

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

UMUMIY MATEMATIKA KAFEDRASI

Matematika fanidan
o‘quv uslubiy majmua

Guliston-2007

Mamatov J. Matematika. O`zbek filalogiyasi fakulteti kunduzgi bo`lim talabalari uchun o`quv-metodik majmua. Guliston. 2007

Ushbu o`quv-metodik majmua amaldagi dasturlar asosida tayyorlanib, 5141300 – qozoq tili yo`nalishida o`qiyotgan talabalarga mo`ljallangan. Unda zamonaviy pedagogik texnologiya tizimiga asoslangan holda ishchi dastur, reyting ishlama, ma`ruza matnlari, amaliy mashg`ulotlar, talabalar mustaqil bajarishi zarur bo`lgan topshiriqlar, nazorat ishi variantlari, oraliq nazorat savollari, yakuniy nazorat savollari va adabiyotlar ro`yxati keltirilgan.

O`quv-metodik majmua Guliston davlat universiteti o`quv metodik kengashi tomonidan (2-bayonnoma, .08.2007 yil) nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent K. Jomuratov.
pedagogika fanlari nomzodi, dotsent B.Ergashev.

© Guliston davlat universiteti.

I.Fanni o'qitishdan maqsad va vazifalar

- 1.1.Fanning maqsadi :Ta'lim sifatini jahon andozalariga etkazish ta'lim tizimining eng dolzarb muammolariga aylandi.Ushbu dasturda matematika tarixi,sonli to'plamlar,matematik mantiq elementlari,algebra,geometriya, matematik tahlil,ehtimollar nazariyasi bo'limlarining asosiy tushunchalari o'rgatiladi.Bu esa talabalarning matematik bilimlarini oshirishga xizmat qiladi.
- 1.2.Fanning vazifalari : Talabalarga matematikaning asosiy elementlaridan bilim berish bo'lib, fikrlash qobiliyatini kuchaytiradi.Bu erda quyidagilarni o'rgatish nazarda tutiladi:
 - algebra va sonlar nazariyasi;
 - analitik geometriya elementlari;
 - matematik tahlil elementlari;
 - integral va uning tadbiri;
 - eksperiment natijalar va uning statistik tekshirish;
- 1.3.Talaba bilimiga qo'yiladigan talablar :Dasturda ko'rsatilgan mavzularni mukammal o'rganish.
- 1.4.Matematika o'qitish gumanitar yo'nalishda pedagogika, psixologiya va filologiya fanlari bilan bog'liq holatda olib boriladi.

II.Fannig mazmuni.

2.1.Ma'ruza mavzulari,ko'riladigan masalalar va vaqt.

Ma'ruza:34 soat.

№	Mavzu	Ko'riladigan mavzular mazmuni	Vaqt	Soat
1	Algebra (8)	1.1.Mulohazalar.Munosabat va moslik.		2
		1.2. To'plam va uning elementlari.		2
		1.3. Sonli to'plamlar va ular ustida amallar.Eyler-Venn diagrammasi.		2
		1.4. Kompleks son va ular ustida amallar.		2
2	Analitik geometriya elementlari.(10)	2.1.Geometriya fanning rivojlanish tarixi.		2
		2.2.Nuqtaning koordinatalari.Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.		2
		2.3.Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari.		2
		2.4.Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.		2
		2.5.Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning o'zaro munosabati.		2
3	Matematik tahlil elementlari.(6)	3.1.Funktsiya tushunchasi.Asosiy elementar funktsiyalarni tekshirish.		2
		3.2.Funktsiyaning limiti.		2
		3.3.Funktsiya hosilasi ta'rifi,uning geometrik va mexanik ma'nosi.		2
4	Integral va uning tadbiqlari.(4)	4.1.Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral.Integrallar jadvali.		2
		4.2.Aniq integral va uning geometrik ma'nosi.		2
5	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.(6)	5.1.Ehtimollar nazariyasiinig asosiy tushunchalari.		2
		5.2. Ehtimolning klassik ta'rifi. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta'riflari.		2
		5.3. Matematik statistikaning asosiy vazifalari.		2
	Jami			34

2.2. Amaliy mashg'ulotlar mavzulari, bajariladigan ish mazmuni va vaqt.

Amaliyot :34 soat.

№	Mavzu	Ko'riladigan mavzular mazmuni	Vaqt	Soat
1	Algebra (6)	1.1. Mulohazalar. Munosabat va moslik.		2
		1.2. To'plam va uning elementlari.		2
		1.3. Sonli to'plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammasi.		2
		1.4. Kompleks son va ular ustida amallar.		2
2	Analitik geometriya elementlari.(8)	2.1. Geometriya faning rivojlanish tarixi.		
		2.2. Nuqtaning koordinatalari. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.		2
		2.3. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari.		2
		2.4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.		2
		2.5. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning o'zaro munosabati.		2
3	Matematik tahlil elementlari.(6)	3.1. Funktsiya tushunchasi. Asosiy elementar funktsiyalarning juft-toqligi, davriyligi.		2
		3.2. Funktsiyaning limiti. Limitlar haqida teoremlar.		2
		3.3. Funktsiya hosilasi ta'rif, uning geometrik va mexanik ma'nosi.		2
4	Integral va uning tadbiqlari.(6)	4.1. Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral. Integrallar jadvali.		3
		4.2. Aniq integral va uning geometrik ma'nosi.		3
5	Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika(6)	5.1. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari.		2
		5.2. Ehtimolning klassik ta'rif. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta'riflari.		2
		5.3. Matematik statistikaning asosiy vazifalari.		2
	Jami			34

Asosiy adabiyotlar.

1. T.A.Azlarov., X.Mansurov, Matematik analiz. I-II qism. T., O'qituvchi. 1990.
2. R.N.Nazarov., B.T.Toshpo'latov, A.F.Dusumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. T., O'qituvchi. I qism, 1993.
3. R.N.Nazarov., B.T.Toshpo'latov, A.F.Dusumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. T., O'qituvchi. II qism, 1995.
4. V.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., O'qituvchi. 1998.

Qo'shimcha adabiyotlar.

1. G.Berman. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. M. 1985.
2. C.X.Sirojiddinov, M.M.Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T., O'qituvchi. 1980.

III. Mustaqil ish.

Jami: 46 soat

3.1. Talabalar mustaqil ishlari:

1. Agar:

A – barcha toq natural sonlar to'plami;

B – 2 dan katta bo'lgan tub sonlar to'plami berilgan bo'lsa:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$ lar topilsin.

2. Agar $A = \{x / x = \frac{n}{n+1}, n \in N, n \leq 20\}$,

$B = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{20}{21} \right\}$ to'plamlar berilgan bo'lsa:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$ lar topilsin.

3. A – kvadratlar to'plami,

B – to'g'ri to'rtburchaklar to'plami berilgan bo'lsa:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$ lar topilsin.

4. Qo'shma kompleks sonlar va ular ustida amallar.

5. Teng kompleks sonlar.

6. Agar $z_1 = 1 - 2i$ va $z_2 = 2 - i$ kompleks sonlar berilgan bo'lsa $z_1 \cdot z_2 - z_1$ ni hisoblang.

7. Kompleks sonlar uchun Muavr formulasi.

8. $A(1,4)$ va $B(5,6)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

9. $2x - y + 5 = 0$ va $x - 4y = 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

10. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidan burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqarish.

11. $A(-1,5)$ nuqtadan $x - 3y + 7 = 0$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofani toping.

12. Fazoda tekisliklarning perpendikulyarlik shartlari.

13. Funktsiyalarning aniqlanish sohasini topishga oid misollar.

14. Ushbu funktsiyalarning toq yoki juftligin tekshiring:

1) $y = x^4 \cdot \sin 4x$ 2) $y = x^4 - x^2 + \sin 4x$ 3) $y = x^3 + x^5 - x$

15. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar va ularga misollar.

16. Ushbu limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3}$

17. Ushbu aniq integralni hisoblang: $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$

18. Matematik kutilma va dispersiya xossalari.

19. Hodisa va ular ustida amallar.

20. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Adabiyotlar.

1. V. Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., O'qituvchi. 1998.

2. G. Berman. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. M. 1985.

3.2.Mustaqil ishlar.

№	Mavzu	Mustaqil bajariladigan ish mavzulari
1	Matematikaning rivojlanish bosqichlari.	1.1.Matematika fani rivojlanishining 4 ta asosiy bosqichi.
		1.2.Algebra faning vujudga kelishi va rivojlanishi.
		1.3.Haqiqiy sonlar to'plami.Haqiqiy sonning moduli.
2.	Funktsiyalar ustida amallar.	2.1.Funktsiyaning uzluksizligi.
		2.2.Hosila yordamida funktsiyaning tekshirish.
3.	Aniq integralning tadbirlari.	3.1.Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash.
		3.2.Egri chiziqli yoy uzunliklarini hisoblash.
		3.3.Aniq integral yordamida hajmlarni hisoblash.
4.	Tajriba natijalarini statistik baholash.	4.1.Parametrlarni baholash.
		4.2.O'lchashlarning tasodifiy xatoliklari.
	Jami	

Adabiyotlar:

- 1.R.N.Nazarov.,B.T.Toshpo'latov,A.F.Dusumbetov.Algebra va sonlar nazariyasi.T.,O'qituvchi.II qism,1995.
- 2.V.Minorskiy.Oliy matematikadan masalalar to'plami.T.,O'qituvchi.1998.
- 3.S.X.Sirojiddinov,M.M.Mamatov.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.T.,O'qituvchi.1980.

“Matematika” kursidan dastur bajarilishining kalendarli rejasi
ma’ruza uchun

Ma’ruza:34 soat.

№	Ko’riladigan mavzular mazmuni	Soat	Bajarilganligi haqida ma’lumot		O’qituvchi imzosi
			Oy va kun	soati	
1	Mulohazalar.Munosabat va moslik.	2			
2	To’plam va uning elementlari.	2			
3	Sonli to’plamlar va ular ustida amallar.Eyler-Venn diagrammasi.	2			
4	Kompleks son va ular ustida amallar.	2			
5	Geometriya faning rivojlanish tarixi.	2			
6	Nuqtaning koordinatalari.Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo’lish.	2			
7	Tekislikda to’g’ri chiziq tenglamalari.	2			
8	Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak.Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa.	2			
9	Fazoda tekislik va to’g’ri chiziq tenglamalari va ularning o’zaro munosabati.	2			
10	Funktsiya tushunchasi.Asosiy elementar funktsiyalarni tekshirish.	2			
11	Funktsiyaning limiti.	2			
12	Funktsiya hosilasi ta’rifi,uning geometrik va mexanik ma’nosi.	2			
13	Boshlang’ich funksiya,aniqmas integral.Integrallar jadvali.	2			
14	Aniq integral va uning geometrik ma’nosi.	2			
15	Ehtimollar nazariyasiinig asosiy tushunchalari.	2			
16	Ehtimolning klassik ta’rifi. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta’riflari.	2			
17	Matematik statistikaning asosiy vazifalari.	2			
	Jami	34			

“Matematika” kursidan dastur bajarilishining kalendarli rejasi
amaliy mashg’ulot uchun

amaliyot :34 soat.

№	Ko’riladigan mavzular mazmuni	Soat	Bajarilganligi haqida ma’lumot		O’qituvchi imzosi
			Oy va kun	soati	
1	Mulohazalar.Munosabat va moslik.	2			
2	To’plam va uning elementlari.	2			
3	Sonli to’plamlar va ular ustida amallar.Eyler-Venn diagrammasi.	2			
4	Kompleks son va ular ustida amallar.	2			
5	Nuqtaning koordinatalari.Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo’lish.	2			
6	Tekislikda to’g’ri chiziq tenglamalari.	2			
7	Ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchak.Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan masofa.	2			
8	Fazoda tekislik va to’g’ri chiziq tenglamalari va ularning o’zaro munosabati.	2			
9	Funktsiya tushunchasi.Asosiy elementar funktsiyalarning juft-toqligi,davriyligi.	2			
10	Funktsiyaning limiti.Limitlar haqida teoremlar.	2			
11	Funktsiya hosilasi ta’rifi,uning geometrik va mexanik ma’nosi.	2			
12	Boshlang’ich funksiya,aniqmas integral.Integrallar jadvali.	3			
	Aniq integral va uning geometrik ma’nosi.	3			
13	Ehtimollar nazariyasiinig asosiy tushunchalari.	2			
14	Ehtimolning klassik ta’rifi. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta’riflari.	2			
15	Matematik statistikaning asosiy vazifalari.	2			
	Jami	34			

IV.Fannig reyting ishlanmasi va baholash mezonlari.

4.1.Reyting ishlanmasi.

Nazorat turlari.	Nazorat soni	Ajratilgan ball	Jami.
1.Joriy nazorat:	8	3	24
1.1.Amaliy mashg'ulotlarni bajarish.			
1.2.Uyga vazifani bajarish.	7	3	21
1.3.Mustaqil ish	20	0,5	10
Jami			55
2.Oraliq nazorat:			
2.1.Yozma ish	2	10	20
2.2.Mustaqil ish	2	5	10
Jami			30
3.Yakuniy nazorat:			
3.1.Test yoki yozma ish	1	15	15
Jami			100

4.2.Baholash mezonlari.

1.Joriy baholash bo'yicha:

- 1.1.Amaliy mashg'ulotlarga qatnashib,berilgan topshiriqlarni to'la bajargan talabaga 3 ball,agar to'la bo'lmasa,bajarilish sifatiga qarab 0,5-2,5 ball beriladi.
- 1.2.Uyga vazifani to'la bajargan talabaga 3 ball,to'la bajarmagan bo'lsa bajarilish sifatiga qarab 0,5-2,5 ball beriladi.
- 1.3. Mustaqil ishlarda talabalar uchun 20 ta bajariladi.Ishning bajarilish sifatiga qarab jami 5 ball beriladi.

2.Oraliq nazorat bo'yicha:

- 2.1.O'quv jarayoni davomida darsning yarmida 1 marta va oxirida 1 marta olinadi.Xar bir nazorat ish to'liq bo'lsa 10 balldan boholanib,va ishning sifatiga qarab ball qo'yiladi.
- 2.2.Jamoaviy ta'lim asosida 2 ta mavzu berilib, uning yozilish sifati va himoya darajasiga qarab 5 balldan 10 ballgacha qo'yiladi.

3.Yakuniy nazorat ish.

- 3.1. 30 ta test yoki 3 ta savol asosida yozma variant shaklida olinadi.8,25 balldan yuqori to'plagan talaba imtihondan o'tgan hisoblanadi.

Технологик харита

“To’plam tushunchasi va to’plam ustida amallar” mavzusida tayyorlangan ma’ruza darsining texnologik xaritasi

№	FAOLIYAT	Ma’sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi: Darsning maqsadi: Talabalarga matematikaning muhim bo’limlaridan bo’lgan to’plam, to’plamlarning berilish usullari, qism to’plam, universal to’plam, Eyler-Venn diogrammalari, to’plamning kesishmasi, to’plamning birlashmasi va ayirmasi, to’ldiruvchi to’plamlar haqida tushuncha berish. Identiv o’quv maqsadlari: 1. To’plam haqida tushuncha beradi. 2. To’plamning berilish usullarini aytib beradi.. 3. Universal to’plamni boshqa to’plamlardan farqini aytib beradi 4. Qism to’plamni Eyler-Veen diogrammalari yordamida ajrata oladi. 5.. To’plamlar ustida amallar bajara oladi. 6. Eyler-Veen diogrammalari yordamida to’plam orasida bajarilgan amallarni taxlil qila oladi.. Qo’llaniladigan interfaol usullar: Muammoli topshiriq, aqliy xujum, ma’ruza-hikoya, videotopshiriqlar. Beriladigan savollar: 1.1 To’plam tushunchasiga nega ta’rif berilmaydi? 1.2. To’plam tushunchasiga misollar keltiring. 1.3. Chekli va cheksiz to’plamlarga misollar keltiring.. 1.4. Bo’sh to’plamga misollar keltiring. 1.5. Universal to’plamga misollar keltiring. 1.6. To’plam nechta usulda beriladi? Misollar keltiring. 1.7. Qism to’plamni Eyler-Veen diogrammalari yordamida ko’rsating. 1.8. To’plamlarning tengligi deganda nimani tushunasiz?. 1.9. To’plamlarning kesishmasiga misollar orqali tushuntiring. 2.0. To’plamlarning birlashmasi va ayirmasini Eyler-Veen diagrammasi orqali ko’rsating 2.1. To’plamlarning ayirmasi va to’ldiruvchi to’plamlarni misollarda ko’rsating. 2.2. To’plam larning ayirmasi va to’ldiruvchi to’plamni farqini aytib bering. 2.3. To’plam ustida amallar bajarish bilan bog’langan holda bo’lgan asosiy xossalarni keltiring. 2.4. De-Morgan qonuni tushuntirib bering.	O’qituvchi
2	Kirish: 2.1. Mavzuda ko’rib chiqiladigan nazariy va amaliy masalalar: To’plam tushunchasi, to’plamning berilish usullari, to’plamlar ustida amallar bajarish, Eyler-Veen diogrammalaridan foydalanish, to’plamlarning birlashmasi, ayirmasi, ko’paytmasi bilan bog’liq uning xossalari haqida ma’lumotlar tushuntiriladi. 2.2. Talabalarga savollar beriladi va ularning fikrlari so’raladi.	O’qituvchi

3	Guruxda ishlash. 3.1.Guruxdagi talabalar fikrlari eshitiladi va boshqa fikr-mulohaza e'tiborga olinadi va boshqa savollarga izox beriladi. Talabalar mavzuningmuammoli echishda faol ishtirok etishi ta'minlanadi. 3.2.Guruxdagi talabalar tomonidan keltirilgan fikrlaridagi o'xshashlik,qarama-qarshilik tomonlari talabalar bilan xamkorlikda aniqlanadi va barcha fikrlar taxlil etiladi. 3.3.Talabalar tomonidan aytilgan fikrlar taxlil etiladi,umumlashtiriladi,eng to'g'ri fikrlar jamlanadi. 3.4.Aytilgan fikrlar to'ldiriladi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakuniy bosqich: Talabalar bilimini baholash uchun UUMdagi savollari beriladi va baholash mezonni asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriqlar. To'plamlar ustida bajariladigan amallar bilan bog'liq bo'lgan xossalar N.Xamedova va boshqalarning matematika darsligidagi 9-bet 1-6 xossalar, 10 bet 1-7 xossalar ,11-betdagi 1-7 xossalar o'rganiladi va ularning bajarilishiga oid misollar ko'rsatiladi.Dars yakunlanadi va talabalar bilan xayrlashadi.	O'qituvchi

“To'plamlarning dekart ko'paytmasi va to'plamlarni sinflarga ajratish ” mavzusida tayyorlangan ma'ruza darsining texnologik xaritasi

№	FAOLIYAT	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi: Darsning maqsadi:Talabalarga to'plam elementlaridan ma'lum qoida asosida tuziladigan to'plamlarga dekart ko'paytma haqida tushuncha berish, to'plamlarning berilishiga ko'ra sinflarga ajratish,to'plamlarning hossalriga ko'ra sinflarga ajratish haqida ma'lumotlar bilan tanishtirish. Identiv o'quv maqsadlari: 1.To'plamlarning dekart ko'paytmasi haqida ma'lumot beradi.. 2. To'plamlarning dekart ko'paytmasi xossalriga asoslanib misollar ishlay oladi. 3.To'plamlarning o'zaro kesishishmaydigan qismlari(qism to'plamlar)ini tayangan xolda sinflarga ajratadi. 4. To'plamlarni elementlari (bitta,ikkita,uchta) xossalriga ko'ra sinflarga ajrata oladi. Qo'llaniladigan interfaol usullar: Muammoli topshiriq , aqliy xujum, ma'ruza-suhbat , videotopshiriqlar. Beriladigan savollar: 1.1.To'plamlarning dekart ko'paytmasini ta'riflab bering. 1.2.To'plamlarning dekart ko'paytmasini xossalrini ayting. 1.3.To'plamlarda tartiblanganlik deganda nimani tushunasiz? 1.4.To'plamlarda n- o'rinlik kortej qanday to'plam ekanligini tushuntiring. 1.5.Misollar yordamida to'plamlarni sinflarga ajratishni ko'rsating 1.6.To'plamlarni sinflarga ajratilish ta'riflarini keltiring 1.7.To'plamlarni sinflarga ajratishni Eyler- Venn diogrammalari yordamida ko'rsating.	O'qituvchi

2	Kirish: 2.1.Mavzu va ko'rib chiqiladigan nazariy va amaliy masalalar: To'plamlarning dekart ko'paytmasi, dekart ko'paytma xossalari,to'plamlarni sinflarga ajratish haqida ma'lumotlar beriladi. 2.2.Talabalarga savollar beriladi va ularning fikrlari so'raladi.	O'qituvchi
3	Guruxda ishlash. 3.1.Guruxdagi talabalar fikrlari eshitiladi va boshqa fikr-mulohaza e'tiborga olinadi va boshqa savollarga izox beriladi. Talabalar mavzuning muammoli echishda faol ishtirok etishi ta'minlanadi. 3.2.Guruxdagi talabalar tomonidan keltirilgan fikrlaridagi o'xshashlik,qarama-qarshilik tomonlari talabalar bilan xamkorlikda aniqlanadi va barcha fikrlar taxlil etiladi. 3.3.Talabalar tomonidan aytilgan fikrlar taxlil etiladi,umumlashtiriladi,eng to'g'ri fikrlar jamlanadi. 3.4.Aytilgan fikrlar to'ldiriladi. To'plamlarning dekart ko'paytmasi,to'plamlarni sinflarga ajratish misollar bilan mustaxkamlanadi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakuniy bosqich: Talabalar bilimini baholash uchun UUMdagi savollari beriladi va baholash mezoni asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriqlar. Savol va topshiriqlar to'plamini ishlab chiqish.Dars yakunlanadi va talabalar bilan xayrlashadi.	O'qituvchi

“Moslik va munosabat” mavzusida tayyorlangan ma’ruza darsining texnologik xaritasi

№	FAOLIYAT	Ma'sul shaxs
1	Tayyorlov bosqichi: Darsning maqsadi: Talabalarga ikki to'plam elementlari orasida moslik, moslikning grafi va grafigi, moslik turlari, to'plamlarning dekart ko'paytmasi,. to'plam elementlari orasidagi munosabat, munosabat hossalari, tartib munosabati kabi tushunchalar berish. Identiv o'quv maqsadlari: 1.Ikki to'plam elementlari orasidagi moslikni tushunadi 2.Moslik grafini misollar asosida aytib beradi.. 3.Moslik grafigini yasab beradi 4.To'plam elementlari orasidagi munosabatni aytib beradi. 5.Moslikni turlarga ajratadi. 6.Munosabatni xossalari taxlil qiladi. 7.Tartib munosabatini sharxlab beradi. 8.Funksional moslik ta'rifini aytib beradi. Qo'llaniladigan interfaol usullar: Muammoli topshiriq , aqliy xujum, ma'ruza-suhbat , videotopshiriqlar. Beriladigan savollar: 1.1.Ikki to'plam elementlari orasida qanday moslik o'rnatish mumkin? 1.2.Ikki to'plam elementlari orasidagi munosabatlarni Eyler-Veen doirachalari yordamida ko'rsating.	O'qituvchi

	1.3. Ikki to'plam orasidagi moslik grafigini ko'rsating. 1.4. Ikki to'plam orasidagi moslik grafi va grafigi orasidagi farqni taxlil qiling. 1.5. Ikki to'plam orasidagi moslik ta'rifini keltiring. 1.6. Moslikni funktsional bo'lishini ta'rifini keltiring. 1.7. Moslikni inektiv bo'lishini ta'rifini keltiring. 1.8. Surektiv va biektiv mosliklarni taxlil qiling. 1.9. Funktsional moslik qachon akslantirish deyiladi. 2.0. Barqaror moslikni tushuntirib bering 2.1. Barqaror yoki ekvivalent moslikni tushuntirib bering 2.2. Sonli to'plamga misollar keltiring. 2.3. To'plamlar elementlari orasida qanday munosabatlarni bilasiz? 2.4. To'plamlar orasidagi munosabatni qanday tushunasiz. 2.5. Munosabat xossalarini keltiring 2.6. Tartib munosabatni ta'rifini ayting. 2.7. Tartib munosabatiga misollar keltiring.	
2	Kirish: 2.1 Mavzu va ko'rib chiqiladigan nazariy va amaliy masalalar:: To'plamlarning dekart ko'paytmasi, dekart ko'paytma xossalari, to'plamlarni sinflarga ajratish haqida ma'lumotlar beriladi 2.2. Talabalarga savollar beriladi va ularning fikrlari so'raladi.	O'qituvchi
3	Guruxda ishlash. 3.1. Guruxdagi talabalar fikrlari eshitiladi va boshqa fikr-mulohaza e'tiborga olinadi va boshqa savollarga izox beriladi. Talabalar mavzuning muammoli echishda faol ishtirok etishi ta'minlanadi. 3.2. Guruxdagi talabalar tomonidan keltirilgan fikrlaridagi o'xshashlik, qarama-qarshilik tomonlari talabalar bilan xamkorlikda aniqlanadi va barcha fikrlar taxlil etiladi. 3.3. Talabalar tomonidan aytilgan fikrlar taxlil etiladi, umumlashtiriladi, eng to'g'ri fikrlar jamlanadi. 3.4. Aytilgan fikrlar to'ldiriladi. To'plamlarning dekart ko'paytmasi, to'plamlarni sinflarga ajratish misollar bilan mustaxkamlanadi.	O'qituvchi va talaba
4	Yakuniy bosqich: Talabalar bilimni baholash uchun UUMdagi savollari beriladi va baholash mezoni asosida baholanadi.	O'qituvchi
5	TMI topshiriqlar. Savol va topshiriqlar to'plamini ishlab chiqish. Dars yakunlanadi va talabalar bilan xayrlashadi.	O'qituvchi

Mavzu: Mulohazalar. Munosabat va moslik

Asosiy savollar

1. Matematik mulohaza .
2. Predikatlar, o'rinlashtirishlar, gruppalash.

Mavzuga oid tayanch tushuncha va iboralar

O'rinlashtirish, gruppalash, matematik mantiq, gruppa, predikatlar, mantiq, kvantorlar, munosabatlar, moslik.

1-savol bayoni

Har qanday matematik nazariya u yoki bu matematik jumlaning rost yoki yolg'onligini tekshirish bilan shug'ullanadi.

Ta'rif. Rostligi yoki yolg'onligini aniqlash mumkin bo'lgan darak gapni **mulohaza** deb ataladi.

Mulohazaning rostligi yoki yolg'onligi uning **qiymati** deyiladi. Demak, har bir mulohaza rost yoki yolg'on qiymatga ega bo'ladi. Mulohazalarning rostligi yoki yolg'onligi ularning mazmuniga qarab aniqlanadi. Rost mulohazaning qiymati 1 orqali, yolg'on mulohazaning qiymati 0 orqali belgilanadi. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh $A, B, C, \dots$, harflari bilan belgilaymiz. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar quyidagicha aniqlanadi.

1. **Inkor amali.** A mulohazaning **inkori** deb, A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi va $\bar{A}$ kabi yozilib, " A emas" deb o'qiladi.

Inkor amalini jadval shaklida yozish mumkin. Bu jadvalni **inkorning rostlik jadvali** deb ataladi.

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

2. **Kon'yunksiya amali.** A va B mulohazalarning **kon'yunksiya** deb, bu mulohazalar bir paytda rost bo'lgandagina rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi $A \wedge B$ kabi belgilanadi va " A kon'yunksiya B " yoki " A va B " deb o'qiladi. Kon'yunksiya lotincha *conjunctia*-birlashtiruvchi degan so'zdan olingan. Mulohazalar kon'yunksiyasining rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Agar $A \wedge B$ kon'yunksiyada A va B mulohaza-larning o'rnini almashtirsak $B \wedge A$ kon'yunksiyani hosil qilamiz. Mulohazalar kon'yunksiyaning rostlik jadvaliga asosan $A \wedge B = B \wedge A$ tenglik kelib chiqadi. Bu tenglik kon'yunksiya kommutativ xossaga ega ekanligini bildiradi. Bu xossa kon'yunksiyada mulohazalar o'rnini almashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Xuddi shuningdek $(A \wedge B) \wedge C$ va $A \wedge (B \wedge C)$ mulohazalarning rostlik jadvalini tuzsak

$$(A \wedge B) \wedge C \text{ q } A \wedge (B \wedge C)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik kon'yunksiya assotsiativlik xossasiga ega bo'lishini bildiradi. Bu xossa uch va undan ortig mulohazalar kon'yunksiyasida qavslarni tashlab yuborish mumkinligini ko'rsatadi.

A va $\bar{A}$ mulohazalar kon'yunksiyasining rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi. Bu jadvaldan kelib chiqadiki, $A \wedge \bar{A}$ mulohaza har doim yolg'on. Shuning uchun $A \wedge \bar{A}$ mulohazani **aynan yolg'on formula** deb ataladi.

A	$\bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$
1	0	0
0	1	0

3. **Diz'yunksiya amali.** A va B mulohazalarning **diz'yunksiya**

deb, bu mulohazalarning kamida bittasi rost bo'lganda rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning diz'yunksiyasi $A \vee B$ kabi belgilanib, " A diz'yunksiya B " yoki " A yoki B " deb o'qiladi. Diz'yunksiya lotincha *disjunctio*-ajratish so'zidan kelib chiqqan. Mulohazalar diz'yunksiyasining rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi. Diz'yunksiyaning rostlik jadvaliga asosan quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

1. Diz'yunksiyaning kommutativligi:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A.$$

2. Diz'yunksiyaning assotsiativligi:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C).$$

3. Diz'yunksiyaga nisbatan kon'yunksiyaning distributivligi:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

4. Kon'yunksiyaga nisbatan diz'yunksiyaning distributivligi:

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A va $\bar{A}$ mulohazalar diz'yunksiyasining rostlik jadvali

quyidagicha bo'ladi. Demak, $A \vee \bar{A}$ mulohazalar har doim rost bo'lar ekan.

A	$\bar{A}$	$A \vee \bar{A}$
1	0	1
0	1	1

$A \vee \bar{A}$ mulohazani **aynan rost formula** deb ataladi.

Rostlik jadvaliga asosan kon'yunksiya, diz'yunksiya va inkor amallari orasidagi ushbu bog'lanishlarni isbotlaymiz:

$$1. \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

$$2. \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}.$$

Bu tengliklarni **De Morgan formulalari** deb ataladi. De Morgan (1806-1871) shotlandiyalik matematik va logik.

4. Implikatsiya amali. A va B mulohazalarning **implikatsiyasi** deb, A rost, B yolg'on mulohaza bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan hollarda rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning implikatsiyasi $A \Rightarrow B$ kabi belgilanib, " A implikatsiya B ", yoki "agar A bo'lsa, u vaqtda B bo'ladi", yoki " A dan B kelib chiqadi" deb o'qiladi.

