

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

Физика- математика факультети

“Умумий математика “

к а ф е д р а с и

**5460100- математика таълим йўналиши бўйича бакалавр
даражасини олиш учун**

АЛМАНОВ УМИДЖОН ЙЎЛДОШОВИЧ

**“Ўқувчиларга тенгламаларни ечишни ўргатиш усуллари”
мавзусидаги**

Битирув малакавий иши

Илмий рахбар:

доц. Норжигитов Ҳ

Гулистон -2013

М у н д а р и ж а

1. Кириш.....	3
2. 1-БОБ. Алгебраик тенгламалар.....	7
3. § 1.1. Бир ўзгарувчили тенгламалар.....	7
4. §1.2. Бир ўзгарувчили тенгламаларни ечишнинг айрим усуллари.....	10
5. §1.3. Модул қатнашган тенгламалар.....	18
6. §. 1.4 Тенгламалар тарихи	25
7. II- БОБ.Юқори даражали алгебраик тенгламалар.	28
8. §.2.1. Безу теоремаси. Горнер схемаси.....	28
9. §2.2. Алгебраик тенгламаларнинг комплекс ва рационал илдизлари.....	34
10. §.2.3 Тенгламаларни тақрибий ечиш.	38
11. Хулоса	43
12. Адабиётлар рўйхати	44

Кириш

Ҳақиқий белгилар билан берилган номаълум сонлардан иборат тенгликга тенглама дейилади. Одатда, бу ҳарфни тенгламанинг номаълумлари деб юритилади. Номаълумни сонига қараб тенгламани бир номаълумли, икки номаълумли ва ҳақозо каби тенгламалар деб аталади. Мазкур битирув малакавий ишга биз асосан, бир номаълумли тенгламалар билан танишамиз.

Тенгламани айниятга айлантирувчи сон тенгламанинг илдизи, илдизлар мажмуаси тенгламанинг ечими дейилади. Тенгламани ечиш деганда, тенгламанинг барча ечимларини топишни тушинамиз.

Агар тенглама иштирок этаётган номаълум фақат алгебраик ифодалар билан қатнашса, тенглама алгебраик тенглама дейилади.

Алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in R$ $i = 0, 1, \dots, n$

Агар тенгламада иштирок этаётган номаълум каср ифода билан қатнашса иррационал тенглама деб юритилади.

Агар тенгламада иштирок этаётган номаълум трапецедент ифода билан, масалан, логорифмда, тригонометрик функцияда ва бошқа трапецедент ифодалар билан қатнашса, тенглама трапецедент тенглама дейилади.

Агар бирор тенгламанинг ҳамма ечимлари иккимнчи тенгламанинг ечимлари ва аксинча, иккинчи тенгламанинг барча ечимлари биринчи тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда бу икки тенгламалар тенг кучли тенгламалар дейилади. Масалан, $A = B$ ва $A^2 = B^2$ тенгламалар тенг кучли эмас, чунки, иккинчи тенгламадан $A = -B$ тенглик ҳам келиб чиқади. $A = B$ ва $A^3 = B^3$ тенгликлар тенг кучли, чунки иккинчи тенгламани

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = 0$$

ёки $A = B$ ва $A^2 + AB + B^2 = \left(A + \frac{1}{2}B\right)^2 + \frac{3}{4}B^2 \neq 0$

бундан, бу тенгламаларнинг тенг кучлилиги келиб келиб чиқади.

Аммо, тенгламалар комплекс сонларда тенг кучли эмас.

Номаълум иккита ёки ундан кўп бўлган бир неча тенгламалар мажмуаси тенгламалар системаси дейилади.

Номаълумнинг қийматлар мажмуаси системадаги барча тенгламаларни айниятга айлантурсак, у ҳолда номаълумнинг бундай қийматлари системанинг ечими дейилади.

Тенгламалар системасини ечиш деганда унинг барча ечимлар тўпламини топишни тушинамиз. Бу тушинчалар билан ҳар қандай тенглама ечса бўладими? - деган савол туғилади. Албатта, йўқ. Шундай тенгламалар борки, олимлар бирор тенгламани ечишга бутун умрини сарфлашади.

Аммо, имтихон топширмақчи бўлган ўқувчи, ҳамма тенгламани еча олиши зарур. Чунки, берилган тенглама мактаб дастуридан чиқиб кетмаслиги керак.

Ушбу битирув малакавий ишда тенгламалар классификация қилинади, ҳар бир тенгламанинг ечиш йўллари ўрганилади. Мактаб дастурига кирувчи алгебраик тенгламаларни ечиш усуллари ўрганилади ва бу ўқувчиларга олий ўқув юртига кириш пайтида тестдаги тенгламаларни ечишга қайта ёрдам беради, деб ўйлайман.

Битирув малакавий ишнинг мақсади: Ушбу битирув малакавий ишда чизиқли, квадрат, модул қатнашган, иррационал ва алгебраик тенгламалар системасининг ечиш усуллари, ҳар бир мавзуга доир машқлар ечиб кўрсатилган ва мустақил ечиш учун бир неча машқлар берилган. Ҳар бир машқни ечиш осондан қийинларга қараб тартибланган.

Битирув малакавий ишнинг муаммоси: Мазкур битирув ишда, асосан тенгламаларни тартиблаш, уларга доир машқлар тўплаш ва

уларни ўқувчиларга етказиш зарур. Ҳар бир синфда барча ўқувчиларни тўпланган машқларнинг камида 90% эришиш муаммоси бор.

Битирув малакавий ишнинг объекти: Асосан тенгламаларни тартиблаш, уларни ечиш усуллари ишлаб чиқиш ва уларга доир машқларни тўплашдан иборат.

Битирув малакавий ишнинг предмети: Ушбу битирув малакавий ишнинг предмети, асосан, қуйидагилардан иборат:

- Тенгламанинг берилиши ва ечими.
- Чизиқли тенглама ва уни ечиш усуллари.
- Квадрат тенглама ва уни ечиш. Вьесит тенгламасининг қўлланилиши.
- Модул қатнашган тенгламалар.
- Алгебраик тенглалар системаси ва уни ечиш усуллари.

Битирув малакавий ишнинг вазифаси: Ушбу битирув малакавий ишнинг айрим қисмларини Гулистон шаҳар 16 – умумтаълим мактабининг 7 ва 8 – синф ўқувчиларда синовдан ўтказилди ва ўқувчиларнинг қизиқиши бир мунча ортиди.

Битирув малакавий ишнинг ишнинг янгилиги: Битирув малакавий ишда айрим тенгламаларга доир масалалар физика иқтисодиёт ва химия фанларида учрайдиган масалаларни алгебраик тенгламаларга келтириб ечиш усуллари кўрсатилган.

Адабиётлар таҳлили. Тенгламаларнинг таърифи, берилиш усуллари, ечимлари, тенг кучли тенгламалар, биргаликда берилган тенгламалар ҳақида фикрларни [2] - [1 2] адабиётлардан, алгебраик тенглама ва ечимлари ҳақида теоремаларни [4] , [5] адабиётлардан, чизиқли тенгламалар, квадрат тенгламаларни ўрганишда [11]-[17] адабиётлардан модул қатнашган тенгламаларни эса [7] , [9] адабиётлардан фойдаланилди. Бундан ташқари битирув малакавий ишни бажаришда интернет, зиёнет [13] , [14] - [16] маълумотлардан ҳам фойдаланилди.

I – БОБ. Алгебраик тенгламалар
§ 1.1 Бир ўзгарувчили тенгламалар.

1.Тенглама. Тенг кучли тенгламалар. Бир ўзгарувчи $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалардан тузилган.

$$A(x) = B(x) \quad (1)$$

тенглик бир ўзгарувчи тенглама, x нинг тўғи сонли тенгликка айлантирувчи ҳар қандай қиймати эса шу тенгламанинг ечими (илдизи) деб аталади. Бир ўзгарувчи тенглама ечимга эга бўлмаслиги битта ёки бир нечта илдизга эга бўлиши ёки чексиз кўп илдизларга эга бўлиши мумкин:

Масалан, $x^2 + 4 = 0$ тенглама ечимга эга эмас, $x + 4 = 0$ тенглама битта $(x = -4)$ ечимга эга,

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

тенглама учта $(x = -1, x = 2, x = -3)$ ечимга эга ва нихоят, $0 \cdot x = 0$ тенглама чексиз кўп ечимга эгадир.

