

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАҲСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ФАРҒОНА ПОЛИТЕХНИКА ИНСТИТУТИ

“ИШЛАБ ЧИҚАРИШДА БОШҚАРУВ” ФАКУЛТЕТИ

“ОЛИЙ МАТЕМАТИКА” КАФЕДРАСИ

**“Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика”
фанидан**

МАЪРУЗА МАТНИ

ФарПИ илмий услубий кенгашида
тасдиқланган мажлис баёни № _____
“ _____ ” _____ 2012 й

«Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанини ўқитишнинг асосий мақсади ва вазифаси бакалаврларни эҳтимоллар назариясининг тасодифларига тўла бўлган жараёнлар учун оптимал ечимларини топишдаги принциплари, усуллари ва қоидалари билан чуқур ва ҳар томонлама таништиришдан иборат.

Шунингдек предметни ўзлаштиришда қўзланган мақсад бакалаврларнинг математика статистика усулларини тушунишга ва масалаларни ечиш учун қўллай билишга ўргатишдир.

Тузувчилар:

доц:М.Мамажонов
Асс: Ж.Файзуллаев
Асс: Б.Бозоров

Тақризчи:

доц:А.Абдуразақов

КИРИШ

Ўзбекистонда «Таълим тўғрисида» ги қонун ва кадрлар тайёрлаш миллий дастурни қабул қилиниши – юқори малакали рақобатбардош мутахассислар тайёрлаш масаласига муҳим аҳамият беришни талаб қилади.

Бозор иқтисодиёти шароитида техника ва иқтисодиёт муаммолари замонавий ахборот технологиясидан фойдаланган ҳолда тез ва энг мақул ечимларни топиш, таҳлил қилиш ва тўғри қарор қабул қилиш муҳим аҳамиятга эга.

Кўрсатма “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фанидан амалий машғулотлар ва лаборатория ишларини бажариш учун мўлжалланган. Кўрсатмада асосий дискрет тақсимотлар, маълумотларни дастлабки тахлили, нуқтавий баҳолаш, бир танланма учун мўлжалланган статистик мезон, Чизикли ва чизиксиз регрессия, вақтли қаторлар ҳақида қисқача назарий маълумот, кўрсатмалар ва мустақил ишлаш учун мисол вариантлари берилган.

И.606 ЭХТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ АСОСЛАРИ

1–§. Ҳодисалар ва уларнинг турлари. Ҳодисалар устида амаллар

1. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири тажриба ва тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган ҳодиса тушунчаларидир.

Ҳодиса дейилганда рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳар қандай воқеани тушунамиз.

Тажриба ҳодисани рўёбга келтирувчи шартлар мажмуи (шартлар комплекси) S нинг бажарилишини таъминлашдан иборатдир. Бу жумлалар аниқ математик таъриф бўла олмасда, биз шу билан чекланамиз.

1–**мисол. Тажриба** – ичида фақат оқ ва қора шарлар бўлган яшиқдан тавақкалига битта шар олиш.

Ҳодиса – олинган шарнинг биз хоҳлаган рангда бўлиши.

Изоҳ. Биз қизиққан ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги ўтказилаётган тажрибанинг шартлар комплекси S га боғлиқдир. Шунинг учун бу шартлар олдиндан келишиб олинади.

Тажрибанинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодисалар* дейилади. Ҳар қандай тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар ҳодисалар тўплами ташкил этади. Элементар ҳодисалар тўпламини Ω орқали, ҳар бир элементар ҳодисани эса $e(e \in \Omega)$ орқали белгилаймиз.

2–**мисол.** Тажриба симметрик, бир жинсли тангани икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$e_1 = (ГГ)$ –биринчи ташлашда герб, иккинчисида ҳам герб тушиш ҳодисаси;

$e_2 = (ГР)$ –биринчи ташлашда герб, иккинчисида рақам тушиш ҳодисаси;

$e_3 = (РГ)$ –биринчи ташлашда рақам, иккинчисида герб тушиш ҳодисаси;

$e_4 = (РР)$ –биринчи ташлашда рақам, иккинчисида ҳам рақам тушиш ҳодисаси;

Бу тажрибада элементар ҳодисаларнинг Ω тўплами тўрт элементдан иборат;

3–**мисол.** Тажриба ёқлари бирдан олтигача номерланган бир жинсли ўйин соққасини (кубни) икки марта ташлашдан иборат бўлсин. Бу ҳолда элементар ҳодисалар ушбу кўринишга эга: $e_{иж} = (и, ж)$

Бу ҳодиса кубни биринчи ташлашда $и$ рақамли ёқ, иккинчи ташлашда $ж$ рақамли ёқ тушганлигини билдиради. Бу ерда

$$\Omega = \{e_{иж}\}, \quad и, ж = 1, 6$$

ва элементар ҳодисалар сони $N = 6^2 = 36$ (1–жадвал);

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1;1 & 2;1 & 3;1 & 4;1 & 5;1 & 6;1 \\ 1;2 & 2;2 & 3;2 & 4;2 & 5;2 & 6;2 \\ 1;3 & 2;3 & 3;3 & 4;3 & 5;3 & 6;3 \\ 1;4 & 2;4 & 3;4 & 4;4 & 5;4 & 6;4 \\ 1;5 & 2;5 & 3;5 & 4;5 & 5;5 & 6;5 \\ 1;6 & 2;6 & 3;6 & 4;6 & 5;6 & 6;6 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Тажриба натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса муқаррар ҳодиса ва аксинча, мутлақо рўй бермайдиган ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса дейилади ва уларни мос равишда Y , B ҳарфлар орқали белгиланади. Тўпلام маъносида Y ва B ларни мос равишда $Y=\Omega$ ва $B=\emptyset$ ($\emptyset$ =бўш тўпلام) каби белгилаймиз. Тажриба натижасида рўй бериши олдиндан аниқ бўлмаган ҳодиса тасодифий ҳодиса дейилади. Тасодифий ҳодисалар, одатда, лотин алфавитининг бош ҳарфлари A , B , C , ... лар билан белгиланади.

Ҳар қандай тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар тўпламидан иборат бўлиб, унинг “катта–кичиклиги” унга кирган элементар ҳодисалар “сонига” боғлиқдир.

4–мисол. A ҳодиса 3–мисолдаги тажрибада соққани 1– ва 2–марта ташлашда унинг ёқларида тушган очколар йиғиндиси еттига тенг бўлишидан иборат бўлсин. A ҳоди–са 1–жадвалга кўра $A=(e_{1,6}, e_{2,5}, e_{3,4}, e_{4,3}, e_{5,2}, e_{6,1})$ каби бўлади, яъни тажриба натижасида ена рўй берса, ёки $e_{1,6}$ рўй берса, ёки $e_{2,5}$ рўй берса, ёки $e_{3,4}$ ва ҳоказо ёки $e_{6,1}$ рўй берса, A ҳодиса рўй беради, деймиз. Шундай қилиб A ҳодиса 6 та элементар ҳодисадан ташкил топган экан.

A бирор ҳодиса бўлсин. A ҳодисага қарама–қарши ҳодиса деб $\bar{A}$ ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат ҳодисани тушунамиз. Бу ҳодисани $\bar{A}$ орқали белгилаймиз. Масалан, соққани бир марта ташлаганда жуфт очко тушиши A ҳодиса бўлсин, у ҳолда $\bar{A}$ ҳодиса тоқ очко тушишини билдиради.

5. Муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодифий ҳодисаларга мисоллар келтиринг.

6. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани уч марта ташлашдан иборат бўлсин. Рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўпламини

ёзинг.

$$\text{Жавоб. } \Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} e_{GGG}, & e_{GGR}, & e_{GRP}, & e_{RRR} \\ e_{RRR}, & e_{RRG}, & e_{RGG}, & e_{GGG} \end{array} \right\}$$

7. B ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда (ақалли) икки марта герб тушишидан иборат бўлсин. B ни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг.

$$\text{Жавоб. } B = \{e_{GGG}, e_{GGR}, e_{GRP}, e_{RRG}\}$$

8. C ҳодиса тангани уч марта ташлашда ҳеч бўлмаганда бир марта герб тушишидан иборат бўлсин. C ни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг.

$$\text{Жавоб. } C = \{e_{GGG}, e_{GGR}, e_{GRP}, e_{RRG}, e_{RRR}, e_{RRG}, e_{RRG}\}$$

9. Иккита ўйин соққаси ташланган. Қуйидаги ҳодисаларни ташкил қилувчи элементар ҳодисаларни ёзинг: а) тушган очколар йиғиндиси саккизга тенг; б) тушган очколар айирмаси тўртга тенг.

Жавоб. а) $(e_{2,6}, e_{3,5}, e_{4,4}, e_{6,2}, e_{5,3})$,

б) $(e_{5,1}, e_{6,2})$

2. Ҳодисалар орасидаги қуйидаги муҳим муносабатларни (амалларни) билиш жуда зарурдир. Уларни таърифлаймиз.

1) Агар A ҳодисани ташкил этган ҳамма элементар ҳодисалар B ҳодисага ҳам тегишли бўлса, A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради дейилади ва бу $A \subset B$ каби белгиланади. Кўриниб турибдики, бу ҳолда A рўй берса, B ҳам албатта рўй беради, лекин B рўй берса, A нинг рўй бериши шарт эмас. Масалан, соққа бир марта ташланганда рўй бериши мумкин бўлган $A = \{e_2; e_5\}$ ва $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ тасодифий ҳодисалар учун $A \subset B$ ўринлидир.

2) A ва B ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалар тўпламидан ташкил топган бўлса, яъни A ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар албатта B га ҳам тегишли ва, аксинча, B ни ташкил этган барча элементар ҳодисалар A га ҳам тегишли бўлса, A ва B ҳодисалар тенг дейилади ва $A=B$ каби белгиланади.

3) A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб A ёки B ҳодисаларнинг камида бири рўй берганда ва фақат шу ҳолда рўй берадиган C ҳодисага айтилади ва $C = A \cup B$ (ёки $A+B=C$) каби белгиланади.

Бу ерда иккита изоҳ бериб ўтиш керак. Биринчидан, C тўпламда A ва B тўпламларнинг элементларидан бошқа элементлар бўлмайди. Иккинчидан, агар бирор элемент ҳам A да, ҳам B да учраса, у C тўпламга фақат бир марта киради. Масалан, иккита соққа ташланганда рўй бериши мумкин бўлган

$A = (e_{1;1}, e_{3;5}, e_{4;6}, e_{6;6})$ ва

$B = (e_{2;2}, e_{3;5}, e_{4;6}, e_{5;5})$ ҳодисалар йиғиндиси

$C = A \cup B = (e_{1;1}, e_{2;2}, e_{3;5}, e_{4;6}, e_{5;5}, e_{6;6})$ бўлади.

4) A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб ҳам A , ҳам B рўй берганда ва фақат шу ҳолда рўй берадиган C ҳодисага айтилади ва $C = A \cap B$ (ёки $A \bullet B$) каби белгиланади. Масалан юқорида келтирилган мисолда:

$A \cap B = \{e_{3;5}, e_{4;6}\}$.

5) A ва B ҳодисаларнинг айирмаси деб A рўй бериб, B рўй бермаслигидан иборат C ҳодисага айтилади. A ва B ҳодисаларнинг айирмаси $C = A \setminus B$ (ёки $A - B$) каби белгиланади. Масалан, юқорида келтирилган мисолдаги A ва B ҳодисалар учун уларнинг айирмаси $A \setminus B = (e_{1;1}, e_{6;6})$ каби бўлади.

6) Агар $A \cap B = B$ (B —бўш тўплам, яъни $Y = \emptyset$) бўлса, A ва B ҳодисалар биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалар дейилади. Масалан, соққани бир марта ташлашда рўй бериши мумкин бўлган

$A = (e_1, e_4)$ ва $B = (e_3, e_5)$

тасодифий ҳодисалар биргаликда рўй бермайдиган ҳодисалардир, яъни $A \cdot B = B$.

7) A ҳодисага қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодиса A га кирмаган барча элементар ҳодисалар тўпламидан иборатдир, яъни $A \cap \bar{A}$ ва $A \cup \bar{A} = Y$.

8) Агар $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = Y$ бўлса $A_1, A_2 \dots A_n$ ҳодисалар ҳодисаларнинг

тўлиқ группасини ташкил этади дейилади. Хусусан, $A_u \cap A_{жс} = B$, $u \neq жс$ $u, жс = 1, 2, \dots, n$ ва $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = U$ бўлса, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади дейилади.

Масалан, тажриба бир қисми И заводда, бир қисми ИИ заводда, бир қисми ИИИ заводда тайёрланган электр лампочкалари солинган яшиқдан таваккалига битта лампочка олишдан иборат бўлсин. Бу ҳолда қуйидаги ҳодисаларни кузатиш мумкин:

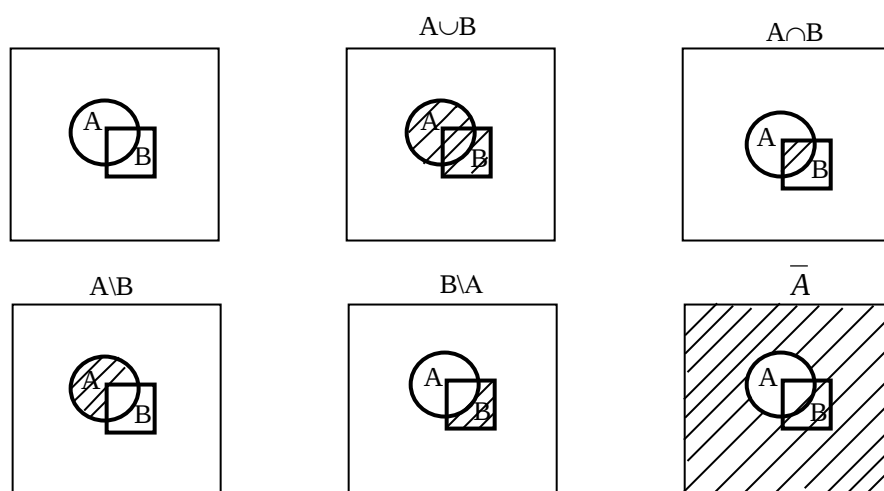
A_1 ҳодиса – олинган лампочка И заводда тайёрланган,

A_2 ҳодиса – олинган лампочка ИИ заводда тайёрланган,

A_3 ҳодиса – олинган лампочка ИИИ заводда тайёрланган.

Бу ҳодисалар учун $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = U$ ва $u \neq жс$ лар учун $A_u \cap A_{жс} = B$ ($u, жс = 1, 2, 3$) эканлиги равшан. Демак, A_1, A_2, A_3 ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади.

Ҳодисалар орасидаги юқорида киритилган тушунчаларни 1.1–чизма ёрдамида тушунтириш қулай. Бунда 5 шартлар комплекси 1.1–чизмадаги катта квадратга нуқтани таваккалига ташлашдан иборат.