$A \Rightarrow B$ implikatsiyada A mulohazaga implikatsiyaning **sharti** (antetsedent), B mulohazaga implikatsiyaning **xulosasi** (konsekvent) deb ataladi.

Implikatsiya lotincha *implicito*-aloqa o'rnataman so'zidan hosil bo'lgan. Implikatsiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi. Implikatsiyaning rostlik jadvaliga va De Morgan formulalariga asosan quyidagi tengliklar kelib chiqadi.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$1. A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

$$2. A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

$$3. \overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \bar{B}.$$

5. Ekvivalensiya amali. A va B mulohazalarning ikkalasi ham rost yoki ikkalasi ham yolg'on bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohazaga shu mulohazalarning **ekvivalensiyasi** deb ataladi.

A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi $A \Leftrightarrow B$ kabi belgilanib, " A ekvivalensiya B " yoki " A bo'lishi uchun B bo'lishi zarur va yetarli" deb o'qiladi.

Ekvivalensiya lotincha *aequus*-teng va *valentis*-qiymatga ega degan so'zlardan hosil bo'lgan. Mulohazalar ekvivalensiyasining rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi. Bu rostlik jadvaliga asosan quyidagi tengliklarni keltirib chiqaramiz.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$1. A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A.$$

$$2. A \vee B \Leftrightarrow B \vee A.$$

$$3. ((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B.$$

Mulohazalar va ular ustida bajariladigan mantiqiy amallar birgalikda **mulohazalar algebrasi** deb ataladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. Mulohaza deb nimaga aytiladi ?
2. Mulohazaning qiymati deb nimaga aytiladi ?
3. Mulohazaning inkori deb nimaga aytiladi ?
4. Inkorning rostlik jadvalini yozong.
5. Mulohazalar konyunksiyasi deb nimaga aytiladi ?
6. Konyunksiyaning rostlik jadvalini yozong.
7. Mulohazalar dizyunksiyasi deb nimaga aytiladi ?
8. Dizyunksiyaning rostlik jadvalini yozong.
9. De Morgen formulalarini yozing.
10. Mulohazalar implikatsiyasi deb nimaga aytiladi ?
11. Implikatsiyaning rostlik jadvalini yozong.
12. Mulohazalar ekvivalensiyasi deb nimaga aytiladi ?
13. Ekvivalensiyaning rostlik jadvalini yozong.
14. Mulohazalar algebrasi deb nimaga aytiladi ?

2-savol bayoni

Predikatlar va kvantorlar

“Yozuvchi x “Navoiy” romanini yozgan” jumlasini mulohaza bo‘la olmaydi. Chunki qaysi yozuvchi yozgani ko‘rsatilmagan. Agar bu jumlada x harfi o‘rniga “Oybek” degan so‘zni yozsak, rost mulohaza hosil bo‘ladi. Agar x harfi o‘rniga “Qahhor” so‘zini yozsak, yolg‘on mulohaza hosil bo‘ladi. Agar x harfi o‘rniga “uy” so‘zini yozsak, hosil bo‘lgan jumla ma’noga ega bo‘lmaydi. Odatda ma’noga ega bo‘lmagan jumla yolg‘on mulohaza deb hisoblanadi.

Ta’rif. Tarkibida erkli o‘zgaruvchi qatnashib, bu o‘zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarida mulohazaga aylanadigan darak gapni **predikat** deb ataladi.

x ob’ektning biror P xossaga ega bo‘lishi $P(x)$ kabi belgilanib, **$P(x)$ predikat** deb o‘qiladi.

Predikatlar mulohaza emas, lekin x ning biror to‘plamga tegishli aniq qiymatlarida u mulohazaga aylanadi.

Ta’rif. M to‘plamning $P(x)$ predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi D qism to‘plamiga **$P(x)$ predikatning rostlik sohasi** deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi misolda keltirilgan predikatning rostlik sohasi bitta elementdan iborat $D_q\{\text{Oybek}\}$ to‘plam bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $P(x)$ predikat M to‘plamning barcha elementlarida rost qiymatni qabul qilsa, u vaqtda $P(x)$ predikat M to‘plamda **aynan rost** deyiladi.

Masalan, $P(x)$ predikat: “ x musbat son” N to‘plamda aynan rost bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $P(x)$ predikat M to‘plamning barcha elementlarida yolg‘on qiymatni qabul qilsa, u vaqtda $P(x)$ predikat M to‘plamda **aynan yolg‘on** deyiladi.

Masalan, $P(x)$ predikat: “ $x < 0$ ” N to‘plamda aynan yolg‘on bo‘ladi.

Biz bitta noma’lumga bog‘liq bo‘lgan bir o‘rinli predikatlarni ko‘rib o‘tdik. Predikat ikki, uch, ..., n o‘rinli ham bo‘lishi mumkin. Masalan, Z to‘plamda $F(x; y)$ predikat: “ $x < y$ ” ikki o‘rilidir.

$P(x)$ predikat x ning biror M to‘plamga tegishli aniq qiymatlarida mulohazaga aylanishini ko‘rib o‘tdik. Predikatlardan mulohaza hosil qilishning yana ikkita usuli mavjud.

Masalan, $P(x)$: “ $x^2 - 4 = 0$ ” predikatni barcha $x \in N$ lar uchun qaraydigan bo‘lsak, u yolg‘on mulohaza bo‘lib, ba’zi bir $x \in N$ lar uchun esa rost mulohaza bo‘ladi.

Ta’rif. “ M to‘plamning barcha x elementlari uchun” degan jumla $\forall x \in M$ kabi belgilanib, u **umumiylik kvantori** deb ataladi.

$\forall$ belgisi inglizcha *All* – hamma, barcha degan soʻz birinchi harfining toʻnkarilgan holi. *Kvantor* soʻzi lotincha boʻlib, qancha degan maʼnoni bildiradi, yani kvantor u yoki bu jumlada qancha obʼyekt haqida gap borayotganini koʻrsatadi.

Taʼrif. “ M toʻplamning baʼzi bir x elementlari uchun” degan jumla $\exists x \in M$ orqali belgilanib, u **mavjudlik kvantori** deb ataladi.

$\exists$ belgisi inglizcha *Exist* – mavjud degan soʻz birinchi harfining toʻnkarilgan holi.

“ A toʻplamning barcha x elementlari uchun $P(x)$ predikat rost” degan jumlaning quyidagicha belgilaymiz:

$$(\forall x \in A)P(x) \quad (1).$$

“ A toʻplamning shunday x elementi mavjudki, bu element uchun $P(x)$ predikat rost” degan jumlaning quyidagicha belgilaymiz:

$$(\exists x \in A)P(x) \quad (2).$$

(1) va (2) mulohazalar odatda **kvantorli mulohazalar** deb ataladi.

$P(x)$ predikat A toʻplamning barcha elementlari uchun rost boʻlgandagina (1) mulohaza rost qiymatga ega. $P(x)$ predikat yolgʻon boʻlganda (1) mulohaza yolgʻon boʻladi. $P(x)$ predikat A toʻplamning barcha elementlari uchun aynan yolgʻon boʻlgandagina (2) mulohaza yolgʻon boʻladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. Predikat deb nimaga aytiladi ?
2. Predikat qanday belgilanadi ?
3. Predikatning rostlik sohasi deb nimaga aytiladi ?
4. Aynan rost predikat deb nimaga aytiladi ?
5. Aynan yolgʻon predikat deb nimaga aytiladi ?
6. Umumiylik kvantori deb nimaga aytiladi ?
7. Kvantor soʻzining maʼnosini ayting.
8. Mavjudlik kvantori deb nimaga aytiladi ?
9. Kvantorli mulohazalar deb nimaga aytiladi ?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kostrikin A.I. Vvedeniev algebra, M.1977 g.
2. Fadeev D. K. Lektsii po algebra 1984 g.
3. Nazarov R.N. va boshqalar Algebra va sonlar nazariyasi, I-qism, T, 1993y

Mavzu: To'plam tushunchasi va uning algebrasi

Asosiy savollar

1. To'plam va uning elementlari
2. Sonli to'plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammasi

Mavzuga oid tayanch tushunchalar:

To'plam, birlashma, kesishma, to'ldiruvchi, simmetrik ayirma, qism to'plam.

Mavsuga oid asosiy muammolar.

1. Sanoqli va sanoqsiz to'plamlar.
2. Sanoqli va sanoqsiz to'plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, simmetrik ayirmasi va ularni diogrammada ko'rsating.

1-savol bayoni To'plam va uning elementlari

To'plam tushunchasi matematikaning asosiy va ayni paytda muhim tushunchalaridan biridir. Ma'lumki asosiy tushuncha ta'rifsiz qabul qilinadi. Shuning uchun to'plamni misollar yordamida tushuntiramiz. Masalan, sirtqi ta'lim fakulteti talabalari to'plami, boshlang'ich ta'lim bo'limi talabalari to'plami, birinchi kurs talabalari to'plami, juft sonlar to'plami, natural sonlar to'plami. Matematikada to'plamlar lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, \dots$ bilan belgilanadi. To'plamni tashkil etgan ob'ektlar shu to'plamning **elementlari** deb ataladi. To'plamning elementlari lotin alifbosining kichik harflari $a, b, c, \dots$ bilan belgilanadi.

To'plam va unga kiruvchi elementlar o'zaro "tegishli" munosabati bilan bog'lanadi. Masalan, 8 juft sonlar to'plamiga tegishli. Agar a element A to'plamga tegishli bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va " a element A to'plamga tegishli" deb o'qiladi. Agar a element A to'plamga tegishli bo'lmasa, $a \notin A$ kabi yoziladi va uni " a element A to'plamga tegishli emas" deb o'qiladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamni **chekli to'plam** deb ataladi. Masalan, sirtqi ta'lim fakulteti studentlari to'plami chekli to'plam bo'ladi.

Cheksiz ko'p elementlardan tuzilgan to'plamni **cheksiz to'plam** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to'plami cheksiz to'plam bo'ladi. Xuddi shuningdek, butun sonlar to'plami, ratsional sonlar to'plami va haqiqiy sonlar to'plami cheksiz to'plam bo'ladi. Matematikada bu to'plamlar maxsus harflar bilan belgilanadi: **N**-natural sonlar to'plami, **Z**-butun sonlar to'plami, **Q**-ratsional sonlar to'plami, **R**-haqiqiy sonlar to'plami.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plamni **bo'sh to'plam** deb ataladi va $\emptyset$ orqali belgilanadi.

To'plamning elementlari ham to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, sirtqi ta'lim fakulteti guruhlari to'plami. Bu to'plamning elementlari guruhlar bo'lib, ular studentlar to'plamlarini tashkil etadi. Lekin studentlar guruhlar to'plamining elementlari bo'lmaydi.

To'plamning har bir elementi unda faqat bir martagina olinadi. Shu sababli to'plamdagi elementlar har xil hisoblanadi. Demak, to'plamdagi har bir element faqat o'ziga teng. To'plamning bir-biridan farqli ikki elementi bir-biriga teng bo'lmaydi.

Agar har bir elementning ma'lum bir to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, u vaqtda to'plam berildi deyiladi. Odatda to'plamlar ikki xil usulda beriladi. Birinchi usulda to'plamning barcha elementlari katta qavsga olib yoziladi. Masalan, $A = \{3; 5; 7; 9; 11\}$, $B = \{\text{oq, qora, ko'k}\}$, $C = \{a; b; c; d\}$. Ikkinchi usulda to'plamga kirgan elementlarning xarakteristik xossalari ko'rsatiladi.

To'plamning **xarakteristik xossasi** deb, faqatgina qaralayotgan to'plam elementlari ega bo'lgan xossaga aytiladi. Masalan, A to'plam ikki xonali sonlardan tuzilgan. Bu to'plam

elementlarining xarakteristik xossasi “ikki xonali son”. Xuddi shuningdek B – o‘zbek alifbosi harflari to‘plami, C – kamalak ranglari to‘plami. Sonli to‘plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qo‘lay. Masalan, $C = \{c; c \leq 10, c \in N\}$, $X = \{x; x^2 - 8 = 0, x \in R\}$, $Y = \{y; -4 \leq y \leq 8, y \in Z\}$.

Ta’rif. Bir xil elementlardan tuzilgan ikki to‘plamni **teng to‘plamlar** deb ataladi. A va B to‘plamlarning tengligi $A \equiv B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{1; 3; 7; 10\}$, $B = \{1; 3; 7; 10\}$ va $C = \{1; 2; 7; 10\}$ to‘plamlar berilsa $A = B$. Lekin A va C hamda B va C to‘plamlar teng emas: $A \neq C$, $B \neq C$.

Ta’rif. Agar A to‘plamning barcha elementlari B to‘plamning ham elementlari bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamning **qism to‘plami** deb ataladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{1; 3; 5\}$ va $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ to‘plamlar berilsa, $A \subset B$ bo‘ladi. Bu ta’rifdan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Har bir to‘plam o‘zining qism to‘plamidir: $A \subset A$.

2-natija. Agar $A \subset B$ va $B \subset C$ bo‘lsa, u vaqtda $A \subset C$ bo‘ladi.

Shuningdek bo‘sh to‘plam har qanday A to‘plamning qism to‘plami hisoblanadi: $\emptyset \subset A$.

Ba’zan ixtiyoriy to‘plamni o‘zining qism to‘plalariga nisbatan **universal to‘plam** deb ataladi va I bilan belgilanadi.

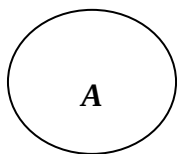
Demak, agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ to‘plamlar A to‘plamning qism to‘plamlari bo‘lsa, u vaqtda A to‘plam $A_1, A_2, \dots, A_n$ to‘plamlar uchun universal to‘plam bo‘ladi.

1-misol. Universitetning uchinchi kurs talabalari to‘plami A , universitet kunduzgi bo‘lim talabalari to‘plami B , universitet sirtqi ta’lim fakulteti talabalari to‘plami C bo‘lsa, u vaqtda I universal to‘plam sifatida universitetning barcha talabalari to‘plamini olish mumkin, chunki $A \subset I$, $B \subset I$, $C \subset I$.

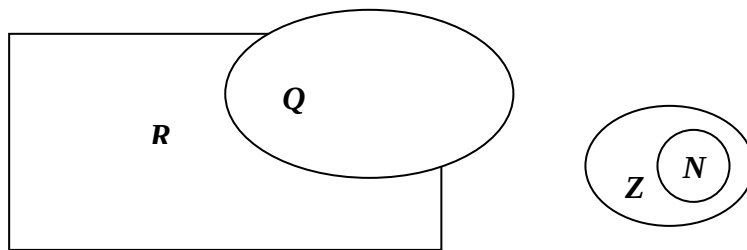
2-misol. Barcha natural sonlar to‘plami N , barcha butun sonlar to‘plami Z , barcha ratsional sonlar to‘plami Q , barcha haqiqiy sonlar to‘plami R uchun $N \subset Z \subset Q \subset R$ munosabati o‘rinli bo‘lgani sababli, R to‘plam N , Z , Q to‘plamlar uchun universal to‘plam bo‘ladi.

To‘plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tasavvur qilish uchun to‘plamlar doira yoki oval shaklida tasvirlanadi. Masalan, 1-chizmada A to‘plam tasvirlangan. To‘plamlarni bunday tasvirlashni odatda **Eyler-Benn diagramma-lari** deb ataladi. Doira yoki ovalni esa **Eyler-Venn doiralari** deb ataladi. Eyler (1707-1783) shveytsariyalik matematik, Djon Venn (1834-1923) ingliz mate-matigi.

Eyler-Benn diagrammasida universal to‘plamni to‘g‘ri to‘rtburchak bilan, uning qism to‘plamlarini shu to‘rtburchak ichidagi doiralalar yoki ovallar bilan tasvirlash qabul qilingan. Masalan, $N \subset Z \subset Q \subset R$ munosabati 2-chizmada tasvir-langani.



1-chizma.



2-chizma.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. To'plamni qanday tushunasiz ?
2. To'plamning elementlari deb nimaga aytiladi ?
3. Chekli to'plam ta'rifini ayting.
4. Cheksiz to'plam ta'rifini ayting.
5. Bo'sh to'plam ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.
6. To'plam necha usulda beriladi ?
7. To'plamning xarakteristik xossasi deb nimaga aytiladi ?
8. Qanday to'plamlarni teng to'plamlar deb ataladi ?
9. Qism to'plam deb nimaga aytiladi ?
10. Universal to'plam deb nimaga aytiladi va qanday belgilanadi ?
11. Eyler-Venn diagrammalari deb nimaga aytiladi ?

2-savol bayoni

Sonli to'plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammasi.

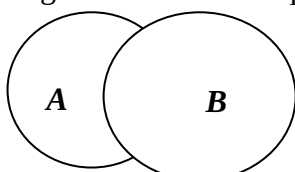
To'plamlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz.

Ta'rif. A hamda B to'plamlarning barcha elementlaridan tuzilgan to'plamni A va B to'plamlarning **birlashmasi** deb ataladi va $A \cup B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{2; 5; 7\}$ va $B = \{2; 4; 7; 11\}$ to'plamlarning birlashmasi

$$A \cup B = \{2; 4; 5; 7; 11\}.$$

Agar A va B to'plamlar Eyler-Venn doiralaridan iborat bo'lsa, u vaqtda 3-chizmada ularning birlashmasi chiziqlar chizilgan soha bo'ladi.



3-chizma.

To'plamlarning birlashmasi quyidagi xossalarga ega.

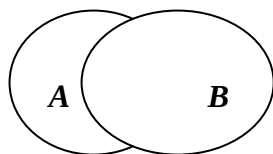
1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$.

Ta'rif. A hamda B to'plamlarning har ikkalasida ham mavjud bo'lgan elementlardan tuzilgan to'plamni A va B to'plamlarning **kesishmasi** deb ataladi va $A \cap B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{2; 5; 7\}$ va $B = \{2; 4; 7; 11\}$ to'plamlarning kesishmasi $A \cap B = \{2; 7\}$.

Agar A va B to'plamlarning ikkalasida ham mavjud element bo'lmasa, u vaqtda bu to'plamlar **kesishmaydi** deb ataladi va $A \cap B = \emptyset$ kabi yoziladi. Masalan, bir xonali sonlar to'plami bilan ikki xonali sonlar to'plami kesishmaydi.

Agar A va B to'plamlar Eyler-Venn doiralaridan iborat bo'lsa, 4-chizmada ularning kesishmasi chiziqlar chizilgan soha bo'ladi.



4-chizma.

To'plamlarning kesishmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$.

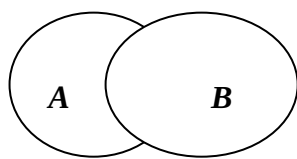
To'plamlarning birlashmasi va kesishmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ta'rif. A to'plamning B to'plamda mavjud bo'lmagan elementlaridan tuzilgan to'plamni A va B to'plamlarning **ayirmasi** deb ataladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \{5; 2; 7; 6\}$ va $B = \{2; 4; 7; 19; 17\}$ to'plamlarning ayirmasi $A \setminus B = \{5; 6\}$.

A va B to'plamlari Eyler-Venn doiralaridan iborat bo'lganda, ularning ayirmasi 5-chizmada chiziqlar chizilgan soha bo'ladi.



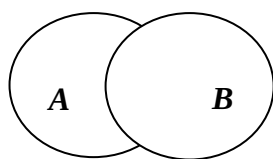
5-chizma.

To'plamlarning ayirmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $A \setminus B = \emptyset$.
2. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u vaqtda $A \setminus B = \emptyset$ bo'ladi.
3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

Ta'rif. A to'plamning B to'plamda va B to'plamning A to'plamda mavjud bo'lmagan elementlaridan tuzilgan to'plamga shu to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** deb ataladi va $A \Delta B$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \{5; 2; 7; 9\}$ va $B = \{2; 4; 11; 7; 13\}$ to'plamlarning simmetrik ayirmasi $A \Delta B = \{5; 9; 4; 11; 13\}$



6-chizma.

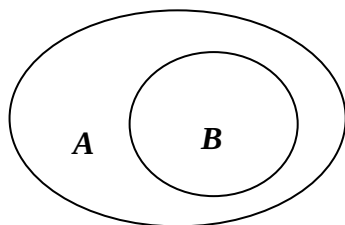
A va B to'plamlar Eyler-Venn doiralaridan iborat bo'lganda, ularning simmetrik ayirmasi 6-chizmada chiziqlar chizilgan soha bo'ladi. To'plamlarning simmetrik ayirmasi quyidagi xossalarga ega.

1. $A \Delta B = B \Delta A$.
2. $A \Delta A = \emptyset$.

Ta'rif. B to'plam A to'plamning qism to'plami bo'lganda, A to'plamning B to'plamda mavjud bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plamga B to'plamning **to'ldiruvchisi** deb ataladi va $\overline{B}$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \{1; 4; 5; 7; 6\}$ va $B = \{4; 6\}$ bo'lsa, $\overline{B} = \{1; 5; 7\}$ bo'ladi.

A va B to'plamlar Eyler-Venn doiralari bo'lganda, B to'plamning $\overline{B}$ to'ldiruvchisi 7-chizmada chiziqlar chizilgan soha bo'ladi.



7-chizma.

To'ldiruvchi to'plam quyidagi xossalarga ega.

1. $B \cup \overline{B} = A$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = A$.
3. $\overline{\overline{B}} = B$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ta'rif. A to'plamning elementlarini birinchi, B to'plamning elementlarini ikkinchi qilib tuzilgan barcha juftliklar to'plamini A va B to'plamlarning **to'g'ri ko'paytmasi** yoki **dekart ko'paytmasi** deb ataladi va $A \times B$ kabi belgilanadi.

Dekart ko'paytmasidagi juftliklar kichik qavslar ichiga yoziladi. Masalan, $A = (2; 3)$ va $B = (1; 2; 4)$ bo'lsa $A \times B = \{(2; 1), (2; 2), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4)\}$.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. To'plamlar birlashmasining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.
2. To'plamlar birlashmasining xossalarini ayting.
3. To'plamlar kesishmasining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.
4. To'plamlar kesishmasining xossalarini ayting.
5. To'plamlar ayirmasining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.
6. To'plamlar ayirmasining xossalarini ayting.
7. To'plamlar simmetrik ayirmasining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.
8. To'plamlar simmetrik ayirmasining xossalarini ayting.
9. To'plam to'ldiruvchisining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.

10. To'ldiruvchi to'plamning xossalarini ayting.
 11. To'plamlar dekart ko'paytmasining ta'rifini ayting va belgilanishini yozing.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR

1. Qism to'plam deb nimaga aytiladi?
2. $A = \{2; 5\}$, $B = \{x : x^2 - 7x + 10 = 0\}$ bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri o'rinli?
 A) $A \neq B$, B) $A = B$ C) $A \subset B$ D) $A \supset B$
3. To'plam ustida qanday amallar bajariladi?
4. $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$ bo'lsa, $N \cap B$ ni toping.
 A) $N \cap B = \{2, 4, 6, \dots\}$ B) $N \cap B = \{2, 3, 5, \dots\}$ C) $N \cap B = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$
 D) $N \cap B = \{1, 2, 3, \dots, 3n, \dots\}$
5. Eyler Venn diagrammasini tushuntiring.
6. $A = \{x - 12 \geq 7 \mid x \in N\}$, $B = \{x + 15 \leq 16 \mid x \in N\}$ Bq $\{x \mid 15 \leq 16 \mid x \in N\}$ bo'lsa
 $C = A \cap B$ toping
 A) $C = \{x \geq 19\}$, B) $C = \{x \leq 14\}$, C) $C = \emptyset$ D) $C = A \cup B$ Cq E) $C = A \cap B$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Kostrikin A.I. Vvedeniev algebra, M. 1977 g.
2. Fadeev D. K. Lektsii po algebra 1984 g.
3. Nazarov R.N. va boshqalar Algebra va sonlar nazariyasi, I-qism, T, 1993y

Mavzu: Kompleks sonlar va ular ustida amallar

Asosiy savollar.

1. Kompleks sonlar ustida amallar.
2. Kompleks sonning geometrik tasviri.
3. Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.
4. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish, bo'lish va darajaga ko'tarish.
5. Kompleks sondan ildiz chiqarish.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Ratsional son, irratsional son, manfiy son, mavhum sonlar, mavhum birlik, kompleks son, mavhum son, kompleks son, haqiqiy son, haqiqiy va mavhum qismlar, qo'shma kompleks son, kompleks sonlar qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va ildiz chiqarish, kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi. Ikki vektor yig'indisi, vektorning moduli.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. Mavhum birlik. Mavhum son.
2. Mavhum birlik darajalari.
3. Manfiy sonning kvadrat ildizi.
4. Kompleks sonning ta'rifi.
5. Qo'shma kompleks son.
6. Kompleks sonlarni qo'shish.
7. Kompleks sonlarni ayirish.
8. Kompleks sonlarni ko'paytirish.
9. Kompleks sonlarni bilish.
10. Kompleks sonlardan ildiz chiqarish.
11. Kompleks sonning geometrik tasviri.
12. Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi.

1-asosiy savolning bayoni. Kompleks sonlar ustida amallar.

1-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining asosiy maqsadi.

Talabalarga kompleks son to'g'risida tushuncha, ular ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallarini bajarishni o'rgatishdan iborat.

1-asosiy savolning bayoni.

1-ta'rif. Kvadrat -1 ga teng bo'lgan sonni i harfi bilan belgilab, mavhum birlik deb atash qabul qilingan: $i^2 = -1$

2-ta'rif. $a + bi$ ko'rinishdagi sonni kompleks son deyiladi. Bunda a va b haqiqiy sonlar bo'lib, i mavhum birlikdir. $a + bi$ dagi a ni kompleks sonning haqiqiy qismi bi ni esa mavhum qismi, b mavhum qismining koeffitsiyenti deb ataladi.

Har qanday haqiqiy sonni ham kompleks son deb qarash mumkin. Masalan, 3 ni $3 + ai$ ko'rinishdagi kompleks son deb qarash mumkin.

3-ta'rif. Ikkita kompleks sonning bir-biriga teng bo'lishi uchun haqiqiy qismi, haqiqiy qismiga, mavhum qismi mavhum qismiga teng bo'lishi kerak. Ya'ni $a + bi = c + di$ bo'lishi uchun $a = c$, $b = d$ bo'lishi kerak.

Ikkita haqiqiy sonni bir-biriga solishtirish mumkin. Masalan, $3 < \sqrt{18}$, $-4 > -7$. Ammo ikkita teng bo'lmagan kompleks sonni solishtirib bo'lmaydi, masalan, $7-2i$ va $3+4i$ sonlardan qaysi biri kattaligini aytib bo'lmaydi.

4-ta'rif. $a + bi$ va $c + di$ kompleks sonlarning yig'indisi deb $(a + c) + (b + d)i$ kompleks songa aytiladi: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Demak, ikkita kompleks sonni qo'shish uchun ularning haqiqiy qismlari va mavhum qismlarining koeffitsiyentlari qo'shiladi.

Masalan, $(-5 + 8i) + (3 - 4i) = (-5 + 3) + (8 - 4)i = -2 + 4i$

5-ta'rif. $a + \epsilon i$ va $-a - \epsilon i$ kompleks sonlarini qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi. Qarama-qarshi kompleks sonlarning yig'indisi nolga teng:

$$(a + \epsilon i) + (-a - \epsilon i) = (a - a) + (\epsilon - \epsilon)i = 0 + 0i$$

6-ta'rif. Ikki kompleks sonning ayirmasi shunday kompleks songa tengki, uning ayiriluvchi bilan yig'indisi kamayuvchiga teng bo'ladi, ya'ni: $(a + \epsilon i) - (c + di) = (a - c) + (\epsilon - d)i$

$$\text{Masalan, } (1 - 5i) - (-3 + 2i) = (1 + 3) + (-5 - 2)i = 4 - 7i.$$

7-ta'rif. $a + \epsilon i$ va $c + di$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb $(ac - \epsilon d) + (ad + \epsilon c)i$ kompleks soniga aytiladi, ya'ni: $(a + \epsilon i)(c + di) = (ac - \epsilon d) + (ad + \epsilon c)i$

$$\text{Masalan, } (3 + i)(2 - i) = [6 - (-1)] + (2 - 3)i = 7 - i.$$

8-ta'rif. Bir kompleks sonning ikkinchi kompleks songa bo'linmasi (nisbati) deb, bo'luvchi bilan ko'paytmasi bo'linuvchiga teng bo'lgan uchinchi kompleks sona aytiladi, ya'ni agar $(c + di)(x + yi) = a + \epsilon i$ bo'lsa, $(a + \epsilon i) : (c + di) = x + yi$ bo'ladi.

Masalan, $(3 - 4i) : (4 + 2i)$ bo'linmani topish kerak bo'lsin. $(3 - 4i) : (4 + 2i) = x + yi$ bo'lsin. U holda $(x + yi)(4 + 2i) = 3 - 4i$ bo'lishi kerak. $(x + yi)(4 + 2i) = (4x - 2y) + (2x + 4y)i$ bo'lgani uchun $(4x - 2y) + (2x + 4y)i = 3 - 4i$.

Bundan:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \text{ sistemani echsak, } \begin{matrix} x = 0,2 \\ y = -1,1 \end{matrix}$$

$$\text{Demak: } (3 - 4i) : (4 + 2i) = 0,2 - 1,1i$$

9-ta'rif. Faqat mavhum qismining ishorasi bilangina farq qiladigan kompleks sonlarni qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Masalan, $5 + 2i$ bilan $5 - 2i$, $-3 + i$ bilan $-3 - i$, $a + \epsilon i$ bilan $a - \epsilon i$ qo'shma kompleks sonlardir.

Teorema. O'zaro qo'shma kompleks sonlarning ko'paytmasi haqiqiy songa teng.

Isbot. $a + \epsilon i$ va $a - \epsilon i$ qo'shma kompleks sonlarni ko'paytiraylik.

$$(a + \epsilon i)(a - \epsilon i) = (a^2 + \epsilon^2) + (a\epsilon - a\epsilon)i = a^2 + \epsilon^2 \text{ haqiqiy son hosil bo'ladi.}$$

Isbot qilingan bu teoremadan kompleks sonni kompleks songa bo'lishda foydalanish ishini osonlashtiradi.

$\frac{a + \epsilon i}{c + di}$ ($c + di \neq 0$) nisbatni topish uchun kasrning surat va maxrajini, maxrajidagi $c + di$ kompleks sonning qo'shmasiga ko'paytiriladi:

$$\frac{a + \epsilon i}{c + di} = \frac{(a + \epsilon i)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + \epsilon d) + (\epsilon c - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + \epsilon d}{c^2 + d^2} + \frac{\epsilon c - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

$$\text{Masalan, } \frac{3 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(3 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{(9 - 8) + (-12 - 6)i}{9 - 4i^2} = \frac{1 - 18i}{9 + 4} = \frac{1}{13} - \frac{18}{13}i.$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

2.1. Yig'indini toping.

$$1) (-1 - 4i) + (8 + 7i) =$$

$$2) (-9 - i) + (-7,1 + 3,8i) =$$

2.2. Ayirmani toping.

$$1) (-2 + 5i) - (3 - 5i) =$$

$$2) (10 - 4i) - (10 + 3i) =$$

2.3. Ko'paytmani toping.

1) $(-2 + i)(5 - 2i) =$

2) $(10 - 0,3i)(0,1 + 0,2i) =$

2.4. Bo'linmani toping.

1) $(3 - i) : (2 + i) =$

2) $(7 + 3i) : (2 - 4i) =$

2.5. Quyidagi kompleks sonlarga qo'shma kompleks sonlarni ayting.

a) $4 + i$

b) $-7 + 4i$

v) 1

g) $-3i$

2-asosiy savol. Kompleks sonning geometrik tasviri.