Тенгламани ечиш унинг барча илдизлари тўпламини топиш демакдир. Агар $A_1(x) = B_1(x)$ тенгламанинг ечимлари тўплами $A_2(x) = B_2(x)$ тенгламанинг ечимлари тўпламига тенг бўлса, улар **тенг кучли тенгламалар** дейилади. Бундан, ечимга эга бўлмаган ҳарқандай айтилган бир ўзгарувчилар тенгламаларнинг тенг кучли эканлигини кўрсаткичи келиб чиқади.

1- мисол . $x^2 - 5x + 6 = 0$ ва $(x - 2) = 0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалар эканлигини кўрсатамиз

$x^2 - 5x + 6 = 0$ квадрат тенглама $x_1 = 2, x_2 = 3$ илдизларга эга. Унинг ечимлар тўплами $x_1 \{2; 3\}$ дан иборат $(x - 2)(x - 3) = 0$ тенглама ҳам $x_1 = 2, x_2 = 3$ илдизларга эга. Шу сабабли унинг ечимлари тўплами $x_2 \{2; 3\}$ дан иборат. Бундан $x_1 = x_2$ га ега бўламиз.

Демак берилган тенгламалар тенг кучлидир.

2- мисол . $x^2 - 5x + 6 = 0$ ва $\frac{x-2}{x-3} = 0$

тенгламалар тенг кучли тенгламалар эмас. x ўзгарувчининг $A(x)$ ифода маънога эга бўладиган барча қийматлари тўплами $A(x)$ ифоданинг аниқланиш соҳасини (мавжудлик соҳасини) ташкил этади. $A(x)$ ва $B(x)$ ифодалар аниқланиш соҳаларининг умумий қисми $A(x) = B(x)$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси (X) ўзгарувчининг жоиз қийматлари соҳаси) деб аталади.

Тенгламанинг ечимлар тўплами унинг аниқланиш соҳасининг қисм тўплами бўлиб, унга тенг бўлиши шарт эмас.

Масалан $\sqrt{-(x-1)^2} = 0$

тенгламанинг ечимлар тўплами ҳам, аниқланиш соҳаси ҳам $\{1\}$ иборат, Лекин $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенгламанинг (1- мисолга қаранг) ечимлар тўплами $\{2 ; 3\}$ дан, аниқланиш соҳаси эса $R = (-\infty ; +\infty)$ дан иборат.

Энди тенгламаларнинг тенг кучлилиги ҳақидаги баъзи тенгламаларни келтирамиз.

1- Теорема. Агар $C(x)$ ифода барча $x \in X$ да аниқланган бўлса,

$$A(x) + C(x) = B(x) + C(x) \quad (2)$$

(2) ва (1) тенгламалар тенг тенг кучли бўлади, бу ерда $(x-1)$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси.

Исбот: a сони (1) тенгламанинг илдизи бўлсин. У ҳолда $A(a) = B(a)$ чин сонли тенглик ҳосил бўлади.

Иккинчи томондан, $a \in X$ эканлигидан $C(a)$ сони мавжуд ва шунга кўра

$$A(a) + C(a) = B(a) + C(a)$$

ҳам чин тенглик . Демак $X = a$ сони (2) тенгламанинг ҳам илдизи. (2) – нинг ҳар бир илдизи (1)

учун ҳам илдиз бўлиши шу каби кўрсатилади.

Теоремадан кўринадики $A(x) = B(x)$ тенгламани унга тенг кучли бўлган $f(x) = 0$ кўринишдаги тенглама билан алмаштириш мумкин.

2 –Теорема. Агар $C(x)$ ифода барча $x \in X$ қийматларда нолдан фарқли қийматлар қабул қилса, (1) тенглама $A(x) C(x) = B(x) C(x)$ тенглама тенг кучли бўлади, бу ерда $x - (1)$ тенгламанинг аниқланиш соҳаси.

Бу теорема 1- теорема каби исботланади.

$A(a) = B(a)$ тенгликдан $A(a) C(a) = B(a) C(a)$ тенглик келиб чиқади, кейинги тенгликдан эса $C(a) \neq 0$ бўладиган $A(a) = B(a)$ тенглик ҳосил бўлади.

Кўпайтириш (демак бўлишдан ҳам) $C(x) \neq 0$ бўлиши муҳим. Акс ҳолда, чет илдизлар пайдо бўлиши мумкин. Тенглама иккала қисмига X нинг айрим қийматларида сонли қийматга эга бўлмайдиган ифода қўшилса ёки иккала қисм шундай ифодага кўпайтирилса, илдиз йўқолиши мумкин.

3- мисол. $(2x+1)(x^2+3) + x^3 = (x-3)(x^2+3) + x^3$

ва $2x+1 = x-3$ да x^2+3 кўпайтувчи нолдан фарқли, x^3 қўшилувчи эса барча R да аниқланган.

4- мисол. $\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$ ва $x-2 = -4$

тенгламалар тенг кучли эмас, чунки $x = -2$ да биринчи тенглама маънога эга эмас, иккинчи тенглама эса маънога эга ва тўғри сонли тенгликка айланади. $x-2 = -4$ тенгламанинг ягона илдизидир.

5- мисол. $x^2 - 9 = x - 3$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = -2$ ва $x_2 = 3$ Агар тенгламанинг иккала қисми $x - 3$ га бўлинса, унга тенг кучли бўлмаган $x + 3 = 1$ тенглама ҳосил бўлади.

Чунки унинг фақат битта, яъни $x = -2$ илдизи мавжуд. Бу ерда, тенгламани ўзгарувчили ифодага бўлиш натижасида, берилган тенгламанинг $x = 3$ дан иборат илдизи йўқолганини кўрамиз.

§1.2. Бир ўзгарувчили тенгламаларни ечишнинг айрим усуллари.

Биз мактаб математика курсидан айрим содда тенгламаларни, жумладан, квадрат тенгламани ечишни биламиз. Бу ўринда умумий ҳолда кенг қўлланиладиган кўпайтувчиларга ажратиш ва янги ўзгарувчи киритиш усуллари баён қиламиз.

Теорема. $P(x) = P_1(x) \cdot \dots \cdot P_n(x)$ ва $P_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, X тўпламда аниқланган бўлсин. У ҳолда

$P(x) = 0$ тенгламанинг ҳар қандай $x \in X$ илдизи $P_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$ тенгламадан ақалли бирининг илдизи бўлади. (ва аксинча).

Исбот: $a \in X$ сони $P(x) = 0$ тенгламанинг илдизларидан бири бўлсин. $P(a) = 0$ ёки $P_1(a) \cdot \dots \cdot P_n(a) = 0$ (1)

Кўпайтма нолга тенг бўлиши учун кўпайтувчилардан ақалли бири нолга тенг бўлиши, яъни

a сони $P_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$ тенгламалардан ақалли бирининг илдизи бўлиши керак. Аксинча, агар a сони $P_k(x) = 0$ тенгламалардан бирининг илдизи бўлса, яъни $P_k(x)$ кўпайтувчилардан бирини нолга айлантирса, (1) даги кўпайтма нолга айланади. Теорема исботланади.

1- мисол. $P(x) = (3x + 1)(3x - 1)(2x + 5) = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Берилган тенглама мос равишда $x = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ $x_3 = -\frac{5}{2}$

илдизларга эга бўлган $3x + 1 = 0$, $3x - 1 = 0$, $2x + 5 = 0$

тенгламаларга ажралади. 1- теоремага кўра мос $\left\{ -\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; -\frac{5}{2} \right\}$

тўплам берилган тенгламанинг енчими бўлади.

2- мисол. $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ тенгламани ечинг.

Бу биквадрат тенглама деб аталувчи $ax^4 - bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) тенгламанинг хусусий ҳолидир.