1.1 расм

10. Икки мерган нишонга биттадан ўқ узмоқда

Агар A_1 биринчи мерган узган ўқнинг нишонга тегиш ҳодисаси, A_2 – иккинчи мерган узган ўқнинг нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $A_1 \cup A_2$ ва $A_1 \cap A_2$ ҳодисалар нимани англатади?

11. Қарама–қарши ҳодисаларга ва биргаликда рўй бермайдиган ҳодисаларга мисоллар келтиринг.

12. Ҳодисалар ўртасидаги қуйидаги муносабатларни текширинг:

а) $A + B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + AB$,

б) $A = AB + \bar{A}B$,

в) $(A \cup B) \cdot C = AC \cup BC$,

г) $\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B$,

$$д) A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$

13. Агар $A_1, A_2, A_3, (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$ ҳодисалар мос ҳолда 1–ўқнинг, 2–ўқнинг, 3–ўқнинг нишонга тегишини (тегмаслигини) билдирса, у ҳолда қуйидаги ҳодисалар нимани англатади:

$$B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3,$$

$$C = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$$

2–§. Эҳтимолнинг классик таърифи. Комбинаторика элементлари

1. Энди жуда муҳим тушунча – ҳодисананг эҳтимоли тушунчаси билан танишайлик. Эҳтимол термини ҳодисанинг амалга ошиш, рўй бериш имкониятининг объектив ўлчовини ифодалайди.

Бирор тажриба натижасида чекли сондаги $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементар ҳодисалардан бирортаси рўй бериши мумкин бўлсин, яъни $Y = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ бўлсин.

Бу элементар ҳодисаларга қуйидаги шартларни қўямиз:

1) ҳодисалар жуфт–жуфти билан биргаликда эмас, бошқача қилиб айтганда, исталган иккита e_u ва $e_{\bar{u}}$ ($u \neq \bar{u}$) ҳодиса учун улардан бири рўй берса, иккинчиси албатта рўй бермайди.

2) $e_1, e_2, \dots, e_n$ ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар, яъни уларнинг бирортаси албатта рўй бериши лозим

3) $e_1, e_2, \dots, e_n$ ҳодисалар тенг имкониятли. Бу шарт $e_1, e_2, \dots, e_n$ ҳодисалардан бирортасининг бошқаларидан кўпроқ рўй беришига ёрдам берадиган ҳеч қандай объектив сабаблар йўқлигини англатади.

Айтайлик, A ҳодиса берилган бўлиб, у e_u ($u = \overline{1, n}$) элементар ҳодисалардан баъзилари рўй бергандагина рўй берсин. Бундай ҳолда биз e_u ($u = \overline{1, n}$) элементар ҳодисалардан рўй бериши A ҳодисанинг рўй беришига ҳам олиб келадиганларини A ҳодисага қулайлик туғдирадиган ҳодисалар деб атаймиз.

Айтайлик, қаралаётган n та $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементар ҳодисадан m таси A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин, яъни

$$A = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{km}) \text{ бўлсин.}$$

Эҳтимолнинг классик таърифи. A ҳодисанинг эҳтимоли деб A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳодисалар сонининг тенг имкониятли барча элементар ҳодисалар сонига нисбатига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ га кирган элементар ҳодисалар сони}}{\text{барча элементар ҳодисалар сони}}$$

Эҳтимолнинг хоссалари.

а) муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг:

$$P(Y) = 1.$$

б) мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг:

$$P(B) = 0,$$

с) исталган A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги қўш тенгсизликни

қаноатлантиради:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. Классик таърифдан фойдаланиб масалалар ечишда комбинаторика элементлари муҳим роль ўйнайди, шуни эътиборга олиб комбинаторикага доир баъзи тушунчалар билан танишиб ўтайлик.

Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир–биридан ё шу нарсаларнинг тартиби билан, ёки шу нарсаларнинг ўзлари билан фарқ қилувчи турли группалар бирлашмалар деб аталади.

Бирлашмалар уч хил бўлиши мумкин: ўринлаштириш, ўрин алмаштириш ва группалар. Уларнинг ҳар бирини кўриб чиқайлик.

1) n элементини m тадан ($n \leq m$) ўринлаштириш деб шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирида берилган n та элементдан олинган m та элемент бўлиб, улар бир–биридан ё элементлари билан, ёки элементларнинг тартиби билан фарқ қилади. n та элементдан m тадан барча ўринлаштиришлар сони A_n^m каби белгиланиб, у

$$A_n^m = n(n-1) \dots [n-(m-1)]$$

формула билан ҳисобланади.

2) Агар ўринлаштиришлар n та элементдан n тадан олинган бўлса (яъни фақат элементларининг тартиби билан фарқ қилса), бундай ўринлаштиришлар *ўрин алмаштиришлар* деб аталади, у ҳолда юқоридаги формулага кўра n та элементдан барча ўрин алмаштиришлар сони куйидагича бўлади:

$$P_n = n(n-1) \dots 1 = n!$$

3) Агар n та элементдан m тадан тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришлардан бир–биридан энг камида бир элемент билан фарқ қиладиганларини танлаб олсак, у ҳолда *группалар* (комбинациялар) деб аталган бирлашмаларни ҳосил қиламиз.

n та элементдан m тадан барча группалашлар (комбинациялар) сони

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \dots [n-(m-1)]}{m!}$$

формула ёрдамида топилади.

Юқоридаги 3 та формула учун $A_n^m = C_n^m * P_n$ муносабат ўринлидир.

Энди масалалар ечиш намуналари билан танишайлик.

1–масала. Ҳалтада ўлчамлари ва оғирлиги бир хил бўлган 5 та кўк, 11 та қизил ва 9 та оқ шар бўлиб, шарлар яхшилаб аралаштирилган. Ҳалтадан битта шар олинганда кўк шар чиқиши, қизил шар чиқиши ва оқ шар чиқиши эҳтимолларини топинг.

Δ. Исталган шарнинг чиқишини тенг имкониятли деб ҳисоблаш мумкин бўлганидан, жами $n=5+11+9=25$ та элементар ҳодисага эгамиз. Агар A , B , C орқали мос равишда кўк, қизил ва оқ шар чиқишидан иборат ҳодисаларни, m_1 , m_2 , m_3 орқали эса бу ҳодисаларга қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини белгиласак, у ҳолда $m_1=5$, $m_2=11$, $m_3=9$ бўлиши тушунарли. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{5}{25} = 0,2; \quad P(B) = \frac{11}{25} = 0,44; \quad P(C) = \frac{9}{25} = 0,36;$$

2–масала. Тажриба симметрик бир жинсли тангани уч марта ташлашдан иборат бўлсин. m ($m=0, 1, 2, 3$) марта гербли томон тушиш эҳтимолини ҳисобланг.

Δ. Тангани уч марта ташлашда рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўплами

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} e_1 = (TTT), & e_2 = (TTP), & e_3 = (TTP), & e_4 = (PPP) \\ e_5 = (PTP), & e_6 = (PPG), & e_7 = (PTG), & e_8 = (PTT) \end{array} \right\}$$

8 та элементдан иборат, яъни $n=8$. Бизни қизиқтирган ҳодисалар эса $A = \{e_4\}$ $A_1 = \{e_3, e_5, e_6\}$, $A_2 = \{e_2, e_7, e_8\}$, $A_3 = \{e_1\}$ бўлиб, бунда A_m m марта герб тушиш ҳодисасидир. Демак, $m_0=1$, $m_1=3$, $m_2=3$, $m_3=1$ бўлиб, эҳтимолнинг классик таърифига кўра ёза оламиз:

$$P(A_0) = \frac{1}{8}; \quad P(A_1) = \frac{3}{8}; \quad P(A_2) = \frac{3}{8}; \quad P(A_3) = \frac{1}{8}$$

Бунда $P(U) = P(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) = 1$ бўлишига эътибор беринг.

3–масала. Гурпуада 8 та фан ўрганилади ва ҳар куни 3 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс неча хил усул билан тақсимланиши мумкин?

Δ. Дарсларнинг барча мумкин бўлган кунлик тақсимооти 8 элементдан 3 тадан тузилган барча ўринлаштиришлар сонига тенг, яъни

$$A_8^3 = 8 * 7 * 6 = 336$$

Демак, кунлик дарсни 336 хил усул билан тақсимлаш мумкин.

4–масала. 12 кишилиқ овқат ҳозирланган столга 12 кишини неча хил усулда ўтказиш мумкин?

Δ. Ўтказиш турлари сони 12 та элементдан мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сонига тенг бўлади, яъни

$$P_{12} = 1 * 2 * 3 * \dots * 12 = 479771600$$

14. Гурпуада 10 та фан ўқитилади. Агар ҳар куни 4 хил дарс ўтилса, бир кунлик дарсни неча хил усул билан тақсимлаш мумкин?

Жавоб. 5040.

15. 8 та стулга 8 кишини неча хил усул билан ўтказиш мумкин?

Жавоб. 40320.

16. $C_n^m = C_n^{n-m}$ тенглик ўринли эканини исботланг.

17. Иккита танга бир вақтда ташланган m ($m=0, 1, 2$) марта гербли томон тушиш эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$$

18. Ёқларига 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамлар ёзилган иккита соққа бир вақтда ташланади. Иккала соққада тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{5}{36}$$

19. Иккита соққа ташланган. Тушган очколар йиғиндиси бешга, кўпайтмаси тўртга тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{1}{18}$$

20. Танга икки марта ташланган. Ҳеч бўлмаганда бир марта “гербли” томон тушиши эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{3}{4}$$

21. Яшиқда 15 та деталь бўлиб, улардан 10 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олади. Олинган деталларнинг бўялган бўлиши эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$$

22. Абонент телефон номерини тераётиб номернинг охириги учта рақамини эслай олмади ва бу рақамларни турли эканлигини билгани ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$$

23. Цехда 6 эркак ва 4 аёл ишлайди. Табель номерлари бўйича таваккалига 7 киши ажратилган. Ажратилганлар орасида 3 аёл бўлиши эҳтимолини топинг.

$$\text{Жавоб. } P = \frac{C_4^3 * C_6^4}{C_{10}^7} = 0,5$$

3–§. Эҳтимолнинг бошқа таърифлари

Эҳтимолнинг юқорида кўриб чиқилган классик таърифини татбиқлар учун муҳим бўлган кўпчилик ҳолларда қўлланиб бўлмайди, чунки эҳтимолнинг классик таърифи учун фақат чекли сондаги ягона мумкин бўлган тенг имкониятли ва биргаликда бўлмаган ҳодисаларни қараш талаб қилинади, лекин мумкин бўлган ҳодисаларнинг чекли сонда бўлишига ҳар доим ҳам эришиб бўлавермайди. Кўп ҳолларда эса қаралаётган ҳодисанинг тенг имкониятли элементар ҳодисаларга ёйилишининг ўзи мумкин бўлмай қолади.

Бу қийинчиликларни баъзан эҳтимолнинг геометрик таърифи ёки статистик таърифи ёрдамида бартараф қилиш мумкин.

1. Эҳтимолнинг геометрик таърифи. Бирор Қ соҳа берилган бўлиб, бу соҳа Q_1 соҳани ўз ичига олсин. Қ соҳага таваккалига ташланган нуқтанинг Q_1 соҳага тушиш эҳтимолини топиш талаб қилинади. Бу ерда барча элементар ҳодисалар тўплами Қ нинг барча нуқталаридан иборат. Бинобарин, бу ҳолда классик таърифдан фойдалана олмаймиз. Танланган нуқта Қ га албатта тушсин ва унинг бирор Q_1 қисмига тушиш эҳтимоли шу Q_1 қисмининг ўлчовига (узунлигига, юзига, ҳажмига) пропорционал бўлиб, Q_1 нинг формасига ва Q_1 қисм Қ нинг қаерида жойлашганлигига боғлиқ бўлмасин. Бу шартларда қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли.

$$P = \frac{mesQ_1}{mesQ}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу формула ёрдамида аниқланган p функция эҳтимолнинг барча хоссаларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

Баъзи масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1–масала. L узунликка эга бўлган кесмага таваккалига нуқта ташланади. Ташланган нуқтанинг кесманинг ўртасидан кўпи билан l масофада ётиш ҳодисаси эҳтимолини топинг.

Δ. Юқоридаги шартни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами $-l \leq x \leq l$ дан иборат (умумийликка зиён келтирмасдан кесманинг ўртасини санок боши деб қабул қиламиз). Бу кесманинг узунлиги $2l$ га тенг. Демак, қаралаётган ҳодисанинг эҳтимоли:

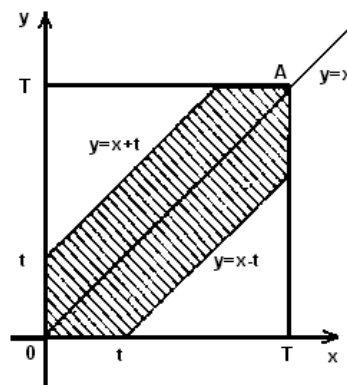
$$P = \frac{2l}{L}$$

2–масала. Икки студент кундузи соат 12 билан $12+T$ орасида тайин жойда учрашишга ва олдин келган студент ўртоғини t соат ($t < T$) кутиб, у келмаса кейин кетишига келишиб олишди. Агар ҳар бир студент ўзининг келиш моментини таваккалига (соат 12 билан $12+T$ орасида) танласа, уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

Δ. Биринчи ва иккинчи студентларнинг келиш момент–ларини мос равишда x ва y орқали белгилаймиз. Масала шартига кўра ушбу қўш тенгсизликлар бажарилиши лозим: $0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq T$.

x ва y ларни текисликдаги Декарт координаталари сифатида тасвирлаймиз.

Координаталар текислигида тоқоридаги тенгсизликларни ОТАТ квадратга тегишли бўлган исталган нуқтанинг координаталари қаноатлантиради (10.2–чизма).



1.2-чизма

Икки студент учрашиши учун $|x - y| \leq t$ ёки

$y > x$ бўлганда, $y < x + t$,

$y < x$ бўлганда, $y > x - t$ тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

10.2–чизмадан кўринадики, изланаётган эҳтимол штрихланган юзнинг квадрат юзига бўлган нисбатига тенг (10.2– чизма):

$$P = \frac{T^2 - 2 \frac{(T-t)^2}{2}}{T^2} = \frac{t - (2T-t)}{T^2}$$

24. Радиуси P бўлган доирага радиуси p бўлган кичик доира жойлаштирилган. Катта доирага тасодифан ташланган нуқтанинг кичик доирага тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доирага тушиш эҳтимоли доира юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоб. $P = \frac{r^2}{R^2}$

25. Текислик бир–биридан $2a$ масофада жойлашган тўғри чизиклар билан бўлинган. Текисликка радиуси $p < a$ бўлган танга таваккалига ташланган. Танга тўғри чизикларнинг бирортасини ҳам кесмаслиги эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P = \frac{2a-2r}{2a} = \frac{a-r}{a}$

26. Икки дўст кундузи соат 12 билан 13 орасида тайин бир жойда учрашишга ва олдин келган киши дўстини $1/4$ соат кутиб, у келмагандан кейин кетишга келишиб олишди. Агар ҳар бир киши ўзининг келиш моментини тавгккалига (соат 12 билан 13 орасида) танласа, уларнинг учрашиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P=7/16$. Кўрсатма. 2–масалага қаранг.