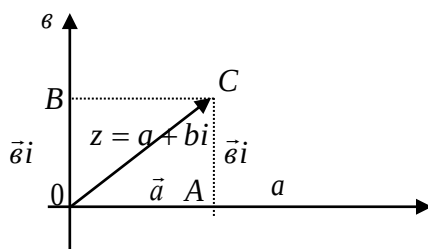
2-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining asosiy maqsadi:

Talabalar kompleks sonlarni geometrik ravishda qanday tasvirlash mumkinligi haqida tushuncha berishdir.

2-asosiy savolning bayoni.

$z = a + bi$ kompleks son berilgan bo'lsin. AOV to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olamiz va $\vec{a}$ o'qqa haqiqiy vektor a ni va $\vec{b}$ o'qqa mavhum vektor bi ni qo'yamiz. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni parallelogramm qoidasiga asosan qo'shamiz. Ikki vektor yig'indisiga teng bo'lgan vektor yo'nalishi va kattaligi bo'yicha shu vektorlarga yasalgan parallelogramm diagonaliga tengdir.

Demak, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ yoki $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. Shunday qilib, $a + bi$ kompleks sonning geometrik tasviri boshi koordinatalar boshida, oxiri esa koordinatalari A va B nuqtada bo'lgan vektordan iborat.



$\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorning skalyar qismini uni tashkil etuvchi vektorlarning skalyar qismini bilgan holda hisoblash mumkin. $\triangle AOC$ dan

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

$\vec{OC}$ vektorning skalyar qismini R bilan belgilab, quyidagini yozish mumkin:

$$R^2 = a^2 + b^2 \quad \text{yoki} \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ya'ni $z = a + bi$ kompleks sonni ifodalovchi vektorning uzunligi $\sqrt{a^2 + b^2}$ ga teng bo'lib, uni vektorning moduli deyiladi.

Har bir $a + bi$ kompleks songa tekislikdagi koordinatalari $(a; b)$ bo'lgan nuqta mos keladi. masalan, $1 + 3i$ kompleks songa $A(1;3)$ nuqta, $-2 + 4i$ kompleks songa $V(-2;4)$ nuqta, $3 - 2i$ kompleks songa $S(3;-2)$ nuqta, $-3 + 0i$ songa $D(-3;0)$ nuqta, $0 - 4i$ songa $E(0;-4)$ nuqta mos keladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

2.1. Haqiqiy qismi nolga teng bo'lgan kompleks sonlarga tekislikdagi qanday nuqtalar mos keladi?

2.2. Haqiqiy qismi musbat (manfiy) sonlardan iborat bo'lgan kompleks sonlarga mos nuqtalar tekislikda qanday joylashgan?

2.3. Tekislikda absissalar o'qining ostiga joylashgan nuqtalarga mos kompleks sonlarning mavhum qismining koeffitsiyenti haqida nima deyish mumkin?

2.4. Kompleks sonlarni tekislikdagi nuqtalar yordamida tasvirlang.

- a) $2 + i$ b) $-1 + 2i$ v) $-1 - i$ g) $3 - 4i$ d) $-6i$ e) Q3,5

3-asosiy savol. Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.

3-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining asosiy maqsadi.

Talabalarga kompleks sonning trigonometrik shakli haqida tushuncha berishdan iboratdir.

3-asosiy savolning bayoni.

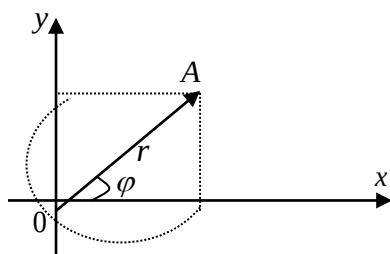
$a + bi$ kompleks songa koordinatalari $(a; b)$ bo'lgan A nuqta mos kelsin. Bu songa $\overrightarrow{OA}$ mos keladi desak ham bo'ladi. $\overrightarrow{OA}$ uzunligini r bilan, absissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaylik.

φ burchak sinusi va kosinusining ta'rifiga ko'ra:

$$\frac{a}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi \quad \text{yoki} \quad \begin{aligned} a &= r \cos \varphi \\ b &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

U holda $a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r^2 = a^2 + b^2$ bo'lgani sababli

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ni $a + bi$ kompleks sonning trigonometrik shakli, r ni kompleks sonning moduli, φ ni esa kompleks sonning argumenti deyiladi.

Trigonometrik shaklda berilgan ikki kompleks son bir-biriga teng bo'lsa, modullari, teng, argumentlari esa 2π ga karrali son qadar farq qiladi. Boshqacha aytganda

$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ bo'lsa,

$$1) r_1 = r_2, \quad 2) \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi.$$

1-misol. $3 + 3i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing:

$$\text{Echish. } r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}; \quad \sin \varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

bundan $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, u holda $3 + 3i = 3\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right]$, (k -ixtiyoriy butun son).

Bunda argument φ ning 0 bilan 2π orasidagi qiymatini olish bilan cheklaniladi. U holda $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bo'lib, oxirgi tenglikni bunday yoza olamiz, $3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

3.1. $3 + 4i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifoda qiling.

3.2. Koordinatalar sistemasida, markazi koordinatalar boshida bo'lib, radiusi 4 birlikka teng bo'lgan aylanada yotgan nuqtalarga mos kompleks sonlar moduli bilan farq qiladimi yoki argumenti bilan farq qiladimi?

3.3. Kompleks sonlarni trigonometrik shaklda ifoda qiling:

- 1) $1 + i$; 2) $\sqrt{3} - i$; 3) i ; 4) 5 ; 6) $2 - i$;

4-asosiy savol. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish, bo'lish va darajaga ko'tarish.

4-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining asosiy maqsadi.

Talabalarga kompleks sonlar ustida bajariladigan amallar haqida tushuncha berishdir.

4-asosiy savolning bayoni.

1-teorema. Ikki kompleks son ko'paytmasining moduli ular modullarining ko'paytmasiga, argumenti esa ular argumentlari yig'indisiga teng.

Isbot. $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ bo'lsin u holda:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \\ &+ i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2[(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \\ &+ \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\text{ya'ni } r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Misollar.

$$1) 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) = 6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3(1 + i\sqrt{3});$$

$$2) \frac{2}{3}(\cos 79^\circ + i \sin 79^\circ) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 101^\circ + i \sin 101^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{3}(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{3}(-1 + 0 \cdot i) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

1-natija. n ta kompleks soning ko'paytmasi moduli berilgan n ta kompleks son modullarining ko'paytmasiga, argumenti esa argumentlari yig'indisiga teng bo'lgan kompleks sonidir:

$$\begin{aligned} r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot \dots \cdot r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) = \\ = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)] \end{aligned}$$

2-natija. Kompleks sonni n-darajaga ko'tarish uchun uning modulini shu darajaga ko'tarish, argumentini esa daraja ko'rsatkichik marta orttirish kifoya.

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1)$$

Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. [Muavr (1667-1754)-ingliz matematigi].

Misollar.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2 \left[(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 65^\circ + i \sin 65^\circ) \cdot \frac{3}{4}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \right] = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & [\sqrt{2}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)]^2 = 64(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = \\ & = 64(-\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ) = 64 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 32(-1 + i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

2-teorema. Bir kompleks sonning nolga teng bo'lmagan ikkinchi kompleks songa nisbati, moduli bo'linuvchi va bo'luvchi kompleks sonlar modullari nsibatiga, argumenti esa shu sonlarning argumentlari ayirmasiga teng bo'lgan kompleks sonidir.

Isbot. $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ ($z_2 \neq 0$) u holda

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)]}{\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos \varphi_1 \cdot \cos(-\varphi_2) - \sin \varphi_1 \cdot \sin(-\varphi_2) + \\ &+ i[\cos \varphi_1 \cdot \sin(-\varphi_2) + \cos(-\varphi_2) \sin \varphi_1] \} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \end{aligned}$$

ya'ni $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) : r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Misol.

$$\frac{5(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)}{9(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)} = \frac{5}{9} [\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)] =$$

$$\frac{5}{9} [\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ] = \frac{5}{9} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{5}{18} (\sqrt{3} - i)$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

4.1. Hisoblang.

$$(1+i)^{20} =$$

Javob: -1024.

4.2. Amalni bajaring:

$$a) \frac{2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)}{3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)} =$$

4.3. Hisoblang.

$$a) \frac{\cos 125^\circ + i \sin 125^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ} : \frac{\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ}{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ} =$$

$$b) (1-i)^{20} : (1+i)^{20} =$$

5-asosiy savol. Kompleks son dan ildiz chiqarish.

5-asosiy savol bo'yicha o'qituvchining maqsadi.

Talabalarga kompleks son dan ildiz chiqarish amali haqida tushuncha berishdir.

5-asosiy savolning bayoni.

Ta'rif. Berilgan kompleks sonning n -darajali ildizi deb, n -darajasi berilgan kompleks songa teng bo'lgan har qanday kompleks songa aytiladi.

Teorema. Nolga teng bo'lmagan $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks sonning n -darajali ildizi mavjud bo'lib, n ta qiymatga ega. Bu n ta qiymat

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \text{ formuladan } k \text{ ga } 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

qiymatlarni berish bilan topiladi.

Isbot. $z = r(\cos \pi + i \sin \pi) \neq 0$ kompleks sonning n -darajali ildizi mavjud bo'lib, u $\rho(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ga teng bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra:

$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Kompleks sonlar teng bo'lsa, ularning modullari teng, ya'ni $\rho^n = r$ va arugmentlari teng yoki 2π ga karrali burchakka farq qilgani uchun

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad \text{yoki} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{va} \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{bunda } k \text{ -ixtiyoriy butun son. Demak:}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

z sonning n -darajali ildizi mavjud ekanini isbot qilish uchun

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \text{ ni } n \text{-darajaga ko'taramiz. U holda}$$

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$$

Demak, z ning n -darajali ildizi mavjud ekan.

Misol. $\sqrt[5]{1+i}$ ni hisoblang.

$$\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5}\right); k = 0,1,2,3,4$$

$$\sqrt[5]{1+i} = \begin{cases} \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right) \\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right) \\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20} + i\sin\frac{25\pi}{20}\right) \\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right) \end{cases}$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Ildiz chiqaring: 1) $\sqrt[n]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{3+i}$; 3) $\sqrt[n]{1-i}$
2. Kompleks sonidan ildiz chiqarish qanday bajariladi?
3. $\sqrt[n]{1}$ ni hisoblang.
4. $2+3i$; $\sqrt{3}+i$; $3-3\sqrt{3}i$ kompleks sonlarni trigonometrik shaklda ifoda qiling.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. T.Azlarov, X.Mansurov. Matematik analiz. 1-2 qism. T., O'qituvchi, 1989.
2. E.U.Soatov. Oliy matematika. 1-qism. T., 1992.
3. B.A.Abdualimov. Oliy matematika. T., O'qituvchi, 1994.
4. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T. O'qituvchi, 1984.
5. F.Rajabov, A.Nurmetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., O'qituvchi, 1990.
6. T.Jo'rayev va boshqalar. Oliy matematika asoslari. T., O'zbekiston, 1994.
7. Sh.I.Tojiyev. Oliy matematikadan masalalar echish. T., O'zbekiston. 2002.
8. P.E.Danko, A.G.Popov. Vo'sshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. Chast 1. M., 1974.
9. X.Latipov, Sh.Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., 1995.
10. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 3-jild. T., O'zbekiston, 1996.

Mavzu: Nuqtaning koordinatalari. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Asosiy savollar.

1. Nuqtaning koordinatalari. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish
2. Ikki nuqta orasidagi masofa.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

nuqta, kesma, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, nuqtaning koordinatalari, kesmani berilgan λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari, kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalari, dekart koordinatalar sistemasi, dekart koordinatalar sistemasining koordinata vektorlari, ikki nuqta orasidagi masofa, koordinatalari bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofa.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. nuqta, kesma, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
2. nuqtaning koordinatalari.
3. kesmani berilgan λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari.
4. kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalari.
5. dekart koordinatalar sistemasi.
6. dekart koordinatalar sistemasining koordinata vektorlari.
7. ikki nuqta orasidagi masofa.
8. koordinatalari bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofa.

1-chi asosiy savol. Nuqtaning koordinatalari. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish
O'qituvchining maqsadi. Talabalarni nuqtaning koordinatalari, kesmani berilgan nisbatda bo'lish tushunchalarilari bilan tanishtirish va ularni amaliy masalalar echishga tadbiriq etishga o'rgatishdir.

1-asosiy savolning bayoni.

Tekislikda A va B nuqtalar hamda λ haqiqiy son berilsin.

Ta'rif. N nuqta AB kesmani λ nisbatda bo'ladi deb aytamiz, agarda

$$\overline{AN} = \lambda \cdot \overline{NB} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\overline{AN}$ va $\overline{NB}$ vektorlar bir xil yo'nalib, N nuqta AB kesmaning ichki nuqtasi bo'ladi. $\lambda < 0$ bo'lsa, $\overline{AN}$ va $\overline{NB}$ vektorlar qa-rama-qarshi yo'nalib, N nuqta AB kesmaning tashqi nuqtasi bo'ladi.

Tekislikda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ affin koordinatalar sistemasini olaylik. Bu sistemada A , B nuqtalar $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ koordinatalarga ega bo'lsin. AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi N nuqtaning koordinatalarini topaylik. Buning uchun N nuqtaning koordinatalarini x, y bilan belgilaymiz: $N(x; y)$. A , B , N nuqtalarning radius vektorlarini quyidagicha belgi-laylik: $\overline{OA} = \vec{r}_1$, $\overline{OB} = \vec{r}_2$, $\overline{ON} = \vec{r}$. U vaqtda vektorlarni qo'shishning uchbur-chak qoidasiga asosan

$$\begin{aligned} \overline{AN} &= \overline{AO} + \overline{ON} = \overline{ON} - \overline{OA} = \vec{r} - \vec{r}_1, \\ \overline{NB} &= \overline{NO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{ON} = \vec{r}_2 - \vec{r}. \end{aligned}$$

Bu ifodalarni (1) tenglikka qo'ysak

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$$

yoki

$$(1 + \lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2.$$

Agar $1 + \lambda \neq 0$ deb faraz qilsak

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu (2) formula AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi N nuqtaning radius vektorini aniqlaydi.

(2) formuladagi vektorlarni koordinatalarda yozaylik. $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ bo'lgani uchun, bularni (2) tenglikka qo'ysak

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) + \lambda(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)}{1 + \lambda}$$

yoki

$$\left(x - \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right)\vec{e}_1 + \left(y - \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)\vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Bu era $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis vektorlar chiziqli bog'lanmagani uchun, ular-ning koeffitsientlari nolga teng bo'ladi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (3).$$

(3) formula orqali kesmani berilgan λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari topiladi, bu erda albatta $\lambda \neq -1$.

Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, N nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lib, (3) formula ushbu ko'rinishni oladi

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (4).$$

(4) formula kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasi bo'ladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. Berilgan kesmani λ nisbatda bo'lishning ta'rifini yozing.
2. $\lambda > 0$ bo'lsa, bo'luvchi nuqta kesmaning qanday nuqtasi bo'ladi ?
3. $\lambda < 0$ bo'lsa, bo'luvchi nuqta kesmaning qanday nuqtasi bo'ladi ?
4. Berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning radius vektorini aniqlovchi formulani yozing.
5. Berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning radius vektorini aniqlovchi formulani keltirib chiqaring.
6. Kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini aniqlovchi formulani yozing.
7. Kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini aniqlovchi formulani keltirib chiqaring.
8. Kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasini yozing.
9. Kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasini keltirib chiqaring.

2-chi asosiy savol. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini.

Ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ affin koordinatalar sistemasini berilsin.

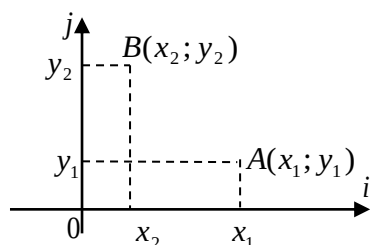
Ta'rif. Tekislikda berilgan $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinata vektorlari ortonormallangan bazisni tashkil etsa, unga tekislikdagi **dekart koordinatalar sistemasini** deb ataladi.

Dekart koordinatalar sistemasining koordinata vektorlarini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ bilan belgilaymiz. Shu sababli dekart koordinatalar sistemasini $O\vec{i}\vec{j}$ bilan belgilaymiz.

$\vec{i}, \vec{j}$ vektorlar ortonormallangan bazisni tashkil etgani uchun, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}$.

Shuning uchun dekart koordinatalar sistemasida koordinata o'qlari o'zaro perpendikulyar bo'ladi.(27-chizma).

Dekart koordinatalar sistemasini affin koordinatalar sistema-sining xususiy holi bo'lgani uchun, affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli bo'lgan mulohazalar dekart koordinatalar sistemasida ham o'rinli bo'ladi. Ammo dekart koordinatalar sistemasidagi ayrim mulohazalar affin koordinatalar sistemasida o'rinli bo'lavermaydi.



27 – rasm

Ta'rif. A va B nuqtalar orasidagi **masofa** deb, $\overline{AB}$ vektorning uzunligiga aytamiz va $\rho(A, B)$ ko'rinishda belgilaymiz. Demak, $\rho(A, B) = |\overline{AB}|$ (1).

Tekislikda koordinatalari bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasini topamiz. Tekislikdagi $O\vec{i}\vec{j}$ dekart ko-ordinatalar sistemasida A va B nuqtalar koordinatalari bilan berilsin: $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Vektorning boshi va oxirining koordinatalari berilganda, shu vektorning koordinatalarini topish formulasiga asosan

$$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

Ortonormallangan bazisda koordinatalari bilan berilgan vektorning uzunligini hisoblash formulasiga asosan

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Bu ifodani (1) formulaga qo'ysak

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2).$$

(2) formula dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari bilan berilgan $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish formulasi bo'ladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. Dekart koordinatalar sistemasining ta'rifini yozing.
2. Dekart koordinatalar sistemasining koordinata vektorlari qanday belgilanadi ?
3. Dekart koordinatalar sistemasini qanday belgilanadi ?
4. Dekart koordinatalar sistemasining koordinata o'qlari o'zaro qanday joylashadi ?
5. Ikki nuqta orasidagi masofaning ta'rifini va belgilani-shini yozing.

Mavzu: Tekislikda to'g'ri chiziqlarning tenglamalari.

Asosiy savollar.

1. To'g'ri chiziqlarning tekisliklardagi tenglamalari.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Aylana tushunchasi, kesma, o'rta perpendikulyar, Dekart koordinatalari, bir qiymatli funksiya, chiziqlarning oshkarmas tenglamasi, analitik geometriyaning asosiy masalasi, normal vektor, skalyar ko'paytma, to'g'ri chiziqlarning paratetrik tenglamasi, vektorli tenglama, o'zaro kolleniar vektorlar, burchak koeffitsientli tenglamasi, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. Chiziqlarning oshkarmas tenglamasi.
2. Analitik geometriyaning asosiy masalasi.
3. Berilgan nuqta orqali o'tib, berilgan $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.
4. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi.
5. To'g'ri chiziqlarning parametrik tenglama.
6. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
7. To'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi.
8. To'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientli tenglamasi.

1-chi asosiy savol. To'g'ri chiziqlarning tekisliklardagi tenglamalari.

O'qituvchining maqsadi. Talabalarga to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi tenglamalari bilan tanishtirish va ularni amaliy masalalar echishga tadbir etishga o'rgatishdir.

1-asosiy savolning bayoni.

Tenglikda chiziq berilgan bo'lishi uchun uning nuqtalari xolatini aniqlab beruvchi biror qoida ma'lum bo'lishi kerak.

Masalan, markaz deb ataluvchi nuqtadan baravar uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi; yoki biror kesmaning uchlaridan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rni shu kesmaga o'tkazilgan o'rta perpendikulyar bo'ladi va hakoza.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida chiziqlarning tenglamasi

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

yoki

$$y = f(x), a \leq x \leq b \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2) funksiya x argument $[a; b]$ kesmada o'zgarganda $f(x)$ funksiya uzluksiz o'zgaradi deb faraz qilamiz. Ko'pincha $f(x)$ funksiyani bir qiymatli funksiya deb, x va u larni esa dekart koordinatalar tekislikdagi biror M nuqtaning koordinatalari deb faraz qilinadi. U holda x ning har bir qiymati uchun (2) tenglamadan u ning yagona qiymati aniqlanadi.

Ta'rif. Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining x va u koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa va aksincha, bu tenglamani qanoatlantiradigan har bir juft $(x; u)$ qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, (1) tenglama chiziqlarning oshkarmas tenglamasi deb ataladi.

Analitik geometriyada asosan ikkita masala bilan shug'ullaniladi:

1) chiziq nuqtaning geometrik o'rni sifatida berilgan bo'lib, uning tenglamasini tuzish talab qilinadi;

2) tenglama berilgan, uning grafigini yasash talab qilinadi.

1-misol. Berilgan $A(-2; 4)$ va $B(3; 6)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasini tuzing.

Echish. $C(x; y) - A$ va B nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Masala shartiga ko'ra:

$$|AC| = |BC| \quad (3)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib,

$$|AC| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$$

$$|BC| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

Bu ifodalarni (3)ga qo'yib masala shartini qanoatlantiradigan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini hosil qilamiz:

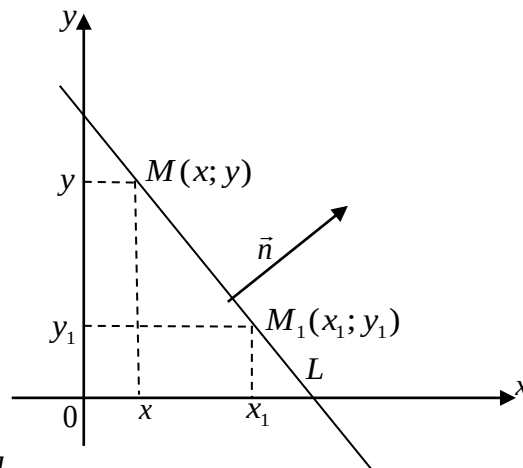
$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \\ 10x - 4y - 25 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Shunday qilib, A va B nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari (4) tenglamani qanoatlantiradi va aksincha, koordinatalari (4) munosabatni qanoatlantirgan har qanday nuqta A va B nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotadi.

Dekart koordinatalar tekislikda biror L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Shuningdek, L to'g'ri chiziqda yotuvchi $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va L to'g'ri chiziqqa perpendikulyar $\vec{n} = \{A; B\}$ vektor yoki unga parallel $\vec{s} = \{m; n\}$ vektorlar berilgan bo'lsa, L to'g'ri chiziqning tekislikdagi turli ko'rinishdagi tenglamalarini keltirib chiqaramiz.

1. Berilgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqta orqali o'tib, berilgan $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

OXY tekislikda L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Unda yotuvchi $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va L to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{n} (L \perp \vec{n})$ vektor olamiz (1-chizma) $\vec{n}$ ga L to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi.



1 – chizma

$M(x, y)$ nuqta L to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda $\vec{M_1M} = \{(x-x_1); (y-y_1)\}$ vektor

L to'g'ri chiziq ustida yotadi va $\vec{M_1M} \perp \vec{n}$ bo'ladi. Shuning uchun $\vec{n}$ va $\vec{M_1M}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{M_1M} &= 0 \quad \text{yoki} \\ A(x-x_1) + B(y-y_1) &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

(5) tenglama M_1 nuqta orqali o'tib, $\vec{n}$ vektorga $\perp$ bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini ifodalaydi.

2-misol. $M_1(4;-3)$ nuqta orqali o'tuvchi va $\vec{n} = \{2;-5\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish. Misol shartiga ko'ra: $x_1=4; y_1=-3; A=2; B=-5$ Bularni (5) formulaga qo'yib izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $2(x-4) + (-5)y + 3 = 0$

Bundan $2x - 5y - 23 = 0$ kelib chiqadi.

2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

x va y koordinatalarga nisbatan istalgan birinchi darajali $Ax + By + C = 0$ (6)

ko'rinishdagi tenglama Oxu tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan, (5) tenglamada A va B koeffitsiyentlaridan biri noldan farqli deb faraz qilamiz(aks holda $A = 0, B = 0$, bo'lib $C = 0$ ayniyatga ega bo'lardik). $B \neq 0$ bo'lsin. U holda (6) tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$A(x-0) + B(y + \frac{C}{B}) = 0$$

(6) tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $M_1(0; -\frac{C}{B})$ nuqtadan

o'tuvchi va $\vec{n}$ vektorga perpendikulyardir.

Demak, (6) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi ekan.

Endi, umumiy tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvini tekshiramiz:

a) Agar $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax + By = 0$ bo'lib, u koordinatalar boshidan o'tadi:

b) Agar $A = 0, C \neq 0, B \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi $By + C = 0$ bo'lib, u Ox o'qiga parallel bo'ladi.

v) Agar $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax + C = 0$ bo'lib, u Oy o'qiga parallel bo'ladi.

g) Agar $C = 0, B = 0, A \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax = 0$ bo'lib, u Oy o'qiga parallel bo'ladi.

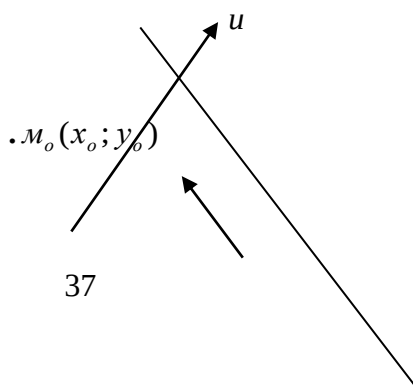
d) Agar $C = 0, A = 0, B \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasi $By = 0$ bo'lib, u Ox o'qiga parallel bo'ladi.

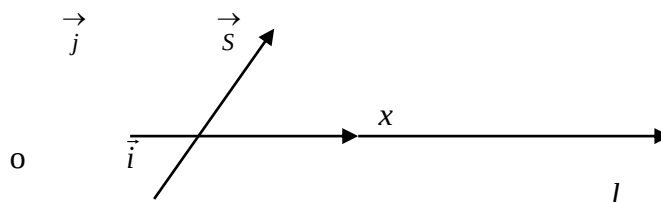
Ta'rif. To'g'ri chiziqqa parallel yoki shu to'g'ri chiziqda yotuvchi har qanday $\vec{S} = \{m;n\}$ vektor bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

3. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari.

L to'g'ri chiziq va shu to'g'ri chiziqqa tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va yo'naltiruvchi $\vec{S} = \{m;n\}$ vektor bilan to'la aniqlanadi.(2-chizma). Bu berilganlarga ko'ra L to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaramiz. M_0 nuqtadan boshqa L to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta olamiz.

U holda $\vec{M_0M}$ vektor $\vec{S}$ bilan kollinear bo'ladi. Demak, shunday t son topiladiki, $\vec{M_0M} = t\vec{S}$ (7) bo'ladi.





2-chizma.

M, M_0 nuqtalarning radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}, \vec{r}_0$ orqali belgilasak:

$$\vec{r} = \vec{OM}_0, \quad \vec{r}_0 = \vec{OM}_0$$

bo'lib, $\vec{M_0M}$ vektor uchun $\vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ga ega bo'lamiz (7) tenglikdan

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S} \quad (8)$$

(8) tenglama L to'g'ri chiziqlarning vektorli tenglamasi deyiladi. (8) tenglamadagi tga turli qiymatlar berib, L to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning radius-vektorlarini topamiz. (8) tenglamadagi t o'zgaruvchi parametr deb ataladi.

Endi (8)ni koordinatalarda yozamiz:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \vec{r}_0 = \vec{OM}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \\ \vec{M_0M} = t\vec{S} = t(x\vec{i} + y\vec{j}) = t\vec{m}\vec{i} + t\vec{n}\vec{j} \end{aligned}$$

Bularni (8)ga qo'yib, so'ngra ikki vektorning tengligiga ko'ra, ushbu tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (9)$$

(9) formula L to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamasi deyiladi.

Agar L to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan birortasiga ham parallel bo'lmasa, u holda (9)dan ushbu

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{m} \\ t = \frac{y - y_0}{n} \end{cases} \text{ ёки } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (10)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu formula to'g'ri chiziqlarning konanik tenglamasi deyiladi.

Misol. $M_0(3;1)$ nuqta orqali o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $\vec{S} = \{4;3\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish. Masala shartiga ko'ra $x_0=3; y_0=1; m=4; n=3$. Bu qiymatlarni (9)ga qo'ysak,

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \text{ tenglamalarga ega bo'lamiz.}$$

4. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Bizga ma'lumki M_1 va M_2 nuqtalardan yagona to'g'ri chiziq o'tadi. M_1 va M_2 nuqtalarning koordinatalari ma'lum deb faraz qilib, shu nuqtalar orqali o'tuvchi L to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar izlanayotgan L to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsin. Shuningdek bu to'g'ri chiziqda M(x;u) ixtiyoriy nuqtani olamiz. Natijada, bu nuqtalar yordamida to'g'ri chiziqda o'zaro kollinear bo'lgan

$$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} \text{ va } \vec{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$$

vektorlarga ega bo'lamiz. Bu vektorlar kollinear bo'lgani uchun

$$\vec{M_1M} = t \vec{M_1M_2} \quad (10)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan, vektorlarning tengligiga asosan, $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ va $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$ ga ega bo'lamiz. Bundan

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ va } t = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ yoki } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (12)$$

(12) tenglama berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi. Bu tenglama $x_2 - x_1 \neq 0$ va $y_2 - y_1 \neq 0$ bo'lganda o'rinlidir.

Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini 3-chi tartibli determinant yordamida yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. To'g'ri chiziqning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi.

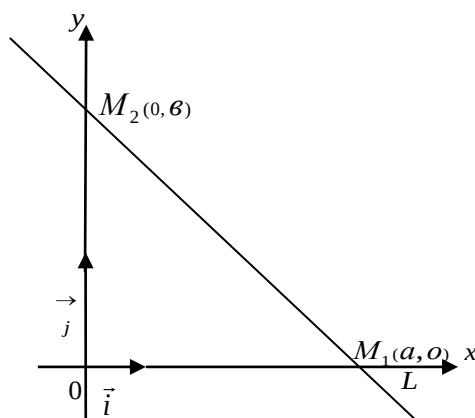
L to'g'ri chiziqni aniqlovchi M_1 va M_2 nuqtalar koordinata o'qlari Ox va Oy da yotsin.