Бундай кўринишдаги тенгламаларни ечиш учун $x^2 = y$ алмаштиришни бажариш керак. Бу алмаштириш, берилган тенгламани $y^2 - 9y + 20 = 0$ квадрат тенгламага олиб келади. Биз берилган тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечамиз.

Ечиш. Тенгламанинг чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз.

$$x^4 - 9x^2 + 20 = (x^4 - 4x^2) - (5x^2 - 20) = x^2(x^2 - 4) - 5(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 5)(x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$\text{Энди } x - 2 = 0 \text{ , } x + 2 = 0 \text{ , } x - \sqrt{5} = 0 \text{ , } x + \sqrt{5}$$

тенгламаларни ечиб, берилган тенглама ечимларини топамиз:

$$\left\{ -2 ; 2 ; -\sqrt{5} ; \sqrt{5} \right\}$$

$$3\text{- мисол. } x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг чап томонида 4- даражали кўпхад турибди. Уни квадрат учхадлар кўпайтмаси шаклида тасвирлашга ҳаракат қиламиз.

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c)$$

Чап ва ўнг томонларда турган кўпхадларнинг мос коэффитсиентларини тенглаштирамиз.

$$P + b = -4$$

$$C + q + pb = -10$$

$$pc + qb = 37$$

$$q = -14$$

Бу системанинг бирор бутун қийматли ечимини топамиз.

$qc = -14$ дан q ва c лар 14 нинг бўлувчилари эканини кўриш қийин эмас. Демак улар учун

± 1 , ± 2 , ± 7 , ± 14 ларни синаб кўриш керак.

Агар $q = 1$ бўлса, $c = -14$ бўлади. Иккинчи ва учинчи тенгламалар

$$Pb = 3 , -14p + b = 37$$

Системани беради. Бу системадан b учун $b^2 - 37b - 42 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама эса ечимга эга эмас.

Агар $q = 2$ бўлса, $c = -7$ га эга бўламиз. Бу ҳолда система $q = 2$, $c = -7$, $b = 1$, $p = -5$

Лардан тузилган бутун ечимга эга бўлади. (текшириб кўринг).

Шундай қилиб

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7)$$

Демак, берилган тенглама $x^2 - 5x + 2 = 0$ ва $x^2 + x - 7 = 0$ тенгламаларга ажралади.

Бу тенгламаларни ечиб берилган тенгламанинг ҳам ечимлари бўладиган

$$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} ; -1 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

сонларни топамиз.

4- мисол. $(x^2 + x + 4)^2 + 3x(x^2 + x + 4) + 2x^2 = 0$

тенгламани ечинг.

Ечиш. Чап томонини $y = x^2 + x + 4$ га нисбатан квадрат учхад сифатида қараб, кўпайтувчиларга ажратамиз.

$$y^2 + 3xy + 2x^2 = (y + x)$$

Бундан $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0$

тенглама ҳосил бўлади. Охириги тенглама ечимга эга эмас. Демак, берилган.

5-мисол. $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$

тенгламани ечинг.

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x - 2)(x^2 - 9x + 20) &= (x + 1)(x + 2)x(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = \\ &= (x + 4)(x - 5) = [(x + 1)(x - 4)] = (x^2 - 3x - 4)x(x^2 - 3x - 10) \end{aligned}$$

бўлгани учун берилган тенгламани қуйидагича ёзиб олиш мумкин.

$$(x^2 - 3x^2 + 1)(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) = -30$$

Бу тенгламадан $y = x^2 - 3x$ алмаштириш орқали янги ўзгарувчи y ни киритамиз.

$$(y + 1)(y - 4)(y - 10) = -30$$

Бу тенгламадан $y_1 = 5$, $y_2 = 4 + \sqrt{30}$, $y_3 = 4 - \sqrt{30}$

топиб, қуйидаги учта квадрат тенгламага

эга бўламиз.

$$x^2 - 3x = 5 ; x^2 - 3x = 4 + \sqrt{30} ; x^2 - 3x = 4 - \sqrt{30}$$

Бу тенгламаларни ечсак, берилган тенгламанинг барча илдизлари ҳосил бўлади.

$$\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} ; \frac{3 \pm \sqrt{25 + 4 + \sqrt{30}}}{2} ; \frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{30}}}{2}$$

6- мисол. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$

тенгламани ечинг.

Ечиш. $\sqrt{2} = a$ деб $x^4 - 2ax^2 - x + a - a = 0$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани a га нисбатан квадрат тенглама сифатида қараб, унинг

$$a = x^2 - x, \quad a = x^2 + x + 1$$

илдизларини топамиз. $a = x^2 - x, \quad a = x^2 + x + 1$

илдизларини топамиз. $a = \sqrt{2}$ бўлгани учун қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз.

$$x^2 - x = \sqrt{2} ; \quad x^2 + x + 1 = \sqrt{2}$$

Бу тенгламалар берилган тенгламанинг барча илдизларини имконини беради.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2} ; \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$$

7- мисол.
$$\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - \frac{3}{x} - 5} = -\frac{3}{2}$$

тенгламани ечинг.

Ечиш. $x = 0$ сони тенгламанинг ечими эмас. Шу сабабли берилган тенглама қуйидаги тенгламага тенг кучли.

$$\frac{4}{x + \frac{3}{x} + 1} + \frac{5}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$$

$$y = x + \frac{3}{x} \quad \text{алмаштириш қилсак}$$

$$\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама $y_1 = -5$, $y_2 = 3$
илдизларга эга бўлгани учун берилган тенглама

$$x + \frac{3}{x} = -5 \quad , \quad \frac{x+3}{x} = 3$$

тенгламалар мажмуасига тенг кучли. Уларни ечиб, берилган
тенгламанинг илдизларини топамиз.

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Ечилган бу тенглама

$$\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c}$$

D кўринишдаги тенгламанинг хусусий ҳолидир. Бундай кўринишдаги
барча тенгламалар, шунингдек,

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A \quad \text{ва}$$

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} = \frac{Ax}{ax^2 + b_2x + c} = \frac{Ax}{ax^2 + b_3x + c}, \quad A \neq 0$$

Кўринишдаги бу ерда ($ac \neq 0$) тенгламалар ҳам 7-мисол каби ечилади.

Четки ҳадларидан бир хил узокликдаги ҳадлар коэфитсиентлари тенг.

$$ax^4 + bx^3 + cx + bx + a = 0$$

($a \neq 0$) кўринишдаги. Тенглама тўртинчи даражали қайтма тенглама дейилади.

Бундай тенгламаларни ечиш учун унинг иккала қисмини x^2 га

бўлиниб, $x + \frac{1}{x} = z$ алмаштиришни бажарамиз.

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0 \quad \text{бунда} \quad z^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{бўлганидан,}$$

$a(z^2 - 2) + bz + c = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг иккала илдизи бўйича

$$x + \frac{1}{x} = z_1, \quad x + \frac{1}{x} = z_2$$

тенгламалар тузилиб, бу тенгламалар ечилади.

8- мисол. $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала қисмини x^2 га бўламиз, сўнг

$$z = x + \frac{1}{x} \quad \text{ва} \quad z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Ўрнига қўйишларни бажарамиз $5z - 3z - 14 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

Унинг ечими: $\{-1,4 ; 2\}$ $x + \frac{1}{x} = -1,4$ тенглама $x^2 + 1,4x + 1 = 0$

кўринишга келади.

Тенглама дискриминанти манфий, демак ҳақиқий сонлар, соҳасида ечим мавжуд эмас.

$x + \frac{1}{x} = 2$ тенглама эса $x^2 - 2x + 1 = 0$ ёки $(x - 1)^2 = 0$ кўринишга келади.

Бу тенглама икки керакли $x = 1$ илдизга эга.

Берилган тенгламанинг ечими: 1

9- мисол. $(x^2 + 27)^2 - 5(x^2 + 27)(x^2 + 3) + 6(x^2 + 3)^2 = 0$

тенгламани ечинг.