27. Ох ўқининг узунлиги L бўлган ОА кесмасига иккита $B(x)$ ва $C(y)$ нуқта таваккалига қўйилган. Ҳосил бўлган учта кесмадан учбурчак ясаш мумкин бўлиши эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p=1/4$.

28. Радиуси P бўлган доира ичига таваккалига нуқта ташланган. Ташланган нуқта доирага ички чизилган: а) квадрат ичига; б) мунтазам учбурчак ичига тушиш эҳтимолини топинг. Нуқтанинг доира бўлагига тушиш эҳтимоли бу бўлакнинг юзига пропорционал бўлиб, унинг доирага нисбатан жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

Жавоб. а) $p=2/\pi$; б) $p=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

2. Эҳтимолнинг статистик таърифи. Эҳтимоллар назариясининг кўпгина татбиқларида эҳтимолнинг статистик таърифи деб аталувчи таърифдан фойдаланилади.

Ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги кузатиладиган тажрибаларни шароитни ўзгартирмаган ҳолда чексиз кўп марта такрорлаш мумкин бўлсин деб фараз қилайлик. Масалан, ўйин соққасини ёки тангани ташлаш, нишонга ўқ узиш ва шунга ўхшаш тажрибаларни чексиз кўп марта такрорлаш мумкин.

Айтайлик, тажрибалар сони n етарлич катта бўлганда бизни кизиқтираётган A ҳодиса m марта рўй берган бўлсин.

$W(A) = \frac{m}{n}$ нисбат A ҳодисанинг нисбий частотаси деб аталади.

Кўп кузатишлар шуни кўрсатадики, агар бир хил шарт–шароитда

тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида синовлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частота турғунлик хоссасига эга бўлади.

Тажриба ўтказилаётган шароитларни ўзгартирмаганда атрофида ҳодисанинг рўй бериш частотаси тебранадиған ва частотани характерлайдиган сон шу ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади. Келтирилган бу таъриф эҳтимолнинг статистик таърифи дейилади. Шундай қилиб, агар тажриба йўли билан нисбий частота аниқланган бўлса, у ҳолда уни ёки унга яқин сонни эҳтимолнинг тақрибий қиймати учун олиш мумкин.

3–масала. Швед статистика маълумотларига кўра 1935 йилда қиз болалар туғилиш, сонининг нисбий частотаси ойлар бўйича қуйидагича ўзгарган:

Ойлар	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	Бир йилда
W	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,482

Нисбий частота 0,482 сони атрофида тебранади, шунинг учун бу сонни қиз болалар туғилиши эҳтимолининг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин.

4–масала. Танганинг гербли томони билан тушиш частотасини ўрганиш мақсадида тажрибалар ўтказилган бўлиб, уларнинг натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган:

Ташлашлар сони	Гербли томони билан тушиш сони	Нисбий частота
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Бу ерда нисбий частота 0,5 сонидан кам фарқ қилади. Тажрибалар сонининг ортиши билан бу фарқ янада камаяди. Танга ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли 0,5 га тенг эканини эътиборга олсак, нисбий частотанинг эҳтимол атрофида тебранишига яна бир карра ишонч ҳосил қиламиз.

29. 10000 та тарвузни транспорт билан ташишда 36 таси бузилди. Бузилмаган тарвузлар сонининг нисбий частотасини топинг.

30. 100 деталли партиядан техника–контрол бўлими 5 та ностандарт деталь топди. Ностандарт деталлар чиқишининг нисбий частотасини топинг.

31. Милтиқдан ўқ узишда нишонга теккан ўқлар сонининг нисбий частотаси 0,85 га тенглиги аниқланди. Агар жами 120 та ўқ узилган бўлса, нишонга теккан ўқлар сонини топинг.

Жавоб. 102.

32. Берилган қуйидаги маълумотларга кўра сотилган эркалар пойабзалининг размерлари бўйича нисбий частоталарини ҳисобланг.

Пойабзал номери	38	39	40	41	42	43	44	45	46	жами
Сотилган жт пойабзаллар сони	6	53	138	166	140	70	82	9	1	665

33. Швед статистика маълумотларига кўра 1935 йилда туғилган ҳамма болалар ва қиз болалар сони ойлар бўйича қуйидагича тақсимланган:

Ойлар	Ҳамма болалар сони	Қиз болалар сони
1	7280	3537
2	6957	3407
3	7893	3866
4	7884	3711
5	7892	3775
6	7609	3665
7	7585	3621
8	7393	3596
9	7203	3491
10	6903	3391
11	6552	3160
12	7132	3371
Бир йилда	88273	42591

Ойлар бўйича ва бир йил ичида ўғил болалар туғилиш сонининг нисбий частотасини ҳисобланг.

4-§. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари. Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги

Берилган ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳолларни бевосита ҳисоблаш анча қийин бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблашда уни бошқа соддароқ ҳодисалар комбинацияси кўринишида ифодалаш қулайроқдир. Бироқ бунда ҳодисани бошқа ҳодисаларнинг комбинацияси кўринишида ифодалашда ҳодисанинг эҳтимоли бўйсунадиган қоидаларни билиш керак. Қуйида улар билан танишиб ўтамиз.

1. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси. Иккита биргаликда бўлмаган А ва В ҳодисадан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Умуман ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган бир нечта $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалардан исталган бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Натижа. Агар $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалардан фақат биттаси албатта рўй берадиган ва улар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у ҳолда

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Хусусий ҳолда, агар A ва $\bar{A}$ ҳодисалар ўзаро қарама–қарши ҳодисаларни ифодаласа, у ҳолда

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Бу теоремага кейинроқ мисол кўрамиз.

2. Шартли эҳтимоллар. Ҳодисаларнинг боғлиқсизлиги. Ҳодисаларнинг эҳтимолини аниқлаш асосида бирор C шартлар комплекси ётишини айтган эдик. Агар $P(A)$ эҳтимолни ҳисоблашда C шартлар комплексида бошқа ҳеч қандай шартлар талаб қилинмаса бундай эҳтимол, шартсиз эҳтимол дейилади. Кўп ҳолларда A ҳодисанинг эҳтимолини бирор B ҳодиса ($P(B) > 0$ деб фараз қилинади) рўй берган деган шартда ҳисоблашга тўғри келади. Бундай эҳтимол *шартли эҳтимол* дейилади ва $P(A/B)$ каби белгиланади. Агар иккита A ва B ҳодисадан бирининг эҳтимоли иккинчисининг рўй бериши ёки рўй бермаслиги натижасида ўзгармаса, у ҳолда бу ҳодисалар *ўзаро боғлиқсиз ҳодисалар* дейилади, акс ҳолда бу ҳодисалар *ўзаро боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

Масалан, оқ ва қора шарлар солинган яшикдан олинган биринчи шар унга қайта солинса, иккинчи марта олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимоли биринчи олинган шарнинг оқ ёки қора бўлишига боғлиқ эмас. Шунинг учун биринчи ва иккинчи шар олиш натижалари ўзаро боғлиқсиз бўлади.

Аксинча, агар биринчи олинган шар яшикка қайта солинмаса, у ҳолда иккинчи марта шар олинишидаги натижа биринчи марта шар олиш натижасига боғлиқ равишда ўзгаради, чунки биринчи марта шар олиниши натижасида яшикдаги шарларнинг состави ўзгаради. Бу ерда биз боғлиқ ҳодисалар мисолига эгамиз.

Шартли эҳтимоллар учун қабул қилинган белгилашлардан фойдаланиб, A ва B ҳодисаларнинг ўзаро боғлиқсиз бўлиши шартини

$$P(A/B) = P(A)$$

ёки

$$P(B/A) = P(B)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

3. Ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси. Иккита боғлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан биринчисининг эҳтимолини иккинчисининг биринчиси рўй берган деган шарт остидаги шартли эҳтимолига кўпайтирилганига тенг ва аксинча, яъни

$$P(A*B) = P(A)*P(B/A),$$

$$P(A*B) = P(B)*P(A/B).$$

Хусусий ҳолда, агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимолларининг кўпайтмасига тенг: $P(A*B) = P(A)*P(B)$.

4. Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини кўшиш теоремаси. Иккита биргаликда бўлган A ва B ҳодисадан ҳеч бўлмаганда бирининг рўй бериш эҳтимоли бу ҳодисалар эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолининг айирилганига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A * B).$$

Агар A ва B ҳодисалар ўзaro боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ушбу формула ўринли бўлади:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)*P(B)$$

1–масала. Яшиқда 55 та шар бор, улардан 20 таси қизил, 12 таси кўк ва 18 таси оқ. Таваккалига битта шар олинди, унинг рангли (қизил ёки кўк) шар бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Рангли шар чиқиши ё қизил шар, ёки кўк шар чиқишини билдиради. Қизил шар чиқиш (A ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(A) = 20/50 = 0,4.$$

Кўк шар чиқиш (B ҳодиса) эҳтимоли; $P(B) = 12/50 = 0,24$.

A ва B ҳодисалар биргаликда эмас (бир рангли шар чиқиши бошқа рангли шар чиқишини йўққа чиқаради), шунинг учун биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимоллариининг қўшиш теоремасини қўлланиш мумкин.

Рангли шар чиқиш ($A+B$ ҳодиса) эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,24 = 0,64.$$

2–масала. Институтнинг консультация пунктига A , B ва C шаҳарлардан контрол ишлар солинган пакетлар келади. A шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли 0,5 га, B шаҳардан пакет олиниш эҳтимоли эса 0,3 га тенг. Навбатдаги пакетнинг C шаҳардан келиш эҳтимолини топинг.

Δ. “Пакет A шаҳардан келган”, “Пакет B шаҳардан келган” ва “Пакет C шаҳардан келган” ҳодисалари тўла группа ҳосил қилади, шунинг учун бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг: $0,5 + 0,3 + p = 1$.

Бу ердан изланаётган эҳтимол:

$$p = 1 - 0,8 = 0,2.$$

3–масала. Яшиқда 15 та шар бўлиб, улардан 5 таси қизил рангда, қолганлари эса бошқа рангда. Таваккалига олинган 3 та шарнинг ҳеч бўлмаганда биттаси қизил бўлиш. (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Δ. A ҳодиса (олинган 3 та шардан ҳеч бўлмаганда биттаси қизил рангда) ва $\bar{A}$ ҳодиса (олинган 3 та шарнинг биттаси ҳам қизил рангда эмас) қарама–қарши ҳодисалардир, шунинг учун $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (қарама–қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг). Бундан $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$\bar{A}$ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли классик таърифга кўра:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$$

$$\text{Изланаётган эҳтимол: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

34. Пул–буюм лотереясида 1000 та билетли ҳар бир серияга 120 та пул ютуғи ва 80 та буюм ютуғи тўғри келади. Битта лотереяси бор кишига пул ютуғи ёки буюм ютуғи, умуман ютуқ чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0,20$.

35. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 очко уриш эҳтимоли 0,15 га, 9 очко уриш эҳтимоли 0,35 га, 8, ёки ундан кам очко уриш эҳтимоли 0,5 га тенг. Мерганнинг битта ўқ узишда камида 9 очко уриш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0,5$.

36. 10 та деталли партияда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган иккита деталдан камида биттаси стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = \frac{44}{45}$

37. Учта яшикнинг ҳар бирида 10 тадан деталь бор. Биринчи яшикда 9 та, иккинчи яшикда 8 та, учинчи яшикда 7 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинади. Олинган учала деталь стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0,504$.

38. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирсин, у ҳолда $P(B) \geq P(A)$ бўлишини исботланг.

39. Яшикда 10 та оқ ва 5 та қора шар бор. Яшикдан икки марта таваккалига биттадан шар олинади. Олинган шарлар яшикка қайтариб солинмайди. Агар биринчи олинган шар қора бўлса (A ҳодиса), иккинчи олинган шар оқ бўлиш (B ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P(B/A) = 5/7$.

40. Яшикда 6 та шар бор, улардан учтаси қизил рангда. Яшикдан таваккалига 2 та шар олинди. Иккала шарнинг ҳам қизил рангда бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p = 0,2$.

41. Иккита мерган биттадан ўқ узишди. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоли 0,7 га, иккинчисиники эса 0,6 га тенг. Мерганлардан ақалли биттасининг нишонга текказиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,88.

42. Студент имтиҳонга программадаги 25 та саволдан 20 тасини билиб келди. Имтиҳон олувчи студентга 3 та савол берди. Студентнинг учала саволни ҳам билиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 57/115

43. Студент имтиҳон билетларидан баъзиларини билмайди. Студент учун қайси ҳолда у билмайдиган билетни олиш эҳтимоли кичик бўлади; биринчи бўлиб олгандами ёки энг охирида олгандами?

Жавоб. Иккала ҳолда ҳам эҳтимоллар бир хил.

44. Учта ўйин соққаси ташланди. Камида битта соққада 6 очко тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 91/16

5–§. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи

Мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблашда кўпинча бу ҳодисаларга қўшиш ва қўпайтириш теоремаларини бирга татбиқ қилиб ҳосил

қилинган формулалардан фойдаланишга тўғри келади. Қуйида ана шундай муҳим формулаларнинг баъзилари билан танишиб ўтамиз.

1. Тўла эҳтимол формуласи. Фараз қилайлик, A ҳодиса n та жуфт–жуфти билан биргаликда бўлмаган $H_1, H_2 \dots, H_n$ ҳодисалар (гипотезалар) нинг биттаси ва фақат биттаси билангина рўй бериши мумкин бўлсин, бошқача қилиб айтганда:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n \quad (A\text{—мураккаб ҳодиса}).$$

Бу ерда $AH_u \cap AX_{ж} \quad (u \neq ж)$ у ҳолда биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига асосан:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Кўпайтириш теоремасига кўра $P(AH_u) = P(H_u) * P(A/H_u)$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$ ёки

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

Бу тенглик *тўла эҳтимол формуласи* дейилади. Тўла эҳтимол формуласидан фойдаланиб, Байес формуласи ёки гипотезалар эҳтимоллари формуласи деб аталувчи муҳим формулани ҳосил қилиш мумкин.

2. **Байес формуласи.** Биргаликда бўлмаган $H_1, H_2 \dots, H_n$ ҳодисаларнинг (гипотезаларнинг) тўла группаси берилган бўлиб, тажрибани ўтказишга қадар уларнинг ҳар бирининг $P(X_i)$, $i=1, n$ эҳтимоллари тайин қийматга эга бўлсин. Тажриба натижасида A ҳодиса рўй берди деган шарт остида $X_i (i=1, n)$ гипотезаларнинг эҳтимоллари тажрибадан сўнг қандай бўлади?