Aniqlik uchun $M_1(a;0)$ nuqta, Ox o'qda $M_2(0;b)$ nuqta esa Oy o'qda yotsin. (3-chizma).

Bu holda (12) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-b}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (13)$$

(13) tenglama to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi. a va b lar to'g'ri chiziqning mos ravishda Ox va Oy o'qlarida ajratgan kesmalarini bildiradi.



6. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsentli tenglamasi.

Ta'rif. $\vec{S}$ vektor $\{\vec{i}; \vec{j}\}$ bazisda m, n koordinatalarga ega bo'lib, $m \neq 0$ bo'lsa, $\frac{n}{m} = k$ son

$\vec{S}$ vektorning burchak koeffitsenti deyiladi.

Agar L to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'lsa, u holda bunday to'g'ri chiziqning burchak koeffitsentli tenglamasi mavjud emas. Shuning uchun Oy o'qqa parallel bo'lmagan L to'g'ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o'tsin va k bu burchak koeffitsentiga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. (10) dan $m \neq 0$ deb quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow y - y_0 = \frac{n}{m} (x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \text{ (bunda } \frac{n}{m} = k \text{) yoki}$$

$$y = kx + b$$

$$\text{bunda } \epsilon = y_0 - kx_0 \quad (14)$$

(14) tenglama to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.

Agar L to'g'ri chiziq ikkita $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tgan bo'lsa, u holda uning burchak koeffitsienti (12) formulaga asosan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (15)$$

formula bilan aniqlanadi. (Bu to'g'ri chiziq Ou o'qiga parallel bo'lmagan hol uchun to'g'ri bo'ladi.)

7. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Agar ikki to'g'ri chiziq $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak α $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$ formula bilan hisoblanadi.

Bu holda $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik shartini,

$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ esa ikki to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar

bissektrisalarining tenglamalari: $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Uchburchak ularning koordinatalari berilgan: $A(-1;2)$, $V(5;6)$ va $S(1;3)$. Uning tomonlari uzunliklarini toping.

Javob: $d_{AB} = 2\sqrt{13}$; $d_{BC} = 5$; $d_{AC} = \sqrt{5}$ (Kategoriya-amaliy tadbiq)

2. $6x - 2y + 5 = 0$ va $4x + 2y - 7 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

(Kategoriya-amaliy tadbiq)

3. $(2;3)$, $V(5;4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing va bu to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlang.

(Kategoriya-amaliy tadbiq)

4. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsienti k ni va Oy o'qini kesuvchi v kesmasini aniqlang: 1) $5x - y + 3 = 0$

$$2) 2x + 3y - 6 = 0$$

(Kategoriya-amaliy tadbiq)

5. $3x - 2y - 12 = 0$ to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtasini aniqlang ?

(Kategoriya-analiz)

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. Toshkent, 1992
2. T.Shodiyev. Analitik geometriyadan qo'llanma. T., 1973.
3. F.Rajabov, N.Nurmatetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1990y
4. X.Latipov, Sh.Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1995y
5. I.Ya.Bakelman, Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1978y
6. P.E.Danko va boshqalar Vo'sshaya matematika v uprajnieniyax izadachax. M., 1 qism. 1986y .

**Mavzu: Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.**

Asosiy savollar.

1. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

dekart koordinatalar sistemasi, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi, dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. dekart koordinatalar sistemasi.
2. to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
3. nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.
4. ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
5. to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
6. dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1-chi asosiy savol.

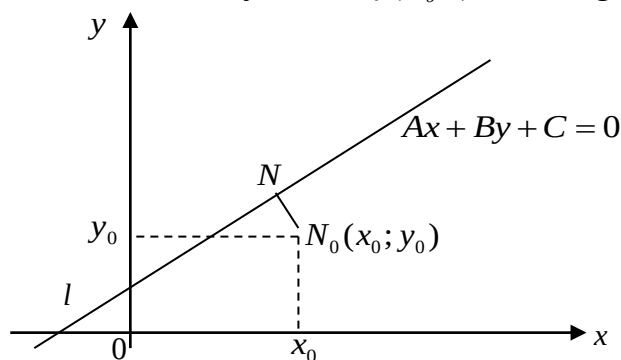
Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa haqida tushuncha berishdir.

1-asosiy savolning bayoni

$O\vec{i}\vec{j}$ dekart koordinatalar sistemasida ℓ to'g'ri chiziq $Ax + By + C = 0$ umumiy tenglamasi bilan va $N_o(x_o; y_o)$ nuqta koordinatalari bilan berilsin. N_o nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazamiz. Ularning kesishgan nuqtasini N bilan belgilaymiz (42-chizma). N nuqta bu perpendikulyarning **asosi** deyiladi. $\overline{NN_o}$ vektorning uzunligini N_o nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan **masofa** deb ataymiz va $\rho(N_o, \ell)$ bilan belgilaymiz.



Agar N_o nuqta ℓ to'g'ri chiziqda yotsa, N_o va N nuqtalar ustma-ust tushib $\rho(N_o, \ell) = 0$ bo'ladi. Agar N_o nuqta ℓ to'g'ri chiziqda yotmasa, u vaqtda

$$\rho(N_o, \ell) = |\overline{NN_o}|.$$

$\vec{n}(A; B)$ vektor ℓ to'g'ri chiziqning normal vektori bo'lgani uchun, $\overline{NN_o}$ va $\vec{n}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Agar $\overline{NN_o}$ va $\vec{n}$ vektorlar bir xil yo'nalsa $\angle(\overline{NN_o}, \vec{n}) = 0^\circ$ bo'lib, $\cos \angle(\overline{NN_o}, \vec{n}) = +1$ bo'ladi. Agar $\overline{NN_o}$ va $\vec{n}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalsa, $\angle(\overline{NN_o}, \vec{n}) = 180^\circ$ bo'lib, $\cos \angle(\overline{NN_o}, \vec{n}) = -1$ bo'ladi. Shu sababli bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

$$\overline{NN_o} \cdot \vec{n} = |\overline{NN_o}| \cdot |\vec{n}| \cos \angle(\overline{NN_o}, \vec{n}) = \pm \rho(N_o, \ell) \cdot |\vec{n}|,$$

ya'ni

$$\overline{NN_o} \cdot \vec{n} = \pm \rho(N_o, \ell) \cdot |\vec{n}| \quad (1).$$

(1) tenglikdan ushbuga ega bo'lamiz:

$$\rho(N_o, \ell) = \frac{|\overline{NN_o} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (2).$$

Agar N nuqtaning koordinatalarini x_1, y_1 bilan belgilasak $\overline{NN_o}(x_o - x_1; y_o - y_1)$ bo'ladi. $N(x_1; y_1)$ nuqta ℓ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun, uning koordinatalari to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini qano-atlantiradi:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \quad \text{yoki} \quad Ax_1 + By_1 = -C$$

bo'ladi.

$\overline{NN_o}$ va $\vec{n}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini koordinatalar bo'yicha ifodalaylik:

$$\overline{NN_o} \cdot \vec{n} = (x_o - x_1) \cdot A + (y_o - y_1) \cdot B = Ax_o + By_o - (Ax_1 + By_1) = Ax_o + By_o + C.$$

Demak,

$$\overline{NN_o} \cdot \vec{n} = Ax_o + By_o + C \quad (3).$$

$\vec{n}(A; B)$ vektorning uzunligi

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (4).$$

(3) va (4) ifodalarni (2) ga qo'ysak

$$\rho(N_o, \ell) = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5).$$

(5) formula dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari bilan berilgan $N_o(x_o; y_o)$ nuqtadan umumiy tenglamasi bilan berilgan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasi bo'ladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini yozing.
2. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning ta'rifini va belgilanishini yozing.
3. To'g'ri chiziq normal vektorining koordinatalarini yozing.
4. Ikki vektor skalyar ko'paytmasining ta'rifini yozing.
5. Bir xil yo'nalgan ikki vektor orasidagi burchak nimaga teng ?

6. Qarma-qarshi yo'nalgan ikki vektor orasidagi burchak nimaga teng ?
7. Vektor boshi va oxirining koordinatalari bilan berilganda, shu vektorning koordinatalarini topish formulasini yozing.
8. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasini yozing.
9. Umumiy tenglamasi bilan to'g'ri chiziq normal vektorining uzunligini topish formulasini yozing.
10. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini yozing.
11. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini keltirib chiqaring.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent, 1992
2. T.Shodiyev. Analitik geometriyadan qo'llanma. T., 1973.
3. F.Rajabov, N.Nurmatetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1990y
4. Latipov, Sh.Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1995y
5. Ya.Bakelman, Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1978y
6. P.E.Danko va boshqalar Vo'sshaya matematika v uprajneniyax izadachax. M.,1 qism. 1986y

2-asosiy savolning bayoni. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Ta'rif. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, shu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Dekart koordinatalar sistemasida ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (\ell_1),$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (\ell_2).$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin. U vaqtda $\vec{a}_1(-B_1; A_1)$ vektor ℓ_1 to'g'ri chiziqning, $\vec{a}_2(-B_2; A_2)$ vektor ℓ_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorlari bo'ladi.

Agar ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, ta'rifga ko'ra, bu burchak $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar orasidagi burchakka teng;

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|}.$$

Bu erda $\vec{a}_1(-B_1; A_1)$ va $\vec{a}_2(-B_2; A_2)$ bo'lgani uchun

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 = (-B_1)(-B_2) + A_1 A_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2,$$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{(-B_1)^2 + A_1^2} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2},$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{(-B_2)^2 + A_2^2} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$$

bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (1)$$

tenglik kelib chiqadi.

(1) formula dekart koordinatalar sistemasida umumiy tenglamalari bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni hisoblash formulasi bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida Oy o'qiga parallel bo'lmagan ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

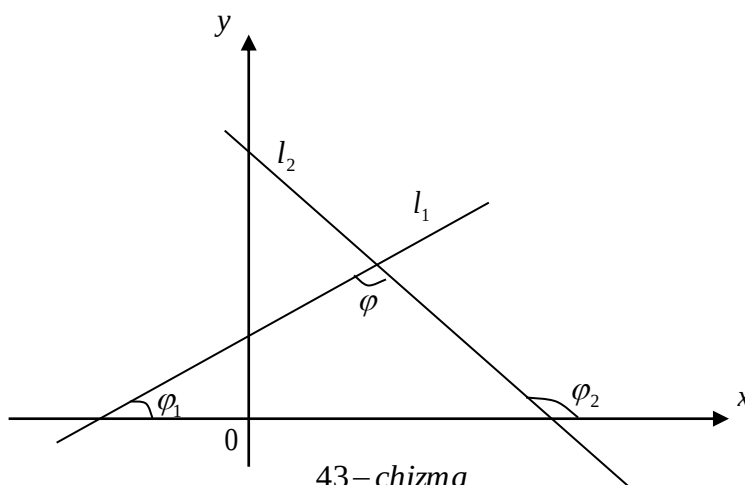
$$y = k_1 x + b_1 \quad (\ell_1),$$

$$y = k_2 x + b_2 \quad (\ell_2).$$

Dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti shu to'g'ri chiziq bilan Ox o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchak tangensiga teng edi:

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ bo'lgani uchun (43-chizma):



43–chizma

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

$\operatorname{tg} \varphi_1$ va $\operatorname{tg} \varphi_2$ ni mos ravishda k_1 va k_2 bilan almashtirib, ushbu formulaga kelimiz:

43-chizma.
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (2).$$

(2) formula dekart koordinatalar sistemasida burchak koefitsientli tenglamalari bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni hisoblash formulasi bo'ladi.

NAZORAT TOPSHIRIQLAR.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning ta'rifini yozing.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini yozing.
3. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
4. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasini yozing.
5. Koordinatalari bilan berilgan vektorning uzunligini topish formulasini yozing.
6. Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
7. Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaring.
8. To'g'ri chiziqning burchak koefitsientli tenglamasini yozing.
9. Dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqning burchak koefitsienti nimaga teng?
10. Burchak koefitsientli tenglamalari bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
11. Burchak koefitsientli tenglamalari bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaring.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent, 1992
2. T.Shodiyev. Analitik geometriyadan qo'llanma. T., 1973.
3. F.Rajabov, N.Nurmatetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1990y
4. X.Latipov, Sh.Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1995y
5. Ya.Bakelman, Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent., 1978y

Mavzu: Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqli tenglamalari. Ularning o'zaro munosabati

Asosiy savollar.

1. Tekislikning turli tenglamalari.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Normal vektor, nokollinear vektor, uch nuqtadan o'tuvchi tekislik, koordinata o'qlari, kesmalar bo'yicha tenglamasi, tekislikning parametrik tenglamasi, fazo tekislikning umumiy tenglamasi.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. Tekislikning normal vektori.
2. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislikning parametrik tenglamasi.
5. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
6. Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi.

1-chi asosiy savol. Tekislikning turli tenglamalari.

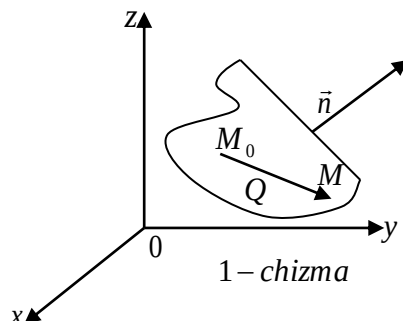
O'qituvchining maqsadi. Talabalarga tekislikning turli tenglamalari haqida tushuncha berishdir.

1-asosiy savolning bayoni.

1. Tekislikning normal vektori. Berilgan nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda Q tekislik va unga $\perp$ bo'lgan $\vec{n} = \{A; B; C\}$ vektor berilgan bo'lsin, $\vec{n} \neq 0$ vektor Q tekislikning normali deyiladi. Har qanday tekislik fazoda o'zining biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va $\vec{n}$ normalining berilishi bilan to'la aniqlanadi.

Berilgan nuqta orqali o'tuvchi va $\vec{n}$ normal vektorga ega bo'lgan Q tekislik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekisligiga ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olib, uni M_0 bilan birlashtirib, $\vec{M_0M}$ vektorni hosil qilamiz (1-chizma).



$Q \perp \vec{n}$ bo'lgani uchun $\vec{M_0M} \perp \vec{n}$ bo'ladi. Ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

bo'lgani uchun $\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$ bo'ladi.

Demak, Q tekislik ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasining koordinatalari.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

1-misol. $M_0(1; -2; 3)$ nuqta orqali o'tuvchi va $\vec{n} = \{2; 1; 4\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Echish. Masala shartidan; $x_0=1, y_0=-2, z_0=3$ va $A=2, B=1, C=4$

Bu qiymatlarni (1)ga qo'yamiz: $2(x-1) + (y+2) + 4(z-3) = 0$ yoki $2x + y + 4z - 12 = 0$

Tekislikning umumiy tenglamasi.

x, y va z o'zgaruvchili birinchi darajali

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

tenglama berilgan bo'lsin, bunda A, B, C koeffitsientlaridan kamida bittasi noldan farqli deb faraz qilamiz.

Aniqlik uchun $A \neq 0$ deb, (2) tenglamani

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y-0) + C(z-0) = 0 \quad (3)$$

(3) tenglama orqali $M_0\left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$ orqali o'tuvchi va $\vec{n} = \{A; B; C\}$ normal vektori bo'lgan tekislik

tenglama bo'lgani uchun (2) ham tekislik tenglamasi bo'lib, unga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

Tekislikning (1) umumiy tenglamasida ba'zi koeffitsientlar nolga aylanganda tekislik koordinata o'qlariga nisbatan qanday vaziyatni egallashni ko'raylik.

a) agar $D = 0$ bo'lsa, (2) tekislik koordinatalar boshidan o'tadi;

b) agar $A = 0$ bo'lsa, (2) tekislik Ox o'qiga parallel, $B = 0$ bo'lsa, Q tekislik Oy o'qiga parallel, $C = 0$ bo'lsa, Q tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.

Xuddi shuningdek, quyidagi hollar ham bo'lishi mumkin:

$$A=0 \Leftrightarrow Q \parallel (Ox), A=D=0 \Leftrightarrow Q \supset (Ox)$$

$$B=0 \Leftrightarrow Q \parallel (Oy), B=D=0 \Leftrightarrow Q \supset (Oy)$$

$$C=0 \Leftrightarrow Q \parallel (Oz), C=D=0 \Leftrightarrow Q \supset (Oz)$$

v) agar $A = B = 0, C \neq 0$ bo'lsa Q tekislik Oxy tekislikka parallel bo'ladi. Xususiyl xolda $D \neq 0$ bo'lsa, (2) tenglama $Cz + D = 0$ dan iborat bo'lib, bu xOy tekislik tenglamasidir. Shunga o'xshash, $x = -\frac{D}{A}$ tenglama Oyz tekislikka parallel bo'lgan Q tekislikning tenglamasini beradi,

$x = 0$ tenglama esa Oyz tekislikni ifodalaydi. $y = 0$ esa Oxz tekislikni ifodalaydi.

Tekislik o'zining $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va shu tekislikka parallel bo'lgan ikkita nokollinear

$\vec{p}_0 = \{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$, $\vec{q}_0 = \{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$ vektorlarning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Tekislikda ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqta olib $\vec{M_0M}$ vektorni hosil qilamiz. $\vec{M_0M}$ vektor $\vec{p_0}, \vec{q_0}$ vektorlar bilan komplaner bo'ladi. Vektorlar komplaner bo'lsa, u holda ularning koordinatalaridan tuzilgan 3-tartibli determinant nolga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

(4) tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan nokollinear ikki vektorga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi deb ataladi.

2-misol. $M_0(3;2;2)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p} = \{2;4;3\}$, $\vec{q} = \{1;1;2\}$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislikning umumiy tenglamasini tuzing.

Echish. Masala shartiga ko'ra (nuqta koordinatalari):

$$x_0=3, y_0=2, z_0=2$$

$$\alpha_1=2, \beta_1=4, \gamma_1=3$$

$$\alpha_2=1, \beta_2=1, \gamma_2=2$$

Bu qiymatlarni (4) formulaga qo'yib, quyidagi 3-chi tartibli determinantga ega bo'lamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

Determinantlarni hisoblasak, tekislikning izlangan umumiy tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$5x - u - 2z - 9q = 0$$

1) Tekislikning parametrik tenglamalari.

Berilgan M_0M , $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorlar bir tekislikda yotgan bo'lsin, u holda ular o'zaro chiziqli bog'liqli bo'ladi, ya'ni

$$\vec{M_0M} = t\vec{p} + n\vec{q} \quad (t, n \in R) \quad (5)$$

bu erda t, n sonlar parametrlardir.

$$\vec{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$$

$$\vec{p}t = t\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\} = \{t\alpha_1; t\beta_1; t\gamma_1\}$$

$$\vec{q}n = n\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\} = \{n\alpha_2; n\beta_2; n\gamma_2\}$$

bo'lgani uchun

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = (t\alpha_1 - n\alpha_2)\vec{i} + (t\beta_1 - n\beta_2)\vec{j} + (t\gamma_1 - n\gamma_2)\vec{k}$$

bundan $x = x_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 n$

$$y = y_0 + \beta_1 t + \beta_2 n \quad (6)$$

$$z = z_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 n$$

(6)-tekislikning parametrik tenglamasi deb ataladi.

2) Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Bir tekislikda yotgan uchta nuqta uchta tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi.

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$$

nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar $M_0 = M_1$, $\vec{p} = \vec{M_1M_2}$, $\vec{q} = \vec{M_1M_3}$ deb olsak

$$\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\vec{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

bo'lib, M_0 nuqtadan o'tuvchi $\vec{p}, \vec{q}$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislikning (4) tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

Bu uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasidan iboratdir.

3-misol. $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;3;4)$, $M_3(2;0;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Echish. (7) formulaga ko'ra:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 3-2 & 4-3 \\ 2-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

Bundan izlanayotgan tekislik tenglamasiga ega bo'lamiz:

u-zQ1q0

3) Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi.

Q tekislik koordinatalar boshidan o'tmasin va Ox,Oy,Oz o'qlarni mos ravishda $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$ nuqtalarda kesgan bo'lsin. Bu holda (7) tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinantni hisoblaymiz:

vsxQasuQavzqavs

Tenglikning barcha hadlarini avsga bo'lamiz:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (8).$$

(8)-tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi deyiladi.

4-misol. 3xQ2u-5z-30q0 tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarining koordinatalarini toping.

Echish. Berilgan tekislik tenglamasini (8) ko'rinishga keltiramiz, buning uchun uning hadlarini 30ga bo'lamiz:

$$\frac{3x}{30} + \frac{2y}{30} - \frac{5z}{30} - 1 = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{10} + \frac{y}{15} - \frac{z}{6} = 1$$

Demak tekislik Ox o'qini (10;0;0), Oy o'qini (0;15;0), Oz o'qini (0;0;6) nuqtalarda kesadi.

Nazorat topshiriqlari.

1. Quyidagi uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing:

$M_0(1;1;1)$, $M_1(3;-1;0)$, $M_2(2;1;3)$

Javob: $4x^5u-2z-7q_0$

(Katigoriya-amaliy tadbiq)

2. $M_0(3;-4;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{l} + 3\vec{k}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Javob: $x-2u+3z-17q_0$

(Katigoriya-amaliy tadbiq)

3. Tekislikning umumiy tenglamasida Dq_0 bo'lsa, tekislik koordinata o'qlariga nisbatan qanday joylashadi ?

Javob: tekislik koordinata boshidan o'tadi. (Katigoriya-analiz)

4. Tekislikning umumiy tenglamasida Sq_0 bo'lsachi ?

Javob: tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi. (Katigoriya-analiz)

5. Tekislikning umumiy tenglamasida Dq_0, Sq_0 bo'lsachi ?

Javob: Oz o'qidan o'tuvchi tekislik. (Katigoriya-analiz)

Foydalanilgan adabiyotlar.

1.Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 1-qism. Toshkent, 1992

2.T.Shodiyev. Analitik geometriyadan qo'llanma. T., 1973.

3.F.Rajabov, N.Nurmatetov. Anolitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1990y

4.X.Latipov, Sh.Tojiyev. Anolitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1995y

5.Ya.Bakelman, Anolitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent.,1978y

6.P.E.Danko va boshqalar Vo'sshaya matematika v uprajneniyax izadachax. M.,1 qism. 1986y

Mavzu: Funktsiya tushinchasi. Asosiy elementar funktsiyalarni tekshirish

Asosiy savollar.

1. Elementar funktsiyalar.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Aniqlanish sog'a, qiymatlar soqa, xususiy qiymat, uzluksizlik.

Mavzuga oid muammoli savollar.

- 1.Funksiya aniqlanish va qiymatlar sog'asini topish.
2. Funksiya grafigini chizish.

1-asosiy savol.

Elementar funktsiyalar.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga funksiya tushunchasini berish va elementar funktsiyalarni o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadlari.

- 1.Talabalar funksiya tushunchasini aytib bera oladi.
2. Elementar funktsiyalarni biri- biridan farqini ayta oladi.

1-asosiy savolning bayoni.

Agar x miqdorning biror D to'plamdan olingan har bir qiymatiga biror E to'plamdan olingan y miqdorning birdan-bir aniq qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u holda y o'zgaruvchi miqdorning funksiyasi deyiladi.

x miqdorning erkli o'zgaruvchi yoki argument, y miqdor esa bog'liq o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. Funktsiyani belgilash uchun ushbu yozuvlardan foydalaniladi:

$$y = f(x), y = y(x), y = \varphi(x)$$

va x.k.

x o'zgaruvchining $f(x)$ funksiya mag'noga ega bo'ladigan qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ ko'rinishda belgilanadi.

$y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ dagi qiymati, bunda $x_0 \in D(f)$, funksiyaning xususiy qiymati deyiladi va y_0 yoki $f(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi. Shunday qilib

$$y_0 = f(x_0) \text{ yoki } y|_{x=x_0} = y_0$$

funksiyaning qabul qiladigan qiymatlari to'plami uning o'zgarish sohasi deyiladi va $E(f)$ bilan belgilanadi.

Oxy tekislikning $y = f(x)$ munosabatni q-anotlantruvchi $M(x, y)$ nuqtalar to'plami $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi

Agar $y = f(x)$ funksiya $D(f)$ soxani $E(f)$ soxaga o'zaro bir qiymatli akslantirsa, u holda x ni y orqali bir qiymatli ifodalash mumkin:

$$x = \varphi(y)$$

Hosil bo'lgan funksiya $y = f(x)$ funksiya nisbatan teskari funksiya deyiladi.

$y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalardir.

$x = \varphi(y)$ teskari funksiya, odatda, x va y larning o'rinlarini almashtirish bilan standart ko'rinishda yoziladi.

$$y = \varphi(y)$$

O'zaro teskari $y = f(x)$ va $y = \varphi(y)$ funksiyalarning grafiklari birinchi va uchunchi koordinata choraklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik. $y = f(x)$ teskari funksiyaning qiymatlari sohasi bo'ladi.

$u = \varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D , qiymatlar sohasi V bo'lsin, $y = f(u)$ funksiyaning aniqlanish soxasi V bo'lib, o'zgarish soxasi I bo'lsin, u hodda $y = f(\varphi(x))$ aniqlanish sohasi D va o'zgarish soxasi I bo'lgan murakkab funksiya yoki f va φ o'unksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

u o'zgaruvchi oraliq o'zgaruvchi deyiladi, $y = f(x)$ ko'rinishdagi funksiya oshkor funksiya deyiladi. $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglama ham, umuman ayotganda x va y o'zgaruvchilar orasidagi funksional yuog'lanishni beradi. Bu hoolda ta'rifga ko'ra y o'zgaruvchi x ning oshkormas funksiyasi bo'ladi. Masalan, $x^2 + y^2 = 4$ tenglama y ni x ning oshkormas funksiyasi sifatida aniqlaydi. Aniqlanish sohasi $D(f)$ koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $f(x)$ funksiya x ning har qanday $x \in D(f)$ qiymati uchun $f(-x) = f(x)$ (yoki $f(-x) = -f(x)$) munosabat bajarilsa, juft (yoki toq) funksiya deyiladi.

Juft funksiya grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiya grafigi esa koordinatalar boshiga siimetrikdir.

Agar $T > 0$ o'zgarmas son mavjud bo'lib, har bir $x \in D(f)$ va $(x+T) \in D(f)$ da $(x+T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi.

Aytilgan soxaga ega bo'lgan T larning eng kichigi T_0 funksiyaning davri deyiladi.

Quyidagi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi:

a) $y = x^\alpha$ darajali funksiya, bunda $\alpha \in R; D(f)$ va $E(f)$ lar α ga bog'liq.

b) $y = x^x$ ko'rsatkichli funksiya, bunda $a > 0$ va $a \neq 1; D(f) = R$ va $E(f) = (0, +\infty)$;

v) $y = \log_a x$ logoritmik funksiya, bunda $a > 0, a \neq 1, D(f) = (0, +\infty)$ va $E(f) = R$;

g) trigonometrik funksiyalar:

$$y = \sin x, D(f) = R \text{ va } E(f) = [-1, 1]; T_0 = 2\pi;$$

$$y = \cos x, D(f) = R \text{ va } E(f) = [-1, 1]; T_0 = 2\pi$$

$$y = \operatorname{tg} x, D(f) = \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right\} \text{ va } E(f) = R; T_0 = \pi$$

$$y = \operatorname{ctg} x, D(f) = \{x \neq \pi k, k \in Z\}$$

$$y = \sec x, D(f) = \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right\} \text{ va } E(f) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty); T_0 = 2\pi$$

$$y = \operatorname{cosec} x, D(f) = \{x \neq \pi k, k \in Z\} \text{ va } E(f) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), T_0 = 2\pi$$

D) teskari trigonometrik funksiyalar :

$$y = \arcsin x, D(f) = [-1, 1] \text{ va } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, D(f) = [-1, 1] \text{ va } E(f) = [0, \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, D(f) = R \text{ va } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = R \text{ va } E(f) = [0, \pi];$$

$$y = \operatorname{arcsec} x, D(f) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \text{ va } E(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$y = \operatorname{arccosec} x, D(f) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \text{ va } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar yordamida tuzilgan murakkab funksiyalarga aytiladi.

Nazorat topshirig'i.

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish soxasini toping:

A) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

j: a) $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$

B) $y = \arcsin \frac{x-2}{2}$

j: b) $[0, 4]$

V) $y = \frac{1}{\lg(4 - x^2)}$

j: v) $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

G) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$

j: g) $[-5, -\pi) \cup [0, \pi)$

2. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish soxasini toping.

A) $y = \sqrt{16 - x^2} + \lg \sin x$ j: $[0, 4]$

B) $y = 3 \cos x - 1$ j: $[-4, 2]$

V) $y = 3^{-x^2}$ j: $(0, 1]$

3. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq ekanligini aniqlang.

a) $y = x^4 \sin 3x$ j: toq

b) $y = x^4 - x^2 + x$ j: toq ham emas, juft ham emas

v) $y = \lg \cos x$ j: juft

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. 1-qism. T., 1993 y.
2. T.Jo'rayev, A.Sa'dullayev, E.Xudoyberganov va boshqalar. Oliy matematika asoslari. T., 1994 y.
3. O.V.Manturov, N.M.Matveev. Kurs vo'shey matematiki. M., 1986.
4. A.I.Kareev, Z.M.Aksyutina. Kurs vo'sshey matematiki dlya ekonomicheskix Vuzov. M., 1982, 1983.
5. I.A.Zaytsev. Vo'sshaya matematika. M., 1991.
6. X.Latipov, Sh.Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., 1995.

Mavzu: Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti

Asosiy savollar.

1. Sonli ketma-ketliklar tushunchasi.
2. Funksiyaning limiti tushunchasi.
3. Limitlar haqida asosiy teoremlar.
4. Ajoyib limitlar.
5. Funksiyaning uzluksizligi.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Argument va funksiya ortirmalari, funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi, bir tomonlama uzluksizlik, sonlar ketma-ketligi, umumiy had tushunchasi, yuqori va quyi chegaralar, monoton o'suvchi, monoton kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan ketma-ketliklar, uzoqlashuvchi va yaqinlashuvchi ketma-ketliklar funksiyaning nuqtadagi limiti, funksiyaning cheksizlikdagi limiti, bir tomonlama limit, birinchi ajoyib limit, ikkinchi ajoyib limit, e-soni.

Mavzuga oid muammoli savollar.

1. Sonli ketma-ketlik.
2. Sonli ketma-ketliklarning chegaralari.
3. Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ketma-ketliklar.
4. Funksiyaning nuqtadagi limiti.
5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.
6. Bir tomonlama limitlar.
7. Limitlar haqida (yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning) asosiy teoremlar.
8. Birinchi ajoyib limit.
9. Ikkinchi ajoyib limit.
10. e-soni.
11. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi.

12. Yig'indining uzluksizligi.
13. Ko'paytmaning uzluksizligi.
14. Bo'linmaning uzluksizligi.
15. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi.

1-asosiy savol. Sonli ketma-ketliklar tushunchasi.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga sonli ketma-ketliklar va ularning turlari bilan tanishtirishdan iboratdir.