Ечиш.
$$\frac{(x^2 + 27)^2}{(x^2 + 3)^2} - 5 \frac{x^2 + 27}{x^2 + 3} + 6 = 0 \cdot y = \frac{x^2 + 27}{x^2 + 3}$$

деб олсак $y^2 - 5y + 6 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ ларга эгамиз.

$$\frac{x^2 + 27}{x^2 + 3} = 2 \text{ , } \frac{x^2 + 27}{x^2 + 3} = 3$$

тенгламалар мос равишда $\pm \sqrt{21}$ ва ± 3 илдизларга эга.

10- мисол. $f(f(x)) = x$ кўринишдаги тенгламани ечамиз.

$$(x^2 - 4x + 6)^2 - 4(x^2 - 4x + 6) + 6 = x$$

Ечиш. $x^2 - 4x + 6 = x$ тенглама $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ илдизларга эга бўлгани учун

$$(x^2 - 4x + 6)^2 - 4(x^2 - 4x + 6) + 6 = x$$

кўпхад $(x - 2)(x - 3)$ га қолдиқсиз бўлинади. Бўлишни бажариб $x^2 - 3x + 3$ топамиз. (*) ни $(x^2 - 3x + 3)(x - 2)(x - 3) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама $x = 2$, $x = 3$ лардан бошқа ҳақиқий илдизга эга эмас. (*) тенгламанинг ҳамма илдизлари: 2 ; 3

.

§.1.3. Модул қатнашган тенгламалар.

Ўзгарувчиси модул белгиси ичида қатнашган тенглама модул қатнашган тенглама дейилади.

Масалан, $|x| = 1$, $|3x - 5| = x$, $x^2 + |x - 1| = x$

тенгламаларнинг ҳар бири модул қатнашган тенгламалардир.

Модул қатнашган тенгламаларнинг амалиётда энг кўп учрайдиган турларини қараймиз.

1) $|f(x)| = g(x)$ кўринишдаги тенглама модулнинг таърифига кўра ўринли бўлган.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{агар } f(x) \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -f(x) & \text{агар } f(x) < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

муносабатда кўринадик, $|f(x)| = g(x)$ тенгламанинг барча ечимларини топиш учун

$f(x) = g(x)$ тенгламанинг $f(x) \geq 0$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи барча ечимларини

ва $-f(x) = g(x)$ тенгламанинг $f(x) < 0$ тенгсизлиқни

қаноатлантирувчи барча ечимларини топиш етарли. Яъни $|f(x)| = g(x)$

тенглама

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2) \text{ ва } \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

системалар мажмуасига тенг кучли.

1- мисол. $|3x - 2| = x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Бу тенглама учун (2) ва (3) системалар мос равишда қуйидагича бўлади.

$$\begin{cases} 3x - 2 = x \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -3x - 2 = x \\ 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

Бу системаларни ечиб, берилган тенгламаларнинг барча ечимларини оламиз:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1$$

$$(2) \text{ система } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{системага эса}$$

$$(3) \text{ система } \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли эканини кўриш қийин эмас.

$$\text{Шу сабабли } |f(x)| = g(x)$$

$$\text{тенглама} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{ва} \quad \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

системалар мажмуасига тенг кучли.

2- мисол. $(3x^2 - 2) = x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. (4) ва (5) системаларни тузамиз.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 3x^2 - 2 = -x \\ x > 0 \end{cases}$$

Бу системаларни ечиб, берилган тенгламани барча ечимларини ҳосил қиламиз.

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 1$$

$|f(x)| = g(x)$ тенгламанинг айрим хусусий ҳолларида тўхталамиз.

$|f(x)| = a$ тенглама

(бу ерда $a \in \mathbb{N}$) $a < 0$ да ечимга эга эмас: $a \geq 0$ бўлганда

$$f(x) = a \quad \text{ва} \quad f(x) = -a$$

тенгламалар мажмуасига тенг кучли, $|f(x)| = f(x)$ тенглама $f(x) \geq 0$

тенгсизликка тенг кучли

$|f(x)| = -f(x)$ тенглама $f(x) \leq 0$ тенгсизликка тенг кучли.

$$\text{3- мисол.} \quad \left| \sqrt{x^2 - 5x - 1} \right| = -2 \quad \text{тенгламани ечамиз.}$$

Ечиш. $f(x) = a$ кўринишдаги бу тенглама ечимга эга эмас, чунки $a = -2 < 0$

4- мисол. $|3x - 4| = 1$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Бу тенглама $|f(x)| = a$ кўринишда ва $a = 1 \geq 0$ шу сабабли бу тенгламани ечиш учун

$3x - 4 = -1$, $3x - 4 = 1$ тенгламаларни ечиш кифоя.

Уларни ечиб $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{2}{3}$ ларни ҳосил қиламиз.

5- мисол. $|3x - 4| = 3x - 4$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $|f(x)| = f(x)$ кўринишдаги тенгламага эгамиз. Шу сабабли берилган тенглама

$3x - 4 \geq 0$ ёки $x \geq 1\frac{1}{3}$ тенгсизликка тенг кучли. Демак берилган

тенгламанинг барча ечимлари тўплами $\left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$ ораликдан иборат.

6- мисол. $|3x - 4| = 4 - 3x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Бу тенглама $|f(x)| = -f(x)$ кўринишда бўлгани учун $3x - 4 \leq 0$

ёки $x \leq 1\frac{1}{3}$ тенгсизликка тенг кучли. Демак берилган тенгламанинг барча

ечимлари $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$ ораликдан иборат.

(2) $|f(x)| = |g(x)|$ кўринишдаги тенглама $a, b \in R$ сонларини қараймиз.

Агар $a = b$ бўлса, $|a| = |b|$ бўлиши равшан. Агар $a = -b$ бўлса, $|a| = |b|$ бўлади.

Энди $|a| = |b|$ бўлсин $b \geq 0, b < 0$ ҳолларда бўлиши мумкин. Агар $b \geq 0$ бўлса, $|a| = |b|$

тенгликка, бундан эса $a = b$ ёки $a = -b$ тенгликка эга бўламиз; $b < 0$ бўлса, $|b| = -b$

бўлиб $|a| = -b$ тенгликка, бундан эса $a = -b$ ёки $a = b$ тенгликка эга бўламиз. Демак

$|a| = |b|$ бўлса, $a = b$ ёки $a = -b$ бўлади.

Юқоридаги мулоҳазалардан кўринадики $|a| = |b|$ тенглик $a = b$ ёки $a = -b$ бўлган

ҳоллардан ўринли бўлади, қолган ҳолларда эса ўринли бўлмайди. Бундан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз, $f(x) = g(x)$ тенглама

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \text{ мажмуасига тенг.}$$

7- мисол. $|3x - 4| = |x|$ тенгламани ечамиз.

$$\text{Ечиш. } \begin{cases} 3x - 4 = x \\ 3x - 4 = -x \end{cases} \text{ мажмуани тузиб, уни ечамиз.}$$

Биринчи тенглама $x = 2$, иккинчи $x = 1$ ечимга тенг. Демак 1 ва 2 сонларигина берилган тенгламанинг ечими бўлади.

$|x|^{2n} = |x^{2n}| = x^{2n}$ тенглик ихтиёрий $\eta \in R$ сонлари учун ўринли

бўлганлиги сабабли $|f(x)| = |g(x)|$ кўринишдаги айрим тенгламаларни жуфт даражага кўтариш усулида ечиш ҳам мумкин.

8- мисол. $|2x - 3| = |x + 1|$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак $(2x - 3)^2 = (x + 1)^2$ ёки $4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 2x + 1$ тенглама ҳосил бўлади.

Бундан $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}$ ечимларини топамиз

$$3) \quad f(x) + g(x) = |f(x)| + |g(x)| \quad \text{кўринишдаги тенглама} \quad |a| + |b| \leq |a + b|$$

тенгсизликда $a, b \in R$ тенглик белгиси $ab \geq 0$ бўлгандагина ўринли бўлишини назарда тутсак

$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|$ тенглама $f(x) * g(x) \geq 0$ тенгсизликка тенг кучли эканини кўрамиз.

