаются, в частности, следующие проблемы:

1. Движение транспорта на перекрестках и свободных дорогах и проблемы стоянок.

2. Инженерные проблемы, такие, как проектирование дорожных систем для новых городов и исследование систем управления движением, включающих светофоры и объездные пути.

3. Проблемы планирования перевозок и составления расписаний для транспортных караванов, включая исследование экономических последствий планирования.

4. Проблемы безопасности движения.

Методы решения этих задач весьма разнообразны. В одном из подходов к изучению плотных транспортных потоков поток автомобилей, движущихся по дороге, рассматривается в терминах кинематики жидкостей. В этом случае решения получаются при помощи классических методов. Такого рода модели являются макроскопическими и свойства отдельных автомобилей в них не рассматриваются, поэтому такие теории не содержат какого-либо описания поведения водителей. С другой стороны, динамические модели (модели, «следящие» за отдельным автомобилем) являются моделями «микроскопическими» в том смысле, что в них объектом исследования является поведение двух автомобилей, движущихся один за другим по дороге. Оба типа моделей по своей природе детерминированные.

Существенно отличный от указанных двух тип модели представляет собой вероятностная, или стохастическая модель, включающая в рассмотрение элементы случайности. В ситуациях,

описанных в следующих разделах главы, транспортный поток рассматривается как точечный случайный процесс, вероятностная структура которого выведена, насколько это возможно, из данных, собранных в реальных ситуациях. Для разработки положений такогиди теории, включающей в рассмотрение статистические переменные, нужен сложный математический аппарат.

Каждый из типов моделей имеет свою область применения; различные модели могут дополнять одна другую. Некоторые теоретические подходы основаны па положениях, которые часто критикуются из-за их неадекватности или искусственности. Например, автомобили часто представляют как геометрические точки. В области исследования дорожного движения кажется особенно трудным найти плодотворный теоретический подход, который был бы адекватным и при этом достаточно легко поддавался обработке, чтобы быть полезным. Следовательно, в качестве практической альтернаты следует либо часто прибегать к помощи натурного моделировании, либо комбинировать теорию и моделирование.

## 10.2. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОЖИДАНИЯ ПЕШЕХОДА ПРИ ПЕРЕХОДЕ УЛИЦЫ

Рассмотрим следующую простую ситуацию. Пешеход хочет перейти улицу с односторонним движением. Предположим, что движение происходит в один ряд, так что пешеходу требуется за

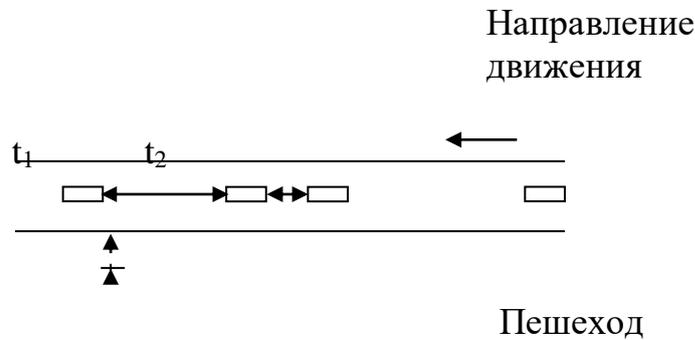


Рис. 10.1. Модель ожидания пешехода.

данное минимальное время для того, чтобы завершить переход улицы. Пусть пешеход приходит в точку, из которой начнет переход улицы в момент, когда только что прошел автомобиль. Как будет показано ниже, некоторые из этих ограничений могут быть сняты.

Эта ситуация может быть изображена в виде схемы, показанной на рис. 10.1.

При рассмотрении этой проблемы нас интересуют вопросы, включающие определение вероятности задержки пешехода, а также величину времени ожидания. Однако сначала модель должна быть уточнена, т. е. нужна система правил, регулирующих поведение как пешехода, так и автомобилей.