Identiv-o'quv maqsadlari.

1. Sonli ketma-ketliklarning ta'riflari va ularga doir berilgan misollarni echa oladilar.
2. Chegaralangan, monoton o'suvchi, kamayuvchi, uzoqlashuvchi, yaqinlashuvchi ketma-ketliklarni bir-biridan ajrata oladilar.

1-asosiy savolning bayoni.

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya, ya'ni $X = f(n)$, $n \in N$ funksiya sonli ketma-ketlik deb ataladi.

Agar n ga $1, 2, 3, \dots$ va hokazo qiymatlar bersak, bu funksiyaning

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$$

xususiy qiymatlarini olamiz, ular ketma-ketlikning hadlari yoki elementlari deb ataladi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ yoki $|f(n)|$ orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n hadi uning umumiy hadi deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma'lum bo'lsa, u berilgan hisobanadi.

1-misol. $x = \frac{n}{n+1}$ funksiya ushbu to'g'ri kasrlar ketma-ketligini beradi:

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}.$$

2-misol. $x = 2n - 1$ funksiya ushbu toq sonlar ketma-ketligini beradi:

$$\{x_n\} = \{2n - 1\} = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots\}$$

Barcha misollarda $n \in N$, barcha ketma-ketliklar cheksiz ketma-ketliklardir, ya'ni ularning har birida so'nggi had mavjud emas. Barcha hadlari bir xil qiymat qabul qiladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'zgarmas ketma-ketlik deb ataladi.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha $n \in N$ uchun $x_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yuqoridan chegaralangan* ketma-ketlik deb ataladi.

Shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* ketma-ketlik deb ataladi. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* ketma-ketlik deyiladi.

Agar istalgan $n \in N$ uchun

$$x_n < x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ monoton o'suvchi ketma-ketlik deb ataladi.

Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ monoton kamayuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

Agar istalgan $n \in N$ uchun

$$x_n \geq x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ o'smaydigan ketma-ketlik deb ataladi.

Agar istalgan $n \in N$ uchun

$$x_n \leq x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik deb ataladi.

3-misol. $\{x_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ o'suvchi, quyidan chegaralangan.

4-misol. $\{x_n\} = \{1 - 2n\} = \{-1, -3, -5, \dots\}$ kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketliklar deyiladi.

Ketma-ketlikning limiti. a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N \in N, \varepsilon > 0$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \rightarrow a$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik, aks holda esa uzoqlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u limitga ega.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u limitga ega.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Sonli ketma-ketlikning ta'rifini bering.
2. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi. Misollar keltiring.
3. Qanday ketma-ketliklar monoton o'suvchi (kamayuvchi), o'smaydigan, kamaymaydigan deb ataladi? Misollar keltiring.
4. Ketma-ketlik limiti ta'rifini aytib bering. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikka misol keltiring.
5. Ketma-ketlik limitning mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.

2-asosiy savol. Funksiyaning limiti.

O'qituvchining maqsadi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti, bir tomonlama limitlar, cheksizlikdagi limitlar va cheksiz katta funksiyalar haqida tushuncha berishdan iborat.

Identiv-o'quv maqsadi.

1. Funksiyaning nuqtadagi, cheksizlikdagi limitlarini hisoblay oladilar.
2. Funksiyaning chap va o'ng tomonlama limitlarini hisoblay oladilar.

2-asosiy savolning bayoni.

1. Funksiyaning nuqtadagi limiti.

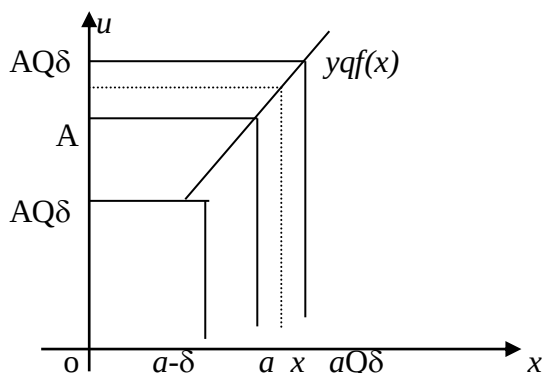
1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, ($x = a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin) istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi ($x \rightarrow a$ dagi) limiti deb ataladi.

Agar A son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti bo'lsa, bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ёку } x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow A$$

$|x - a| < \delta$ tengsizlikni a nuqtaning δ -atrofida yotadigan nuqtalar, $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlikni esa A nuqtaning ε -atrofida yotadigan $f(x)$ lar qanoatlantiradi, ya'ni $f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$.

Demak, yuqoridagi ta'rif geometrik nuqtai nazardan quyidagini anglatadi: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, a dan masofasi δ dan ortiq bo'lmagan $(a - \delta; a + \delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ intervalga tushsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti bo'ladi. (4-chizma)



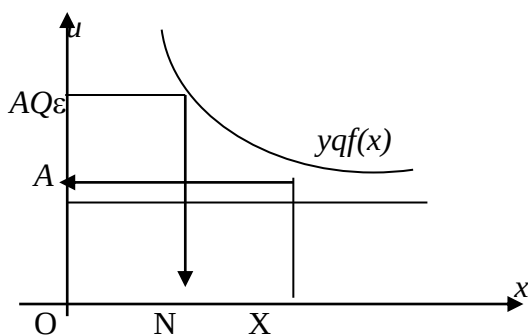
2. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

2-ta'rif. Agar $yqf(x)$ funksiya x ning etarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son $yqf(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deb ataladi.

Agar A son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti bo'lsa, bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Bu ta'rif geometrik nuqtai nazardan quyidagini anglatadi: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N > 0$ mavjud bo'lsa, barcha $|x| > N$ uchun funksiyaning qiymatlari $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ intervalga tushadi.



5-chizma.

3-ta'rif. (a, b) intervalda aniqlangan $yqf(x)$ funksiya uchun shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, barcha $x \in (a, b)$ lar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $yqf(x)$ funksiya bu intervalda chegaralanmagan deb ataladi.

3. Bir tomonlama limitlar.

4-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi yoki $x \rightarrow a$ dagi limiti ta'rifida X o'zgaruvchi a dan kichik (ya'ni $x < a$) bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning A_1 limiti $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a-0$ dagi) o'ng tomonlama limiti deb ataladi.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap tomonlama limiti bunday belgilanadi:

$$A_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \text{ ёки } A_1 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \text{ ёки } A_1 = f(a-0)$$

Agar $a=0$ bo'lsa, u holda bunday yoziladi:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0)$$

5-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi yoki $x \rightarrow a$ dagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta (ya'ni $x > a$) bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning A_2 limiti $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a+0$ dagi) o'ng tomonlama limiti deb ataladi.

$$A_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \text{ ёки } A_2 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \text{ ёки } A_2 = f(a+0)$$

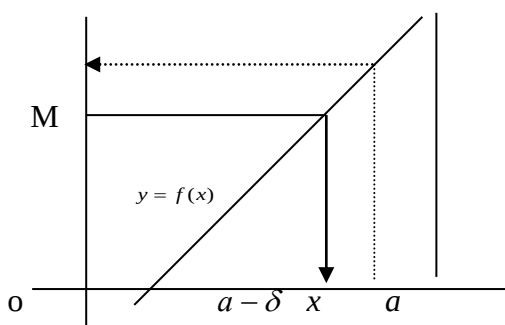
Agar $a=0$ bo'lsa, u holda bunday yoziladi:

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0)$$

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari bir tomonlama limitlar deb ataladi. Agar $A_1 = A_2$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega. Bunga teskari davo ham o'rinli. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular o'zaro teng, ya'ni $f(a-0) = f(a+0)$ bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va istalgan $M > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajarilsa, $x \rightarrow a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$



6-chizma.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ ekanligini

isbotlang. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ funksiyaning qaraylik. Ixtiyoriy $M > 0$ sonni olamiz, $|f(x)| > M$ ni almashtiramiz.

$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$ bo'lsin, bundan $|x-1| < \frac{1}{M}$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x-1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x larni uchun ushbu tengsizlik bajariladi:

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > \frac{1}{\delta} = M \quad \text{ëkin} \quad \left| \frac{1}{x-1} \right| > M$$

Bu esa $x \rightarrow 1$ da $f(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$ bo'lishini bildiradi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

7-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da (yoki $x \rightarrow \infty$) cheksiz katta funksiya deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar $f(x)$ cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda istalgan $M > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik bajariladi. Bundan cheksiz katta funksiya chegaralanmagan funksiya ekani kelib chiqadi.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti nima? Ta'rifini tengsizlik yordamida bering va uni geometrik nuqtai nazardan tushuntiring.
2. $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti ta'rifini aytib bering. Ta'rifini tengsizlik yordamida keltiring. Geometrik ma'nosini tushuntirib bering.
3. Bir tomonlama limitlar nima? Funksiyaning nuqtadagi limiti va bir tomonlama limit tushunchalari qanday bog'langan?
4. Qanday $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funksiya deb ataladi? Geometrik ma'nosini tushuntiring.
5. Qanday funksiya chegaralangan funksiya deb ataladi? Limitga ega bo'lgan funksiyaning chegaralanganligi haqidagi teoremani isbotlang.

3-asosiy savol. Limitlar haqida asosiy teoremlar.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga limitlarni hisoblashning eng sodda qoidalarini tanishtirish va ularni amalda tadbiiq etishga o'rgatishdan iborat.

Identiv-o'quv maqsadi.

1. Yig'indining limitini hisoblay oladilar.
2. Ko'paytmaning va bo'linmaning limitini hisoblay oladi.

3-asosiy savolning bayoni.

Limitga o'tishning eng sodda qoidalarini, ya'ni funksiyalarning limitlarini topishga yordam beraligan qoidalarni keltirib chiqaramiz. Bunda isbotni faqat $x \rightarrow a$ hol uchun o'tkazamiz. Ba'zan esa qisqalik uchun, $x \rightarrow a$ ni ham, $x \rightarrow \infty$ ni ham yozmaymiz.

1. Yig'indining limiti.

1-teorema. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbotni ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun o'tkazamiz. u va v ikkita funksiya, a va b lar o'zgarmas sonlar bo'lib, bu funksiyalarning limitlari bo'lsin, ya'ni $\lim u = a$, $\lim v = b$.

U holda $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$ deb yozish mumkin, bu erda α, β cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u + v = (a + \alpha) + (b + \beta)$. Bu tenglikda $(a + b)$ o'zgarmas son, $(\alpha + \beta)$ cheksiz kichik funksiya.

$\lim(u + v) = a + b = \lim u + \lim v$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\textbf{Misol.} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 1$$

2. Ko'paytmaning limiti.

2-teorema. Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng.

Isbotni ikkita funksiya bo'lgan hol uchun keltiramiz. $\lim u = a$, $\lim v = b$ bo'lsin, bunda a va b o'zgarmas sonlar. U holda, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, bunda α, β cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u \cdot v = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$.

So'nggi tenglikda ab o'zgarmas son $(a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$ cheksiz kichik funksiya.

$$\lim u \cdot v = ab = \lim u \cdot \lim v$$

$$\textbf{Misol.} \lim_{x \rightarrow 3} (x+1)(x-8) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x-8) = (3+1)(3-8) = -20.$$

Natija. O'zgarmas S ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarishi mumkin, ya'ni $\lim C \cdot u(x) = C \cdot \lim u(x)$, chunki $\lim C = C$ -o'zgarmas son.

$$\textbf{Misol:} \lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 5 \cdot 2^2 = 20.$$

3. Bo'linmaning limiti.

3-teorema. Ikkita funksiya bo'linmasining limiti mahrajning limiti noldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\lim v \neq 0$ bo'lsa, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ bo'ladi.

Isbot. $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$ bo'lsin. Demak, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$.

Ushbu ayniyatni yozamiz:

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{a\beta - \alpha b}{b(b + \beta)}$$

bu tenglikda $\frac{a}{b}$ o'zgarmas son, $\frac{a\beta - \alpha b}{b(b + \beta)}$ cheksiz kichik funksiya. Chunki $a\beta - \alpha b$ cheksiz kichik funksiya, $b(b + \beta) \rightarrow b^2$, shu bilan birga, $b \neq 0$. So'nggi tenglikni

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

teorema isbot qilindi.

$$\textbf{Misol.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-3}{5x+2} \text{ ni toping. } \lim_{x \rightarrow 1} (5x+2) = 5 \cdot 1 + 2 = 7 \neq 0. \text{ Shuning uchun:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-3}{5x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4x-3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (5x+2)} = \frac{4 \cdot 1 - 3}{5 \cdot 1 + 2} = \frac{1}{7}$$

$$\textbf{Misol.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2 + 2 = 4.$$

$$\textbf{Misol.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = \text{ bu erda } x \rightarrow 2 \text{ da maxraj } 0 \text{ ga intiladi. Biroq surat } 1 \text{ ga intiladi.}$$

Teskari miqdorning limitini topamiz, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-1} = \frac{0}{1} = 0$$

Bundan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = \infty$, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiyadir.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Funksiyalar yig'indisining limiti haqidagi teoremasini isbotlang.
2. Ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani isbotlang.
3. Bo'linmaning limiti haqidagi teoremani isbotlang.

4. Limitni hisoblang: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3} = 3$.

5. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}} = -\sqrt{5}$.

4-asosiy savol. Ajoyib limitlar.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga birinchi ajoyib limit va ikkinchi ajoyib limit va ularning isboti haqida tushuncha berishdan iboratdir.

Identiv-o'quv maqsadi.

1. Birinchi ajoyib limit haqidagi teoremani mustaqil isbotlay oladilar.
2. Ikkinchi ajoyib limit haqidagi teoremani ham isbot qilib uni amalda tadbqiq eta oladilar.

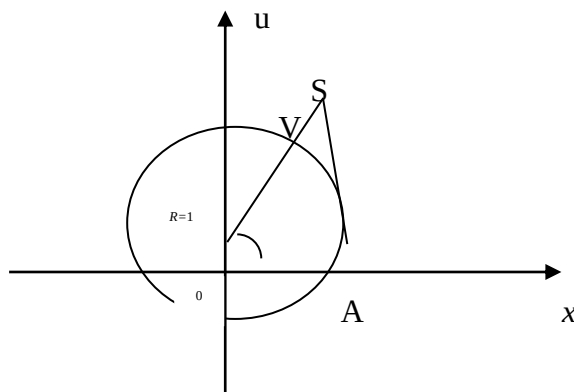
4-asosiy savolning bayoni.

1. Ajoyib limit.

Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani ushbu muhim $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ limit munosabatni keltirib chiqarishga qo'llaymiz. Bu limiti ko'pincha birinchi ajoyib limit deb ataladi.

Teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isboti. R radiusli aylana olamiz, radianlardan ifodalangan x burchak $0 < x < \frac{\pi}{2}$ oraliqda yotadi deb faraz qilaylik.



Shakldan ko'rinadiki, $\Delta_{BOA} < \Delta_{BOA \text{ cek. } 103} < \Delta_{COA103}$. Biroq,

$$\Delta_{BOA \text{ } 103} = \frac{1}{2} OA \cdot BO \cdot \sin x = \frac{R^2}{2} \sin x, \quad \Delta_{BOA103} = \frac{1}{2} OA^2 \cdot \overset{\sim}{AB} = \frac{R^2}{2} x,$$

$\Delta_{COA_{\text{юзи}}} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{R^2}{2} \operatorname{tg} x$, shu sababli tengsizliklar ushbu ko'rinishni oladi:

$\frac{R^2}{2} \sin x < \frac{R^2}{2} x < \frac{R^2}{2} \operatorname{tg} x$ yoki $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Barcha hadlarni $\sin x > 0$ ga bo'lamiz $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ёки} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya bir xil limit $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ va $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ga ega bo'lgan funksiyalar

bilan chegaralangan. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teorema asosan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Teorema $x > 0$ bo'lgan hol uchun isbot qilindi. Endi X burchak $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ chegaralarda yotadi deb faraz qilaylik.

$x = -z$ ($z \rightarrow 0$, $z > 0$) almashtirish bajarib, shakl almashtiramiz:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{\sin(-z)}{(-z)} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Shunday qilib, formula $x < 0$ bo'lgan hol uchun ham isbot qilindi. Shunday qilib, birinchi ajoyib limit formulasi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ni istalgan (manfiy va musbat) x lar uchun isbot qildik.

1-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$

3-misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\frac{5 \cdot \sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}.$

2. Ikkinchi ajoyib limit. e soni.

Monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremani ushbu muhim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

limitni keltirib chiqarishga tadbiq etamiz. U ikkinchi ajoyib limit deb ataladi.

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \text{ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda } n \in \mathbb{N}.$$

1-teorema. Umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da 2 va 3

orasida yotadigan limitga ega.

Isbot. Isbotlashda bu ketma-ketlik o'suvchi va chegaralanganligini ko'rsatamiz. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} b^n$$

bo'yicha ketma-ketlikning n -hadi va $(n+1)$ hadi uchun ifodalarni yozamiz:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

x_n va x_{n+1} ni taqqoslasak, x_{n+1} had x_n dan bitta musbat qo'shiluvchiga ortiqligini ko'ramiz. So'ngra $1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n+1} > 1 - \frac{2}{n}$, $1 - \frac{3}{n+1} > 1 - \frac{3}{n}$ va hokazo, bo'lganligi uchun uchinchisidan boshlab, x_{n+1} dagi har bir qo'shiluvchi x_n dagi mos qo'shiluvchidan katta.

Demak, $x_{n+1} > x_n$, bu esa umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Endi bu ketma-ketlik chegaralanganligini ko'rsatamiz. $k = 1, 2, 3, \dots$ uchun $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1$ ekanini aytib o'tamiz. U holda (1) formula bunday yoziladi:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad (2)$$

So'ngra

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

ekanligini hisobga olsak, (2) formulani bunday yozish mumkin.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Qavsga olingan hadlar mahraji $q = \frac{1}{2}$ va birinchi hadi 1 bo'lgan geometrik progressiya hosil qiladi. Shu sababli

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

Demak, barcha n lar uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

(1) tenglikdan $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ ekani kelib chiqadi.

Shunday qilib, ushbu tengsizliklarni hosil qildik:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (3)$$

Demak, umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik chegaralanganligini

ko'rsatdik. Shunday qilib, $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlik o'suvchi va chegaralangan, shu

sababli u limitga ega. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz, ya'ni umumiy hadi $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlikning $n \rightarrow \infty$ dagi limiti e soni deb ataladi:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (4)$$

(3) tengsizliklardan $2 < e < 3$ bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema isbot qilindi.

e irratsional son, uning qiymati verguldan keyingi ettita raqami bilan quyidagiga teng:

2-teorema. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Isbot. Isbotlangan (4) formulada n butun musbat qiymatni qabul qilib cheksizlikka intiladi. Endi x butun hamda kasr qiymatlarni qabul qilib ∞ ga intilsin.

1) $x \rightarrow +\infty$ bo'lsin. Uning har bir qiymati ikkita butun musbat son orasida yotadi.

$$n \leq x < n+1$$

Quyidagi tengsizliklarning bajarilishi ravshan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, \\ 1 + \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \end{aligned}$$

Agar $x \rightarrow +\infty$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$. Endi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ funksiyaning o'z ichiga olgan ifodalarning limitlarini topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1^{-1} = e \end{aligned}$$

limitlar teng. Demak, oraliq funksiyaning limiti haqidagi teorema asosan quyidagiga egamiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2) $x \rightarrow -\infty$ bo'lsin. Yangi $x = -(t+1)$ o'zgaruvchi kiritamiz. $x \rightarrow -\infty$ da $t \rightarrow +\infty$.

Bunday yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ekanligini isbotladik. Bu tenglikda $\frac{1}{x} = \alpha$ deb olsak, u holda

$x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0 (\alpha \neq 0)$ ga egamiz va $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ bo'lishi kelib chiqadi.

$$1\text{-misol. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \right)^3 = e^3.$$

$$2\text{-misol. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ formulani isbotlang.
2. Ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ formulani isbotlang.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ formulani isbotlang.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$ hisoblang.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. T., 1995.
2. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., 1978.
3. T.A.Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz. 1-qism, T., 1986.
4. N.S.Piskunov. Differensial va integral hisob. 1-tom. T., 1972.
5. G.N.Berman. Sbornik zadach po matematicheskoy analizu. M., 1985.

Mavzu: Funksiyaning hosilasi ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi

Asosiy savollar.

1. Funksiya hosilasining ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.
2. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.
3. Asosiy elementar funksiylarning hosilalari.
4. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Funksiyaning nuqtadagi hosilasi, funksiya orttirmasi, argument orttirmasi, nolga intilgandagi limit, chekli va cheksiz sonlar, hosilaning geometrik ma'nosi, differensiallash, interval, murakkab funksiya, teskari funksiya, uzluksizlik, asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

Mavzuga oid muammoli savolar.

1. Hosilaning ta'rifi.
2. Differensiallashning ta'rifi.
3. Hosilaning geometrik ma'nosi.
4. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.
5. Differensiallashning asosiy qoidalari.
6. Murakkab funksiyaning hosilasi.
7. Teskari funksiyaning hosilasi.
8. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.
9. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.
10. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

1-asosiy savol. Funksiyaning hosilasi, uning geometrik va mexanik ma'nosi.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga funksiyaning hosilasi va uni hisoblash usullari haqida tushuncha berish olgan bilimlarni amaliyotga tadbiq qilishga o'rgatishdan iborat.

Identiv-o'quv maqsadlari.

1. Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nolarini bir-biridan farqlay oladilar.
2. Differensiallashning asosiy qoidalarini mustaqil bajara oladilar.

1-asosiy savolning bayoni.

$y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin. (a, b) intervalga tegishli x_0 va $x_0 + \Delta x$ nuqtalarni olamiz.

$y = f(x)$ funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari $f(x_0)$ va $f(x_0 + \Delta x)$ dan funksiyaning $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmasini tuzamiz. U argument Δx ga o'zgarganda funksiya qanchaga o'zgarganini ko'rsatadi. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz.

1-ta'rif. Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi.

Bu limit quyidagi belgilardan biri bilan belgilanadi:

$$y', \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

Shunday qilib,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Agar bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$ bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya

x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega deb aytiladi.

Agar hosila ta'rifida $\Delta x \rightarrow -0$ yoki $\Delta x \rightarrow +0$ bo'lsa, bir tomonlama hosilaga ega bo'lamiz,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - x_0 \text{ nuqtadagi o'ng hosila,}$$

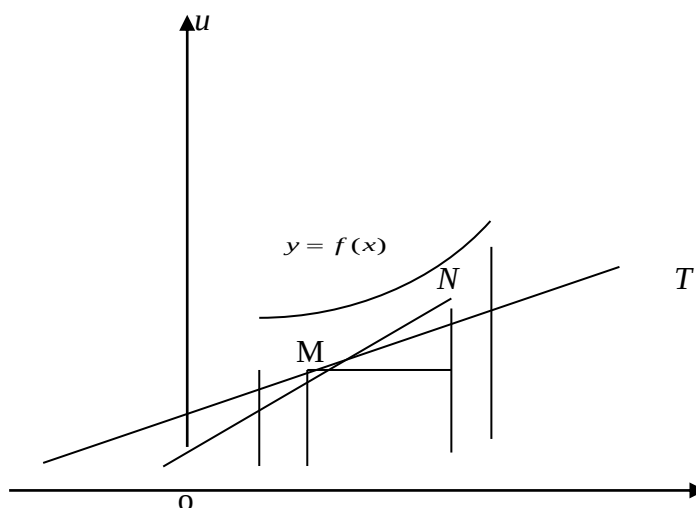
$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - x_0 \text{ nuqtadagi chap hosila.}$$

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilasi mavjudbo'lishi uchun o'ng va chap hosilalar mavjud va teng, ya'ni $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Hosilani topish jarayoni funktsiyani differensiallash deb ataladi.

Hosilaning geometrik ma'nosi.

3-ta'rif. Egri chiziq L ga uning M nuqtasida o'tkazilgan urinma deb, N nuqta L egri chiziqda harakatlana borib, M nuqtaga intilganda MN kesuvchi oladigan MT limit vaziyatiga aytiladi.



x

Shaklda urinma Ox o'q bilan α burchak, kesuvchi esa β burchak hosil qiladi. $\triangle MNK$ dan $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekani ko'rinib turibdi. Egri chiziq L bo'ylab $N \rightarrow M$ da $\Delta x \rightarrow 0$ bo'ladi va $\beta \rightarrow \alpha$.

Bu esa bunday yoziladi:

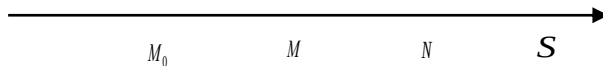
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Biroq, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\beta = tg\alpha$ va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, demak, $y' = f'(x_0) = tg\alpha$.

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi egri chiziqqa x_0 abscissali M nuqtada o'tkazilgan urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangesiga teng. Hosilaning geometrik ma'nosi ana shundan iborat.

Hosilaning mexanik ma'nosi. Biror M nuqta to'g'ri chiziqda harakatlanayotgan bo'lsin. Biror M_0 boshlang'ich vaziyatdan M nuqtagacha hisoblanadigan S masofa t vaqtga bog'liq, ya'ni S masofa t vaqtning funksiyasi bo'ladi:

$$S = f(t)$$



Vaqtning biror t momentida M nuqta M_0 boshlang'ich vaziyatdan S masofada, navbatdagi biror $t + \Delta t$ momentda esa bu nuqta N vaziyatda boshlang'ich vaziyatdan $S + \Delta S$ masofada bo'lsin. Shunday qilib, Δt vaqt oralig'ida nuqta ΔS masofani o'tgan, ya'ni S kattalik ΔS ga o'zgargan bo'ladi. Nuqtaning Δt vaqt ichida o'rtacha harakat tezligi

$$V_{ypT} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \text{ biroq } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{ypT} = V \text{ berilgan } t \text{ momentdagi harakat tezligi, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S' \text{ esa}$$

hosila. Shunday qilib, $V = S'$, ya'ni tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila. Hosilaning mexanik ma'nosi ana shundan iborat.

Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya $x_0(\cdot)$ da chekli hosilaga ega, ya'ni

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ chekli son bo'lsa, bu funksiya shu nuqtada hosilaga ega deyiladi.}$$

2-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya (a, ϵ) intervalning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u shu intervalda differensiallanuvchi deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; \epsilon]$ kesmaning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi hamda chekli bir tomonlama $f'_+(a)$ ba $f'_-(x)$ hosilalar mavjud bo'lsa, bu funksiya shu kesmada differensiallanuvchi deb ataladi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $x_0(\cdot)$ da differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isbot. $y = f(x)$ funksiya $x_0(\cdot)$ da differensiallanuvchi bo'lgani uchun ta'rifga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ chekli son}$$

Lekin $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$ bu erda $\Delta x \rightarrow 0$ da α cheksiz kichik funksiyadir. Bundan

$$\Delta y = f'(x_0) + \alpha. \text{ Bu tenglik } \Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \Delta y \rightarrow 0 \text{ bo'lishini ko'rsatadi, ya'ni } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Bu esa $y = f(x)$ funksiya $x_0(\cdot)$ da uzluksizligini bildiradi.

Differensiallashning asosiy qoidalari.

1-teorema. O'zgarmasning hosilasi nolga teng.

$$c' = 0$$

Isbot. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Demak, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Shunday

qilib, $y' = 0$ yoki $c' = 0$.

2-teorema. Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalar $x_0(\cdot)$ da differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasi (maxraji nolga teng bo'lmasa) ham shu nuqtada differensiallanuvchidir.

$$a) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$b) (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$v) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Bu teorema qo'shiluvchilar yoki ko'paytuvchilar istalgan chekli son bo'lganida ham to'g'ri bo'ladi.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni $(cu)' = cu'$ bunda S -o'zgarmas son.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering. Cheksiz hosila ta'rifini bering.
2. Bir tomonlama hosilalar deb nimaga aytiladi?
3. Funksiyaning nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi nimada iborat? Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Qanday funksiya nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi? Intervalda-chi? Kesmada-chi?
5. O'zgarmas sonning hosilasini keltirib chiqaring. Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

2-asosiy savol. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga murakkab va teskari funksiyaning hosilasini topish usullarini o'rgatishdan iborat.

Identiv-o'quv maqsadlari.

1. Murakkab funksiyaning hosilasini topish usulini biladilar.
2. Teskari funksiyaning hosilasini topish usulini biladilar.

2-asosiy savolning bayoni.

Teorema. $y = f(u)$ va $u = f(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. murakkab $f(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasining oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasiga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$$

Isbot. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0(\cdot)$ da, $y = f(u)$ funksiya esa $u_0 = \varphi(x_0)$ ($\cdot$) da differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$ mavjud. Bundan quyidagi kelib chiqadi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

bunda $\Delta u \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0(\cdot)$ da differensiallanuvchi bo'lgani

uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0)$ mavjud, bundan $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0) + \beta$ yoki

$\Delta u = \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x$, bunda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\beta \rightarrow 0$. $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta u \rightarrow 0$ bo'lishini aytib o'tamiz. Endi Δu ning qiymatini Δy ga qo'yamiz:

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + f'(u_0)\beta \cdot \Delta x + \alpha\varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha\beta\Delta x$$

So'ngra Δy ni Δx ga bo'lamiz va $\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) + f'(u_0)\beta + \alpha\varphi'(x_0) + \alpha\beta] = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$$

Demak istalgan x nuqtada: $y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$. Teorema isbotlandi.

Teskari funksiya. $[a, b]$ da aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin, shu bilan birga $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsin. aniqlik uchun $f(x)$ o'suvchi funksiya bo'lgan holni qaraymiz. $[a, b]$ kesmada x_1, x_2 ikkita nuqtani olamiz, bunda $x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ bo'ladi, shu bilan birga $y_1 < y_2$. Teskari tasdiq ham to'g'ri: agar $y_1 < y_2$ bo'lib, $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, u holda $x_1 < x_2$. Shunday qilib, x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik bor. y ning ularga mos qiymatlari orasida o'zaro bir qiymatlik bor. Uni argument, x ni esa funksiya sifatida qarab x ni y ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

$$x = \varphi(y)$$

Bu funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi. Kamayuvchi funksiya uchun ham shunday mulohaza yuritiladi. Shuni qayd qilamizki, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlar sohasi $x = \varphi(y)$ teskari funksiya uchun aniqlanish sohasi bo'ladi va aksincha.

Teorema-1. Agar o'suvchi(kamayuvchi) $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, shu bilan birga $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsa, u holda unga teskari funksiya $[c, d]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'ladi.

Teorema-2. $y = f(x)$ funksiya x_0 ($\cdot$) ning biror atrofida monoton va uzluksiz bo'lsin. bundan tashqari $y = f(x)$ funksiya x_0 ($\cdot$) da differensiallanuvchi bo'lib, $f'(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $x = \varphi(y)$ teskari funksiya $y_0 = f(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lib,

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi funksiya hosilasiga teskari miqdorga tengdir, ya'ni $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Isbot. $y = f(x)$ funksiya x_0 ($\cdot$) da uzluksiz bo'lganligi uchun $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta x \rightarrow 0$.