9- мисол. $|x^2 - 5x + 1| = x^2 + 5|x| + 1$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$|(x^2 + 1) + (-5x)| = |x^2 + 1| + |-5x|$$

шу сабабли бу тенглама $(x^2 + 1) * (-5x) \geq 0$ тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ечиб, берилган тенгламанинг барча ечимлари тўплами $(-\infty; 0)$ ни ҳосил қиламиз.

Энди модуль қатнашган тенгламаларни ечишда қўлланиладиган энг самарали усуллардан бири

“оралиқ усули” нинг моҳиятини мисол ёрдамида тушунтирамиз.

10- мисол. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$ тенгламани “оралиқ усули” да ечамиз.

Ечиш. $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ тенгламаларни ечиб, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ сонларни ҳосил қиламиз. Бу сонлар ўқини тўртта (I, II, III, IV) оралиққа ажратади.

Берилган тенгламани шу оралиқларнинг ҳар бирида ечамиз.

$x < 1$ бўлса $|x - 1| = x - 1$, $|x - 2| = 2 - x$, $|x - 3| = 3 - x$ бўлгани учун берилган тенглама $(1 - x) - 2(2 - x) + 3(3 - x) = 4$ кўринишни олади. Бу тенглама $x < 1$ шартни қаноатлантирувчи

ечимга эга эмас. Демак, берилган тенглама $(-\infty, 1)$ оралиқда ечимга эга эмас.

$1 \leq x < 2$ бўлса, $|x-1| = x-1$, $|x-2| = 2-x$, $|x-3| = 3-x$ бўлгани сабабли, берилган тенглама

$(x-1) - 2(2-x) + 3(3-x) = 4$ кўринишни олади. Бу тенглама соддалаштирилса, $0 \bullet x = 0$ тенглама ҳосил бўлади. $0 \bullet x = 0$ тенгламанинг $1 \leq x < 2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ечимлари тўпламини тузамиз. $[1, 2)$

$2 \leq x < 3$ бўлса, тенглама $x = 2$ ечимга $x \geq 3$ бўлганда эса тенглама $x = 5$ дан иборат ягона ечимга эга эканлигини юқоридагидек аниқлаш мумкин.

Қаралган тўртта оралиқлардаги ечимлар тўпламини тузамиз.

$$\emptyset \cup [1; 2) \cup \{2\} \cup \{5\} = [1; 2] \cup \{5\}$$

Шундай қилиб, $[1; 2] \cup \{5\}$ тўпلامдаги сонлар ва фақат улар берилган тенгламанинг ечими бўлади.

§. 1.4 Тенгламалар тарихи

Улуғ алломаларимиздан бири алгебра фанининг асосчиси Абу Абдуллох Мухаммад Ибн Мусо Ал-Хоразмий (Хоразм 780- Бағдод 847) ўзининг “Ал-жабр ва Ал- муқобала” китобида $ax^2 + bx + c = 0$,

$$ax^2 + c = bx, \quad bx + c = ax^2, \quad ax^2 = c, \quad bx = c$$

кўринишдаги тенгламаларнинг номанфий илдизларини топишнинг алгебраик усулини кўрсатган, уни геометрик таҳлил этган. Масалан, бизда

$$6x^2 - 22x - 4 = 4x^2 - 2x - 46 \quad \text{тенгламани ечиш талаб этилган бўлсин.}$$

Дастлаб, тенгламани содда кўринишга келтирамиз.

Бунинг учун:

1) тенгликнинг бир томонидан, бирор сон (ифода) ни тенгликнинг иккинчи томонига ўтказамиз.

(Ал-жабр арабча сўз бўлиб, ўтказиш, мажбур қилиш маъносини беради). Сон (ифода) айрилаётган бўлса, уни тенгликнинг иккала томонига қўшамиз. Натижада манфий ишорали ҳадлар алмашади.

$$6x^2 - 22x - 4 = 4x^2 - 2x - 46; (+22x, + 4, + 2x + 46);$$

$$6x^2 + 2x + 46 = 4x^2 + 22x + 4$$

Ҳозирги вақтда бу амал манфий ишорали ҳадни тенгликнинг иккинчи томонига мусбат ҳад қилиб ўтказиш дейилади.

2) Ал-хатт (қўйиш, ортиқчасини олиб ташлаш). Бизнинг мисолда тенгликнинг икки томонини 2 га қисқартирамиз.

$$3x^2 + x + 23 = 2x^2 + 11x + 2$$

3) Ал-муқобала (муқобил қўйиш, тенгликнинг бир томонининг ортиши иккинчи томонининг

ўшанча камайишига тенг кучли). Шунга кўра тенгликнинг иккала томонидан $2x^2$ ni , x ni , 2 ni айирамиз.

Натижада

$$x^2 + 21 = 10x \quad \text{тенглама ҳосил бўлади. (1) тенгламани ечамиз.}$$

I. Юзи x^2 (юз бирлиги) га тенг бўлган $ABCD$ квадрат ва юзи 21 (юз бирлиги) га тенг бўлган

$CDEF$ тўғритўртбурчак ёрдамида $ABFE$ тўғритўртбурчак ясаймиз.

$ABFE$ тўғритўртбурчакнинг юзи $10x$ (юз бирлиги) га (тенгламанинг ўнг томонидаги ифода) тенг. Бу ҳолда AE томоннинг узунлиги 10 (узунлик бирлиги) га тенг бўлади.

II. L нуқта AE томоннинг ўртаси бўлсин. У ҳолда $AL = LE = 5$
 $x \leq AL$

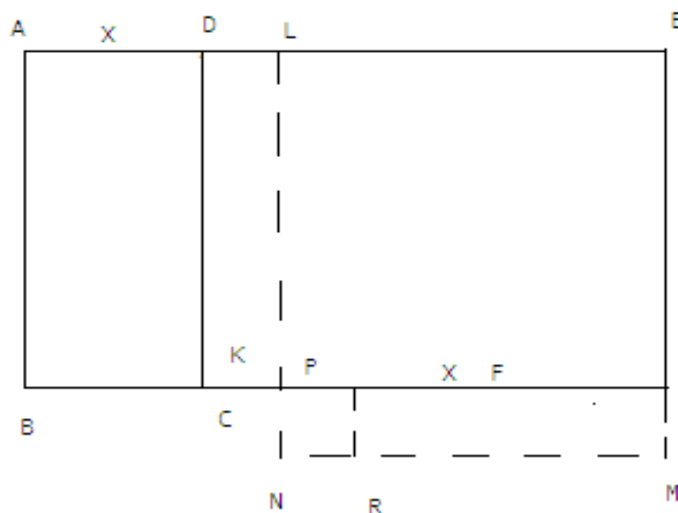
ҳолни қараймиз.

Томони 5 (узунлик бирлиги) га тенг бўлган $LNME$ квадратни ва $PF = x$ томонди $PRMF$

Тўғри тўртбурчакни қараймиз. $CK = PK = 5 - x$ бўлгани учун $PRME$ тўғритўртбурчакнинг юзи $CDLK$ тўғри тўртбурчакнинг юзига $LNME$ квадратнинг юзи эса $DCFR$ тўхри тўртбурчак ва $KNRP$ квадрат юзларини йиғиндисига тенг бўлади.

Шу сабабли $KNRP$ квадратнинг юзи $5^2 - 21 = 4$ (юз бирлиги) га, томони эса $KN = \sqrt{4} = 2$ (узунлик бирлиги) га тенгдир.

$LN = x + KN = 5$ тенгликдан, $x = 3$ эканлиги келиб чиқади. $x \geq AL$ ҳолни қараш билан иккинчиилдиз $x = 7$ ни ҳам топиш мумкин.



Агар AE нинг узунлиги b га, $ABFE$ тўғри тўртбурчакнинг юзи эса C га тенг деб ҳисобланса, $x^2 + C = bx$ тенглама илдизи учун.