Рассмотрим поведение пешехода. Очевидно, что он основывает свое решение начать переход улицы на многих факторах, самый важный из которых включает оценку близости и скорости ближайшего автомобиля. В задачах об ожидании временной интервал более существен, чем пространственный. Пешеход может принять эти факторы во внимание, наблюдая, например, за временными

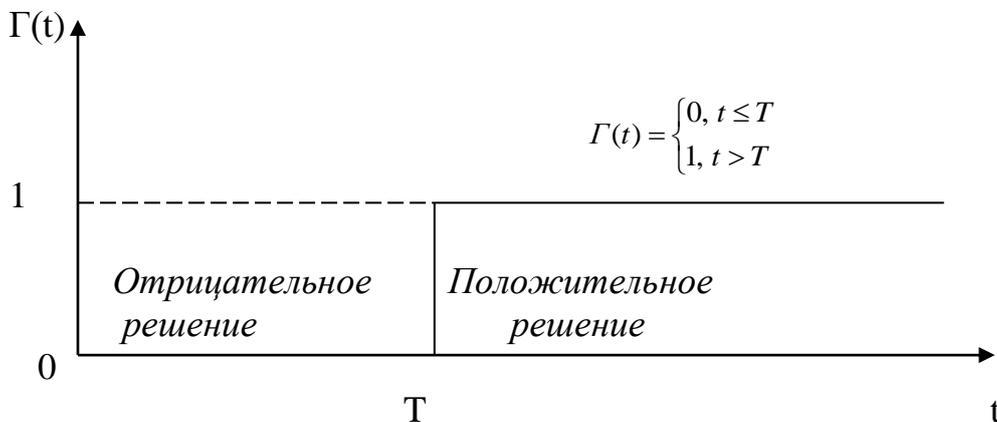


Рис. 10.2. Ступенчатая функция «интервал — решение».

интервалами в потоке автомобилей, т. е. за временем, которое требуется ближайшему автомобилю для того, чтобы доехать до пешехода. Время между прохождением двух последовательных автомобилей будем называть интервалом и измерять от времени появления в точке перехода переднего бампера первого автомобиля до появления переднего бампера второго.

Теперь необходимо уточнить критерий принятия положительного решения о переходе улицы. Можно, например, предположить, что каждому человеку свойствен так называемый критический временной интервал между появлением автомобилей, который различен для разных индивидуумов и разных ситуаций. Однако для отдельного человека в данной обстановке временной интервал, требующийся для отрицательного решения о переходе, всегда меньше критического времени; решение перейти улицу принимается только в том случае, если временной интервал превышает критический. Это простейшая из возможных моделей типа интервал — решение; она представляется ступенчатой функцией  $\Gamma(t)$ , показанной на рис. 10.2. Эта модель очень хорошо соответствует опыту, однако возможны и другие модели

Рассмотрим теперь, как распределено во времени движение автомобилей по дороге. В стохастических моделях расположение

вдоль дороги отдельных автомобилей детально не указывается. Вместо этого в рассмотрение вводится распределение вероятностей интервалов между автомобилями, движущимися в одном ряду.

Простейшей возможностью является предположение о «случайном» распределении интервалов. В статистической теории эти слова означают вовсе не «полную неопределенность», но, напротив, нечто вполне определенное. Множество событий, в данном случае моментов прибытия автомобилей в данную точку дороги, назовем случайным, если:

1. вероятность события в течение малого временного интервала  $(t, t+\delta)$  равна  $\lambda \delta + o(\delta)$  где  $\lambda$  — постоянная величина;
2. вероятность двух и более событий на интервале  $(t, t+\delta)$  равна  $o(\delta)$ ;
3. число событий на интервале  $(t, t+\delta)$  не зависит от того, что происходило на временном интервале  $(0, t)$ .

Постоянная  $\lambda$  определяет плотность транспортного потока, т. е. среднее число автомобилей, проходящих в точку перехода за единицу времени, а  $o(\delta)$  означает величину более высокого порядка малости, которой можно пренебречь. Заметим, что для плотного транспортного потока предположения (2) и (3) не выполняются и наши гипотезы становятся неадекватными (см. задачу (5)). Следовательно, нет ничего удивительного, что распределения, которые выводятся непосредственно из сформулированных выше Гипотез о случайном характере процесса движения, не дают корректного описания опытных данных для потоков, плотность которых превышает 800 автомобилей в час (при однорядном движении), т.е. когда средний временной интервал между автомобилями меньше чем 4,5 с.

При помощи гипотез 1—3 можно получить два распределения, эквивалентных предположению о случайном характере транспортного потока.

«Распределение числа машин» определяет вероятность прибытия любого данного числа машин в данную точку за

единицу времени. Если обозначить  $P(k)$  вероятность прибытия  $k$  машин за единицу времени, получим распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Другое—«распределение интервалов»—дает вероятность существования пробела или интервала данной величины  $t$ . При описанных предположениях это распределение будет экспоненциальным (рис. 10.3) с плотностью вероятностей вида

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

Последнее распределение связано с поставленной в данном разделе задачей о времени ожидания пешехода. На рис. 10.3 изображен общий вид этого распределения.