Hosilaning ta'rifiga ko'ra:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Demak, $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, shu bilan teorema isbotlandi.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Murakkab funktsiyani differensiallash qoidasi nimadan iborat? Uni keltirib chiqaring.
2. Qanday funktsiya teskari funktsiya deyiladi? Misollar keltiring.
3. Teskari funktsiyani differensiallash qoidasi nimadan iborat? Uni keltirib chiqaring.
4. Hosila ta'rifidan foydalanib, $y = \frac{2x-1}{x+3}$ funktsiyaning hosilasini toping. Javob:

$$y' = \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)' = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

5. Hosila ta'rifidan foydalanib, $y = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$ funktsiya hosilasini toping. Javob:

$$y' = \frac{10x}{(x^2+1)^2}.$$

3-asosiy savol. Asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga logarifmik, darajali, ko'rsatkichli, ko'rsatkichli-darajali funktsiya va trigonometrik funktsiyalarning hosilalarini topish usullari bilan tanishtirishdan iborat.

Identiv-o'quv maqsadlari.

1. Logarifmik va darajali funktsiyalarning hosilalarini topa oladilar.
2. Ko'rsatkichli va trigonometrik funktsiyalarning hosilalarini topa oladilar.

3-asosiy savolning bayoni.

1. Logarifmik funktsiyaning hosilasi. $(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot u'$ ekanini isbotlaymiz, bunda $u = \varphi(x)$, $y = \ln x$ funktsiyani qaraymiz.

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$$

Ushbu $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$ nisbatni tuzamiz.

$\Delta x \rightarrow 0$ da limitga o'tamiz va $\alpha \rightarrow 0$ da $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$ ekanini hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{x}$$

Shunday qilib, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ekanini isbot qildik.

Agar $y = \ln u$ bo'lib, bunda $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funktsiya bo'lsa, u holda murakkab funktsiyani differensialisi qoidasiga binoan bo'lsa, u holda murakkab funktsiyani differensiallash qoidasiga binoan $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ bo'ladi.

Xususan, agar $y = \log_a^u = \frac{\ln u}{\ln a}$ bo'lsa, bunda $u = \varphi(x)$, u holda

$$(\log_a^u)' = \left(\frac{\ln u}{\ln a} \right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u' \quad (\text{bunda } a - \text{const, } a > 0, a \neq 1)$$

2. Logarifmik differensiallash. Agar $f(x)$ funksiya logarifmlanadigan bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasini izlash uchun oldin logarifmlash amali, so'ngra esa differensiallash amalini qo'llash mumkin.

Bu usulni logarifmik differensiallash deyiladi.

3. Darajali funksiyaning hosilasi. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ ekanini isbotlaymiz. Bunda $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi $(\alpha \in R)$ $y = u^\alpha$ funksiyaning logarifmlab, $\ln y = \alpha \ln u$ ega bo'lamiz.

y ni x ning funksiyasi deb hisoblab, tenglikning ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz $\frac{y'}{y} = \alpha \frac{u'}{u}$. Bundan:

$$y' = \alpha \cdot y \frac{u'}{u} = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$$

Shunday qilib, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$. Shu bilan formula isbotlandi.

$$\text{Agar } \alpha = \frac{1}{2} \text{ da } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'. \quad \alpha = -1 \text{ da } \left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

4. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ekanini isboti. Bunda $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiya $(a > 0, a \neq 1)$ $y = a^u$ funksiyaning oldin logarifmlaymiz, so'ngra x bo'yicha differensiallab, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\ln y = u \ln a, \quad \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln a$$

bundan $y' = y \ln a \cdot u'$ yoki $y' = (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

Misol. $y = e^{x^3}$ funksiya berilgan. $y'(e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = 3x^2 \cdot e^{x^3}$

5. Ko'rsatkichli-darajali funksiyaning hosilasi. $y = u^v$ (bunda $u = \varphi(x)$ va $v = \psi(x)$) funksiya ko'rsatkichli-darajali funksiya deyiladi.

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v' \text{ ekanligini isbotlaymiz. } y = u^v \text{ ni logariflaymiz:}$$

$$\ln y = v \cdot \ln u$$

bundan x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \left(v \cdot \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln u \right). \quad y \text{ o'rniga } y = u^v \text{ ni qo'yib,}$$

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

Misol. $y = (x^2 + 1)^{x^2-1}$ funksiya berilgan. y' ni toping.

$$y' = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)^{x^2 - 2} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{x^2 - 1} \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x \cdot (x^2 + 1)^{x^2 - 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \right)$$

6. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Misol. 1) $y = \sin x^2$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

2) $y = \sin^2 x$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$3) y = \cos \frac{1}{x}; \quad y' = -\frac{1}{x^2} \left(-\sin \frac{1}{x} \right) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2};$$

$$4) y = tg \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

5) $y = \ln ctgx$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \frac{1}{ctgx} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{2}{\sin 2x}$$

$$6) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$7) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$8) (arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$9) (arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Logarifmik funksiya hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
2. Logarifmik differensiallash qoidasi nimadan iborat?
3. Darajali funksiyaning, ko'rsatkichli funksiyaning va ko'rsatkichli darajali funksiyaning hosilalari uchun formulalar chiqaring.
4. Trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.
5. $y = \ln \sin x$, $x \in (0; \pi)$ bo'lsin. $y' = ?$

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctgx}$$

4-asosiy savol. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarga 2, 3, 4 va hokazo tartibli hosilalar va differensiallarni hisoblash usullarini o'rgatishdan iborat.

Identiv o'quv maqsadlari.

1. Berilgan har qanday funksiyadan hosila olaoladilar.
2. Berilgan barcha funksiyalardan yuqori tartibli hosila olishni biladilar.

4-asosiy savolning bayoni. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ ham, umuman aytganda, x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, uning hosilasini qarash mumkin.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya hosilasi $f'(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'' , yoki $f''(x)$, yoki $\frac{d^2 f}{dx^2}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$y = f(x)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibdagi hosilalari xuddi yuqoridagidek kiritiladi.

Umuman, $y = f(x)$ funksiya $(n-1)$ tartibli hosilasi $f^{(n-1)}(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deyiladi. Demak,

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \left(\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) \right)$$

$y = f(x)$ funksiyaning $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$,..... hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalaridan fanning, texnikaning turli sohalarida foydalaniladi. Masalan, harakatdagi jismning oniy tezlanishini topish harakat qonunini ifodalovchi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topish bilan hal etiladi.

Misollar. Ushbu funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilalari topilsin: a) $y = ax^2 + bx + c$ b) $y = 2^{\sin x}$ v) $y = \arctg x$

$$a) y' = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$y'' = (y')' = (2ax + b)' = 2a$$

$$6) y' = (2^{\sin x})' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

$$y'' = (y')' = (\ln 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x})' = \ln 2 \cdot (2^{\sin x} \cdot \cos x)' = \ln 2 \left[(2^{\sin x})' \cdot \cos x + 2^{\sin x} \cdot (\cos x)' \right] = \ln 2 \left[2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot \cos x + 2^{\sin x} \cdot (-\sin x) \right] = \ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot (\cos^2 x \cdot \ln 2 - \sin x)$$

$$\text{B) } y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{1^1 \cdot (1+x^2) - 1 \cdot (1+x^2)^1}{(1+x^2)^2} = \frac{0(1+x^2) - 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya differensial dy ning differensial berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensial deb ataladi va $d^2 y$ yoki $d^2 f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{ёки} \quad d^2 f(x) = d(df(x))$$

Xuddi shunga o'xshash, funksiyaning 3, 4 va hokazo tartibli differensiallari ta'riflanadi.

Ma'lumki, funksiyaning differensial uning hosilasi orqali ushbu $dy = y'dx$ formula bilan ifodalanar edi. Bunda dx argument x ning differensial bo'lib, Δx ga teng. shu tenglikdan foydalanib topamiz:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = dx \cdot d(y') = dx(y')'dx = y''dx^2$$

Demak, funksiyaning 2-tartibli differensial funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining argument differensial kvadratiga ko'paytmasiga teng.

Misol. $y = \sin 2x$ funksiyaning 2-tartibli differensial quyidagicha topiladi.

$$dy = y'd = 2\cos 2x dx; \quad d^2 y = d(dy) = -4\sin 2x dx^2$$

Endi ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi hamda ko'paytmasining yuqori tartibli hosilalarini topish qoidalarini keltiramiz.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda berilgan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada n -tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. u holda ushbu munosabatlar o'rinli:

$$a) [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c - \text{const};$$

$$b) [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$$

$$c) [f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + c_n^1 f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) + \dots + c_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) + \dots f(x) \cdot g^{(n)}(x)$$

bunda

$$c_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k}$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

1. Ushbu $y = x \cdot e^x$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.
2. Ushbu $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.
3. $y = \sin x$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.
4. Ushbu $y = x^2 + 2x + 1$ funksiyaning differensial topilsin.
5. Ushbu $y = e^x + \sin 2x$ funksiyaning differensial topilsin.
6. Elementar funksiyalarning hosilalar jadvalini yozib bering.

$$1. (c)^1 = 0$$

$$2. (x^n)^1 = n(x^{n-1})$$

$$3. (a^x)^1 = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (\log_a^x)^1 = \frac{1}{x} \log_a^e$$

$$5. (\ln x)^1 = \frac{1}{x}$$

$$6. (\sin x)^1 = \cos x$$

$$7. (\cos x)^1 = -\sin x$$

$$8. (tgx)^1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9. (ctgx)^1 = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10. (\arcsin x)^1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (-1 < x < 1)$$

$$11. (\arccos x)^1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (-1 < x < 1)$$

$$12. (arctgx)^1 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13. (arcctgx)^1 = -\frac{1}{1+x^2}$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

6. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. T., 1995.
7. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., 1978.
8. T.A.Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz. 1-qism, T., 1986.
9. N.S.Piskunov. Defferensial va integral hisob. 1-tom. T., 1972.
10. G.N.Berman. Sbornik zadach po matematicheskoy analizu. M., 1985.

Mavzu: Boshlang'ich funktsiya, aniqmas integral. Integrallar jadvali

Asosiy savollar.

1. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral.
2. Aniqmas integralning xossalari.
3. Asosiy integrallar jadvali.
4. Integrallash usullari.

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar.

Funktsiyaning hosilasi, boshlang'ich funktsiya, funktsiyaning uzluksizligi, o'zgarmas son-const, hosilalar jadvali, integrallash, integrallash jadvali, sodda funktsiyalarning integrallari. Integrallash usullari, o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.

1-asosiy savol. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral.

O'qituvchining maqsadi.

Talabalarni boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral tushunchasi bilan tanishtirish. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integralni topishga o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadlari.

1. Boshlang'ich funktsiya tushunchasiga ta'rif bera oladilar.
2. Berilgan funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasini topa oladilar.
3. Aniqmas integral tushunchasiga ta'rif bera oladilar.
4. Berilgan funktsiyaning aniqmas integralini hisoblay oladilar.

1-asosiy savolning bayoni.

Ma'lumki, harakat qonuniga ko'ra harakatdagi jismning tezligini topish masalasi hosila tushunchasiga olib keldi.

Harakatdagi jismning tezligiga ko'ra harakat qonunining o'zini topish masalasi esa yuqorida aytilgan masalaga nisbatan teskari masala bo'lib, u aniqmas integral tushunchasiga olib keladi.

$f(x)$ funktsiya (a,b) da berilgan bo'lib, $F(x)$ esa shu oraliqda differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $F(x)$ funktsiyaning hosilasi $F'(x)$ berilgan $f(x)$ funktsiyaga teng bo'lsa, $F'(x) = f(x)$ yoki $dF(x) = f(x)dx$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi deb ataladi.

Misollar.

1. $f(x) = x^2$ bo'lsin. Bu funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

bo'ladi, chunki $F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$.

2. $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Bu funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi, $F(x) = \sin x$ bo'ladi, chunki

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$$

Agar $f(x)$ funktsiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, u holda bu funktsiya shu oraliqda boshlang'ich funktsiyaga ega bo'ladi.

$f(x)$ funktsiya (a,b) da berilgan bo'lib, u shu oraliqda ikkita $F(x)$ va $\Phi(x)$ boshlang'ich funktsiyalarga ega bo'lsin. ta'rifga binoan,

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x)$$

bo'ladi. Demak,

$$F'(x) = \Phi'(x)$$

u holda yuqorida keltirilgan natijaga ko'ra $F(x)$ va $\Phi(x)$ funktsiyalar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$\Phi(x) = F(x) + c \quad (c - \text{const})$$

Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'lsa, unda $f(x)$ ning istalgan boshlang'ich funktsiyasi

$$F(x) + c \quad (c - const)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-ta'rif. Ushbu ifoda

$$F(x) + c \quad (c - const)$$

shu $f(x)$ funktsiyaning aniqmas integrali deb ataladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda deyiladi. Demak, berilgan $f(x)$ funktsiyaning aniqmas integralini topish uchun uning boshlang'ich funktsiyalaridan biri $F(x)$ ni topib, $F(x) + c$ ni aniqlash etarli ekan.

Misollar.

1. $\int x^2 dx$ aniqmas integral topilsin. Ma'lumki, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ funktsiya uchun

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

$$\text{Demak, } \int x^2 dx = F(x) + c = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

2. $\int \cos x dx$ integral topilsin.

Hosilasi $\cos x$ ga teng bo'lgan funktsiya $\sin x$ ekanligini e'tiborga olib, $F(x) = \sin x$ bo'lishini aniqlaymiz.

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

3-asosiy savol. Asosiy interallar jadvali.

O'qituvchining maqsadi.

Aniqmas integrallarning asosiy formulalaridan foydalanib integrallashni o'rgatish.

Identiv o'quv maqsadlari.

1. Integrallashda aniqmas integrallar jadvalidan foydalana oladilar.
2. Asosiy integrallar jadvalini yangi formulalar bilan boyitib bora oladilar.

3-asosiy savolning bayoni.

Ushbu punktga keyinchalik ko'p foydalaniladigan integrallarni keltiramiz.

$$1^{\circ}. \int 0 \cdot dx = c, \quad c - const;$$

$$2^{\circ}. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + c;$$

$$3^{\circ}. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1);$$

$$4^{\circ}. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0);$$

$$5^{\circ}. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c;$$

$$6^{\circ}. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$$

$$7^{\circ}. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$8^{\circ}. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$9^{\circ}. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$10^{\circ}. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$$

$$11^{\circ}. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$$

$$12^{\circ}. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c;$$

$$13^{\circ}. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c;$$

$$14^{\circ}. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \quad (a \neq 0);$$

$$15^{\circ}. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

Bu integrallardan birining, masalan

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \quad (9)$$

to'g'riligini ko'rsatamiz. Buning uchun tenglikning o'ng tomonidagi funktsiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \right)' = \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

Natijada (9) tenglikning chap tomonidagi integral ostidagi funktsiya hosil bo'ladi. Demak, (9) tenglik o'rinli.

Aniqmas integralning 3^o-4^o xossalaridan hamda integrallar jadvalidan foydalanib, integrallarni bevosita hisoblash mumkin.

Misollar.

1. Ushbu $\int (1 + \sin x + 2^x) dx$ integralni hisoblang.

$$\int (1 + \sin x + 2^x) dx = \int 1 \cdot dx + \int \sin x dx + \int 2^x dx = x - \cos x + \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

3.1. $\int x^n dx$ -integralni topish uchun n -ning qiymatlari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak?

3.2. $\int \frac{4ax^3 dx}{\sqrt[3]{(1+ax^4)^3}}$ integral toping.

a) $4(1+ax^4)^2 + c$; b) $4\ln(1+ax^4)$; v) $4\sqrt[4]{1+ax^4} + c$;

g) $\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$; d) $\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + c$.

3.3. $\int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{3}} x dx$ -integralni toping.

a) $a^2 + x^2 + c$; b) $\ln(x^2 + a^2) + c$; v) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(a^2 + x^2)^4 + c}$;

g) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2 + x^2}$; d) $\operatorname{tg} \frac{a}{x} + c$.

4-asosiy savol. Integrallash usullari.

O'qituvchining maqsadi.

Aniqmas integralni hisoblashda bevosita integrallash, o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash usullari bilan tanishtirish. Asosiy integrallash formulalari yordamida integrallarni topish printsiplarini ko'rsatish.

Identiv o'quv maqsadlari.

1. Integrallash usullarini aytib bera oladilar.
2. O'zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib aniqmas integralni topa oladilar.
3. Bo'laklab integrallash usulidan foydalanib aniqmas integralni topa oladilar.
4. Integrallash usullaridan foydalanib bilimlarini umumlashtirib va sistemalashtirib boradilar.

°. O'zgaruvchini almashtirish usuli.

$F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x) = f(x) \quad (10)$$

Unda $\int f(x) dx = F(x) + c$ bo'ladi. Endi o'zgaruvchi $x = \varphi(t)$ munosabat yordamida t o'zgaruvchi bilan bog'langan bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lgan funksiya.

Lemma. Ushbu $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$ munosabat o'rinli.

Isbot. Bu tenglikning o'ng tomonida turgan $F(\varphi(t)) + c$ funksiyaning xosilasini topamiz:

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

(10) tenglikka ko'ra

$$F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$$

lemma isbot bo'ldi.

Lemmaga ko'ra $\int f(x) dx$ integralni hisoblash $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ integralni hisoblashga kelar ekan:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (11)$$

(11) formula aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Misollar. 1) Ushbu

$$\int (2 + 3x)^{100} dx$$

integralni hisoblang.

$$\begin{aligned} \int (2 + 3x)^{100} dx &= \left| \begin{array}{l} 2 + 3x = t \\ 3x = t - 2 \\ x = \frac{t - 2}{3} \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int t^{100} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{100+1}}{100+1} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{101}}{101} + c \\ &= \frac{1}{303} t^{101} + c = \frac{1}{303} (2 + 3x)^{101} + c \end{aligned}$$

3°. Bo'laklab integrallash usuli.

Faraz qilaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funktsiyalar berilgan bo'lib, ular uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. ikki funktsiya ko'paytmasining differentsialini topish qoidasiga ko'ra,

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki,

$$\int u \cdot dv = \int [d(u \cdot v) - v \cdot du]$$

Aniqmas integralning xossaligidan foydalanib topamiz:

$$\int u \cdot dv = \int [d(u \cdot v) - v du] = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Natijada ushbu

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du \quad (12)$$

formulaga kelimiz. (12) formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bo'laklab integrallash formulasi $\int u dv$ integral hisoblashni $\int v du$ integralni hisoblashga keltiradi. Bu formuladan foydalanish uchun integral ostidagi ifoda u hamda dv lar ko'paytmasi ko'rinishida yozib olinadi.

Misollar.

$$1) \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} x = u \\ dv = e^x dx \\ dx = du \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

Agar bu integralda $u = e^x$, $dv = x \cdot dx$ deb olinadigan bo'lsa, unda $du = e^x dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ bo'lib, bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, qaralayotgan integralni hisoblash undan murakkab bo'lgan $\int x^2 e^x dx$ ni hisoblashga keladi.

Demak, bo'laklab integrallash formulasidan foydalanishda u va dv larni tanlash muhimdir.

Eslatma. Ushbu

$$\begin{aligned} & \int x^n \ln x dx, \quad \int x^n \arcsin x dx, \quad \int x^n \arccos x dx \\ & \int x^n \arctg x dx, \quad \int x^n (\arctg x)^2 dx, \quad \int x^n \sin x dx \\ & \int x^n \cos x dx, \quad \int x^n e^x dx, \quad \int e^{ax} \sin b x dx, \\ & \int \sin(\ln x) dx, \quad \int \cos(\ln x) dx \end{aligned}$$

kabi integrallar bo'laklab integrallash formulasi yordamida hisoblanib, ularning ba'zilar uchun bu formula bir necha marta qo'llanishi mumkin.

NAZORAT TOPSHIRIQLARI.

4.1. Aniqmas integrallarni topishdagi integrallash usullarini aytib bering.

4.2. $\int \frac{\sqrt{3-2x}}{x} dx$ integralni hisoblang.

a) $\frac{1}{x} + c$; b) $-\frac{1}{3} \sqrt{(3-2 \ln x)^3} + c$; v) $\sqrt{3-2 \ln x} + c$;

g) $\ln^2 x + c$; d) 0.

4.3. Tengliklarni to'g'riligini tekshiring.

1. $\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + c$.

2. $\int \sqrt{1+4 \sin x} \cdot \cos x dx = \frac{1}{6} \sqrt{(1+4 \sin x)^3} + c$.

$$3. \int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + c.$$

$$4. \int \frac{3x-4}{x^2-4} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2-4) - \ln \frac{x-2}{x+2} + c.$$

4.4. $\int x^2 e^x dx$ integralni hisoblang.

- a) $\ln x + c$; b) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$; v) $x^2 - 2x + c$
g) $e^x + \ln x + c$; d) $\cos x + c$.

4.5. $\int e^{2x} \cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

- a) $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + c$; b) $e^{2x} + \cos x + c$; v) $e^{3x} + c$;
g) $e^{2x} + \cos x$; d) $e^{2x} + \sin x + c$.

Foydalanilgan adabiyotlar.

11. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. T., 1995.
12. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., 1978.
13. T.A.Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz. 1-qism, T., 1986.
14. N.S.Piskunov. Differensial va integral hisob. 1-tom. T., 1972.
15. G.N.Berman. Sbornik zadach po matematicheskoy analizu. M., 1985.

Mavzu: Aniq integral va uning geometrik ma'nosi

Asosiy savollar

1. Aniq integral tushunchasi
2. Aniq integralning asosiy xossalari. Anik integral hisobning asosiy formulasi Nyuton-Leybnits formulasi
3. Aniq integralda uzgaruvchini almashtirish va bulaklab integrallash usuli

Mavzuga oid tayanch tushunchalar va iboralar

Kesmada aniklangan, uzluksiz, integral yigindi, kuyi va yukori chegaralar, egri chizikli trapetsiya yuzasi. Anik integralning xossalari, anik integralni hisoblash, yuzani hisoblash.

Mavzuga oid muammoli savollar

1. egri chizikli trapetsiyaning yuzi.
2. segmentning bulinishi.
3. Integral yigindi.
4. Anik integral ta'rifi.
5. Anik integralning mavjudlik shartlari

1 – asosiy savol Anik integral tushunchasi

Uqituvchining maksadi

Talabalarga anik integral xakida tushuncha berish va uning geometrik ma'nosini tushuntirishdan iborat.

Identiv ukuv maksadlari

1. Utilgan yul xakida masalalarni echish bilan anik integral tushunchasini shakllantiradilar.
2. Egri chizikli trapetsiyani yuzini topish masalasini echish bilan anik integral tushunchasini shakllantiradilar.
3. Anik integral tushunchasini ta'riflay oladilar

1 - asosiy savolning bayoni.

$[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ chegaralangan funktsiya berilgan bo'lsin.

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan $[a, b]$ oraliqni n ta $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ oraliqlarga bo'lamiz bu oraliqlarning uzunliklarini mos ravishda $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ lar bilan belgilaymiz: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, n$ har bir oraliqdan ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib $f(x)$ ning bu nuqtadagi $f(\xi_k)$ qiymatini hisoblaymiz. Bu miqdorlardan

$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$ yig'indi tuzamiz. Bu yig'indini $y = f(x)$ funktsiyaning $[a, b]$ oraliqdagi integral yig'indisi deyiladi.

Integral yig'indi oraliqlarni bo'lishlar soniga bo'lishni usuliga va nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'ladi.

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ larining eng kattasini λ bilan belgilaymiz:

$$\lambda = \max \Delta x_k (k = 1, 2, \dots, n)$$

Ta'rif: Agar λ nolga intiladigan qilib, n ni cheksiz intiltirganda, integral yig'indi S_n ning limiti bo'lishlar usuliga va $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liqsiz holda biror J soniga intilsa, shu J soni $f(x)$ funktsiyaning $[a, b]$ oraliqlardagi aniq integrali deyiladi va u

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

kabi belgilanadi. Bu erda a -aniq integralning quyi chegarasi, b -yuqori chegarasi deyiladi.

2 – asosiy savol. Anik integral xossalari

1. Agar aniq integralning chegaralari almashtirilsa, uning ishorasi qarama-qarshiga almashadi:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

1. Yuqori va quyi chegarasi teng bo'lsa aniq integral nolga teng bo'ladi:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

2. Integrallash oraliqlarini bo'laklarga bo'lish mumkin:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b$$

3. o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k = const)$$

4. Yig'indining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int_a^b [f(x) + q(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b q(x)dx$$

Aniq integral Nyuton-Leybnitsning

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

formulasi yordamida hisoblanadi

3 – asosiy savol. Aniq integralni integrallash usullari

1. O'zgaruvchini almashtirish usuli

Agar $y = f(x)$ funktsiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib $x = \varphi(t)$ $[\alpha, \beta]$ deb bir qiymatli va uzluksiz hamda $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ bo'lsa, u holda $f(\varphi(t))$ funktsiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(\varphi'(t))dt \text{ formula o'rinli bo'ladi.}$$

2. Aniq integralni bo'laklab integrallash.

Agar u va v funktsiyalar $[a, b]$ da differentsiallanuvchi bo'lsa

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - v du$$

formula o'rinli bo'ladi.

1-Misol:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(4x^2 - \frac{6}{x^4} + \frac{8}{\sqrt[6]{x^7}} \right) dx &= 4 \int_1^2 x^2 dx - 6 \int_1^2 x^{-4} dx + 8 \int_1^2 x^{\frac{7}{6}} dx = 4 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - 6 \frac{x^{-3}}{-3} \Big|_1^2 + \\ &+ \frac{8x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} \Big|_1^2 = 4 \cdot \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1^3} \right) - 48 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}} - \frac{1}{\sqrt[6]{1}} \right) = 4 \cdot \frac{7}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{7}{8} \right) \\ &48 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{2}} \right) = \frac{28}{3} - \frac{7}{4} - \frac{48(1 - \sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}} = \frac{89}{12} - \frac{48(1 - \sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}} = \frac{89}{12} - \frac{48(1 - \sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}} = \\ &= 7 \frac{5}{12} - \frac{48(1 - \sqrt[6]{2})}{\sqrt[6]{2}} \end{aligned}$$

2-Misol:

$$\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x} dx \text{ ni hisoblang}$$

Echish:

Bu aniq integralni hisoblash uchun $x = 3 \cos \varphi$ almashtirish bajaramiz, u holda

$x = -3$ da $\varphi = \pi$

$x = 3$ da $\varphi = 0$ va $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(\cos \varphi)^2} = \sqrt{9-9\cos^2 \varphi} = 3\sin \varphi$

$x = -3\sin \varphi$ bo'ladi. Demak,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x} dx &= \int_{\pi}^0 9 \cos^2 \varphi \cdot 3 \sin \varphi \cdot (-3) \sin \varphi d\varphi = -81 \int_{\pi}^0 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= -81 \int_{\pi}^0 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{81}{4} \int_0^{\pi} (2 \sin \varphi \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{81}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\frac{81}{8} \int_0^{\pi} d\varphi - \frac{81}{8} \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi = \frac{81}{4} \varphi \Big|_0^{\pi} - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\varphi \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{81}{4} \pi - \frac{81}{4} \cdot 0 - \frac{81}{32} \sin 4\pi + \frac{81}{32} \sin 4 \cdot 0 = \frac{81}{8} \pi$$

3-Misol:

$\int_0^1 \arctan x dx$ ni bo'laklab integrallash usuli bilan toping

Echish:

$$\int_0^1 \arctan x = \left| \begin{array}{ll} \arctan x = u & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx & v = x \\ x=0 \Rightarrow u = \arctan 0 = 0 & u = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ x=1 \Rightarrow u = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} & \end{array} \right| =$$

$$= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \arctan \frac{\pi}{4} - 0 \cdot \arctan 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\alpha(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \right)$$

Misollar.

- | | |
|---|---|
| 1. a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ | b) $\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$ |
| 2. a) $\int_0^1 \frac{2^x}{4^x+16} dx$ | b) $\int_1^3 x \arctan x dx$ |
| 3. a) $\int_0^{\sqrt{5}} x \sqrt{x^2+4} dx$ | b) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+3 \ln^2 x}{x} dx$ |
| 4. a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ | b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ |
| 5. a) $\int_1^e x^2 \ln x dx$ | b) $\int_1^8 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ |
| 6. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ | b) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ |
| 7. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos 5x dx$ | b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ |
| 8. a) $\int_1^{10} x^2 \ln x dx$ | b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^7 x \cos x dx$ |
| 9. a) $\int_1^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx$ | b) $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$ |

$$10. a) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$b) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

16. Yo.U.Soatov. Oliy matematika. T., 1995.
17. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami.T.,1978.
18. T.A.Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz.1-qism, T.,1986.
19. N.S.Piskunov. Defferensial va integral hisob. 1-tom. T., 1972.
20. G.N.Berman. Sbornik zadach po matematicheskomo analizu. M., 1985.

Mavzu: Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari

Asosiy savollar:

- 1.Elementar xodisalar. Elementar xodisalar fazosi.
2. Xodisaning turlari.
3. Xodisalar ustida amallar.

Mavzuga oid tayanch tushuncha va iboralar:

Xodisa, elementar xodisalar, qarama-qarshi xodisalar, xodisalar yig'indisi, ko'paytmasi, ergashtiruvchi xodisalar, birgalikda va birgalikda bo'lmagan xodisalar, xodisalarining to'la gruppasi.

1-savol bo'yicha dars maqsadi:

1. Xodisa tushunchasini ta'riflash. Elementar xodisalar fazosini o'rganish.

Identiv-o'quv maqsadlar:

1. Xodisa tushunchasini aniqlaydi.
2. Elementar xodisalar fazosini aniqlaydi.

1 - asosiy savol bayoni:

Ehtimollar nazariyasi fani matematika fanlari ichida yangi fanlardan xisoblanadi. Ehtimollar nazariyasi tushunchalari xosil bo'lishiga kimor o'yinlari asosiy sabab bo'ldi. Asoschilari: Kardano, Gyuygens, Paskal va boshqalar. XVI-XVIII asr matematik va filosoflari. Keyinchalik bu fanni Bernulli, Laplas, Gauss va boshqa olimlar rivojlantiradi va fan sifatida namoyon bo'lishiga katta xissa qo'shdi. Xozirgi zamon ehtimollar nazariyasi rivojiga Bernshteyn,Kolmogorov, Romanovski, Sarimsoqov, Sirojiddinov, Azlarov kabi olimlar o'z ulushlarini qo'shdilar.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchasi-bu xodisa va tajriba tushunchalaridir. Tajriba xodisani ma'lum bir S kompleks sharoitda vujudga keltiradi.

Misol 1.Tajriba tanga tashlash bo'lsin. U holda S kompleks sharoit, tanganing bir jinsliligi, simmetrikligi va tanga tashlanayotgan joyning tekis va qattiqligi bo'ladi. Tanga tashlashda tanganing «gerb» yoki «raqam» tushish xodisasidir.