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - C} \quad \text{яъни} \quad x = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4C}}{2}$$

формула ҳосил бўлади. Ал-жабр ва Ал-муқобаладан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни ечинг ва унга гиометрик таҳлил беринг.

$$a) x^2 + 8 = 16; \quad b) x^2 - 5 = 7; \quad d) \frac{2}{3} - x^2 = 1$$

$$e) 4x^2 = 5; \quad f) 8x^2 - 6 = 3; \quad g) 8x^2 - 19 = 10x - 27$$

II- БОБ.Юқори даражали алгебраик тенгламалар.

§.2.1. Безу теоремаси. Горнер схемаси.

Кўпхаднинг илдизи.(Этйен Безу 1730-1783 – франсуз математиги)

$P(x)$ кўпхадни $x - a$ иккиҳадга бўлганда бўлинмада $Q(x)$ қолдиқда $R(x)$ қолсин.

$$P(x) = (x - a) Q(x) + R(x)$$

Агар бу муносабатда $x = a$ қўйилса,

$$P(a) = 0 \quad Q(a) + R(a) = R(a) = r$$

ҳосил бўлади. Шу тариқа ушбу теорема исботланади.

1- Теорема (Безу).

$$R(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x + a_n \quad (a \neq 0)$$

кўпхадни $x - a$ га бўлишдан чиқадиган r қолдиқ шу кўпхаднинг $x = a$ даги қийматига тенг, $r = P(a)$ Масалан,

1) $x^5 + x + 20$ ни $x + 2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ
 $r = (-2)^5 + (-2) + 20 = -14$

2) $x^5 + x + 34$ ни $x + 2$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ
 $r = (-2)^5 + (-2) + 34 = 0$

Демак, $x = -2$ сони шу кўпхаднинг илдизи.

Натижалар $n \in N$ бўлганда:

1) $x^n - a^n$ иккиҳад $x - a$ га бўлинади.

Ҳақиқаттан $P(a) = a^n - a^n = 0$

2) $x^n + a^n$ иккиҳад $x - a$ га бўлинмайди.

Ҳақиқаттан $P(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$

3) $x^{2n} - a^{2n}$ иккиҳад $x + a$ га бўлинади.

Ҳақиқаттан $P(-a) = (-a)^{2n} - a^{2n} = 0$

4) $x^{2n+1} - a^{2n+1}$ иккиҳад $x + a$ га бўлинмайди.

Ҳақиқаттан $P(-a) = -a^{2n+1} - a^{2n+1} =$

Иккиҳад $P(-a) = -a^{2n+1} \neq 0$

5) $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ иккиҳад $x + a$ га бўлинади.

Ҳақиқаттан $P(-a) = -a^{2n+1} + a^{2n+1} = 0$

6) $x^{2n} + a^{2n}$ иккиҳад $x + a$ га бўлинмайди.

Ҳақиқаттан $P(-a) = a^{2n} + 2a^{2n} \neq 0$

Бўлиш бажариладиган ҳолларда бўлинмаларнинг кўринишини аниқлаймиз.

$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4);$$

$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4);$$

$$x^6 - a^6 = (x - a)(x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5);$$

$$x^6 + a^6 = (x + a)(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5);$$

Булардан кўринадики, бўлинма албатта бир жинсли кўпхад бўлиб, X нинг даражалари камайиб, a нинг даражаларида ўсиш тартибида жойлашган ва агар бўлувчи $a + X$ бўлса, коэффициентлар $+1$ ва -1 алмашиб келади, агар бўлувчи $X - a$ бўлса, бўлинмада ҳосил бўлган кўпхаднинг коэффициентлари 1 га тенг бўлади. Бу хулосаларни истаган даражали кўпхадлар учун умулаштириш мумкин.

1- мисол. $x^5 - ax + 4$ ни $x + 3$ га бўлишдаги қолдиқ $r = 4$ бўлса, a ни топинг.

Ечиш. $(-3)^5 - a(-3) + 4 = 4$ бундан $a = 81$

$Px = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ кўпхадни $x - a$ иккиҳадга бўлишдаги қолдиқни ҳисоблашнинг Горнер (Horner Vilyam (1786-1837) – инглиз математиги) схемаси деб аталувчи усулини кўрсатамиз.

$$P(x) = Q(x)(x - a) + r \text{ бўлсин.}$$

Бунда

$$Q(x) = b_0(x)^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1} \quad (1) \text{ да } X \text{ нинг}$$

бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб қўйидагига эга бўламиз.

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1 + ab_0$$

.....

$$a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}$$

$$a_n = r - ab_{n-2}$$

Бундан кўринадики, $b_0 = a_0$, $b_k = ab_{k-1} + a$

$$k = 1, 2, \dots, n-1, r = a_n + ab_{n-1}$$

Бўлинма ва қолдиқни ҳисоблаш қўйидаги жадвал ёрдамида топилади.

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a		$ab_0 + a_1$	$ab_0 + a_2$	$\dots$	$ab_{n-2} - a$	$ab_{n-1} + a_n$
	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}	r

2- мисол. $x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ кўпҳадни Горнер схемасидан фойдаланиб, $x - 1$ га бўлишини бажарамиз.

	1	4	-3	5
1	1	5	2	7

Демак,

$$x^3 + 4x^2 - 3x + 5x = (x - 1)(x^2 + 5x + 2) + 7$$

Безу теоремасидан Px кўпхадни $ax + b$ кўринишдаги иккиҳадга бўлишда ҳосил бўладиган r қолдиқ $P(-\frac{b}{a})$ га тенг бўлиши келиб чиқади.

3- мисол. $P_3x = x^3 - 3x^2 + 5x + 7$ ни $2x + 1$ га бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни топинг.

Ечиш. Қолдиқ

$$r = P_3(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot (-\frac{1}{2}) + 7 = \frac{29}{8} \text{ га тенг.}$$

2- **Теорема.** Агар a сони $P(x)$ кўпхаднинг илдизи бўлса, $P(x)$ кўпхад $x - a$ иккиҳадга қолдиқсиз бўлинади.

Исбот. Безу теоремасига кўра $P(x)$ ни $x - a$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқ $P(a)$ га тенг, шарт бўйича эса $P(a) = 0$

Исбот бажарилди.

Бу теорема $P(x) = 0$ тенгламани ечиш масаласини $P(x)$ кўпхадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш масаласига келтириш имконини беради.

1- **натижа.** Агар $P(x)$ кўпхад ҳар хил $a_1, \dots, a_n$ илдизларга эга бўлса, у

$(x - a_1) \dots (x - a_n)$ кўпайтмага қолдиқсиз бўлинади.

2- **натижа.** n — даражали кўпхад ва ?? тадан ортиқ ҳар хил илдизга эга бўла олмайди.

Исбот. Агар n — даражали $P(x)$ кўпхад $n+1$ та ҳар хил $a_1, \dots, a_{n+1}$ илдизларга эга бўлганда, у $n+1$ даражали $(x-a_1)\dots(x-a_{n+1})$ кўпайтмага бўлинадди. Лекин бундай бўлиши мумкин эмас.

Юқорида қаралган теоремалардан фойдаланиб Француа Вьет (франсуз олими 1540-1603) томонидан берилган ҳамда $Px = 0$ бутун алгебраик тенгламанинг a_1 ҳақиқий коэффицентлари ва a_1 илдизлари орасидаги муносабатни ифодаловчи формулаларни келтирамиз.

$$1) \quad a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b(x-a_1)(x-a_2) = bx^2 - b(a_1-a_2)x + ba_1a_2$$

Агар x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффицентлари тенглаштирилса, $b = a_2$ бўлади. Натижада ушбу формулалар топилади.

$$a_1 + a_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad a_1 a_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

2) шу тартибда $P_3 x = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ учун:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 + a_3 = \frac{a_2}{a_3}, \quad a_1 a_2 a_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

формулалар топилади.

Ҳосил қилинган тенгликларнинг бажалилиши $a_1, \dots, a_n$ сонларининг

$P_n x = a_n x^n + \dots + a_0$ кўпхад илдизлари бўлиши учун зарур ва етарлидир. Агар Px кўпхад $(x-a)^k$ га қолдиқсиз бўлинса, лекин

$(x-a)^{k+1}$ га қолдиқсиз бўлинмаса, a сони Px учун k каррали илдиз бўлади.