H_u ва A ҳодисаларнинг кўпайтмаси учун ушбу $P(AH_u) = P(A)P(H_u/A) = P(H_u)P(A/H_u)$ формуланинг ўринлилигидан $P(H_u/A) = \frac{P(H_u) * P(A/H_u)}{P(A)}$ муносабатга

эга бўламиз, бу ерда тўла эҳтимол формуласини қўллансак, ушбу *Байес формуласи* деб аталувчи формулани ҳосил қиламиз:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A / H_k)}$$

Бу формулалар ёрдамида ечиладиган масалаларни кўрайлик.

1—масала. Омборга 360 та маҳсулот келтирилди. Булардан 300 таси 1—корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 250 таси яроқли маҳсулот; 40 таси 2—корхонада тайёрланган бўлиб, уларнинг 30 таси яроқли ҳамда 20 таси 3—корхонада тайёрланган бўлиб, улардан 10 таси яроқли. Таваккалига олинган маҳсулотнинг яроқли бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Таваккалига олинган маҳсулот учун қуйидаги гипотезалар ўринли бўлади:

H_1 гипотеза — маҳсулотнинг 1—корхонада тайёрланган бўлиши;

H_2 гипотеза — маҳсулотнинг 2—корхонада тайёрланган бўлиши;

H_3 гипотеза — маҳсулотнинг 3—корхонада тайёрланган бўлиши.

Уларнинг эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{1}{18}.$$

Агар олинган маҳсулотнинг яроқли бўлишини A ҳодиса деб белгиласак, у ҳолда бу ҳодисанинг турли гипотеза шартлари остидаги эҳтимоллари қуйидагича бўлади:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(A/H_2) = \frac{3}{4}; \quad P(A/H_3) = \frac{1}{2}.$$

Юқорида топилганларни тўла эҳтимол формуласига қўйиб, изланаётган ҳодиса эҳтимолини топамиз:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= \frac{5}{6} * \frac{5}{6} + \frac{1}{9} * \frac{3}{4} + \frac{1}{18} * \frac{1}{2} = \frac{29}{36} \end{aligned}$$

2–масала. Икки мерган нишонга биттадан ўқ узади. Биринчи мерганнинг ўқи нишонга 0,8 эҳтимол билан, иккинчи мерганники эса 0,4 эҳтимол билан тегади. Ўқ узилгандан сўнг нишонга битта ўқ текканлиги (A ҳодиса) маълум бўлди, бу ўқни биринчи мерган узган бўлиши эҳтимолини топинг.

Δ . Тажриба ўтказишдан олдин қуйидаги гипотезаларни қўямиз:

H_1 – биринчи мерган отган ўқ ҳам, иккинчи мерган отган ўқ ҳам нишонга тегмайди;

H_2 – иккала мерганнинг отган ўқи ҳам нишонга тегади;

H_3 – биринчи мерганнинг отган ўқи нишонга тегади, иккинчисиники эса тегмайди;

H_4 – биринчи мерганнинг отган ўқи нишонга тегмайди, ккинчисиники эса тегади.

Гипотезалардан биттаси ва фақат биттаси тажриба натижасида албатта рўй беради, яъни H_1, H_2, H_3, H_4 лар боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади.

Бу гипотезаларнинг тажрибадан олдинги эҳтимоллари:

$$P(H_1) = 0,2 * 0,6 = 0,12,$$

$$P(H_2) = 0,8 * 0,4 = 0,32,$$

$$P(H_3) = 0,8 * 0,6 = 0,48,$$

$$P(H_4) = 0,2 * 0,4 = 0,08.$$

Бу гипотезаларда кузатилаётган A ҳодисанинг шартли эҳтимоллари қуйидагиларга тенг: $P(A/H_1) = 0, P(A/H_2) = 0, P(A/H_3) = 1, P(A/H_4) = 1$.

Тажрибадан кейин (A ҳодиса рўй берганидан кейин) H_1, H_2 гипотезалар рўй бермаслиги маълум бўлади.

H_3 ва H_4 гипотезаларнинг тажрибадан кейинги эҳтимоллари Байес формуласига кўра қуйидагича:

$$P(H_3/A) = \frac{0,48 * 1}{0,48 * 1 + 0,08 * 1} = \frac{6}{7}$$

$$P(H_4/A) = \frac{0,08 * 1}{0,48 * 1 + 0,08 * 1} = \frac{1}{7}$$

Демак, нишонга теккан ўқнинг биринчи мерганга тегнишли бўлиш эҳтимоли $\frac{6}{7}$ экан.

45. Спортчилар группасида 20 чанғичи, 6 велосипедчи ва 4 югурувчи бор. Саралаш нормасини бажариш эҳтимоли чанғичи учун 0,9 га, велосипедчи учун 0,8 га, югурувчи учун 0,75 га тенг. Таваккалига ажратилган спортчининг нормани бажара олиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,86.

46. Биринчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 15 таси стандарт, иккинчи яшикда 30 та деталь бўлиб, улардан 24 таси стандарт, учинчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 6 таси стандарт. Таваккалига танланган яшикдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{43}{60}$

47. 1–масала шартида, агар таваккалига олинган маҳсулот яроқли эканлиги маълум бўлса, уни 1–корхонада тайёрланган бўлиш эҳтимолини топинг.

48. Ичида 2 та шар бўлган идишга битта оқ шар солиниб, шундан кейин идишдан таваккалига битта шар олинган. Шарларнинг дастлабки таркиби (ранги бўйича) ҳақида мумкин бўлган барча гипотезалар тенг имкониятли бўлса, у ҳолда олинган шарнинг оқ рангда бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{2}{3}$

49. Бензоколонка жойлашган шосседан ўтадиган юк машиналари сонининг ўша шосседан ўтадиган енгил машиналар сонига нисбати 3:2 каби. Юк машинасининг бензин олиш эҳтимоли 0,1 га тенг, енгил машина учун бу эҳтимол 0,2 га тенг. Бензоколонка ёнига бензин олиш учун машина келиб тўхтади. Унинг юк машина бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{3}{7}$

6–§. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма–кетлиги. Бернулли формуласи

1. Агар бирор A ҳодисанинг рўй бериш ёки рўй бермаслигини кузатиш учун бир нечта тажрибалар ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш ёки рўй бермаслик эҳтимоли қолган тажрибаларнинг натижаларига боғлиқ бўлмаса (боғлиқ бўлса), у ҳолда бу тажрибалар A ҳодисага нисбатан *боғлиқ бўлмаган* (боғлиқ бўлган) *тажрибалар кетма–кетлигини* ташкил этади дейилади.

Масалан, яшикда 5 та оқ ва l та қора шар бўлсин. Шу яшикдан бир неча марта биттадан шар олиш тажрибалари кетма–кетлигини кўрайлик. Бунда ҳар бир тажрибадан сўнг олинган шар яшикка қайтариб солинса (қайтариб солинмаса), бу тажрибалар кетма–кетлиги бир–бирига боғлиқ бўлмайди (бир–бирига боғлиқ бўлади).

Боғлиқ бўлмаган n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир тажрибада кузатилаётган A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ва рўй бермаслик эҳтимоли $q=1-p$ бўлсин. Бу ҳолда кузатилаётган A ҳодисанинг n та тажрибада k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n)$$

бу ерда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Бу формула *Бернулли формуласи* дейилади.

Ҳодисанинг рўй беришлар сонини μ десак, у ҳолда

а) $0 \leq \mu \leq k-1$ (k дан кам марта);

б) $k+1 \leq \mu \leq n$ (k дан кўп марта);

в) $k \leq \mu \leq n$ (камида k марта)

г) $0 \leq \mu \leq k$ (кўпи билан k марта)

д) $k_1 \leq \mu \leq k_2$ (камида k_1 , кўпи билан k_2 марта) ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли ушбу формулалар бўйича топилади:

а) $P_n\{0 \leq \mu \leq k-1\} = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m),$

б) $P_n\{k+1 \leq \mu \leq n\} = \sum_{m=k+1}^n P_n(m),$

в) $P_n\{k \leq \mu \leq n\} = \sum_{m=k}^n P_n(m),$

г) $P_n\{0 \leq \mu \leq k\} = \sum_{m=0}^k P_n(m),$

д) $P_n\{k_1 \leq \mu \leq k_2\} = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m).$

Булардаги $P_n(m)$ – Бернулли формуласидир.

$P_n(k)$ эҳтимоллар учун $\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1$ муносабат ўринли бўлишини кўриш

кийин эмас. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

$C_n^k p^k q^{n-k}$ ифода $(px+a)^n$ бином ёйилмасидаги x^k қатнашган ҳаднинг коэффиценти бўлгани учун $P_n(k)$ ларни *эҳтимолничг биномиал тақсимот қонуни* дейилади.

2. Ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сони. Тайинланган n да $P_n(k)$ эҳтимол k нинг функцияси экани равшан.

Агар $P_n(k_0) \geq P_n(k)$ ($k \neq k_0$) бўлса, у ҳолда k_0 сон ҳодиса рўй беришининг *энг катта эҳтимолли сони* дейилади. Ушбу

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q}$$

нисбатини текширишдан қуйидаги натижага келинади:

ЭНГ катта эҳтимолли k_0 сон қуйидаги қўш тенгсизликдан аниқланади:

$np - q \leq k_0 < np + p$, бунда:

а) агар $np - q$ сон каср бўлса, у ҳолда битта энг катта эҳтимолли k_0 сон мавжуд бўлади;

б) агар $np - q$ сон бутун бўлса, у ҳолда иккита энг катта эҳтимолли k_0 ва $k_0 + 1$ сонлар мавжуд бўлади.

в) агар np бутун сон бўлса, у ҳолда энг катта эҳтимолли сон $k_0 = np$ бўлади.

Изоҳ. n етарлича катта бўлганда энг катта эҳтимолли сон k_0 нинг қиймати $k_0 \approx np$ дан аниқланади.

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1–масала. Чигитнинг унувчанлиги 80% бўлса, экилган 4 та чигитдан: а) учтасининг униб чиқиш; б) ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқиш эҳтимолини топинг.

Δ. а) Шартга кўрал $n=4$; $k=3$; $p=0,8$; $q=0,2$. Бернулли формуласига кўра: $P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096$.

б) 4 ҳодиса экилган 4 та чигитдан 2 таси ёки 3 таси, ёки 4 таси униб чиқишини, яъни ҳеч бўлмаганда иккитасининг униб чиқишини билдирсин.

Эҳтимолларни қўшиш теоремасига кўра:

$P_4(A) = P_4(\text{ёки } 2, \text{ ёки } 3, \text{ ёки } 4) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4)$.

$P_4(3)$ эҳтимол (а) пунктда ҳисобланган;

$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536$;

$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096$.

Демак, $P(A) = 0,9728$.

2–масала. Битта деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p=0,05$ бўлсин. Ихтиёрий олинган 10000 деталь ичида яроқсиз деталларнинг сони 50 тадан кўп бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Δ. μ – яроқсиз деталлар сони бўлсин.

$\mu: 0, 1, 2, \dots, 50$

$P_{10000}\{0 \leq \mu \leq 50\} = \dots?$

$$P_{10000}\{0 \leq \mu \leq 50\} = \sum_{k=0}^{50} P_n(k) = \sum_{k=0}^{50} C_{10000}^k (0,05)^k (0,95)^{10000-k}$$

(бундан кейинги ҳисоблаш анча қийин, шунинг учун уларни келтирмаймиз).

3–масала. Техник контрол бўлими 24 та деталдан иборат партияни текширмоқда. Деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Стандарт деб тан олинандиган деталларнинг энг катта эҳтимолли сонини топинг.

Δ. Шартга кўра $n=24$; $p=0,6$; $q=0,4$. Стандарт деб тан олинган деталларнинг энг катта эҳтимолли сонини қуйидаги қўш тенгсизликдан топамиз:

$$np-q \leq k_0 < np+n$$

$np-q=24*0,6-0,4=14$ бутун сон бўлгани учун энг катта эҳтимолли сон иккита: $k_0=14$ ва $k_0+1=15$.

50. Боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма–кетлигига мисоллар келтиринг.

51. Чигитнинг унувчанлиги 70% бўлса, экилган 5 та чигитдан: а) учтасининг; б) кўпи билан учтасининг; с) камида учтасининг униб чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. а) 0,3087; б) 0,4717; с) 0,8370.

52. Икки тенг кучли рақиб шахмат ўйнамоқда. Қайси эҳтимол каттароқ:

а) рақиблардан бирининг икки партиядан биттасини ютиш эҳтимолими ёки тўрт партиядан иккитасини ютиш эҳтимолими?

б) тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимолими ёки беш партиядан камида учтасини ютиш эҳтимолими? Дуранг натижалар эътиборга олинмайди.

Жавоб. а) $P_2(1) > P_4(2)$; б) $P_4(\mu \geq 2) > P_5(\mu \geq 3)$.

53. Икки мерган бир вақтда нишонга ўқ узмоқда. Битта ўқни узишда нишонга теккизиш эҳтимоли биринчи мерган учун 0,8 га, иккинчи мерган учун 0,6 га тенг. Агар бир йўла 15 марта ўқ узиладиган бўлса, иккала мерганнинг ҳам нишонга теккизишларининг энг катта эҳтимолли сонини топинг.

Жавоб. 7

54. Агар 49 та боғлиқ бўлмаган тажрибада ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сони 30 га тенг бўлса, тажрибаларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ни топинг.

Жавоб. $0,60 < p \leq 0,62$.

7–§. Асимптотик формулалар

Юқоридаги 6–§ да келтирилган мисоллардан кўринадики, тажрибалар сони n етарлича катта бўлганда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ эҳтимолни ҳисоблаш катта қийинчиликларга олиб келади. Бундай ҳолларда ҳисоблашни осонлаштирувчи формулаларга, ҳатто улар изланаётган эҳтимолнинг тақрибий қийматини берса ҳам эҳтиёж туғилади. Бундай формулалар асимптотик формулалар деб аталади. Ушбу параграфда шундай формулалар билан танишамиз.

1. Муавр–Лапласнинг локал теоремаси. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ($0 < p < 1$) га тенг бўлган n та боғлиқсиз тажрибада ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли (n етарлича катта бўлганда) тақрибан

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad (1)$$

га тенг. Бу ерда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$\varphi(x)$ функциянинг қийматлар жадвали 1–иловада келтирил (1) формула Муавр – Лапласнинг локал формуласидир.

2. Пуассон формуласи. Агар тажрибалар сони етарлича катта бўлиб, ҳар бир тажрибада ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p жуда кичик бўлса, у ҳолда

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (2)$$

бу ерда $\lambda=np$. (2) – Пуассон формуласидир.