Вероятность появления интервала, превышающего данное время  $T$ , определяется соотношением

$$\Pr(\text{пробел} > T) = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T}$$

Для транспортного потока, плотность которого 600 автомобилей в час,  $\lambda = 1/6$  автомобиля в секунду. Если пешеходу требуется для

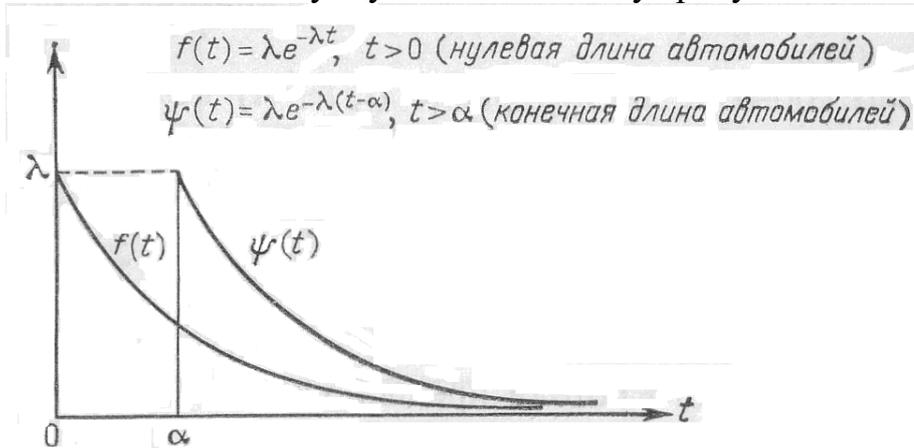


Рис. 10.3. Экспоненциальное распределение и экспоненциальное распределение со сдвигом.

перехода не меньше 8 с, вероятность того, что он перейдет улицу без задержки, составляет  $e^{-8/6} = 0,2636$ . Если пешеход должен ждать, пока пройдет первый автомобиль, он повторит процесс ожидания в течение второго интервала, и т. д. Действительное время ожидания получается суммированием случайных временных интервалов. Это будет сделано в следующем параграфе.

Перед тем как продолжить изложение, рассмотрим, как сделать эту модель более адекватной. Начнем с того, что поскольку автомобили всегда имеют конечную длину, время между прохождением двух автомобилей всегда отлично от нуля. Тогда более адекватным будет экспоненциальное распределение со сдвигом по времени (см. рис. 10.3). Если минимальный временной интервал

равен  $a$ , где величина  $a$ , вероятно, порядка одной секунды, искомое распределение имеет вид

$$\psi(t) = \lambda e^{-\lambda(t-a)}, t > a.$$

Легко показать, что средний интервал для экспоненциального распределения

(при  $a=0$ ) равен  $1/\lambda$ , а для экспоненциального распределения со сдвигом ( $1/\lambda + a$ ).

В рассматриваемой модели может быть снято также ограничение, предполагающее, что прибытие пешехода в точку перехода в точности совпадает с прибытием автомобиля в эту точку. Хорошо Известный результат, применимый только для экспоненциального распределения (без сдвига), показывает, что распределение остаточных интервалов времени от момента прибытия пешехода до прихода следующего автомобиля, называемых временами запаздывания, в точности то же (и с тем же средним значением), что и распределение временных интервалов между автомобилями. В задачах о задержке пешехода требуется знать как распределение времени запаздывания, характеризующее время, проходящее до появления первого автомобиля, так и распределение интервалов, определяющее время ожидания следующих пропускаемых машин. Время запаздывания и интервалы распределены одинаково только при случайном транспортном потоке. В других случаях анализ более сложен.

Можно снять также ограничение, заключающееся в предположении о том, что движение происходит в один ряд. Для двух случайных транспортных потоков, независимо движущихся в одном и том же направлении, плотности которых равны соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно достаточно просто показать, что распределение интервалов общего транспортного потока определяется функцией плотности вероятностей вида

$$\varphi(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t > 0$$

Для такого потока средний интервал равен  $1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ , а вероятность того, что пешеход при переходе улицы задержится на время большее, чем  $T$ , равна

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}$$

Этот результат можно обобщить для большего числа случайных транспортных потоков и для других распределений.