3- мисол. a_1, a_2, a_3 лар $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин.

$$\sum a_i^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \text{ йиғиндини топамиз.}$$

Ечиш . Вийет формулалари бўйича:

$$a_1 + a_2 + a_3 = -1, a_1 a_2 + a_1 + a_3 + a_2 a_3 = 1$$

$$\text{У ҳолда } (a_1 + a_2 + a_3) = -1^2 \text{ бўйича } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = -2$$

$$(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + 1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$$

Иккинчи томондан a_1, a_2, a_3 илдиз, уларда ифода нолга айланади.

$$a_1^3 + a_1^2 + a_1 - 2 = 0$$

$$a_2^3 + a_2^2 + a_2 - 2 = 0$$

$$a_3^3 + a_3^2 + a_3 - 2 = 0$$

$$\sum a_i^3 + \sum a_i^2 + \sum a_i - 6 = 0 \text{ бундан}$$

$$\sum a_i^3 = -(-1) - (-1) + 6 = 8,$$

Бунда қисқа ёзиш учун $\sum$ орқали $\sum_{i=1}^3$ белгиланган.

§2.2. Алгебраик тенгламаларнинг комплекс ва рационал илдизлари.

Алгебранинг асосий теоремаси (Гаусс теоремаси) n - даражали (бу ерда $n \geq 1$ ҳар қандай кўпхад ақалли) битта комплекс илдизга эга.

Бу теорема олий математика курсида исботланади.

Теорема. Агар $z = a + Bi$ комплекс сони ҳақиқий коэффициентлари $P(z)$ кўпхаднинг илдизи бўлса, $z = a - Bi$ комплекс сони ҳам $P(z)$ кўпхаднинг илдизи бўлади.

Исбот. Z комплекс сони

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z - a_n = 0$$

Кўпхаднинг илдизи бўлсин. У ҳолда

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z - a_n = 0$$

ёки

$$\overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z - a_n} = \overline{0}$$

тенглик ўринли бўлади.

Комплекс сонга қўшма сонни топиш амалининг хоссаларидан фойдалансак

$$a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} - a_n = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Демак $\bar{z}$ сони ҳам $P(z)$ кўпхаднинг илдизи.

Теорема исбот бўлди.

Натижа. n - даражали $P_n(x)$ кўпхад $X - a$ кўринишдаги иккиҳадлар ва $x^2 + px + q$ кўринишдаги манфий дискриминантли квадрат учҳадлар даражаларининг кўпайтмасидан

иборот. $P_n(x) = a_0 (x - a)^{k \dots} (x^2 + px + q)^{m \dots}$ бу ерда

$$k \in \{0, 1, 1, \dots\} m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Рационал коэффициентли ҳар қандай $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ тенглама унга тенг кучли бутун коэффициентли тенгламага келтирилиши мумкин. Масалан,

$$\frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{тенгламанинг иккала қисми 6 га кўпайтирилса,}$$

унга тенг кучли бутун коэффициентли $5x^3 + 4x^2 - 6x + 6 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

Энди бутун коэффициентли тенгламалар билан шуғулланамиз.

Теорема. $x = \frac{p}{q}$ қискармас каср бутун коэффициентли.

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (1)$$

Тенгламанинг илдизи бўлиши учун p сони a_0 озод ҳаднинг, q эса a_n бош ҳад коэффициентининг бўлувчиси бўлиши зарур.

Ҳақиқаттан, $\frac{p}{q}$ сони (1) тенгламанинг илдизи бўлсин,

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

ёки тенгликнинг иккала қисми q^n га кўпайтирилса

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$\begin{aligned} a_0 q^n &= -a_n p^n - a_{n-1} p^{n-1} q - \dots - a_1 p q^{n-1} = \\ &= -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \end{aligned}$$

Тенгликнинг ўнг қисми p га бўлинади. Демак чап қисимдаги $a_0 q^n$ ҳам

p га бўлиниши керак. Лекин $\frac{p}{q}$ лар ўзаро туб. Демак, чап қисимдаги p

сони a_0 нинг бўлувчиси. Шу каби q сони a_n нинг бўлувчиси экани

исбот қилинади. Агар (1) тенглама келтирилган тенглама бўлса, яъни бош хад коэффициентли $a_n = 1$ бўлса, тенгламанинг ратционал илдизлари озод хаднинг бўлувчилари орасидан изланади.

1- мисол. $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$ тенгламанинг ратционал илдизларини топинг.

Ечиш. Озод хаднинг барча бутун бўлувчилари: $-2; -1; 1; 2$

Бош коэффициентининг барча натурал бўлувчилари: $1; 2$. Тенгламанинг ратционал илдизларини қуйидаги сонлар орасидан излаймиз.

$$-2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2$$

Бу сонларни берилган тенгламага бевосита қўйиб кўриш билан, уларнинг илдиз бўлиш ёки бўлмаслигини аниқлаймиз.

Текшириш кўрсатадики, $-\frac{1}{2}$ сони берилган тенгламанинг илдизи, қолган сонлар эса илдиз эмас.

Шундай қилиб, берилган тенглама фақат битта ратционал илдизга эга:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Жавоб: $-\frac{1}{2}$

мисол. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ тенгламанинг бутун илдизларини топинг.

Ечиш. Озод хаднинг барча бутун бўлувчилари: $-2; -1; 1; 2$; Тенгламанинг барча бутун илдизларини шу сонлар орасидан излаймиз.

Бу сонларнинг ҳар бирини тенгламага қўйиб кўриб, улар орасидан фақат -1 сони тенгламанинг ечими эканини аниқлаймиз. Демак, берилган тенглама фақат битта бутун ечимга эга.

Жавоб: $x = -1$

2- мисол. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ тенгламанинг бутун илдизларини топинг.

Ечиш. Бутун илдизларини -1 ; 1 сонларни орасидан излаймиз. Бу сонларнинг иккаласи ҳам тенгламанинг илдизи эмаслигини кўриш қийин эмас.

Жавоб: тенглама бутун илдизга эга эмас.

3- мисол. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ ($x \in R$) тенгламани ечинг.

Ечиш. Олдинги мисоллардан фарқли, бу мисолда тенгламанинг барча ҳақиқий илдизларини топиш талаб қилайапди.

Дастлаб, ратционал илдизларни қараймиз.

Ратционал илдизлар (агар улар мавжуд бўла) эса -2 ; -1 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2

сонлар ратционал илдизлар эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шунинг учун тенгламанинг чап томонидаги кўпхад

$$(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

га қолдиқсиз бўлинади. Бўлишни бажариб,

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^2 - 2x + 4)$$

ни ҳосил қиламиз. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^2 - 2x + 4) = 0 \quad 2x^2 - 2x + 4 = 0 \quad \text{тенгламага янги}$$

ҳақиқий илдизларни бермайди.

$$\text{Жавоб: } x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{2}$$

4- мисол. $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$ тенгламанинг $\frac{p}{q}$ ратционал

илдизларини топамиз, бунда p ва q лар ўзаро туб,

$$B(p; q) = 1$$

Ечиш. p сонини озод ҳаднинг q ни эса бош коэффициентнинг бўлувчилари орасидан излаймиз. Улар ± 1 ва ± 2 .

Демак, ратционал илдизлар $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ сонлари ичида бўлиши мумкин. Бу

сонларни тенгламага кетма-кет қўйиб ҳисоблаш $\frac{1}{2}$ нинг илдиз эканини

кўрсатамиз. Тенгламанинг қолган илдизларини топиш учун унинг чап қисми

$x - \frac{1}{2}$ га ёки $2x - 1$ га бўламиз. Бўлинмада $x^2 - 3x + 1$ учҳад ҳосил

бўлади. Унинг илдизлари: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Изланаётган ечим:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

§.2.3 Тенгламаларни тақрибий ечиш.