Ta'rif 1. Tajriba o'tkazilayotganda ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagan xodisa tasodifiy xodisa deyiladi.

Ta'rif 2. Tajribaning har qanday natijasi elementar xodisa deyiladi.

Ta'rif 3. Tajriba natijasida ro'y beradigan barcha elementar xodisalar, elementar xodisalar fazosi (E.X.F.) deyiladi. Odatda, E.X.F.ni U deb belgilanadi.

Misol 2. Kompleks sharoitda nishonga qarata 2ta o'q uzildi. Shu tajribada ro'y beradigan elementar xodisalar quyidagicha bo'ladi:

$$e_1 - \{1 - \text{yк meзadu}, 2 - \text{meзadu}\}$$

$$e_2 - \{1 - \text{yк meзadu}, 2 - \text{meзмайду}\}$$

$$e_3 - \{1 - \text{yк meзмайду}, 2 - \text{meзadu}\}$$

$$e_4 - \{1 - \text{yк meзмайду}, 2 - \text{meзмайду}\}$$

Demak, $U = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Shunday qilib, xar qanday tajriba, elementar xodisalar fazosini vujudga keltiradi. Bu xodisalar fazo elementlari, chekli, sinovli va katta kontinium quvvatga ega bo'lishi mumkin.

Nazorat topshiriqlari:

- 1.1 Elementar xodisa nima?
- 1.2 Elementar xodisalar fazosi nima?
- 1.3 Ehtimollar nazariyasi fanining asoschilari kimlar?
- 1.4 Kompleks sharoit qanday ta'riflanadi?
- 1.5 Muqarrar xodisa nima?
- 1.6 Mumkin bo'lmagan xodisa nima? Tasodifiy xodisa-chi?
- 1.6 Elementar xodisalar fazosi kontinum quvvatga ega bo'lishi mumkinmi?
- 1.7. Kompleks sharoitda tanga ikki marta tashlanyapti. Elementar hodisalar fazosida nechta elementar hodisa bo'ladi?

A)2 V)3 S)4 D)5 E)6.

2 - asosiy savolning bayoni:

Yuqorida ko'rganimizdek, tasodifiy xodisalar elementar xodisalardan tashkil topgan bo'lar ekan. qancha elementar xodisa, kubikni tashlagko'proq bo'lsa, shu tasodifiy xodisa ko'proq ro'y beradi. $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ va $B = \{e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}\}$ bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A xodisa V xodisaga qaraganda ko'proq ro'y beradi.

Ta'rif 4. Biror tajriba natijasida xar doim ro'y beradigan xodisa, muqarrar xodisa deyiladi. Muqarrar xodisa, elementar xodisalar fazosidagi barcha elementar xodisalarni o'z ichiga oladi. U - demak muqarrar xodisa ekan.

Ta'rif 5. Biror tajriba natijasida hech qachon ro'y bermaydigan xodisa, mumkin bo'lmagan (V) xodisa deyiladi.

Masalan: Kompleks sharoitda tanganing qirrasi bilan tushish xodisasi, mumkin bo'lmagan xodisaga misol bo'la oladi.

Bu bundan keyin, $U = \Omega, V = \emptyset$ deb belgilanadi.

Ta'rif 6. A xodisa ro'y berganda, ro'y bermaydigan xodisalar, A xodisaga qarama-qarshi xodisa deyiladi va $\bar{A}$ deb belgilanadi.

Masalan, juft son tushishini A xodisa deylik, u holda $\bar{A}$ xodisa toq son tushishi bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Muqarrar xodisani ta'riflang
2. qarama- qarshi xodisani ta'riflang.

3. Muqarrar va mumkin bo'lmagan xodisalar qanday belgilanadi
4. Tanga 3 marta tashlanganda, hech bo'lmaganda ikki marta “gerb” tushish xodisasida nechta elementar xodisa bo'ladi?
A) 4 V) 5 S) 6 D) 7 E) 8
5. Teng imkoniyatli xodisalarni tushuntiring.
6. “Abiturientning “ning o'qishga kirishi qaysi xodisaga kiradi?

3-asosiy savol:

Biz bu mavzuda xodisalar ustida ayrim munosabatlarni ko'ramiz.

Ta'rif 7. A ro'y berganda V albatta ro'y bersa. A xodisa V xodisani ergashtaradi deyiladi.
 $A \subset B$

Ta'rif 8. A yoki V yoki ikkalasi ham ro'y barganda ro'y beradigan xodisalar yig'indisi $A \cup V$ deyiladi.

Ta'rif 9. A va V xodisalar ro'y berganda ro'y beradigan xodisa ularning ko'paytmasi deyiladi, va $A \cap B$ deb belgilanadi.

Ta'rif 10. A ro'y berib V ro'y bermaganda ro'y beradigan xodisa $A-V$ ayirmasi deyiladi.

Ta'rif 11. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, A va V xodisalar birgalikda emas deyiladi.

Ta'rif 12. Agar $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ bo'lsa, u holda, $A_1, A_2, \dots, A_n$ xodisalar to'la gruppaga tashkil etadi deyiladi. Shu erda agar $A_i \cap A_g = \emptyset, i \neq g$ bo'lsa, o'zaro birgalikda bo'lmagan to'la gruppaga deyiladi.

1-masala. Kompleks sharoitda tanga ikki marta tashlanyapti. Elementar xodisalar fazosida nechta elementar xodisa bo'ladi?

- A) 2 V) 3 S) 4 D) 5 E) 6

Echish: Tangani ikki marta tashlaganda quyidagi elementar hodisalar ro'y beradi: $(g,g), (g,r), (r,g), (r,r)$. Demak 4 ta elementar hodisa bo'lar ekan.

2-misol. $A - (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$

$V - (2,4,6,8,10,12)$ bo'lsa: 1. $A \cup B \text{ q}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12)$

2. $A \cap B \text{ q}(2,4,6,8)$

3. $AG'V \text{ q}(1,3,5,7,9)$

O'quv xonasida bajarish uchun misollar: [1].39-bet. 2, 3, 4-misollar.

Nazorat uchun savollar:

- Ergashtiruvchi xodisalarga misol keltiring.
- Xodisalarning yig'indisini tushuntiring.
- To'la gruppaga nima?

4. $(A \cup B)C = AC \cup BC$ tenglikni isbotlang.

5. $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$ tekshiring.

6. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus AB = \overline{AB}$

7. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ tenglik to'g'rimi?

8. Ikkita shoshqoltoshni tashlaganda nechta elementar xodisa bo'ladi?

- A) 6 V) 12 S) 18 D) 24 E) 36

9. Kompleks sharoitda 3 ta simmetrik tanga tashlanganda nechta elementar xodisa mavjud.
A) 2 V) 3 S) 8 D) 6 E) 4
10. Tanga 3 marta tashlanganda, hech bo'lmaganda ikki marta "gerb" tushish xodisasida nechta elementar xodisa bo'ladi?
A) 4 V) 5 S) 6 D) 7 E) 8

Uyga vazifa uchun misollar:

[1].39-bet. 1-misol. g, d, e.

Adabiyotlar:

1. S.X. Sirojiddinov, M.M. Mamatov. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» T. «O'qituvchi»-1980y
2. B.V. Gnedenko "Kurs teorii veroyatnostey» M.Nauka. 1980.
3. Ejev «Kombinatorika».
4. V.E. Gmurman «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misollar».

Mavzu: Ehtimolning klassik ta'rifi. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta'riflari.

Asosiy savollar:

1. Ehtimolning klassik ta'rifi.
2. Kombinatorika elementlari.
3. Ehtimolning geometrik va statistik ta'riflari.

Mavzuga oid tayanch tushuncha va iboralar:

Xodisa, elementar xodisalar, teng kuchli elementar hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, kombinatorika elementlari (o'rinlashtirish, o'rin almashtirish, gruppash), ehtimolning geometrik ta'rifi, nisbiy chastota, ehtimolning statistik ta'rifi.

1-savol bo'yicha dars maqsadi:

Teng kuchli elementar hodisalar tushunchasini berish. Ehtimolning klassik ta'rifi kiritish.

Identiv-o'quv maqsadlar:

1. Teng kuchli elementar hodisalar tushunchasini aniqlaydi.
2. Ehtimolning klassik ta'rifi aniqlaydi.

1 - asosiy savol bayoni:

Bizga o'tgan mavzudan ma'lumki, Ω – barcha mumkin bo'lgan elementar xodisalar fazosi edi. Agar Ω – chekli to'plam bo'lsa, ya'ni unga kiruvchi elementar xodisaning ro'y berish imkoniyati bir hil bo'lsa, u holda bu elementar xodisalar teng imkoniyatli xodisalar deyiladi. Masalan, kubikni tashlanganda 1,2,3,4,5,6 ochkolari tushish xodisalari teng imkoniyatlardir.

Bizga ma'lumki, biror A tasodifiy xodisa (bir necha) elementar xodisalarni oladi. U holda quyidagi ta'rif, ehtimol tushunchasini aniqlaydi.

Ta'rif. A tasodifiy xodisaning ehtimoli deb $\frac{m}{n}$ songa aytiladi va $R(A)$ deb belgilanadi,

ya'ni $R(A) = \frac{m}{n}$, bu erda n -barcha elementar xodisalar soni, m - esa A xodisaga kiruvchi

elementar xodisalar soni. Ehtimolning bu ta'rifi uning klassik ta'rifi deyiladi.

Misol. 2 ta kubik tashlanganda raqamlar yig'indisi 9ga teng bo'lish xodisasining ehtimoli topilsin.

Echish. Barcha elementar xodisalar soni 36ta, ular $(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)$ elementar xodisalar. A xodisaga kiruvchi elementar xodisalar $(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)$ demak,

$m=4$. U holda $R(A) = \frac{4}{36}$. Klassik ta'rif bilan bevosita xisoblanadigan Mashqlarni [3] dan topish mumkin.

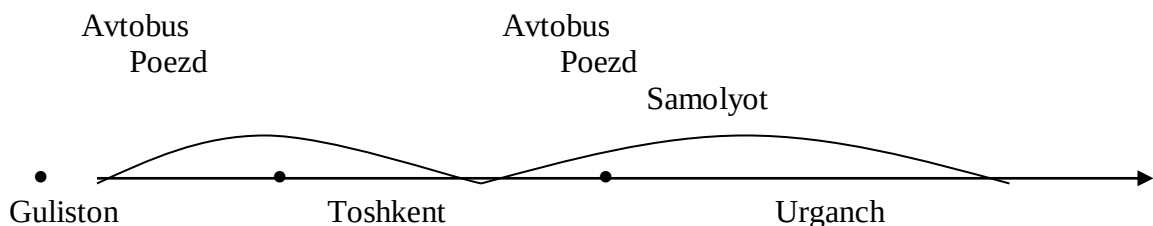
Nazorat uchun savollar:

1. Ikkita tangani baravar tashlanganda ro'y beradigan elementar xodisalar nechta?
2. Teng imkonichtli xodisa nima va unga misollar keltiring?
3. Ehtimol nima?
4. Uchta tanga baravar tashlanyapti, ikkitasini Raqam tomoni Bilan tushish xodisasining ehtimolini toping.
5. 100 ta lotoreyadan 10 tasiga bir so'mdan, 2 tasiga 25 so'mdan, 1 tasiga 50 so'm yutuq chiqdi. Aslida 1ta lotoreya bo'lsa, uning yutuq chiqmaslik ehtimolini toping.

2-savol bayoni:

Kombinatorika ehtimollar nazariyasi misol va mashqlarni echishda juda ko'p qo'llanishini xisobga olgan holda, biz bu ma'ruzada yoritishni lozim topdik.

Misol. Gulistondan Urgenchga borish. Faraz qilaylik, Gulistondan Urgenchga borish uchun, avval Gulistondan Toshkentga avtobusda yoki poezdda, so'ngra, Toshkentdan Urgenchga borish uchun avtobusda, poezdda va samolyotda borish imkoniyatlari bo'lsin. U xolda Gulistondan Urgenchga necha hil usul Bilan borish mumkin?



Ko'rinib turibdiki, Gulistondan Toshkentga 2-hil usul bilan, Toshkentdan Urgenchga 3 hil usul Bilan borish mumkin.

U holda Gulistondan Urgenchga quyidagi sxemada borish mumkin. $I \rightarrow T \rightarrow V$: $(a,a), (a,p), (a,s), (p,a), (p,s)$ ya'ni $2 \cdot 3 = 6$ xil usul Bilan borish mumkin ekan.

Bu bittadan tashlashni umumashtiramiz. Faraz qilaylik, k -ta har hil grupp bo'lib, 1-chisida n_1 , 2-chisidan $n_2, \dots$, k -chisidan n_k element mavjud bo'lsin. U holda bir gruppadan bitta tanlab k -elementli grupp tashkil etish uchun $N = n_1 \cdot n_2 \dots n_k$ (1) ta usul tanlash mumkin.

Endi misolni salgina boshqacharoq qo'yaamiz. Faraz qilaylik, n -elementli gruppaga berigan bo'lib bitta element olib uni fiksirlaymiz va yana gruppami qaytarib bu protsessni davom ettiramiz. Bu usulni k marta takrorlab k -elementli gruppami tuzamiz. Bu usulda tanlashlar soni $N = n^k$ bo'ladi. Buning isboti $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ desak, (1) dan kelib chiqadi. Bu songa o'rin almashtirishlar soni deyiladi. Bu tajribani ham salgina o'zgartiramiz. Yuqorida bayon etilgan gruppadan bitta element olib gruppaga qaytarmaymiz. 1-chi elementni n hil usul bilan, 2-chi elementni $n-1$ hil usul bilan, k -chi elementni $n-k+1$ xil usul bilan olish mumkin. U xolda k -elementli gruppaga xosil qilish uchun $N = n(n-1) \dots (n-k+1) = A_n^k$ hil usul bilan tanlash mumkin. Bu son o'rinlashtirish soni deyiladi. Agar $k = n$ bo'lsa, quyidagicha bo'ladi.

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

Endi n -elementli gruppami k -elementli gruppachalarga ajratib chiqamiz. Bunday ajratishlar usuli

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ta bo'lar ekan. Yuqorida bayon etilgan kombinatorika elementlari ehtimollar nazariyasi mashqlarini echishda keng qo'llaniladi.

Misol. Kartalar dastasidan (36 dona karta) tavakkaliga 4 tasi olindi. Shular ichida bitta tuz karta bo'lish ehtimolini toping.

Echish: 36 dona kartadan 4 tasi S_{36}^4 hil usul bilan olish mumkin, ya'ni $n = C_{36}^4$ olingan 4 ta kartaning bittasi tuz bo'lishi C_4^1 hil usul bilan, uchtasi boshqa karta bo'lishi esa C_{32}^3 usul bilan olish imkoniyati bor. Demak, $m = C_4^1 C_{32}^3$. Shunday qilib

ehtimolning klassik ta'rifiga binoan $P = \frac{C_4^1 C_{32}^3}{C_{36}^4} \approx 0.3368$ bo'ladi

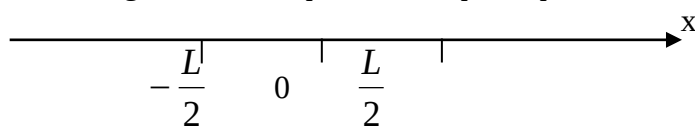
Nazorat uchun savollar:

1. Tanlash usullarini qanday tushunamiz.
2. Asosiy teorema nima?
3. n -elementli to'plamning k -elementli to'plamlar soni qanday xisoblanadi?
4. O'rin almashtirishlar nima?
5. O'rinlashtirish nima?
6. Bittadan tashlashlar sonini yozing.
7. 0,1,2,3,4 raqamlar nechta uch xonali son yozish mumkin?
A) 40 V) 48 S) 54 D) 64 E) 125
8. O'rin almashtirishlar sonini topish formulasini yozing
9. O'rinlashtirishlar sonini yozing.
1. Gruppalar sonini yozing.
- 2.1.2 Konvertidagi 100 ta foto kartochka 10 tasini necha xil usul bilan olish mumkin.
- 2.1.3. Tsexda 6 ta erkak va 4 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 ta ayol bo'lishi ehtimolini toping.
A) 0,5 V) 0,85 S) 0,55 D) 0,65 E) 0,7

3-asosiy savolning bayoni:

Ehtimolning klassik ta’rifi bilan ehtimolni topish xar doim ham mumkin bo’lavermaydi. Chunki, shunday tajribalar borki, bunday elementar xodisalar sonini ko’rsatishning imkoniyati yo’q.

Faraz qilaylik biror G soha berilgan bo’lib, bu biror G_1 o’z ichiga olsin. Ya’ni $G_1 \subset G$ soxaga tavakkaliga tashlangan nuqta G_1 ga tushish ehtimolni topish talab etigan bo’lsin. Bu erda barcha elementar xodisalar to’plami G to’plamning barcha nuqtalaridan iborat, ya’ni kontinium quvvatli. Shu sababli klassik ta’rifdan foydalana olmaymiz. Bunday masalalarni echishda $P(A) = \frac{\text{mes } G_1}{\text{mes } G}$ formuladan foydalaniladi. Bu erda «mes» to’plamning o’lchovini (uzunlik, yuza, xajm) bildiradi. Misol. L uzunlikdagi kesmaga tavakkaliga nuqta tashlandi. Tashlangan nuqta kesmaning o’rtasidan ko’pi bilan l masofada yotish xodisasining ehtimolini toping. Echish. L uzunlikdagi kesmaning o’rtasi sanoq boshi deb qabul qilamiz.



u holda yuqoridagi qanoatlantiruvchi nuqtalar to’plamini $-l \leq x \leq l$ bo’ladi. Bu kesmaning uzunligi $2l$ ga teng. U holda izlanayotgan ehtimol $P = \frac{2l}{L}$ ga teng. Bu mavzuga doir ko’plab misollarni [2] dan topish mumkin. Bundan tashqari shunday tajribalar bo’ladiki, ulardan birorta A xodisaning ro’y berish yoki ro’y bermasligi ma’lum son atrofida turg’un bo’ladi. Agar r tajribalar soni v -shu tajribalarda A xodisaning ro’y berishlar soni desak, u holda $w(A) = \frac{v}{n}$, A xodisaning nisbiy chastotasi deyiladi. Shu nisbiy chastota A xodisaning ro’y berish ehtimolini ham xarekterlaydi. Bunday usulda aniqlangan extimol sistematik xodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Masalan. Pirson degan olim tangani 24 ming marta tashlab tajriba o’tkazgan . Shulardan 12012 martasida raqam tarafi tushgan.Bundan ko’rinadiki tanganing

raqam tushish xodisasining statistik ehtimoli $\frac{12012}{24000}$ ga, ya’ni 0,5 ga yaqin . Bunday misollarni ko’plab keltirish mumkin. Xar bir student bunday tajribalarni o’tkazib turish mumkin.

Nazorat uchun savollar:

- 3.1. Ehtimolning klassik ta’rifi kamchiliklari nimadan iborat?
- 3.2. Tajriba kesmada yoki tekislikda o’tkazilsa, klassik ta’rif bo’yicha ehtimolni topish mumkinmi?
- 3.3. Tajriba fazo bo’lsa-chi?
- 3.4. Ehtimolni tajribalar o’tkazish bilan aniqlash mumkinmi?
- 3.5. Mashxur «uchrashuv» haqidagi masala nima?
- 3.6. Pirson, Gyugens tajribalari nima?
- 3.7. «mes»ni tushuntiring.
- 3.8. Geometrik ta’rif bo’yicha ehtimolni topish.
- 3.9. Har biri 1 dan kata bo’lmagan 2 ta x va u musbat sonlar tavakkaliga olingan. x qu yig’indisining 1 dan katta bo’lmaslik, xu ko’paytmasining 0,09 dan kichik bo’lmaslik ehtimolini toping.

3.1.1. Tangani 200 marta tashlab, undan gerb tarafini tushishini kuzating.

3.1.2 Nisbiy chastota nima?

3.1.3. Nishonga 20 ta o'q uzilgan, shundan 18tasi tekkani qayd etilgan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

A) 0,2 V) 0,6 S) 0,7 D) 0,8 E) 0,9

Uyga vazifa.

[4]: №42-45 misollar.

Adabiyotlar:

1. S.X. Cirojiddinov, M.M. Mamatov «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» T. "O'qituvchi" 1980G'
2. B.V. Gnedenko "Kurs teorii veroyatnostey" M. Nauka. 1980.
3. Ejev «Kombinatorika».
4. V.E. Gmurman «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misollar».

Mavzu: Matematik statistikaning asosiy vazifalari

Asosiy savollar

1. Tanlanma va uning berilish usullari.
2. Poligon va gistogramma. Emperik funkstiya.

Mavzuga oid tayanch tushuncha va iboralar:

Matematik statistikaning asosiy maqsad va vazifalari, bosh to'plam, tanlanma to'plam, tanlanma va uning berilish usullari, poligon, gistogramma, emperik funkstiya.

Savollar bo'yicha dars maqsadi:

Bosh to'plam, tanlanma to'plam tushunchasini berish. ta'rifi kiritish. Poligon, gistogramma va emperik funkstiya tariflarini kiritish.

Identiv-o'quv maqsadlar:

1. Bosh to'plam, tanlanma to'plam tushunchalarini aniqlaydi.
2. Poligon, gistogramma va emperik funkstiya tariflarini aniqlaydi.

Kuplab tasodifiy xodisa va voqealarning konuniyatlarini aniklash ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullariga asoslangan.

Matematik statistikaning birinchi masalasi statistik ma'lumotlarni yigish va gruppash yullarini kursatishdan iborat. Ikkinchi masala statistik ma'lumotlarni izlanishning maksadiga bogliq xolda taxlil qilish usullarini ishlab chikishdan iborat.

Demak matematik statistikaning masalasi statistik ma'lumotlarni yigish tartiblash va taxlil qilish usullarini ishlab chikishdan va ularni iktisodiyda va ishlab chikarishda ilmiy va amaliy xulosalar olishda foydalanishdan iborat.

Faraz kilaylik bir jinsli ob'ektlar majmuasi mikdor eki sifat nuktai nazaridan urganish talab kilinsin.

Ba'zan ushbu ob'ektlar birvarakayiga tekshiriladi. Ammo, amaliyda birvarakayiga tekshirish kamdan-kam xollarda kullaniladi. Odatda majmuadan tasodifiy ravishda chekli ob'ektlar tanlab olinadigan va shular asosida ish kuriladi.

Tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'ektlar tuplami tanlanma deyiladi.

Tanlanma olinaetgan barcha ob'ektlar majmuasi asosiy (general) tuplam deyiladi.

Majmuaning (asosiy eki kismiy) axjmi deb shu tuplamning tashkil etgan ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan 1000 detaldan tekshirish uchun 100 ta detal ajratib olingan bulsa, asosiy tuplamning xajmi N_{q1000} ? Tanlanmaning xajmi n_{q100} ga teng.

Tanlanma takrorlanuvchi va takrorlanmas bulishi mumkin.

Agarda tanlanma asosiy tuplamga kaytarilsa, uni takrorlanuvchi tanlanma kaytarilsa, uni takrorlanuvchi tanlanma deyiladi. Aks xolda takrorlanmas tanlanma deyiladi. Amaliyotda odatda takrorlanmaydigan tanlanmadan foydalaniladi.

Tanlanma reprezentativ bulishi shart, ya'ni u asosiy tuplamning xususiyatlarini tula aks xolda ettirishi kerak.

Tanlanmaning ir kancha usullari mavjud:

- 1) oddiy tasodifiy, ya'ni ob'ektlar asosiy tupladan bittadan ajratib olinadi;
- 2) turiga karab (tipik), ya'ni ob'ektlar asosiy tuplamdan tipik kismiga karab tanlanadi;
- 3) mexanik, bunda asosiy tuplam tanlanmada kancha ob'ekt bulsa shuncha kismga ajratiladi va xar kaysi kismdan bittadan ob'ekt ajratib olinadi;
- 4) seriyali bunda ob'ektlar asosiy tuplamdan bittadan emas birvarakayiga bir kanchasi olinadi va xammasi birgalikda tekshiriladi.

$(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmalardan tashkil topgan sinik chizikka aytiladi. Chastotalarni poligonini kurish uchun abstsissalar ukiga x_i kiymatlar, ordinatalar ukiga n_i kiymatar kuyiladi

(x_i, n_i) nuqtalar tugri chiziklar bilan birlashtirilib poligon xosil kilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmalardan tuzilgan sinik chizikka aytiladi.

Uzluksiz mikdorlarda gistogramma kurish maksadga muvofikdir. Bu xolda mikdornlarni uz ichiga olgan oralik va oralikchalarga bulinadi va ularning xr biri uchun n_i - i-chi oralikka tushgan chastotalar yigindisi xisoblanadi.

Chastotalar gistogrammasi deb zinapoyasimon figuraga aytiladi; kaysiki asosi h va balandligi n_i/n ga teng bulgan tugri turtburchaklardan tashkil topgan.

Faraz kilaylik X mikdorning chastotasini statistik taksimoti burilgan bulsin. Bunda n_x - x dan kichik bulgan mikdornlarni kuzatishlar soni, n - umumiy kuzatishlar soni.

$X < x$ xodisaning nisbiy chastotasini aniklovchi

$$F^*(x) = n_x / n,$$

Funktsiyaga taksimotning empirik funktsiyasi deyiladi, bunda n_x - x dan kichik variantlar soni, n -tanlanma xajmi.

Nazorat savollar.

1. Tanlanma va uning berilish usullari.
2. Tanlanmaning poligoni va gistogrammasi.

Tayanch iboralar.

Tanlanma. Tanlanmaning berilish usullari. Variatsion ъator, poligon, gistogramma.

Adabiyolar

1. Buldo'k G.M. “ Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika”, Kiev, 1989.
2. Venttsel, Ovcharov. “Teoriya veroyatnostey i ee injenerno'e prilozheniya”.
3. Kolemaev V.A. i dr. «Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika», 1991.

Oraliq baholash va yakuniy baholash savollari

1. Matematik jumlarlar.
2. Mantiqiy bog'lovchilar.
3. Mulohaza va uning qiymati.
4. Inkori amali.
5. Kon'yunksiya amali.
6. Diz'yunksiya amali.
7. Implikatsiya amali.
8. Ekvivalensiya amali.
9. To'plamlar, uning elementlari.
10. Chekli, cheksiz, bo'sh to'plamlar.
11. Teng to'plamlar, qism to'plam, universal to'plam.
12. To'plamlarning birlashmasi va uning xossalari.
13. To'plamlarning kesishmasi va uning xossalari.
14. To'plamlarning ayirmasi va uning xossalari.
15. To'plamlarning simmetrik ayirmasi va uning xossalari.
16. To'plamlarning to'ldiruvchisi va uning xossalari.
17. To'plamlarning dekart ko'paytmasi, kortejlar, kortejning uzunligi va komponentlari.
18. Predikatlar.
19. Predikatning rostlik sohasi.
20. Aynan rost va aynan yolg'on predikat.
21. Umumiylik kvantori.
22. Mavjudlik kvantori.
23. Kvantorli mulohazalar.
24. Predikatning inkori.
25. Predikatlarning kon'yunksiyasi.
26. Predikatlarning diz'yunksiyasi.

27. Predikatlarning implikasiyasi.

28. Predikatlarning ekvivalensiyasi.

29. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda yoziladi ?
30. Agar to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ da barcha koeffitsientlar noldan farqli bo'lsa ($A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$), u holda bu to'g'ri chiziqlarning koordinata tekisligidagi vaziyatini tushuntirib bering .
31. Dekart kordinatalarida tekislikning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
32. Agar tekislikning tenglamasida u yoki bu xad bo'lmasa, u kordinata o'qlariga nisbatan qanday joylashadi?
33. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
34. Ikki tekislikning paralellik va perpendikulyarlik shartlari nimadan iborat?
35. Sonli ketma – ketlikni ta'rifini aytib bering.
36. Qanday ketma – ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi? Misollar keltiring.
37. Qanday ketma- ketliklar monoton o'suvchi (kamayuvchi), o'smaydigan, kamaymaydigan deb ataladi? Misollar keltiring.
38. Ketma - ketlik limiti ta'rifini aytib bering .
39. Ketma- ketlik limitining mavjudligi xaqidagi teoremani aytib bering?
40. Qismiy ketma- ketlik nima? Boltsano – Veyershtrass teoremasini aytib bering.
41. $y = f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow a$ dagi limiti nima? Ta'rifini tengsizlik yordamida bering va uni geometrik nuqtai nazardan tushuntiring.
42. $y = f(x)$ funktsiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti ta'rifini aytib bering. Ta'rifni tengsizlik yordamida keltiring. Geometrik ma'nosini tushuntirib bering.
43. Bir tamonlama limit nima? Funktsiyaning nuqtadagi limti va bir tamonlama dimit tushunchalari qanday boglangan?
44. Qanday funktsiya chegaralangan funktsiya deb ataladi?
45. Qanday $y = f(x)$ funktsiya $x \rightarrow a$ da cheksiz katta funktsiya deb ataladi? Geometrik ma'nosini tushuntirib ering .
46. 66. Qanday $y = f(x)$ funktsiya $x \rightarrow \infty$ da cheksiz katta funktsiya deb ataladi? Ta'rifni tengsizliklar yordamida aytib bering.
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ formulani isbotlang .
48. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ formulani isbotlang .
49. $y = f(x)$ funktsiyaning X_0 nuqtada uzuliksizligi ta'rifini keltiring va giometrik ma'nosini aytib bering.
50. $f(x)$ funktsiyaning X_0 nuqtada chapdan va o'ngdan uzuluksizligi ta'rifini aytib bering .
51. Funktsiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
52. Cheksiz xosila ta'rifini bering.
53. Bir tamonlama xosila deb nimaga aytiladi?
54. Chiziqqa berilgan nuqtada urinma tugri chiziq deb nimaga aytiladi?
55. Funktsiyaning nuqtadagi xosilasining giometrik ma'nosi nimadan iborat ?
56. Xosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat ?
57. Yig'indi, kupaytma va bo'linmaning xosilasini xisoblash formulalarini keltirib chiqaring ?
58. Murakkab funktsiyaning differeni-mallash qoidasi nimadan iborat? Uni keltirib chiqaring.
59. Qanday funktsiya teskari funktsiya deyiladi. Misollar keltiring .
60. Teskari funktsiya diferentsiyalash qoidasi nimadan iborat? Uni keltirib chiqaring .
61. Funktsiyaning differentsiali deb nimaga aytiladi?
62. Funktsiyaning differentsiali uning xosilasi orqali qanday ifodalanadi?