3. Муавр–Лапласнинг интеграл формуласи. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p(0<p<1)$ га тенг бўлган n та боғлиқсиз тажрибада ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта рўй бериш эҳтимоли (n етарлича катта бўлганда) тақрибан

$$P_n(k_1 \leq \mu \leq k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \quad (3)$$

га тенг. Бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Лаплас функцияси бўлиб, бунда

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

x нинг ($0 \leq x \leq 5$) мусбат қийматлари учун Лаплас функциясининг қийматлари жадвали 2 – иловада келтирилган. $x > 5$ қийматлар учун $\Phi(x) = 0,5$ деб олинади. ($\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, яъни $\Phi(x)$ – тоқ функция.)

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1–масала. Корхонада ишлаб чиқарилган деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,005 га тенг. 10000 та деталдан иборат партиядаги яроқсиз деталлар сонининг 40 та бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Масаланинг шартига кўра $n=10000$; $k=40$; $p=0,005$; $q=0,995$. $n=10000$ етарлича катта сон бўлгани учун Муавр–Лапласнинг локал формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

бу ерда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

x нинг қийматини топамиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000 \cdot 0,005}{\sqrt{10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} \approx -\frac{10}{7,05} = -1,42$$

Жадвалдан $\Phi(-1,42) = 1 - \Phi(1,42) = 0,0793$ ии топамиз. Демак, изланаётган эҳтимоли:

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7,05} * 0,1456 \approx 0,0206$$

2–масала. Дарслик 200000 нусхада босиб чиқарилган. Дарсликнинг брак бўлиш эҳтимоли 0,00005 га тенг. Бутун тиражда роса бешта брак китоб бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Шартга кўра $n=200000$, $p=0,00005$, $k=5$. n сон катта ва p эҳтимол кичик, шу сабабли Пуассон формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

бу ерда $\lambda=np$ λ нинг қийматини топамиз: $\lambda=200000 \cdot 0,00005=10$.

Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{200000}(5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = \frac{10^5}{120} * 0,000045 \approx 0,0375$$

3–масала. Таваккалига олинган пилланинг яроқсиз чиқиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Тасодифан олинган 400 та пилладан 70 тадан 130 тагача яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Масала шартига кўра:

$$p=0,2; q=0,8; n=400; k_1=70; k_2=130.$$

Муавр–Лапласнинг интеграл формуласидан фойдаланамиз:

$$P_n\{k_1 \leq \mu \leq k_2\} = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

x' ва x'' ларнинг қийматларини топамиз:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = -\frac{10}{8} = -1,25$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = \frac{55}{8} = 6,25$$

Жадвалдан топамиз:

$\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,39435$, $\Phi(6,25) = 0,5$ чунки $x > 5$ да $\Phi(x) = 0,5$.

Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(70 \leq \mu \leq 130) = \Phi(6,25) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,39435 = 0,89435.$$

55. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, унинг 400 та тажрибадан 80 тасида рўй бериш эҳтимолини топинг.
Жавоб. $P_{400}(80) \approx 0,04986$.

56. Ўғил бола туғилиш эҳтимоли 0,51 га тенг. Туғилган 100 чақалоқнинг 50 таси ўғил бола бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{100}(50) \approx 0,04565$.

57. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p=0,5$ га тенг бўлган 10000 та тажриба ўтказилади. Шунча тажрибада A ҳодиса рўй беришининг энг катта эҳтимолли сонининг эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{10000}(500) \approx 0,007978$.

58. Ишчи аёл 800 та урчукка хизмат кўрсатади. Δт вақт оралиғида ҳар бир урчукда йигирлаётган ипнинг узилиш эҳтимоли 0,005 га тенг. Узилишларнинг энг катта эҳтимолли сонини ва бу соннинг эҳтимолини топинг.

Жавоб. $k_0=4$, $P_{800}(4) = 0,1954$.

59. Бир соат давомида истаган абонентнинг коммутаторга телефон қилиш эҳтимоли 0,01 га тенг. Телефон станцияси 300 абонентга хизмат қилади. Бир соат давомида 4 та абонентнинг телефон қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{300}(4) \approx 0,169$.

60. Ҳар бир отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,001 га тенг. Агар 5000 та ўқ отилган бўлса, камида 2 та ўқнинг нишонга тегиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{5000}(\mu \geq 2) \approx 0,9596$.

61. Факультет студентлардаинг имтиҳон комиссиясидан “4” ва “5” баҳолар билан ўтиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Таваккалига олинган 400 студентдан 34 тадан 55 тагачаси ҳеч бўлмаганда битта фандан “4” дан паст баҳо олиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P_{400}(34 \leq \mu \leq 55) = 0,8351$.

62. Ҳодисанинг 2100 та боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,7 га тенг. Ҳодисанинг: а) камида 1470 марта ва кўпи билан 1500 марта; б) камида 1470 марта; в) кўпи билан 1469 марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоб. а) $P_{2100}(1470 \leq \mu \leq 1500) \approx 0,4235$;

б) $P_{2100}(1470 \leq \mu \leq 2100) \approx 0,5$;

в) $P_{2100}(0 \leq \mu \leq 1469) \approx 0,5$.

8–§. Муавр – Лаплас интеграл теоремасининг татбиқи

Фараз қилайлик, Муавр–Лапласнинг интеграл теоремасидаги барча шартлар бажарилган бўлсин. m/n нисбий частотанинг ўзгармас p эҳтимолидан четлашишининг абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган $\varepsilon > 0$ сондан катта бўлмаслик эҳтимолини топиш масаласини кўрайлик. Ушбу

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

тенгликни эътиборга олсак, Муавр–Лапласнинг интеграл теоремасига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left\{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = 1$$

Бу муносабат Бернулли схемаси учун катта сонлар қонуни ёки Бернулли теоремаси дейилади. Бернулли теоремаси эҳтимоллар назариясининг асосий теоремаларидан ҳисобланиб, бу теорема ёрдамида кўпгина амалий масалалар ҳал қилинади.

Шундаи қилиб, $\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимоли тақрибан

Лаплас функциясининг $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$ нуқтадаги қийматининг иккиланганига тенг экан:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left\{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

Қуйидаги масалаларнинг ечилиши билан танишайлик.

1–масала. Тажриба танга ташлашдан иборат бўлсин. A –ташланган танганинг гербли томони билан тушиш ҳодисаси бўлсин. Тангани 400 марта ташланганда A ҳодиса нисбий частотаси $\frac{m}{400}$ нинг $\frac{A}{2}$ –эҳтимолдан абсолют қиймат бўйича четлашиши 0,08 дан кичик бўлиш эҳтимолини топинг.

Δ. Масаланинг шартига кўра $n=400$, $p=q=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=0,08$. У ҳолда юқоридаги формулага кўра:

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0,08\right\} \approx 2\Phi\left\{0,08 \sqrt{\frac{400}{\frac{1}{4}}}\right\} = 2\Phi(3,2)$$

Жадвалдан $\Phi(3,2)=0,49931$ топилади. Демак,

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0,08\right\} \approx 0,99862$$

2–масала. Қорақўл терининг яроқсиз чиқиш эҳтимоли $p=0,09$ га тенг бўлсин. Нечта қорақўл тери олинганда қорғқўлнинг яроқсиз чиқиш нисбий частотасининг 0,09 эҳтимолдан фарқи абсолют қиймати жиҳатидан 0,02 дан кичик бўлиш эҳтимоли, 0,9962 га тенг бўлади.

Δ. Шартга кўра $p = 0,09$; $q=0,91$; $\varepsilon=0,02$,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,09\right| < 0,02\right\} = 0,9962$$

Бу ифодадан n ни топамиз. Муавр–Лапласнинг интеграл формуласига кўра

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,09\right| < 0,02\right\} = 2\Phi\left\{0,02 \sqrt{\frac{n}{0,09 \cdot 0,91}}\right\} \approx 2\Phi(0,071\sqrt{n})$$

бўлгани учун, $2\Phi(0,071\sqrt{n})=0,9982$ ёки

$\Phi(0,071\sqrt{n})=0,4981$ бўлади.

Жадвалдан $\Phi(2,9)=0,4981$ эканини топамиз.

Демак, $0,071 \sqrt{n} = 2,9$; $n = 1664$.

3–масала. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $0,25$ га тенг. 600 та тажриба ўтказилганда $0,92$ эҳтимол билан ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси ҳодиса эҳтимолидан қанчагача четлашиши мумкин?

Δ. Шартга кўра $p=0,25$; $q=0,75$; $n=600$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 0,92$$

Бундгн қуйидагиларни ёза оламиз:

$$P\left\{\left|\frac{m}{600} - 0,25\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left\{\varepsilon \sqrt{\frac{600}{0,25 \cdot 0,75}}\right\} = 0,92$$

ёки

$$\Phi(56,57 \cdot \varepsilon) = 0,46$$

Жадвалдан $\Phi(1,755) = 0,45$ эканини топсак, $56,57 \cdot \varepsilon = 1,755$ бўлади.

Демак,

$$\varepsilon = 0,031.$$

63. Ўзаро боғлиқ бўлмаган 625 та тажрибанинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $0,8$ га тенг. Ҳодисанинг рўй бериш нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича $0,04$ дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| < 0,04\right\} \approx 0,9876$

64. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $0,5$ га тенг. Ҳодиса рўй бериш нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан четлашиши абсолют қиймати бўйича $0,02$ дан ортиқ бўлмаслигининг $0,7698$ эҳтимол билан кутиш мумкин бўлиши учун неча тажриба ўтказиш керак?

Жавоб. $n=900$.

65. Ўйин соққасини ушбу $\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \leq 0,01$ тенгсизликнинг эҳтимоли қарама–

қарши тенгсизликнинг эҳтимолидан кичик бўлмаслиги учун неча марта ташлаш лозим (бу ерда m ўйин соққасини n марта ташлашда беш очко чиқиш сони)?

Жавоб. $n \geq 632$.

66. Техник контрол бўлими 900 та деталнинг стандартга мувофиқлигини текширади. Деталнинг стандартга мувофиқ бўлиш эҳтимоли $0,9$ га тенг. Шундай ε мусбат сон топингки, деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли нисбий

частотасининг унинг эҳтимоли 0,9 дан четлашишининг абсолют қиймати ε дан катта бўлмаслигини 0,9544 эҳтимол билан кутиш мумкин бўлсин.

Жавоб. $\varepsilon = 0,02$.

67. Техник контрол бўлими 475 та буюмнинг яроқлигини текширади. Буюмнинг брак бўлиш эҳтимоли, 0,05 га тенг. Текширилган буюмлар орасида браклари сони m нинг ётадиган чегараларини 0,9426 эҳтимол билан топинг.

Жавоб. $14 \leq m \leq 32$.

ИИ.606 ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1–§. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни. Биномиал ва Пуассон қонунлари

Тасодифий миқдор деб аввалдан номаълум бўлган ва олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган ҳамда синов (тажриба) натижасида мумкин бўлган қийматлардан биттасини қабул қилувчи миқдорга айтилади.

Тасодифий миқдорларнинг икки хилини кўрамиз:

- 1) Дискрет тасодифий миқдор.
- 2) Узлуксиз тасодифий миқдор.

Тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари алоҳида–алоҳида олинган миқдорлардан (масалан, бутун ва рационал сонлардан) иборат бўлса, у дискрет тасодифий миқдор дейилади.

Агар тасодифий миқдор $(a; b)$ ёки $(-\infty; +\infty)$ ораликдаги ихтиёрий қийматни қабул қила олса, у *узлуксиз* дейилади.

Тасодифий миқдорларни X, Y, Z ҳарфлари билан, уларнинг қабул қиладиган қийматларини x, y, z лар билан белгилаймиз. Масалан, X тасодифий миқдор 5 та қийматни қабул қилади дейилса, буни x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 каби ёзамиз. Аввал дискрет тасодифий миқдорлар устида тўхтаб ўтамиз.

Дискрет тасодифий миқдор берилган бўлиши учун унинг қабул қиладиган қийматлари ва бу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари кўрсатилиши керак. Дискрет тасодифий миқдорнинг *тақсимот қонуни* деб тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматлар билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги ўрнатилган мосликка айтилади. Масалан, n та қиймат қабул қилувчи тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини қуйидагича ёзиш мумкин:

x	x_1	x_2		x_n
P	p_1	p_2		p_n

бу ерда $P\{x=x_u=p_u \text{ ва } p_1+p_2+\dots+p_n=1$. Тақсимот қонунининг графиги *тақсимот кўпбурчаги* дейилади. Бу графикни яшаш учун $M_1(x_1, p_2), M_2(x_2, p_2), \dots, M_n(x_n, p_n)$ нуқталар тўғри бурчакли координаталар системасида ясалади ва улар тўғри чизик кесмалари билан туташтирилади. Дискрет тасодифий миқдорнинг баъзи тақсимот қонунларини келтирамиз.

а) Биномиал тақсимот қонуни. Биз юқорида ҳар бир синовда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A)=p$ ва рўй бермаслик эҳтимоли $P(\bar{A})=q=1-p$ бўлса, n та эркин синовда A ҳодисанинг роппа–роса k марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(k)$ Бернулли формуласи ёрдамида топилишини кўрган эдик. A ҳодисанинг n та эркин синовда рўй беришлар сони X дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $0, 1, 2, 3, \dots, n$ бўлади.

Агар X тасодифий миқдор $0, 1, 2, \dots, n$ қийматларни

$$P_n\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n} \text{ эҳтимол билан қабул қилса, бу тасодифий}$$

миқдор *биномиал тақсимотга* эга дейилади. Биномиал тақсимотни қуйидаги жадвал кўринишида ёзиш мумкин:

x	0	1	2		1		n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

б) Пуассон тақсимот қонуни. Агар X тасодифий миқдор $0, 1, 2, \dots$ қийматларни $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda > 0$ эҳтимоллар билан қабул қилса, X тасодифий миқдор *Пуассон тақсимоти*га эга дейилади. Пуассон тақсимоти жадвали қуйидагичадир:

x	0	1	2	2	
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$	

Баъзан Пуассон тақсимотини кам рўй берадиган ҳодисалар тақсимоти ҳам дейилади. Бу тақсимот қонунидан p етарли кичик ва n етарли катта бўлиб, $\lambda = np = \text{const} < 10$ бўлганда фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

1– мисол. Экилган ҳар бир чигитнинг униб чиқиш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлса, экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Экилган ҳар бир чигит униб чиқиш ҳам, униб чиқмаслиги ҳам мумкин бўлгани сабабли экилган 3 та чигитдан униб чиқишлар сони X биномиал тақсимотга эга бўлган тасодифий миқдор бўлади. Тасодифий миқдор X нинг қабул қиладиган қийматлари $x_1=0$; $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$ бўлиб, бу қийматларни қабул қилиш эҳтимолларини Бернулли формуласи ёрдамида топамиз:

$n = 3$, $p = 0,8$, $q = 0,2$ $k = 0,1,2,3$ бўлгани учун:

$$P_3(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0,8)^0 \cdot (0,2)^3 = (0,2)^3 = 0,008,$$

$$P_3(X = 1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot (0,8) \cdot (0,2)^2 = 0,096,$$

$$P_3(X = 2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2) = 0,384,$$

$$P_3(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = (0,8)^3 = 0,512.$$

Демак, экилган 3 та чигитдан униб чиқишлари сони X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

x	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

Текшириш:

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$$

2–мисол. Лампочка заводида 10000 та лампочка ишлаб чиқарилган. Ҳар қайси лампочканинг брак бўлиш эҳтимоли $p=0,0001$ га тенг. Бу лампочкалар ичидан таваккалига 4 та лампочка олинган. Яроқсиз лампочкалар сонининг тақсимот қонунини ёзинг.