$Px = a_n x^n + \dots + a_0$ бўлсин, $P(x) = 0$ (1) тенгламани тақрибий ,

ечиш дейилганда унинг ноъмалум x^* илдизи ётган $[a; b]$ ораликни

олдиндан тайинланган $\varepsilon = |b - a|$ дан ошмайдиган катталиқда (қисқача: ε

гача аниқликда) топиш тушинилади. $[a; b]$ да ётган ихтиёрий C нукта

илдизнинг тақрибий қиймати сифатида олиниши мумкин: $x^* \approx C \pm \varepsilon$

$P(x)$ кўпхад графиги абсиссалар ўқини x^* нуқтада кесиб ўтиш туфайли унда $P(x^*) = 0$, нуқтанинг икки томонида эса кўпхад қарамағқарши, ишорага эга бўлади. Бунга қараганда агар $P(x)$ кўпхад $[a; b]$ оралиқнинг чекка нуқталарида ҳар хл ишорага эга эмас, яъни $P(a) P(b) < 0$ (2) тенгликсизлиги бажарилса, шу оралиқда (1) тенглама илдизга эга.

Демак, ҳисоблашларнинг 1- қадамида 2- шартдан фойдаланиб, илдиз ётган $a; b$ оралиқ топилади. Кейинги қадамларда бирор усул қўлланиб, бу оралиқ кетма-кет кичрайтирилади. Агар бирор k - қадамда

$$\varepsilon_k = (b_k - a_k) \leq \varepsilon$$

аниқликда эришилган бўлса $[a_k; b_k]$ оралиқдаги ихтиёрий C_k сон, масалан, $C_k = (b_k + a_k) / 2$ ўрта қиймат илдиз учун қабул қилинади ва ҳисоблашлар тўхтатилади.

Тенгламаларни тақрибий ечишнинг икки усули билан танишамиз.

1) кесмани тенг иккига бўлиш дихотомия усули қўлланилади ва $[a; b]$

оралиқ C_1 нуқта билан $[a; c_1]$ $[c_1; b]$ тенг оралиқларга ажратилади. Улардан (2) шарт бажариладигани, демак, илдиз илдиз мавжуд бўлгани олинади.

Уни $[a_1; b_1]$ орқали белгилаймиз. Унинг узунлиги

$$\varepsilon_1 = [b_1 - a_1] = \left[\frac{b - a}{2} \right]$$

Агар $\varepsilon_1 = \varepsilon$ бўлса, масала ҳал акс ҳолда $[a_1; b_1]$ оралиқ иккига бўлинади ва ҳоказо;

2) энди Жамшид ибн Маъсуд Ғиёсиддин ал- Коший (кўпинча Ғиёсиддин ал- Коший номи бўлган машхур). Мирзо Улуғбек илмий мактаби намоёндаларидан бири, Улуғбекнинг устози Самарқандда ижод этган, 1430- йилда вафот этган ?? нинг тақрибий қийматларини илдизга кетма-кет яқинлаштиришлар (итерация) усулини келтирамиз. Ал-Коший

$x^2 - kx + m = 0$, $k \neq 0$ кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни тенг кучли

$x = \frac{m + x^3}{k}$ кўринишга келтиради. $\frac{m}{k} = q_1$ қолдиқда r_1 , яъни

$m = kq_1 + r_1$ бўлганидан (3) тенглик $x = \frac{kq_1 + r_1 + x^3}{k}$ ёки

$x = q_1 + \frac{r_1 + x^3}{k}$ кўринишга келади. 1- яқинлашиш учун $x_1 = q_1$ қабул

қилинади. (4) тенгликнинг ўнг қисмига $x = x_1$ қўйилади.

$r_1 + x_1^3 = q_2$ (қолдиқда r_2) бўйича $r_1 = kq_2 + r_2 + x_1^3$ топилади.

Натижада

$$x = q_1 + q_2 + \frac{r_2 + x^3 - x_1^3}{k}$$

Иккинчи яқинлашиш: $x_2 = q_1 + q_2$ ва ҳоказо. Амалда биз r қолдиқларни ҳисоблабўтирмай, Ал- Коший усулининг ушбу нисбатан содда модификациясидан (кўриниши ўзгартирилган рекуррент формуладан) фойдаланамиз.

$$q_n = (x_{n-1}^3 - x_{n-2}^3) / k, x_{n+1} = x_n + q_n$$

Бу формулалар бўйича топилган ҳар қайси x_n яқинлашиш хатоси (яъни унинг изланаётган илдизда фарқи).

$\varepsilon_n < X_n - X_{n-1} = q_n$ бўлади ва $q_1 > q_2 > \dots > q_n > \dots$ бўлганидан хато қиймати кейинги қадамларда камайиб боради.

Ҳисоблашларда $M K$ ёки $ЕНМ$ дан фойдаланиш маъқул. Дастурланадиган

$M K - 56$ микрокалькулятор кодида: X_0 ни $Rg0\ a, m$ ни $kRga$ га k ни Rgb га, $\div$ бўлинмани Rgl га жойлаштирамиз. Ҳисоблашлар ушбу дастур бўйича бажарилади.

$f(x) = 0$ тенгламани бирор ε аниқликда ечиш учун оддий итерация усули қўлланилганда: а) $f(x) = 0$ тенглама унга тенг кучли бўлган $x = \varphi(x)$

кўринишга келтирилади;

б) X нинг изланаётган қийматига X_0 бошланғич қиймат (яқинлашиш) танланади.

Бу қиймат шундай $a ; b$ ораликдан олиниши маъқулки унинг чекка нуқталарида $f(x)$ функция қарама- қарши ишорали бўлсин, яъни $f(a) f(0) < 0$ шарт бажарилсин. Қолган ҳисоблашлар $X_{n+1} = \varphi(X_n)$ рекуррент формула бўйича кетма- кет такрорланади.

1- қадам. $X_1 = \varphi(X_0)$ биринчи яқинлашиш топилади ва

$\varepsilon_1 = (X_1 - X_0)$ фарқ ҳисобланади. Агар $\varepsilon_1 < \varepsilon$ бўлса, масала

ҳал, ҳисоблашлар тўхталади ва X_1 сони илдизнинг тақрибий қиймати

сифатида қабул қилинади. $\varepsilon_1 < \varepsilon$ бўлса, ҳисоблашлар давом эттирилади.

2- қадам. $x_2 = \varphi(x_1), \varepsilon_2 = |x_2 - x_1|$ ва ҳоказо. Қолган ҳисоблашлар ҳам шу тариқа.

$x_{n+1} = \varphi(x_n), \varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - x_n|, n = 0, 1, 2, \dots$ формулалар бўйича бажарилади. Бирор k - қадамда $\varepsilon_k \leq \varepsilon$ бўй берса, ҳисоблашлар тўхталади ва x_k сон X нинг ε гача аниқликдаги тақрибий қиймати сифатида қабул қилинади.

Итератция усули ҳар вақт ҳам сонларнинг илдизга яқинлашувчи кетма-кетлигини беравермайди. Бу масала билан кейинроқ функция ҳосиласини ўрганиш жараёнида алоҳида шуғулланамиз.

Хулоса

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Шахно К.У. Как готовиться к экзамену в вуз по математике. 1973 г. Минск, и «Вышняя школа» .
2. Фридлин Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М., «Просвещение», 1989.
3. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике – 10. М., «Просвещение», 1990.
4. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике – 11. М., «Просвещение», 1991.
5. Галицкий М.Л. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ курсини чуқур ўрганиш Т., «Ўқитувчи», 1995.
6. Погорелов А. В. Геометрия 7-11. –Т.:”Ўқитувчи”, 1994 й.

7. Л. А. Басова, М. А. Шубин, А. А. Энштейн. Лекции и задачи по математике. М., 1981.

8. Математическая энциклопедия, т. 3, Москва, 1982.

9. Гельфанд С.И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. - М.: Наука, 1965.

10. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. М.: Наука, 1968 .- 607 с.

11. Глейзер Г. И. История математики в школе. М.: Просвещение, 1983

12. Аюпов Ш., Рихсиев Б., Кучкаров А. «Математика олимпиадалар масалалари» (2 қисм). Тошкент. Фан. 2004.

13.WWW / Ziyonet.uz

14. WWW / Fantex.uz

15. WWW / Gduportal.uz

16.WWW / Google.ru