63. Funktsiya diferentsialining geometrik ma'nosi nimadan iborat ?
64. Differentsialning asosiy xossalarini aytib bering.
65. Taqribiy xisoblashlarda differentsiallardan foydalanish nimalarga asoslangan.
66. Funktsiya qiymatlarini differentsial yordamida taqribiy xisoblash formulasini keltiring .
67. Kesmada o'suvchi va kamayuvchi funktsiya ta'rifini ifodalang?
68. Funktsiya usuvchi bo'lishining zaruriy va etarlilik shartlarini isbotlang. Bu teoremlarning geometrik mazmuni nimadan iborat.
69. Funktsiyaning ekstremum nuqtalarini, funktsiyaning ekstremal qiymatlarini ta'riflang .
70. Ekstremumning zaruriy shartini isbotlang. Bu shartning etarlilik emasligini ko'rsatuvchi misollar keltiring.
71. Funktsiya ekstremumi etarlilik emasligi birinchi xosila yordamida isbotlang ?
72. $y=f(x)$ funktsiya grafigining qavariqlik va botiqlik ta'rifini xamda egilish nuqtalari ta'rifini bering.
73. Egilish nuqtalari uchun etarlilik sharti nimadan iborat. Uni isbotlang.
74. $y=f(x)$ funktsiya grafigining qavariqligi va botiqligi intervallari va egilish nuqtalari qanday topiladi? Misollar keltiring.
75. Funktsiyani umumiy tekshiring va grafigini yasash sxemasini bayon qiling. Misollar keltiring.
76. Berilgan funktsiyaning n –tartibli xosilasi deb nimaga aytiladi ?
77. Funktsiyalar kupaytmasi differentsialini topishning Leybnits qoidasini tushuntiri bering .
78. Oshkormas funktsiyalarning yuqori tartibli xosilalari qanday topiladi?
79. Parametrik berilgan funktsiyalarning yuqori tartibli xosilalari qanday topiladi ?
80. Berilgan funktsiyaning n – tartibli differentsiali nimaga aytiladi ?
81. Ikki uzgaruvchining funktsiyasi ,uning aniqlanish soxasi deb nimaga aytiladi?Bu tushunchalarning geometrik talqinini bering?
82. Uch uzgaruvchining funktsiyasi , uning aniqlanish soxasi deb nimaga aytiladi ? Bu funktsiyaning aniqlanish soxasini geometrik nuqtai nazaridan qanday talqin qilish mumkin?
83. Ikki uzgaruvchi funktsiyasining nuqtadagi limiti deb nimaga aytiladi
84. Ikki o'zgaruvchi funktsiyasining uzulishi nuqtasi deb nimaga aytiladi
85. Bir necha uzgaruvchi funktsiyasining xsusiy xosilasiga ta'rif ering
86. Berilgan funktsiyasining boshlangich funktsiyasi deb nimaga aytiladi Misollar keltiring .
87. Berilgan funktsiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi ?
88. Aniqmas integralning eng oddiy xossalarini ifodalang va isbotlang
89. Aikmas integralda bulaklab integrallash formulasini chikaring. Misollar keltiring.
90. Aniqmas integralda uzgaruvini almashtirish usuli nimadan iborat ?Misollar keltiring.
91. I va II turdagi sodda ratsional kasrlar kanday integrallanadi? Misollar keltiring.
92. III turdagi oddiy ratsional kasr kanday integrallanadi? Misollar keltiring.
- 114.IV turdagi oddiy ratsional kasr kanday integrallanadi? Misollar keltiring.
93. $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$ kurinishdagi integrallarni yopish uchun rekkurent formula keltirib chikaring? Misollar keltiring.
94. Ratsional kasrni eng sodda kasrlarga ajratib, integrallash usulini tadbik eting. Misollar keltiring.
95. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ kurinishdagi integrallarni topish usullarini kursating (bunda R -ratsional funktsiya). Misollar keltiring.
96. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ kurinishdagi integrallarni topish usullarini bayon kiling, bu erda m, n -butun sonlar.

97. $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}) dx$ kurinishdagi integrallarni topish usullarini bayon kiling, bunda R-ratsional funktsiya, m, n-butun sonlar.
98. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ kurinishdagi integralni topish usullarini bayon kiling.
99. Kuyidagi kurinishdagi integrallarni topish usullarini bayon kiling:
100. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$
101. Berilgan kesmada berilgan funktsiyaning anik integrali deb nimaga aytiladi?
102. Anik integralning mavjudlik teoremasi nimadan iborat.
103. Anik integralning geometrik ma'noi ?
104. Aniqintegralning eng sodda xossalari ifodalang va isbotlang ?
105. Aniq integralning ishorasining saqlanish xossasi nimadan iborat ?
106. Aniq integralni baxolash xaqidagi teoremani ifodalang va isbotlang?Uning geometrik ma'nosi nimadan iborat ?
107. Nyuton – Lebnits formulasini yozing va isbotlang . Misollar keltiring .
108. Aniq integralda bulaklab integralash usuli nimadan iborat?
109. Aniq integralda uzgaruvchini almashtirish usuli nimadan iborat ? Misollar keltiring
- 110. Ehtimollar nazariyasi fanining predmeti, uning paydo bo'lishi va rivojlanish tarixi.**
- 111. Elementar hodisa nima?**
- 112. Elementar hodisalar fazosini tushuntirib bering.**
- 113. Tasodifiy hodisa.**
- 114. Muqarrar hodisa.**
- 115. Qarama-qarshi hodisa.**
- 116. Mumkin bo'lmagan hodisa.**
- 117. Hodisalar yig'indisi.**
- 118. Hodisalar ko'paytmasi.**
- 119. Hodisalar ayirmasi.**
- 120. Qachon hodisalar birgalikda emas deyiladi?**
- 121. To'la grupp nima?**
- 122. Teng imkoniyatli xodisalarni tushuntiring.**
- 123. Elementar xodisalar diskret fazosi.**
- 124. Tasodifiy hodisa ehtimoli.**
- 125. Ehtimollik xossalari.**
- 126. Ehtimolning klassik ta'rifi.**
- 127. O'rinlashtirishlar.**
- 128. O'rin almashtirishlar.**
- 129. Gruppalar.**
- 130. Ehtimolning geometrik ta'rifi.**
- 131. Nisbiy chastota nima?**
- 132. Ehtimolning statistik ta'rifi.**
- 133. Matematik statistikaning tarixi.**
- 134. Matematik statistikaning uch asosiy vazifasi.**
- 135. Matematik statistikaning uch asosiy masalasi.**
- 136. Bosh va tanlanma to'plam.**
- 137. Takroriy va takroriy bo'lmagan tanlanma.**
- 138. Rerezentativ tanlanma.**
- 139. Variatsion qator.**
- 140. ξ tasodifiy miqdor nisbiy chastotasi.**
- 141. ξ tasodifiy miqdor statistik (empirik) taqsimoti.**

142. Empirik taqsimot funktsiya.
143. Chastotalar poligoni.
144. Chastotalar gistogrammasi.
145. Tanlanmaning o'rta arifmetik qiymati.
146. Tanlanma dispersiyasi.
147. Taqsimotning o'rtacha kvadratik xatosi.
148. Bosh tanlanmaning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik xatosi.

Matematikadan testlar

1. $A(4, -5)$ va $B(7, -1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
 A) 5
 V) 3
 S) 1
 D) 7
2. Ox o'qida joylashgan va $A(3, 2)$, $B(1, -6)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtani toping.
 A) $(-6, 0)$
 V) $(0, 6)$
 S) $(6, 0)$
 D) $(0, -6)$
3. Koordinatalar boshidan $A(-3, -4)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.
 A) 5
 V) 6
 S) 7
 D) 10
4. $A(3, 2)$ va $B(6, 11)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesamni $\lambda = \frac{1}{2}$ nisbatda bo'luvchi S nuqtaning koordinatalarini toping.
 A) $S(4; 5)$
 V) $S(5; 4)$
 S) $S(5; 5)$
 D) $S(4; 4)$
5. $A(-4, 4)$ va $B(2, -4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesamni $\lambda = -2$ nisbatda bo'luvchi S nuqtaning koordinatalarini toping.
 A) $S(8; -12)$
 V) $S(8; -10)$
 S) $S(-4; 5)$
 D) $S(12; 4)$
6. Uchlari $A(-6, 2)$ va $B(-2, 8)$ nuqtalarda yotgan AB kesmaning o'rtasidan $D(2, 5)$ nuqtagacha bo'lgan masofani toping.
 A) 6
 V) 8

- S) 7
D) 10

7. Uchlari $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$ va $C(2, -2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzini hisoblang.

- A) 8
V) 9
S) 11
D) 10

8. To'g'ri to'rtburchakning uchlari $A(-3, -3)$, $B(5, -3)$, $C(5, 4)$ va $D(-3, 4)$ berilgan. To'rtburchakning yuzini toping.

- A) 56
V) 66
S) 76
D) 86

9. Berilgan $M_1(-2; 4)$, $M_2(6; 8)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasini toping.

- A) $2x + y - 10 = 0$
V) $x + y - 10 = 0$
S) $x + 2y - 10 = 0$
D) $2x + 2y - 10 = 0$

10. $A(3, -4)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti -3 ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

- A) $y = -3x + 5$
V) $y = -3x - 5$
S) $y = 3x + 5$
D) $y = 3x - 5$

11. $A(-3, 2)$ va $B(5, 7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini toping.

- A) $y = \frac{5}{8}x + \frac{31}{8}$
V) $y = \frac{7}{8}x + \frac{31}{8}$
S) $y = \frac{7}{8}x + \frac{27}{8}$
D) $y = \frac{3}{8}x + \frac{31}{8}$

12. $6x - 4y + 5 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasini burchak koeffitsientli va boshlang'ich ordinatali tenglama ko'rinishida yozing.

- A) $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

$$V) y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{7}$$

$$S) y = \frac{7}{8}x + \frac{23}{8}$$

$$D) y = \frac{5}{8}x + \frac{31}{8}$$

13. Berilgan $3x - 2y = 6$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan va $(0; 5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

$$A) y = -\frac{2}{3}x + 5$$

$$V) y = \frac{2}{3}x + 5$$

$$S) y = -\frac{2}{3}x - 5$$

$$D) y = \frac{2}{3}x - 5$$

14. Berilgan $A(-1; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va $4y - 3x + 8 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini toping.

$$A) y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$V) y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{7}$$

$$S) y = \frac{7}{8}x + \frac{23}{8}$$

$$D) y = \frac{5}{8}x + \frac{31}{8}$$

15. Quyidagi funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

$$A) 1 \leq x < 2$$

$$V) 1 \leq x \leq 2$$

$$) 1 < x < 2$$

$$D) 1 < x \leq 2$$

16. Quyidagi funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$A) -1 \leq x \leq 1$$

$$V) 1 \leq x \leq 2$$

$$S) 1 < x < 2$$

$$D) -1 \leq x \leq 2$$

17. Quyidagi funktsiyaning berilgan nuqtadagi qiymatini toping.

$$\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}; \quad x = \frac{3}{2}$$

- A) 0
- V) 1
- S) -1
- D) 10

18. Quyidagi funktsiyaning monoton yoki monoton emasligini tekshiring.

$$y = x^3 + 3x + 5$$

- A) o'suvchi
- V) kamaymaydigan
- S) o'smaydigan
- D) kamayuvchi

19. Ushbu 0, 4, 8, 12, 16,... ketma-ketlikning umumiy hadini toping.

- A) $a_n = 4n$
- V) $a_n = 2n$
- S) $a_n = 3n$
- D) $a_n = n$

20. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{5n^2 - 2n + 1}$$

- A) $\frac{3}{5}$
- V) $\frac{1}{2}$
- S) $\frac{5}{3}$
- D) $\frac{3}{2}$

21. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^2}{1 - n}$$

- A) 2
- V) ∞
- S) $-\infty$
- D) 3

22. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

V) 2

S) $\frac{5}{3}$

D) 1

23. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^2 + 1}}$$

A) $\frac{1}{6}$

V) $\frac{3}{5}$

S) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

24. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^8 + 1}$$

A) 4

V) 3

S) 5

D) 7

25. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 5x + 25}{x^2 - 25}$$

A) $\frac{3}{2}$

V) $\frac{3}{5}$

S) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{1}{6}$

26. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$$

A) $\frac{1}{3}$

V) $\frac{1}{6}$

S) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{3}{2}$

27. Quyidagi limitni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x + 5}{x^3 + 2x + 1}$$

A) 2

V) 3

S) 5

D) 7

28. Quyidagi limitni toping.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

A) 5

V) 3

S) 2

D) 7

29. Quyidagi limitni toping.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n} \right)^n$$

A) e^a

V) e

S) e^n

D) e^3

30. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

A) $4x-5$

V) $4x-3$

S) $-4x-5$

D) $4xQ5$

31. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \cos 4x$$

A) $-4\sin 4x$

V) $4\sin 4x$

S) $-4\cos 4x$

D) $4\cos 4x$

32. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \sqrt{3x-1}$$

A) $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

V) $\frac{1}{2\sqrt{3x-1}}$

S) $\frac{2}{\sqrt{3x-1}}$

D) $\frac{2}{3\sqrt{3x-1}}$

33. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \operatorname{ctg} x$$

A) $-\frac{1}{\sin^2 x}$

V) $\frac{1}{\cos^2 x}$

S) $\frac{1}{\sin^2 x}$

D) $-\frac{1}{\cos^2 x}$

34. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \frac{1}{x}$$

A) $-\frac{1}{x^2}$

V) $\frac{1}{x^2}$

S) $-\frac{1}{x}$

D) $\frac{1}{x}$

35. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

A) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

V) $\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

S) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

D) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

36. Funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$$

A) $1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}$

V) $1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

S) $1 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

D) $1 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^6}$

37. Murakkab funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = (1 + 2x)^5$$

A) $10(1 + 2x)^4$

V) $(1 + 2x)^4$

S) $10(1 + 2x)^6$

D) $10(1 - 2x)^4$

38. Murakkab funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \sin x^3$$

A) $3x^2 \cos x^3$

V) $3x^2 \sin x^2$

S) $3x^2 \sin x^3$

D) $3x^2 \cos x^2$

39. Murakkab funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = \sqrt[4]{1 + x^5}$$

A) $\frac{x^4}{\sqrt[5]{(1 + x^5)^4}}$

V) $\frac{x^3}{\sqrt[5]{(1 + x^5)^4}}$

S) $\frac{x^5}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}$

D) $\frac{x^6}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}$

40. Murakkab funktsiyaning hosilasini toping.

$$y = ctg \sqrt{x}$$

A) $-\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$

V) $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$

S) $-\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$

D) $-\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}}$

41. Funktsiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.

$$y = x^6 + 3x^3 - 5x^2 + 7$$

A) $120x^2 + 18$

V) $160x^2 + 5$

S) $10x - 2$

D) $180x - 6$

42. Funktsiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.

$$y = 3x^5 + x^3 - 2x + 5$$

A) $180x^2 + 6$

V) $160x^2 + 5$

S) $10x - 2$

D) $180x - 6$

43. Funktsiyaning uchinchi tartibli hosilasini toping.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

A) $-\frac{24}{x^5}$

V) $-\frac{24}{x^3}$

S) $\frac{3}{x^6}$

D) $\frac{12}{x^5}$

44. Aniqmas integralni hisoblang.

$$y = \int \sqrt[3]{x^2} dx$$

A) $\frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$

V) $\frac{2}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$

S) $-\frac{2}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$

D) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$

45. Aniqmas integralni hisoblang.

$$y = \int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$$

A) $2\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{5}{3}x - 1 \right) + C$

V) $\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 \right) + C$

S) $\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^2 + \frac{5}{3}x - 1 \right) + C$

D) $\sqrt{x} \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{5}{3}x - 1 \right) + C$

46. Integralni bo'laklab integrallash usuli bilan toping.

$$\int x \cdot \sin x dx$$

A) $-x \cos x + \sin x + C$

V) $x \cos x + \sin x + C$

S) $x \cos x - \sin x + C$

D) $-x \cos x - \sin x + C$

47. Integralni bo'laklab integrallash usuli bilan toping.

$$\int x \cdot \sin x dx$$

A) $x \sin x + \cos x + C$

V) $x \cos x + \sin x + C$

S) $x \cos x - \sin x + C$

D) $-x \cos x - \sin x + C$

48. Aniq integralni hisoblang.

$$\int_1^3 x^3 dx$$

- A) 20
- V) 15
- S) 10
- D) 25

49. Aniq integralni hisoblang.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx$$

- A) $\frac{14}{3}$
- V) $\frac{11}{3}$
- S) $\frac{13}{3}$
- D) $\frac{16}{3}$

50. Aniq integralni hisoblang.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$$

- A) $\frac{1}{2}$
- V) $\frac{1}{3}$
- S) $\frac{1}{4}$
- D) $\frac{1}{5}$

51. Aniq integralni hisoblang.

$$\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx$$

- A) $\frac{63}{24}$
- V) $\frac{63}{3}$

S) $\frac{24}{25}$

D) $\frac{61}{24}$

52. $y = 6x - x^2$ parabola va Ox o'qi bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

A) 36

V) 25

S) 16

D) 26

53. N va Z to'plamlarning birlashmasi va kesishmasini toping.

A) Z va N

V) N va Z

S) Z va Z

D) N va N

54. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ va $B = \{2, 4, 6, 8\}$ to'plamlarning $A \times B$ da nechta juftlik bo'ladi.

A) 24

V) 10

S) 16

D) 36

55. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ ajoyib limitning qiymatini toping.

A) 2,71828...

V) 2,71728...

S) 2,71928...

D) 2,71628...

56. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}$ ni toping.

A) $\frac{1}{2}$

V) $\frac{1}{3}$

S) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{7}$

57. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 3x^3}{x^3}$ ni toipng.

A) 5

- V) 3
- S) 4
- D) 1

58. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ ni toping.

- A) 5
- V) 3
- S) 4
- D) 1

59. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$ ni toping.

- A) 1
- V) 2
- S) 3
- D) 4

60. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 8x}{2x^2 - 7x^3}$ ni toping.

A) $-\frac{3}{7}$

V) $\frac{1}{3}$

S) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{8}$

61. Lopital qoidasidan foydalanib $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

A) $\frac{1}{6}$

V) $\frac{1}{3}$

S) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{3}{7}$

62. $y = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$ funktsiyaning hosilasini toping.

A) $\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$

V) $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$

S) $\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$

D) $-\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$

63. $y = \frac{2}{x^4}$ funktsiyaning hosilasini toping.

A) $-\frac{8}{x^5}$

V) $\frac{8}{x^5}$

S) $\frac{2}{x^5}$

D) $-\frac{2}{x^5}$

64. $y = \frac{3x^3 + 5x}{7}$ funktsiyaning hosilasini toping.

A) $-\frac{9x^2 + 5}{7}$

V) $\frac{3x^2 + 5}{7}$

S) $\frac{9x^2 + 5}{7}$

D) $-\frac{3x^2 + 5}{7}$

65. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ funktsiyaning hosilasini toping.

A) $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

V) $-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

S) $-\frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

D) $\frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

66. $y = \sqrt{1 + 3x^2}$ funktsiyaning hosilasini toping.

A) $-\sqrt{1 + 3x^2}$

V) $\sqrt{1 + 3x^2}$

S) $-\frac{2x}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}}$

D) $\frac{2x}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}}$

67. $\int (x^2 + 2)x dx$ integralni hisoblang.

A) $\frac{x^3}{3} + x + C$

V) $\frac{x}{2} + x^2 + C$

S) $\frac{x^4}{4} + x^2 + C$

D) $\frac{x^3}{4} + x^2 + C$

68. $\int \frac{dx}{x+1}$ integralni hisoblang.

A) $\ln x + 1$

V) $\ln(x+1)$

S) $\ln x$

D) $x \ln(x+1)$

69. $\int \frac{dx}{5-6x}$ integralni hisoblang.

A) $-\frac{1}{6} \cdot \ln |5-6x|$

V) $\frac{1}{6} \cdot \ln |5-6x|$

S) $\ln |5-6x|$

D) $-\ln |5-6x|$

70. $\int \cos(2-5x) dx$ integralni hisoblang.

A) $-\frac{1}{5} \sin(2-5x)$

V) $\frac{1}{5}\sin(2-5x)$

S) $\sin(2-5x)$

D) $-\sin(2-5x)$

71. $z = \arctg \frac{y}{x}$ funktsiyaning to'liq differentsialini toping.

A) $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

B) $dz = \frac{ydy - xdx}{x^2 + y^2}$

C) $dz = \frac{xdy - ydx}{x + y}$

D) $dz = \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$

72. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funktsiyaning to'liq differentsialini toping.

A) $dz = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

B) $dz = \frac{xdx + ydy - zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

C) $dz = \frac{xdx - ydy - zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

D) $dz = \frac{xdx - ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

73. Agar oshkormas funktsiya $F(x, y, z) = 0$ tenglama bilan berilgan va $F'_x(x, y, z) \neq 0$ bo'lsa, oshkormas funktsiyaning hosilasini toping.

A) $\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}; \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}$

B) $\frac{dz}{dx} = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}; \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}$

C) $\frac{dz}{dx} = \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}; \frac{dz}{dy} = \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}$

D) $\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}; \frac{dz}{dy} = \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_x(x, y, z)}$

74. Agar sirt $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bu sirtga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini toping.

A) $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

B) $z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

C) $z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

D) $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$

75. Agar sirt $F(x, y, z) = 0$ tenglama bilan oshkormas ko'rinishida berilgan bo'lsa, sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini toping.

A) $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$

B) $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) - F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) - F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$

C) $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) - F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$

D) $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0)$

76. Agar sirt $F(x, y, z) = 0$ tenglama bilan oshkormas ko'rinishida berilgan bo'lsa, sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasida o'tkazilgan normal tekislik tenglamasini toping.

A) $\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} + \frac{(y - y_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} + \frac{(z - z_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}$

B) $\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} - \frac{(y - y_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} - \frac{(z - z_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}$

C) $\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} - \frac{(y - y_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} + \frac{(z - z_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}$

D) $\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} + \frac{(y - y_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} - \frac{(z - z_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}$

77. Abstissalar o'qidagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formulalardan qaysi birida to'g'ri ifodalangan?

A) $|AB| = |x_2 - x_1|$

V) $AB = x_1 - x_2$

S) $|AB| = -|x_2 - x_1|$

D) $|AB| = -(x_2 - x_1)$

78. Tekislikdagi ikki nuqta $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ifodalangan?

A) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

V) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

S) $|AB| = -\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

D) $|AB| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

79. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini ifodalaydi?

A) $Ax + By + C = 0$

V) $Ax + By - C = 0$

S) $Ax - By - C = 0$

D) $-Ax + By - C = 0$

80. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti tenglamasi quyidagilardan qaysi biri?

A) $y = kx + b$

V) $y = -kx + b$

S) $y = -kx - b$

D) $y = kx - b$

81. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini ifodalaydi?

A) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

V) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$

S) $-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

D) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1$

82. $2x - 5y - 3 = 5$ to'g'ri chiziqning Ox o'q bilan kesishgan nuqtasi quyidagi nuqtalardan qaysi biri?

A) $A_1(4;0)$

V) $A_2(0;4)$

S) $A_3(-4;0)$

D) $A_4(0;-4)$

83. Berilgan $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilganda o'zaro parallel bo'ladi?

A) $k_2 = k_1$

V) $k_1 = -k_2$

S) $k_2 = -k_1$

D) $-k_2 = 2k_1$

84. Berilgan $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilganda o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

A) $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

V) $k_1 = \frac{2}{k_2}$

S) $k_2 = \frac{1}{k_1}$

D) $2k_2 = -\frac{1}{k_1}$

85. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti tenglamasidagi k ning qiymati quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ifodalangan?

A) $k = \operatorname{tg} \alpha$

V) $k = \operatorname{tg} 2\alpha$

S) $k = -\operatorname{tg} 2\alpha$

D) $k = -\operatorname{tg} \alpha$

86. $z = f(x, y)$ funktsiyaning to'liq hosila formulasini toping.

A) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$

B) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$

C) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dz + \frac{\partial z}{\partial y} dz$

D) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dz - \frac{\partial z}{\partial y} dz$

87. Quyidagilardan kaysi biri to'plam birlashmasini ifodalaydi.

A) $A \cup D$

B) $A \cap D$

C) $A \Delta D$

D) $AG'B$

88. Quyidagilardan qaysi biri to'plam ayirmasini ifodalaydi.

A) $A \cup D$

B) $A \cap D$

C) $A \Delta D$

D) $AG'V$

89. O'rinashtirish formulasini belgilang.

A) $P_n = Ni$

B) $C_n^k = \frac{ni}{(n-k)i}$

C) $A_n^k = \frac{ni}{(n-k)i * ki}$

D) To'g'ri javob keltirilmagan.

90. sexda 6 ta erkak 4 ta ayol ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratildi. Ajratilganlar orasida 3 ta ayol bo'lish ehtimolini toping.

A) 0,5

B) 0,85

- C) 0.55
- D) 0,65
- E) 0,7

91. Qaysi javobda natural sonlar to'plami berilgan.

- A) $A = \{1, 2, \dots, 1000, \dots\}$
- B) $A = \{-1, -2, -3, \dots\}$
- C) $C = \{1/2, 1/3, \dots\}$
- D) $D = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

92. To'plam birlashmasi berilgan qatorni belgilang.

- A) $A \cup B$
- B) $A \cap B$
- C) $A \subset B$
- D) to'g'ri javob berilmagan

93. Qism to'plam berilgan qatorni belgilang.

- A) $A \supset B$
- B) $A \notin B$
- C) $A \not\subset B$
- D) $A \neq B$

94. x son A to'plamga tegishli tushunchasini beradigan qatorni ayting.

- A) $A \in x$
- B) $x \in A$
- C) $x \subset A$
- D) to'g'ri javob berilmagan.

95. Soda jumla berilgan qatorni ko'rsating.

- A) 28 soni juft.
- B) 28 juft son va u 7 ga bo'linadi.
- C) 4 soni 7 sonidan kichik.
- D) to'g'ri javo berilmagan.

96. Teng kuchili jumla deb nimaga aytiladi.

- A) Agar A jumladan V jumla kelib chiqsa, V jumladan A jumla kelib chiq.
- B) Agar A jumladan V jumla kelib chiqsa.
- C) V jumladan A jumla kelib chiqsa.
- D) To'g'ri javob berilmagan.

97. Teng kuchlilik belgisini ko'rsating.

- A) $\neq$
- B) $\Leftrightarrow$
- C) $\Leftarrow$
- D) $\leq$

98. A va V to'plamlarning kesishmasi deb shunday to'plamga aytiladiki

- A) U faqat A to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- B) U faqat V to'plamni o'z ichiga oladi.
- C) U faqat A va V to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.

D) To'g'ri javob berilmagan.

99. A va V to'plamlarning birlashmasi deb.....

- A) U faqat A va V to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- B) U faqat V to'plamni o'z ichiga oladi.
- C) U faqat A to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- D) A va C javoblar.

100. A va V to'plamlarning Dekar ko'paytmasi deb shunday to'plamga aytilvadiki.

- A) Birinchi komponentasi A to'plamga, ikkinchi komponentasi V to'plamga tegishli bo'lgan juftliklar to'plamiga aytiladi.
- B) U faqat A va V to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- C) Birinchi komponentasi A to'plamga, ikkinchi komponentasi V to'plamga tegishli bo'lmagan to'plamga aytiladi.
- D) Birinchi komponentasi A to'plamga

101. Agar X va U to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda ular deyiladi.

- A) Teng quvvatli to'plam.
- B) Teng to'plam.
- C) O'zaro teng to'plam.
- D) To'g'ri javob berilmagan.

102. Agar X to'plamdagi ixtiyoriy element xaqida u o'z- o'zi bilan R munosabatda deyish mumkin bo'lsa, X to'plamdagi munosabat deyiladi.

- A) Teng munosabat.
- B) Refleksiv munosabat.
- C) Ekvivalen munosabat.
- D) To'g'ri javob berilmagan.

103. A va V to'plamlarning kesishmasi deb shunday to'plamga aytiladiki

- A) U faqat A to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- B) U faqat V to'plamni o'z ichiga oladi.
- C) U faqat A va V to'plamga tegishli elementlarni o'z ichiga oladi.
- D) To'g'ri javob berilmagan.

Adabiyotlar ro'yxati:

1. T.A. Azlarov., X. Mansurov, Matematik analiz. I-II qism. T., O'qituvchi. 1990.
2. R.N. Nazarov., B.T. Toshpo'latov, A.F. Dusumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. T., O'qituvchi. I qism, 1993.
3. R.N. Nazarov., B.T. Toshpo'latov, A.F. Dusumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. T., O'qituvchi. II qism, 1995.
4. V. Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami. T., O'qituvchi. 1998.
5. G. Berman. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. M. 1985.
6. C.X. Sirojiddinov, M.M. Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T., O'qituvchi. 1980.
7. E.U. Soatov. Oliy matematika. 1-qism. T., 1992.
8. B.A. Abdualimov. Oliy matematika. T., O'qituvchi, 1994.
9. F. Rajabov, A. Nurmetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., O'qituvchi, 1990.
10. T. Jo'rayev va boshqalar. Oliy matematika asoslari. T., O'zbekiston, 1994.
11. Sh. I. Tojiyev. Oliy matematikadan masalalar echish. T., O'zbekiston. 2002.
12. X. Latipov, Sh. Tojiyev. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., 1995.
13. Yo. U. Soatov. Oliy matematika. 3-jild. T., O'zbekiston, 1996.
14. Kostrikin A.I. Vvedenie algebra, M. 1977 g.
15. Fadeev D. K. Lektsii po algebra 1984 g.
16. Nazarov R.N. va boshqalar Algebra va sonlar nazariyasi, I-qism, T, 1993y
17. Taxa X. Vvedenie v teoriyu issledovanie operatsiy, 1985, 1-3 chasti, M., Mir.
18. Kompyuterno'e ekonomiko-matematicheskie modeli. M, 1995.
19. Gmurman V.E. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika", T., Ukituvchi, 1977.
20. Gmurman V.E. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika"dan masalalar echishga doir kullanma, T., Ukituvchi, 1980.
21. Venetskiy I.G., Venetskaya V.I. Osnovno'e matematik0-statisticheskie ponyatiya i formula v ekonomicheskoy analize. Sprav. Vo'sshaya shkola, 1978.

M u n d a r i j a

1. Mulohazalar. Munosabat va moslik	17
2. To'plam va uning elementlari	23
3. Sonli to'plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammasi	25
4. Kompleks son va ular ustida amallar	30

5. Geometriya faning rivojlanish tarixi. Nuqtaning koordinatalari. Ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish	41
6. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari	45
7. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.....	53
8. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning o'zaro munosabati.....	58
9. Funktsiya tushunchasi. Asosiy elementar funktsiyalarni tekshirish.....	64
10. Funktsiyaning limiti	67
11. Funktsiya hosilasi ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi.....	80
12. Boshlang'ich funktsiya, aniqlanmas integral. Integrallar jadvali.....	93
13. Aniq integral va uning geometrik ma'nosi.....	100
14. Ehtimollar nazariyasiining asosiy tushunchalari.....	105
15. Ehtimolning klassik ta'rifi. Kombinatorika elementlari. Ehtimolning boshqa ta'riflari	109
16. Matematik statistikaning asosiy azifalari.....	114
17. Oraliq nazorat va yakuniy nazorat uchun savollari.....	117
18. Test savollari.....	121
19. Adabiyotlar.....	144