Лампочкалар сони катта ва брак бўлиш эҳтимоли кичик бўлганлиги учун Пуассон формуласидан фойдаланиш қулай $n=10000$, $n \cdot p=1$, $\lambda=n \cdot p=1$, $k=0, 1, 2, 3, 4$ бўлгани учун Пуассон формуласига асосан:

$$P_4(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-1};$$

$$P_4(1) = \frac{e^{-1}}{1!} = e^{-1};$$

$$P_4(2) = \frac{e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2} e^{-1};$$

$$P_4(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6} e^{-1};$$

$$P_4(4) = \frac{1}{24} e^{-1}.$$

Демак қаралаётган тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни.

x	0	1	2	3	4
P	$P_4(0)$	$P_4(1)$	$P_4(2)$	$P_4(3)$	$P_4(4)$

яъни

x	0	1	2	3	4
P	e^{-1}	e^{-1}	$1/2 e^{-1}$	$1/6 e^{-1}$	$1/24 e^{-1}$

кўринишда бўлади.

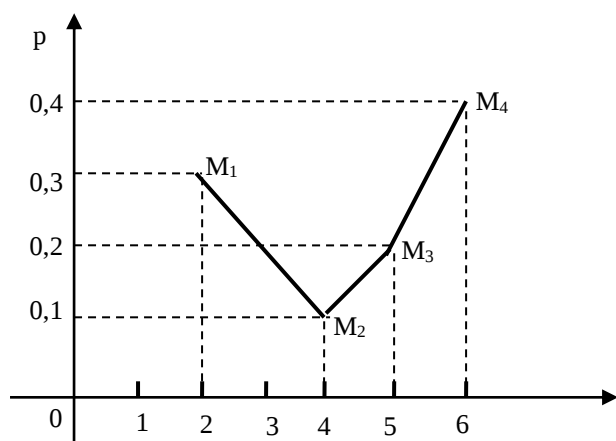
Бу ерда $e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{6} e^{-1} + \frac{1}{24} e^{-1} \approx 1$, чунки, юқорида айтганимиздек, Пуассон формуласи тақрибий формуладир.

3–мисол. Дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

x	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Тақсимот кўпбурчагини ясанг.

Тўғри бурчакли координаталар системасининг абсциссалар ўқи бўйлаб x_i қийматларни, ординаталар ўқи бўйлаб уларга мос n_i қийматларни қўямиз. Хосил бўлган $M_1(2; 0,3)$, $M_2(4; 0,1)$, $M_3(5; 0,2)$, $M_4(6; 0,4)$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталарни синиқ чизиқ билан туташтириб, тақсимот кўпбурчагини ҳосил қиламиз (2.1 – чизма).



2.1 – чизма

1. Экилган ҳар бир дарахтнинг кўкариш эҳтимоли 0,9 бўлса, экилган 3 та дарахтдан кўкарганлари сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

x	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

2. Отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Отилган 4 та ўқдан нишонга тегиш сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

x	0	1	2	3	4
P	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

3. Танга икки марта ташланди. Гербли томон тушиш сонини билдирувчи X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузинг.

Жавоб.

x	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4. Яшикдаги 100 та деталнинг 10 таси яроқсиз. Таваккалига олинган 2 та деталдан яроқсиз бўлиш сонининг тақсимот қонунини тузинг ва графигини ясанг.

Кўрсатма, $P_{10}(X = k) = \frac{C_{10}^k C_9^{2-k}}{C_{100}^k}$ формуладан фойдаланинг.

Жавоб.

x	0	1	2
P	0,8091	0,1818	0,0091

5. Ҳар бир тўп ғўзанинг вильт касалига чалиниш эҳтимоли 0,001 бўлса, таваккалига олинган. 2000 туп ғўзадан вильт касалига чалинганлари сонининг тақсимот қонунини тузинг.

Кўрсатма. Пуассон тақсимоидан фойдаланинг.

x	0	1	2	3	
P	$1/e^2$	$2/e^2$	$2/e^2$	$4/3e^2$	

2– §. Дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Бизга X дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган бўлсин

x	x_1	x_2		x_n
P	p_1	p_2		p_n

Дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб, унинг барча қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг мос эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисига айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

бу ерда $x_1, x_2, \dots, x_n$ – тасодифий миқдор X нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари, $p_1, p_2, \dots, p_n$ – мос равишда бу миқдорларни қабул қилиш эҳтимоллари. Тасодифий миқдорнинг математик кутилишини баъзан тасодифий миқдорнинг *ўртача қиймати* ҳам дейилади.

Математик кутилишнинг хоссалари

1. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши унинг ўзига тенг: $M(C) = C$.
2. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгиси олдида чиқариш мумкин: $M(CX) = CM(X)$.
3. Тасодифий миқдорлар алгебраик йиғиндисининг математик кутилиши шу тасодифий миқдорлар математик кутилишларининг алгебраик йиғиндисига тенг: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. Ўзаро эркин тасодифий миқдорлар кўпатмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.
5. Ҳар бир синовда p эҳтимол билан содир бўладиган A ҳодисанинг n та боғлиқ бўлмаган тажрибада содир бўлишлар сони X –дискрет тасодифий миқдор бўлиб, унинг математик кутилиши $M(X) = np$ га тенг.

Дискрет тасодифий миқдорнинг *дисперсияси* деб тасодифий миқдор билан унинг математик кутилиши айирмаси квадратининг математик кутилишига айтилади ва у қуйидгича белгиланади: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни маълум бўлса, унинг дисперсияси

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$$

га тенг бўлади.

Дисперсияни қуйидаги формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия тасодифий миқдорнинг математик кутилиши атрофида қанчалик сочилиб (тарқалиб) жойлинганлигини характерлайди.

Дисперсиянинг хоссалари

1. Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг: $D(C) = 0$.
2. Ўзгармас кўпайтувчига дисперсия белгиси олдида квадратга кўтариб чиқариш мумкин: $D(CX) = C^2 D(X)$
3. Иккита боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар алгебраик йиғиндисининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг: $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.
4. Агар A ҳодиса n та боғлиқ бўлмаган тажрибанинг ҳар бирида p эҳтимол билан рўй берса, рўй беришлар сони X нинг дисперсияси $Dx = npq$ га тенг бўлади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши деб унинг дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

1–мисол. Тақсимот қонуни билан берилган қуйидаги тасодифий миқдорнинг математик кутилишини толинг:

x	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ формуладан фойдаланамиз.

$$M(X) = 12 \cdot 0,4 + 14 \cdot 0,3 + 18 \cdot 0,1 + 24 \cdot 0,1 + 27 \cdot 0,1 = 4,8 + 4,2 + 1,8 + 2,4 + 2,7 = 15,9.$$

2–мисол. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича берилган:

а)

x	10	12	20	25	30
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

б)

x	30	40	50	60	70
P	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

Тасодифий миқдорнинг математик кутилишини, дисперсиясини, ўртача квадратик четланишини толинг.

а) математик кутилиш таърифига кўра:

$$M(X) = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,4 = 1 + 2,4 + 2 + 5 + 12 = 22,4.$$

Дисперсиясини ҳисоблаш учун $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун X^2 нинг тақсимот қонунини тузиб чиқамиз:

x^2	100	144	400	625	900
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3

$M(X^2)$ ни ҳисоблаймиз:

$$M(X^2) = 100 \cdot 0,1 + 144 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,1 + 625 \cdot 0,2 + 900 \cdot 0,3 =$$

$$=10+28,8+40+125+360=563,8.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=563,8-(22,4)^2=62,04.$$

Демак, $D(X)=62,04$. Ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{62,04} \approx 7,9, \quad \sigma(X) \approx 7,9.$$

б) Математик кутилишини юқоридаги каби топамиз:

$$M(X)=30 \cdot 0,5+40 \cdot 0,1+50 \cdot 0,2+60 \cdot 0,1+70 \cdot 0,1=15+4+10+6+7=42.$$

$$M(X)=42.$$

Дисперсияни $D(X) = \sum (x_i - M(X))^2 \cdot P_i$ формуладан фойдаланиб топамиз.

Бунинг учун $[X-M(X)]^2$ нинг тақсимот қонунини тузамиз:

$[X-M(X)]^2$	144	4	64	324	784
P	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

$$<144=(30-42)^2, \quad 4=(40-42)^2 \quad \text{ва х. к. } <$$

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=144 \cdot 0,5+4 \cdot 0,1+64 \cdot 0,2+324 \cdot 0,1+784 \cdot 0,1=72+0,4+12,8+32,4+78,4=196,0.$$

$$D(X)=196.$$

$$\text{Ўртача квадратик четланиш: } \sigma(x) \approx \sqrt{196} \approx 14 \quad \sigma(x) \approx 14$$

3-мисол. Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари маълум: $M(X)=3$, $M(Y)=5$ бўлса,

$$\text{а) } Z=2X+3Y; \quad \text{б) } Z=3X-Y$$

тасодифий миқдорларнинг математик кутилишларини топинг.

Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланамиз (алгебраик йиғиндининг математик кутилиши математик кутилишлар алгебраик йиғиндисига тенг; ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгиси олдида чиқариш мумкин):

$$\text{а) } M(Z)=M(2X+3Y)=M(2X)+M(3Y)=2M(X)+3M(Y)=2 \cdot 3+3 \cdot 5=21; \quad M(Z)=21.$$

$$\text{б) } M(Z)=M(3X-Y)=3M(X)-M(Y)=3 \cdot 3-5=4; \quad M(Z)=4.$$

4-мисол. Боғлиқ бўлмаган (эркли) X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари берилган:

x	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,4

$Z=X+Y$ ва $Z=XY$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини тузинг ва $M(Z)=M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ ва $M(Z)=M(XY)=M(X) \cdot M(Y)$ эканлигини текширинг.

Аввал $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузамиз.

Бунинг учун $X+Y$ нинг мумкин бўлган қийматларини ва уларни қабул қилиш эҳтимолларини топамиз:

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 + 0; & z_2 &= -1 + 1; & z_3 &= -1 + 2; & z_4 &= -1 + 3; \\ z_5 &= 0 + 0; & z_6 &= 0 + 1; & z_7 &= 0 + 2; & z_8 &= 0 + 3; \\ z_9 &= 1 + 0; & z_{10} &= 1 + 1; & z_{11} &= 1 + 2; & z_{12} &= 1 + 3 \end{aligned}$$

$Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг $z_k=x_u+y_u$ қийматни қабул қилиш эҳтимоли мос равишда x_u ва y_u ни қабул қилиш эҳтимоллариининг кўпайтмасига тенг. Масалан: $\Pi(z_3=-1+2)=\Pi(x=-1 \text{ ва } y=2)=\Pi(x=-1)\times\Pi(y=2)=0,2\cdot0,3=0,06$.

$Z = X + Y$	-1	0	1	2	0	1	2	3	1	2	3	4
$P_z = P_x \cdot P_y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,20

ёки

$Z = X + Y$	-1	0	1	2	3	4
$P_z = P_x \cdot P_y$	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,20

$$\sum P_i = 0,02 + 0,07 + 0,17 + 0,27 + 0,20 = 1$$

$M(X+Y)$ ни ҳисоблаймиз:

$$M(X+Y) = -1\cdot0,02 + 0\cdot0,07 + 1\cdot0,17 + 2\cdot0,27 + 3\cdot0,27 + 4\cdot0,20 = -0,02 + 0,17 + 0,54 + 0,81 + 0,80 = 2,3.$$

$M(X)$ ва $M(Y)$ ларни алоҳида-алоҳида ҳисоблаймиз:

$$M(X) = 1\cdot0,2 + 0\cdot0,3 + 1\cdot0,5 = -0,2 + 0,5 = 0,3;$$

$$M(Y) = 0\cdot0,1 + 1\cdot0,2 + 2\cdot0,3 + 3\cdot0,4 = 0,2 + 0,6 + 1,2 = 2$$

$$M(X)+M(Y)=0,3 + 2 = 2,3.$$

Демак,

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y) \text{ тенглик бажарилади.}$$

$Z=XY$ нинг тақсимот қонунини тузамиз. Бунинг учун юқоридаги каби мулоҳаза юритамиз:

$$z_1 = (-1) \cdot 0; \quad z_2 = (-1) \cdot 1; \quad z_3 = (-1) \cdot 2; \quad z_4 = (-1) \cdot 3;$$

$$z_5 = 0 \cdot 0; \quad z_6 = 0 \cdot 1; \quad z_7 = 0 \cdot 2; \quad z_8 = 0 \cdot 3;$$

$$z_9 = 1 \cdot 0; \quad z_{10} = 1 \cdot 1; \quad z_{11} = 1 \cdot 2; \quad z_{12} = 1 \cdot 3$$

Тақсимот қонуни қуйидагича ифодаланади:

$Z = XY$	0	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	1	2	3
$P_z = P_x P_y$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,03	0,06	0,09	0,12	0,05	0,1	0,15	0,2

Тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг қабул қилган қийматларини умумлаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$Z = XY$	-3	-2	-1	0	1	2	3
P_z	0,08	0,06	0,04	0,37	0,10	0,15	0,20

$$\begin{aligned} \text{Энди математик кутилиш } M(Z) \text{ ни ҳисоблаймиз: } MZ &= M(XY) = (-3) \cdot 0,08 + \\ &+ (-2) \cdot 0,06 + (-1) \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,20 = \\ &= -0,24 - 0,12 - 0,04 + 0,1 + 0,30 + 0,60 = 0,6; \end{aligned}$$

$$\text{демак, } M(Z) = 0,6$$

Юқоридаги ҳисоблашлардан:

$$M(X) \cdot M(Y) = 0,3 \cdot 2 = 0,6 \text{ ва } M(XY) = 0,6.$$

Демак, $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ тенглик ўринлидир.

5-мисол. Дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган

қийматлари $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ ҳамда $M(X)=2,3$; $M(X^2)=5,9$ лар берилган. X миқдор x_1 , x_2 , x_3 қийматларни қандай эҳтимоллар билан қабул қилишини топинг.

X қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларнинг эҳтимоллари йиғиндиси $p_1+p_2+p_3=1$. Энди $M(X)$ ва $M(X^2)$ нинг таърифига асосан қуйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} M(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \text{ бу ердан} \\ 2,3 &= 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3. \\ M(X^2) &= x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 \text{ бу ердан} \\ 5,9 &= 1 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 9 \cdot p_3. \end{aligned}$$

p_1 , p_2 , p_3 ларга нисбатан уч номаълумли учта теңлама системасини ҳосил қиламиз:

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 &= 2,3 \\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 &= 5,9 \end{aligned} \right\}$$

Бу системани ечиб,

$$p_1=0,2; \quad p_2=0,3; \quad p_3=0,5$$

ларни топамиз.

6–мисол. Ҳар бир синовда A ҳодиса $0,7$ эҳтимол билан рўй берса, 10 та эркин синовда бу ҳодисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилишини топинг.

Масала шартига кўра ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p=0,7$ га тенг, тажрибалар сони $n=10$. Рўй беришлар сонини X десак, унинг математик кутилиши $M(X)=n \cdot p$ формулага асосан (ХИ– боб, 2–§ даги 5–хосса) қуйидагича бўлади:

$$M(X)=10 \cdot 0,7=7. \quad M(X)=7.$$

X тасодикий миқдорнинг тақсимот қонунлари берилган. Унинг математик кутилиши, дисперсияси, ўрта квадратик четланишини топинг.

$$6. \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} X & 8 & 12 & 18 & 24 & 30 \\ \hline p & 0,3 & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Жавоб.} \quad M(X) &= 16,8 \\ D(X) &= 58,56 \\ \sigma(X) &\approx 7,65 \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} X & 21 & 25 & 32 & 40 & 50 \\ \hline p & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Жавоб.} \quad M(X) &= 34,7 \\ D(X) &= 227,79 \\ \sigma(X) &\approx 15,09 \end{aligned}$$

8.	$\frac{X}{p}$	10,2	12,4	16,5	18,1	20
		0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

Жавоб. $M(X)=14,93$
 $D(X)=10,32$
 $\sigma(X)\approx 3,21$

9.	$\frac{X}{p}$	12	16	21	26	30
		0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Жавоб. $M(X)=20,6$
 $D(X)=31,64$
 $\sigma(X)\approx 5,63$

10.	$\frac{X}{p}$	12,0	13,5	15,0	18,0	18,5
		0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Жавоб. $M(X)=15,36$
 $D(X)=4,25$
 $\sigma(X)\approx 2,06$

11.	$\frac{X}{p}$	11,5	13,5	15,0	17,5	18,0
		0,1	0,5	0,2	0,1	0,1

Жавоб. $M(X)=14,45$
 $D(X)=3,58$
 $\sigma(X)\approx 1,89$

12.	$\frac{X}{p}$	4,6	6,2	6,8	7,2	8,4
		0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

Жавоб. $M(X)=6,20$
 $D(X)=1,49$
 $\sigma(X)\approx 1,22$

13.	$\frac{X}{p}$	1,4	2,2	3,5	4,1	5,2
		0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

Жавоб. $M(X)=2,84$
 $D(X)=1,55$
 $\sigma(X)\approx 1,25$

14. Иккита тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунлари берилган:

$\frac{X}{p}$	4	6	10	15	20
	0,15	0,16	0,2	0,4	0,1

,

$\frac{Y}{p}$	12	10	8	25
	0,2	0,1	0,3	0,4

$X+Y$ йиғиндининг тақсимот қонунини тузинг. X , Y ва $X+Y$ миқдорларнинг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X) = 25,55$; $D(Y) = 58,36$; $D(X+Y)=83,91$.

15. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни берилган:

X	10	20	30
p	0,2	0,3	0,5

Y	6	8
p	0,4	0,6

$X-Y$ айирманинг тақсимот қонунини тузинг. $D(X)$; $D(Y)$; $D(X-Y)$ ларни топинг.

Жавоб. $D(X)=61$; $D(Y)=0,96$; $D(X-Y)=61,96$.

16. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни берилган:

X	18	24	30
p	0,2	0,7	0,1

Y	20	26
p	0,9	0,1

$\frac{X+Y}{2}$ нинг тақсимот қонунини тузинг ҳамда $D(X)$; $D(Y)$; $D(\frac{X+Y}{2})$ ларни топинг.

Жавоб. $D(X)=10,44$; $D(Y)=3,24$; $D(\frac{X+Y}{2})=3,42$.

17. ГРУППАДА лотерея ўйини ташкил этилди. Биринчиси 20 сўм, иккинчиси 30 сўм бўлган иккита ютуқ тайинланди. Студент ҳар донаси 1 сўмдан бўлган 50 та билетдан биттасини сотиб олди. Студентга чиқадиган соф ютуқнинг тақсимот қонунини тузинг ва унинг математик кутилишини топинг.

Жавоб.

$X(\text{соф ютуқ})$	-1	19	29
$p(\text{эҳтимол})$	0,96	0,02	0,02

18. Мураккаб асбобларни текшириш натижасида ўртача 50 та асбобдан 10 таси нуқсонли экани аниқланди. Таваккалга олинган 6 та асбобдан нуқсонсиз бўлганлари сонининг тақсимот қонунини тузинг. Унинг математик кутилиши, дисперсиясини топинг.

Жавоб.

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,0001	0,0015	0,0154	0,0819	0,2458	0,3932	0,2621

Кўрсатма. $P_n(k)$ ни Бернулли формуласи ёрдамида топинг.

19. Нишонга қарата ўқ узилди. Ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $1/3$. Нишонга тегиш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X)=2/9$

20. Факультет студентларининг фанларни ўзлаштириш кўрсаткичи 90%. Таваккалга 40 та студент ажратилди. Шулар орасида фанларни ўзлаштирувчи студентлар сонининг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

Жавоб. $M(X)=36$, $D(X)=3,6$.

21. n та ўйин соққаси ташланади. Ҳамма ёқларда чиқадиган очколар йиғиндисининг математик кутилишини топинг.

Жавоб. $M(X)=\frac{7}{2}n$

Кўрсатма. $X=X_1+X_2+\dots+X_n$ — барча ёқларда чиқадиган очколар йиғиндиси. $M(X_1)=M(X_2)=\dots=M(X_n)$ эканлигидан фойдаланинг.

22. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик, кутилишини ва дисперсиясини топинг.

Жавоб. $M(X)=\lambda$. $D(X)=\lambda$

Кўрсатма. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ $M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ эканлигидан фойдаланинг.

23. A ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг. X дискрет тасодифий миқдор $-A$ ҳодисанинг 10 та эрки синовда рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг.

Жавоб. $D(X)=2,4$.

3-§. Катта сонлар қонуни

Чебишев тенгсизлиги. X тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланишининг абсолют қиймат бўйича ε мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ дан кичик эмас, яъни:

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Чебишев теоремаси. $X_1, X_2, \dots, X_n$ —жуфт-жуфти билан эрки тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари бир хил ўзгармас C сон билан текис чегараланган бўлса: $D(X_1) \leq C$, $D(X_2) \leq C$, $\dots$, $D(X_n) \leq C$, у ҳолда ҳар қандай мусбат ε сон учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$\lim P\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) < \varepsilon\right\} = 1$$

Чебишев теоремаси юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметици уларнинг математик кутилишига p эҳтимол бўйича яқинлашишини кўрсатади, бу тасдиқ қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)$$

Бу теоремадан хусусий ҳолда қуйидаги Бернулли теоремаси келиб чиқади.

Теорема. Агар боғлиқ бўлмаган n та тажрибанинг ҳар бирида A ҳодиса ўзгармас p эҳтимол билан рўй берса, у ҳолда тажрибалар сони етарлича катта

бўлганда $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ бўлади, бу ерда $W_n = \frac{m}{n}$ нисбий частота, p —

ҳар бир тажрибада ҳодиса рўй бериш эҳтимоли, $q = 1-p$.

1-мисол. Қўрада боқилаётган бузоқларнинг ўртача оғирлиги 100 кг, ўртача оғирликдан четланиши 0,04. Таваккалига олинган бўзоқнинг оғирлиги 99,5 ва 100,5 кг оралиғида бўлиши эҳтимоли қандай?

Масала шартига кўра $D(X)=0,04$; $M(X)=100$ ва $99,5 \leq X \leq 100,5$. Бу тенгсизликдан ҳадлаб $M(X) = 100$ ни айирмиз:

$$-0,5 \leq X - M(X) \leq 0,5$$

Бу тенгсизликка тенг кучли бўлган $|X - M(X)| \leq 0,5$ тенгсизликни оламиз. Бу ерда $\varepsilon = 0,5$. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$P\{|X - M(X)| \leq 0,5\} > 1 - \frac{0,04}{0,25} \text{ дан } p > 0,84 \text{ келиб чиқади.}$$

2–мисол. Цехда ишлаб чиқарилаётган маҳсулотларнинг ностандарт бўлиши 2% ни ташкил этади. Таваккалига олинган 1000 та маҳсулотдан стандарт бўлганлари сони 970 билан 990 орасида бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

Стандарт маҳсулотлар сонини X билан белгилаймиз ва $M(X)$, $D(X)$ ва ε ларни топамиз. Стандарт маҳсулотлар. 98% ни ташкил қилади. Демак, $p = 0,98$, стандарт бўлмаслик эҳтимоли $q = 0,02$;

$M(X) = n \cdot p$ ва $D(X) = npq$ формулаларга асосан топамиз: $M(X) = 1000 \cdot 0,98 = 980$, $D(X) = 1000 \cdot 0,98 \cdot 0,02 = 19,6$.

Масала шартидан келиб чиқадиган $970 \leq X \leq 990$ тенгсизликнинг иккала томонидан $M(X) = 980$ ни айирамиз:

$$-10 \leq X - M(X) \leq 10, \text{ бундан}$$

$|X - M(X)| \leq 10$. Бу ердан $\varepsilon = 10$ эканлигини эътиборга олиб, Чебишев тенгсизлигига асосан топамиз:

$$P\{|X - M(X)| \leq 10\} > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{19,6}{100},$$

Бу ердан $P > 0,804$.

3–мисол. 2000 га майдонга экилган пахтанинг ўртача ҳосилдорлигини аниқлаш учун ҳар бир гектардан 1 м² майдондаги пахта ҳосили олиб текширилди. Бир гектар майдондаги ҳосилдорлик дисперсияси 9 дан ошмаслиги маълум бўлса, танлаб олинган майдондаги ўртача ҳосилдорликнинг бутун майдондаги ўртача ҳосилдорликдан 0,3 центнерга ошмаслик эҳтимолини топинг.

Масала шартига кўра $n = 2000$, $D(X) = C = 9$, $\varepsilon = 0,3$

Агар ҳар бир гектар майдондаги ҳосилдорликни тасодифий миқдор десак (X_1 – биринчи гектардан, X_2 – иккинчи гектардан ва ҳоказо), у ҳолда ўртача ҳосилдорлик бўлади. Агар $M(X_1)$, $M(X_2)$, . . . , $M(X_n)$ ларни ҳар бир гектардан олинган ўртача ҳосилдорлик десак, у ҳолда Чебишев теоремасига асосан

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| \leq \varepsilon\right\} > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{9}{2000 \cdot 0,09} = 0,95$$

бўлади. Демак, изланаётган эҳтимол $P > 0,95$ бўлади.

4–мисол. Техника назорат бўлимининг маълумотида кўра ишлаб чиқарилган деталлар орасида брак бўлиши 2,5 % ни ташкил этади. Тажриба учун олинган 8000 та детални текшириб чиқилганда брак деталлар процентининг техника назорати бўлими томонидан қўйилган нормадан фарқи 0,005 дан ошмаслик эҳтимолини баҳоланг.

Бу масалани ечишда Бернулли теоремасидан фойдаланамиз. Масала шартига кўра: $P=0,025$ (2,5% брак деталлар), $q=1-p=0,975$, $\varepsilon=0,005$.

У ҳолда Бернулли теоремасига асосан:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,025 \cdot 0,975}{8000 \cdot 0,005^2} = 0,88$$

Демак, $P > 0,88$.

5-мисол. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p=0,6$ га тенг. Нисбий частотанинг ҳар бир тажрибадаги ўзгармас эҳтимолдан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,1 дан кичик бўлиши эҳтимоли 0,98 дан катта бўлиши учун нечта тажриба ўтказиш керак?

Масалани ечиш учун Бернулли теоремасидан фойдаланамиз.

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 0,98 \quad \text{бўлиши керак. Бу ердан } n \text{ ни топамиз:}$$

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq 0,02 \quad \text{ёки } n \geq \frac{pq}{\varepsilon^2 \cdot 0,02} = \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,01 \cdot 0,02} = 1200$$

Демак, камида $n=1200$ та тажриба ўтказиш лозим экан.

6-мисол. 5000 та боғлиқ бўлмаган тажрибада ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳар бир тажрибада ҳодиса рўй бериши эҳтимоли $p=0,8$ дан оғишини топинг (бунда бу оғиш эҳтимоли $P > 0,94$ билан кутилади).

Бу масалани ечиш учун ҳам Бернулли формуласидан фойдаланамиз. Қуйидагиларга эгамиз:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} > 0,94,$$

$$P=0,8; \quad q=1-p=0,2; \quad n=5000$$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} > 1 - \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2} = 0,94$$

Бу ердан

$$0,94 = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}; \quad \varepsilon^2 = \frac{pq}{(1-0,94)n}; \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{0,06 \cdot 5000}} \approx 0,02$$

Демак, $\varepsilon \approx 0,02$

24. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган:

X	8	10	12	16	20	28
P	0,4	0,2	0,1	0,2	0,05	0,05

Тасодифий олинган вариантанинг математик кутилишдан оғишининг абсолют қиймати 15 дан кичик бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

Кўрсатма. Аввал $M(X)$ ва $D(X)$ ни топиш керак.

Жавоб. $p > 0,2$.

25. Агар $D(X)=0,001$ бўлса, $|X-M(X)| < 0,1$ нинг эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p > 0,9$.

26. $P\{|X-M(X)| \leq \varepsilon\} > 0,9$ ва $D(X)=0,004$ берилган. ε қийматини топинг.

Жавоб. $\varepsilon = 0,2$.

27. 1200 та боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдор берилган бўлиб, улардан ҳар бирининг дисперсияси 3 дан ошмайди. Шу тасодифий миқдорлар ўрта арифметигининг математик кутилишлар ўрта арифметигидан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,2 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p > 0,9375$.

28. 1600 та боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдордан ҳар бирининг дисперсияси 9 дан ошмайди. Тасодифий миқдорлар ўрта арифметигининг математик кутилишлар ўрта арифметигидан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,6 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб: $p > 0,996$.

29. Эркин тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ушбу тақсимот қонунлари билан берилган:

$$\text{а) } \frac{X_n}{p} \left| \frac{-n\alpha}{1/2n^2} \right| \frac{0}{1-1/n^2} \left| \frac{n\alpha}{1/2n^2} \right|, \quad \text{б) } \frac{X_n}{p} \left| \frac{-n\alpha}{1/4} \right| \frac{0}{1/2} \left| \frac{n\alpha}{1/4} \right|$$

бу кетма-кетликларга Чебишев теоремасини қўлланиш мумкинми?