Здесь необходимо сделать одно замечание. Если пешеход должен пересечь дорогу, по которой движется более чем один транспортный поток, он может сделать это по крайней мере двумя различными способами. Он может оценить интервалы в общем транспортном потоке и принять решение пересечь улицу в один прием. Пешеход может также рассмотреть каждый из потоков независимо — в этом случае, на середине дороги должен быть воображаемый (а возможно, и настоящий) «островок безопасности». Для этих двух моделей результаты различны.

Если не ввести предположение об островке безопасности, случаи двух транспортных потоков, движущихся в противоположных направлениях, проанализировать чрезвычайно трудно; при указанном предположении результаты получаются в точности теми же, что и для двух потоков одного направления.

### 10.3. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЛАВНОЙ ДОРОГИ

Простая модель, рассмотренная в предыдущем разделе, может быть сделана более адекватной различными способами. Например, следовало бы рассмотреть не только одиночный автомобиль на второстепенной дороге, но и очередь машин у перекрестка. Если транспортный поток по главной дороге невелик, предположение о случайном характере подхода машин к перекрестку в значительной степени оправдано. Для потока по главной дороге можно выбрать общее экспоненциальное распределение или одно из распределений частного вида. В действительности поток по главной дороге может состоять по меньшей мере из двух потоков, движущихся в одном направлении. (задача о двух потоках, движущихся в противоположных направлениях, математически очень трудна.)

Если на второстепенной дороге ожидает очередь  $n(n>1)$  автомобилей, можно представить себе следующую ситуацию. Первый водитель следит за текущей величиной интервала  $t$  и принимает положительное или отрицательное решение о пересечении главной дороги согласно некоторому критерию, который в общем случае может быть записан как  $T(t)$ . Возможны также альтернативы к использованным ступенчатым функциям  $T(t)$ . Если первый в очереди водитель решает пересечь главную дорогу, второй передвигается на место первого и вся процедура повторяется с учетом временного интервала, остающегося после того, как первый автомобиль совершит свой маневр. Различные модели этого достаточно общего типа были проанализированы теоретически, обычно с учетом некоторых ограничений на правила принятия водителем решений о пересечении дороги. Например, одна из таких моделей включает в рассмотрение ограничение, заключающееся в том, что в течение каждого интервала главную дорогу пересекает не более одного автомобиля. Всесторонне адекватные модели слишком трудны для теоретического описания, и некоторые модели, подобные описанной выше, подвергались критике как весьма искусственные. Следует ожидать, что наиболее подходящим для практики методом будет натурное моделирование, или, возможно, комбинация теории и натурального моделирования.

## 10.4 АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ

Установление адекватности распределений транспортных потоков или зависимостей „интервал — решение" составляет жизненно важную часть процесса построения моделей. Сама процедура установления адекватности может вызвать затруднения. В качестве иллюстрации опишем характер проблем, возникающих при проверке адекватности зависимости „интервал — решение".

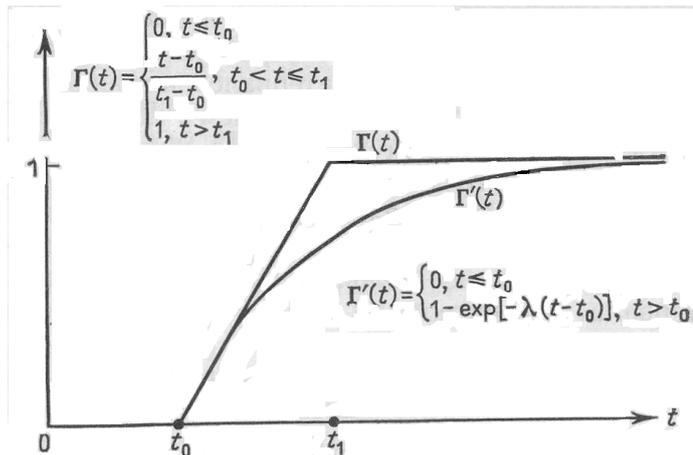


Рис. 10.6. Трапециевидная и экспоненциальная со сдвигом функции «интервал — решение».

При использовании данных, полученных для реального перекрестка, могут встретиться трудности как принципиального, так и практического характера. В идеале хотелось бы иметь такую ситуацию, в которой машины, движущиеся в главном потоке, проходили бы мимо ожидающих у перекрестка автомобилей с интервалами, постоянно увеличивающимися от значения, например, в половину секунды. Таким способом можно было бы зарегистрировать первый (т. е. минимальный) интервал, при котором будет принято положительное решение о пересечении дороги. Строго говоря, такой эксперимент нужно было бы повторить большое число раз, прежде чем минимальный интервал, при котором принимается положительное решение, для отдельного водителя (или для группы водителей) будет достоверно определен. Очевидно, что такой опыт неосуществим, и данные обычно собираются путем наблюдения за реальным перекрестком при помощи протоколирования величин интервалов, при которых группа водителей, ожидающих под знаком дорожного движения, принимает положительное или отрицательное решение о пересечении перекрестка. При интерпретации результатов любой теории, основанной на этих данных, нужна особая осторожность.

В первую очередь отметим, что распределение всей совокупности интервалов „отрицательного решения" состоит из двух компонент, соответствующих распределению интервалов для отдельного водителя и распределению их между водителями. Это означает, что искомое распределение является суперпозицией двух распределений. Вообще говоря,

возможен также случай, когда для каждого водителя и каждого интервала с положительным решением существует множество интервалов с отрицательным решением. Другими словами, для каждого водителя и каждого интервала с положительным решением существует распределение интервалов, для которых не принимается решение о пересечении перекрестка, причем, возможно, ни один из этих интервалов не равен „максимальному интервалу с отрицательным решением“. Даже если бы такие распределения можно было получить, они в общем случае не совпадали бы для одного и того же водителя в разные моменты времени. Столь же необычным будет и распределение интервалов с положительным решением, за исключением того, что в каждом частном случае каждый водитель принимает положительное решение для какого-то одного интервала. Эти интервалы вовсе не обязательно равны „минимальному интервалу с положительным решением“. Кроме того, так как интервалов с отрицательным решением гораздо больше, чем интервалов с положительным решением, показатели осторожного водителя при использовании всех данных будут завышенными. Были разработаны различные методы для обхода трудностей такого рода, включающие, в частности, модели, использующие только данные о времени задержки. Однако анализ этих моделей выходит за рамки рассматриваемых здесь задач.

#### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Движение однопольного транспортного потока плотностью 900 машин в час происходит случайным образом. Для интервала  $t=1/15$  с, вычислить
- долю интервалов, превышающих данное время  $t$ ,
  - долю времени, занимаемого интервалами, превышающими  $t$ ,
  - среднюю величину всех интервалов, превышающих  $t$ .

Как изменятся эти результаты, если воспользоваться экспоненциальным распределением со сдвигом, равным 1 с, при неизменной плотности транспортного потока?

2. Пусть временные интервалы между моментами, в которые машины проходят мимо данной точки дороги, имеют экспоненциальное распределение с функцией плотности вероятностей  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ,  $t > 0$ . Плотность потока машин составляет 600 машин в час. Какова средняя длина интервала между прохождением последовательно движущихся автомобилей?

Пешеход начинает переход дороги сразу, как только пройдет автомобиль; он переходит дорогу только в том случае, если полагает, что величина интервала составляет по меньшей мере 4 с. Предполагая, что ошибкой в суждениях пешехода можно пренебречь, вычислить

- вероятность того, что пешеход задержится при попытке перейти дорогу,
- среднюю величину интервала, в течение которого пешеход пересечет дорогу,
- среднее время его ожидания при условии, что он должен пропустить ровно один автомобиль,

г) среднее время его ожидания, если не накладываются ограничения на число автомобилей, проходящих мимо пешехода за период ожидания.

3. Применительно к задаче о переходе улицы предлагается модификация схемы двухрядного одностороннего движения по дороге, состоящая в том, что в модель вводится островок безопасности на середине проезжей части. При условии, что транспортные потоки в каждом ряду можно рассматривать как независимые с плотностями  $X_2$  и  $\kappa_2$ , получить выражение для вероятности того, что пешеход будет вынужден ждать, и для среднего времени ожидания в каждой из двух ситуаций, описанных выше, т. е. для рассмотренной ранее модели и для ее модификации. Определите, будет ли указанная модификация полезной по критерию продолжительности ожидания. Какие другие критерии можно было бы рассмотреть?

4. Развить простую модель, воспользовавшись функцией «интервал — решение», для различных функций распределения, описывающих поток по главной дороге, таких, как суперпозиция экспоненциальных распределений и гамма-распределение.

5. Учитывая, что модели стохастического типа становятся непригодными при высоких плотностях транспортного потока, предложить адекватную модель для описания плотных потоков.

### Основная литература

1. Эксперимент. Модель. Теория. Москва-Берлин. Наука .1982-332 б.
2. Под редакцией Дж. Эндрюса и Р. Маклоуна. Математическое моделирование, М.Мир, 1983
3. Растригин Л.А. Моджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. М. Энергия, 1987-216 б.
4. Математическое моделирование. Проблемы и результаты [Текст] : монография / Отв. ред. изд.: О. М. Белоцерковский, В. А. Гуцин. - М. : Наука, 2003. - 478 с. - (Росс. АН; Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения). - Лит. с.: 475-476.
5. Разработка САПР [Текст] : в 10 кн. Практик. пособие / Под ред. А. В. Петрова. - М. : Высш. шк., 1990.
6. А.Д. Цвиркун, В.К. Акинфиев, В.А. Филиппов. Имитационное моделирование в задачах структуры сложных систем [Текст] : оптимизационно-имитационный подход /; Отв. ред. В.Н. Бурков. - М. : Наука, 1985. - 173 с. - (Ин-т проблем управления).
7. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики [Текст] : сб. трудов / Под ред. А. Н. Тихонова, А. А. Самарского. - М. : МГУ, 1990. - 290 с.
8. Максимей, И. В. Имитационное моделирование на ЭВМ [Текст] : монография / И. В. Максимей. - М: Радио и связь, 1988. - 232 с.

## Дополнительная литература

1. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М. Наука, 1979-224 б.
2. Проблемы вычислительной математики (под редакцией А.Н.Тиханова), Издательство МГУ, 1980.
3. Советов Б.Я. Яковлев С.А. Моделирование систем М . 1985.
4. Левин А.Е., Герменко Г.Л. Моделирование иерархия основы автоматизированного проектирования. М. 1989.
5. Советов Б.Я. Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум М. Высшая школа.
6. Шрайбер Т. Дж. Моделирование на GPSS. М. Машиностроение . 1980-592 с.
7. Ивахненко А.Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным М. Радио и связь. 1997- 312 б.
8. Камиллов М.М. Эргашев А.К. Математик моделлаштириш. ТАТУ,
9. Тошкент 2007-176 б.
10. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики [Текст] : сб. трудов / Под ред. А. Н. Тиханова, А. А. Самарского. - М. : МГУ, 1990. - 290 с.
11. Математические модели контроля загрязнения воды [Текст] : монография / Пер. с англ. под ред. Ю. М. Свирищева ; Ред. А. Джеймс. - М. : Мир, 1981. - 472 с.
12. Моделирование и оптимизация сложных систем управления [Текст] : сборник. - М. : Наука, 1981. - 271 с. - (АН СССР. М-во приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР. Ин-т проблем управления).
13. Полляк, Юрий Григорьевич. Статистическое машинное моделирование средств связи [Текст] : монография / Ю. Г. Полляк, В. А. Филимонов. - М. : Радио и связь, 1988. - 175 с. : ил. - (Статистическая теория связи ; вып. 30).
14. Г. П. Мозговой, В. Д. Силин / Е. А. Чахмахсян, Г. П. Мозговой, В. Д. Силин. Математическое моделирование и макро моделирование биполярных элементов электронных схем [Текст]: - М.: Радио и связь, 1985. - 144 с.
15. А.Д. Цвиркун, В.К. Акинфиев, В.А. Филиппов; Отв. ред. В.Н. Бурков. Имитационное моделирование в задачах структуры сложных систем [Текст] : оптимизационно-имитационный подход / - М. : Наука, 1985. - 173 с. - (Ин-т проблем управления).
16. Борисов. Ю. П. Математическое моделирование радиосистем [Текст] : учеб. пособие для вузов / - М. : Сов. радио, 1976. - 296 с. : ил.
17. Григорьев. Л. Г. Моделирование и технические науки [Текст]: монография / Л. Г. Григорьев. - М.: Знание, 1967. - 64 с. - Библиогр.: с. 63.
18. [www.cyberseller.ru](http://www.cyberseller.ru)
19. [www.bookorhive.ru](http://www.bookorhive.ru)

- 20.dir. bigli.ru
- 21.[www.plati.acdshop.ru](http://www.plati.acdshop.ru)
- 22.[www.zsu.edu.ua](http://www.zsu.edu.ua)
- 23.yikit.aila.ru
- 24.[www.infomag.ru](http://www.infomag.ru)
- 25.finebook.ru
- 26.sellexpress.ru
- 27.ououou.ru