Жавоб. а) $M(X_n)=0, D(X_n)=\alpha^2$ бўлиб, теоремани қўлланиш мумкин;

б) $M(X_n)=0; D(X_n)=\frac{1}{2}n^2\alpha^2 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, теорема шартлари

бажарилмайди, шунинг учун уни қўлланиш мумкин эмас.

30. Эркин тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги тақсимоти берилган:

$$\frac{X_n}{p} \left| \frac{n+1}{n/2n+1} \right| \frac{-n}{n+1/2n+1}$$

Уларнинг дисперсияси текис чегараланганми?

Жавоб. n ортиши билан $D(X_n)=\frac{2n^3+3n^2+n}{n+1}$ чексиз ортади, демак,

чегараланган эмас.

31. Заводда ишлаб чиқарилган деталнинг ўртача узунлиги 50 см, ўртача квадратик четланиши 0,2 см. Таваккалига олинган детал узунлиги 49,5 см билан 50,5 см орасида бўлиши эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p > 0,84$.

32. Ўйин соққаси 350 марта ташланди. Очколар тушиш математик кутилиши 3,5; дисперсияси 35/12 га тенг.

Очколар тушиш ўрта арифметигининг математик кутилишдан четланишини абсолют қиймати 0,2 дан ошмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоб. $p > 0,782$.

33. Маълум ўсимлик уруғларининг униб чиқиши 70% ни ташкил этади. Экилган 10000 та уруғдан униб чиқишлар сони нисбий частотасининг берилган ўзгармас p эҳтимолдан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,01 дан катта бўлмаслигининг эҳтимолини баҳоланг.

Жавоб. $p > 0,79$.

4–§. Тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот функциялари

1. Интеграл функция. X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси ёки интеграл функцияси деб

$$P(X < x) = \Phi(x)$$

тенглик билан аниқланган $\Phi(x)$ функцияга айтилади. Тақсимот функцияси (дискрет ёки узлуксиз ҳолда ҳам) тасодифий миқдор қонуниятининг умумийроқ формада берилишидир. Тақсимот функцияси узлуксиз дифференциалланувчи бўлган тасодифий миқдор узлуксиз тасодифий миқдор дейилади.

Тасодифий миқдор тақсимот функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1) Интеграл функциянинг қийматлари $[0,1]$ кесмага тегишли, яъни $0 \leq F(x) \leq 1$.

2) Интеграл функция камаймайдиган функция.

3) Агар X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда $x \leq a$ бўлганда $F(x)=0$, $x \geq b$ бўлганда $F(x)=1$.

Тақсимотнинг интеграл функцияси таърифидан, яъни $P\{X < x\} = F(x)$ дан $F(-\infty)=0$ ва $F(+\infty)=1$ келиб чиқади.

Натижа. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг битта тайин қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг:

$$P\{X=x_1\} = 0.$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг $[a, b]$ интервалга тушиш эҳтимоли $P\{a \leq X \leq b\} = \Phi(b) - \Phi(a)$ га тенг.

2. Узлуксиз тасодифий миқдор эҳтимоллари тақсимотининг дифференциал функцияси. Эҳтимоллар тақсимотининг дифференциал функцияси деб, интеграл функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади:

$$f(x) = F'(x)$$

Дифференциал функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) Дифференциал функция манфий эмас: яъни $f(x) \geq 0$.

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимоли

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$

тенглик билан аниқланади.

Агар дифференциал функция маълум бўлса, интеграл функцияни қуйидагича топиш мумкин:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг сон характеристикалари. Агар X узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун Ox ўққа тегишли бўлса, унинг математик кутилиши

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

билан, унинг дисперсияси эса,

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

формула билан аниқланади.

Хусусий ҳолда, агар X тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда унинг математик кутилиши

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

формула билан, дисперсияси эса

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

формула билан аниқланади.

Умуман дисперсияни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$D(X) = \int x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четлиниши деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтитади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

1 – мисол. Дискрет тасодифий миқдор X қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2

Тақсимот интеграл функциясини топинг ва графигини ясанг.

Дискрет тасодифий миқдор учун

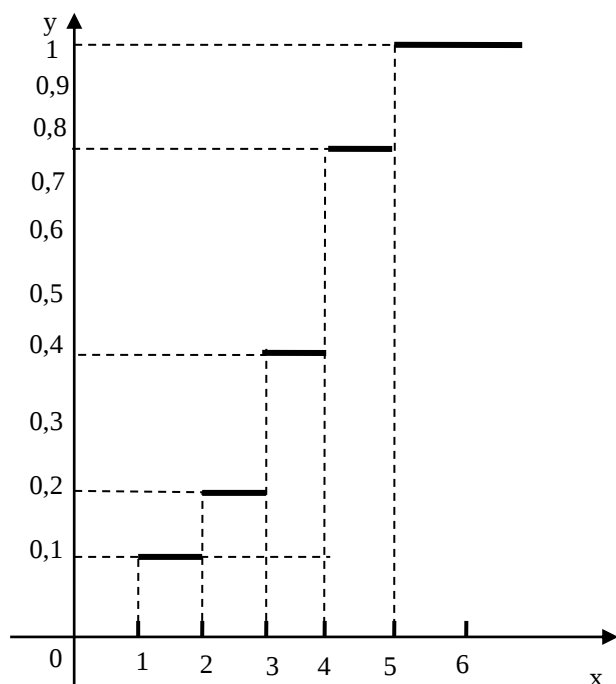
$$F(x) = P\{X < x\} = \sum P(X = x_i) \{x_i < x\}$$

бўлганидан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

агар $x \leq 1$ бўлса, $\Phi(x)=0$;
 агар $1 < x \leq 2$ бўлса, $\Phi(x)=0,1$;
 агар $2 < x \leq 3$ бўлса, $\Phi(x)=0,1+0,15=0,25$;
 агар $3 < x \leq 4$ бўлса, $\Phi(x)=0,1+0,15+0,2=0,45$;
 агар $4 < x \leq 5$ бўлса, $\Phi(x)=0,1+0,15+0,2+0,35=0,8$;
 агар $x > 5$ бўлса, $\Phi(x)=0,8+0,2=1$ бўлади.

$$\text{Яъни } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 0,1, & \text{агар } 1 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ 0,25, & \text{агар } 2 < x \leq 3 \text{ бўлса,} \\ 0,45, & \text{агар } 3 < x \leq 4 \text{ бўлса,} \\ 0,8, & \text{агар } 4 < x \leq 5 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 5 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

тақсимот интеграл функциясининг графиги қуйидагича бўлади:



2.2– чизма

2–мисол. Тасодифий миқдор X тақсимотининг интеграл функцияси қуйидагича:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{8}x^3, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

X тасодифий миқдорнинг $[0,5, 1,5]$ интервалдан қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

$[0,5; 1,5]$ интервал $[0, 2]$ интервал ичида ётгани учун $P\{a < x < b\} = F(b) - F(a)$ формулага асосан:

$$P\{0,5 < x < 1,5\} = \Phi(1,5) - \Phi(0,5) = \frac{1}{8} \{ (1,5)^3 - (0,5)^3 \} \approx 0,4063.$$

3–мисол. Интеграл функцияси куйидагича

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}x, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

бўлган узлуксиз тасодифий миқдор X нинг;

а) дифференциал функциясини;

б) дифференциал функциядан фойдаланиб $\Pi\{0 < x < 1\}$ эҳтимолини топинг.

$$а) f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{2}, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$б) P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx \text{ бўлгани учун}$$

$$P\{0 < x < 1\} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Демак $\Pi\{0 < x < 1\} = \frac{1}{2}$ бўлади.

4–мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси куйидагича:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \sin 2x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{4} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$f(x)$ дифференциал функцияни топинг.

Дифференциал функция интеграл функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \cos 2x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > \frac{\pi}{4} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

яъни $(0, \frac{\pi}{4})$ интервалда $\phi(x)=2\cos 2x$, бу интервалдан ташқарида $\phi(x)=0$.

5-мисол. Узлуксиз тасодифий микдорнинг дифференциал функцияси куйидагича:

$(0, \infty)$ интервалда $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$) кўринишда берилган. Бу интервалдан ташқарида $\phi(x)=0$. X нинг $(1, 2)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ушбу $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x) dx$ формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $a=1$; $b=2$; $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. Демак изланаётган эҳтимол

$$\begin{aligned} P\{1 < x < 2\} &= \int_1^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = - \int_1^2 e^{-\alpha x} d(-\alpha x) = -e^{-\alpha x} \Big|_1^2 = -e^{-2\alpha} + e^{-\alpha} = \\ &= -\frac{1}{e^{2\alpha}} + \frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{2\alpha}} \end{aligned}$$

бўлади.

6-мисол. X узлуксиз тасодифий микдорнинг дифференциал функцияси ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ бўлганда,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ бўлганда,} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \text{ бўлганда} \end{cases}$$

кўринишда, унинг $F(x)$ интеграл функциясини топинг.

Ушбу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

формуладан фойдаланамиз. Агар $x < 0$ бўлса, $\phi(x)=0$,

демак $\Phi(x)=0$. Агар $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^x = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$$

Агар $x > \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 \cdot dx = 1 \text{ бўлади.}$$

$$\text{Шундай қилиб, } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - \cos, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ бўлса,} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлади.

7-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси бутун Ox ўқда аниқланган бўлиб,

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$$

кўринишга эга. C ўзгармасни топинг.

$$\text{Дифференциал функциянинг хоссаси } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\text{га асосан } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2C}{1+x^2} dx = 1 \text{ ёки}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2C}{1+x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2C \arctg x \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = 2C(\arctg(+\infty) - \arctg(-\infty)) = 2C \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2C\pi$$

яъни

$$2C\pi = 1 \text{ дан } C = \frac{1}{2\pi} \text{ бўлади.}$$

8-мисол. Тасодифий миқдор X нинг дифференциал функцияси [10; 12] интервалда $\phi(x) = \frac{1}{2}x - 5$ орқали берилган.

Интервал ташқарисида $\phi(x) = 0$. Унинг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Математик кутилиш формуласига кўра

$$M(X) = \int_a^b xf(x) dx$$

$$M(X) = \int_{10}^{12} x \left(\frac{1}{2}x - 5 \right) dx = \left(\frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{10}^{12} = \frac{34}{3}$$

Дисперсиясини

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

формула орқали топамиз:

$$D(X) = \int_{10}^{12} x^2 \left(\frac{1}{2}x - 5 \right) dx - \left(\frac{34}{3} \right)^2 = \left(\frac{1}{8}x^4 - 5\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{10}^{12} - \left(\frac{34}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

Ўртача квадратик четланиш

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,526$$

бўлади.

34. Дискрет тасодифий миқдор X қуйидаги тақсимот қонунлари билан берилган:

$$1) \begin{array}{c|ccc} X & 0 & 2 & 4 \\ \hline P & 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c|ccccc} X & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \hline P & 0,1 & 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,2 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{c|cccc} X & 3 & 5 & 9 & 12 \\ \hline P & 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{c|ccc} X & 2 & 4 & 7 \\ \hline P & 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{array}$$

уларнинг $\Phi(X)$ интеграл функцияларини топиб, графикларини чизинг.

35. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -1 \text{ бўлса,} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{агар } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > \frac{1}{3} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Синов натижасида миқдорнинг $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ интервалда ётган қийматини қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. $\frac{1}{4}$.

36. Тасодифий миқдор X нинг интеграл функцияси берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 4^x, & \text{агар } -\infty < x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унинг $[-1; 0]$ интервалда ётиш эҳтимолини топинг.

Жавоб. 0,75.

37. Тасодифий миқдор X нинг қуйидаги $\Phi(X)$ интеграл функцияларига кўра

а) дифференциал функцияларини топинг;

б) математик кутилиши ва дисперсияларини топинг:

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{x^2}{4}, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \sin x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$4) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{4}x, & \text{агар } 0 < x \leq 4, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$5) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -2 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & \text{агар } -2 < x \leq 2, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

38. X тасодифий микдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{1}{8}x, & \text{агар } 0 < x \leq 4, \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унинг математик кутилиши, дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг, ҳамда $[0,5; 1]$, $[2; 2,5]$ интервалларининг қийматлар қабул қилиш эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Жавоб. } M(X) = 2\frac{2}{3}; \quad D(X) = \frac{8}{9}. \quad \sigma(X) = 0,94.$$

39. Қуйидаги дифференциал функциялар берилган. Уларнинг интеграл функцияларини топинг.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \cos x; & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0; & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 12, \\ \frac{1}{2}x - A; & 12 < x \leq 14, \\ 0; & x > 14. \end{cases}$$

$$3) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 6, \\ \frac{1}{2}x - 3; & 6 < x \leq 8, \\ 0; & x > 8. \end{cases}$$

$$4) F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x; & \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0; & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

40. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси

а) бутун Ox ўқда $f(x) = \frac{4C}{e^x - e^{-x}}$ тенглик билан берилган,

б) $\phi(x) = C \sin 2x$ тенглик билан $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда берилган, бу ораликдан ташқарида унинг қиймати нолга тенг. C параметрни топинг.

41. X тасодифий миқдорнинг $(-C, C)$ интервалда $\phi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{C^2 - x^2}}$ дифференциал функцияси берилган. Бу интервалдан ташқарида $\phi(x) = 0$. X миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг.

Жавоб. $M(X) = 0$.

5– §. Нормал тақсимот

Агар узлуксиз тасодифий миқдор x нинг дифференциал функцияси ушбу

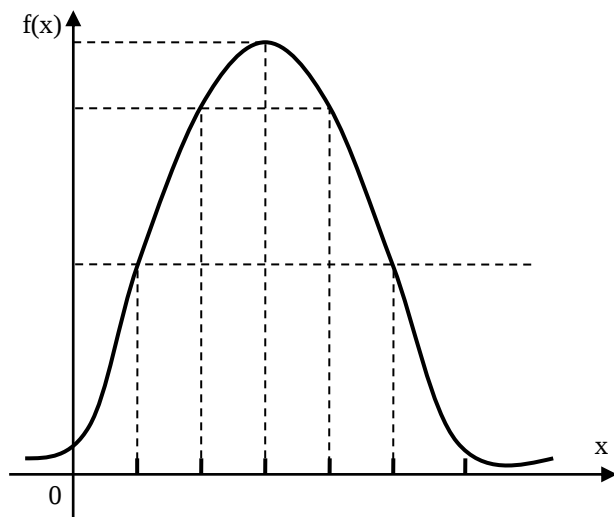
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

кўринишда бўлса, бу тасодифий миқдор *нормал тақсимланган* дейилади, бу ерда a параметр X нинг математик кутилиши, σ эса унинг ўртача квадратик четланиши (11. 3–чизмага қаралсин). X миқдорнинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли қуйидаги тенглик ёрдамида топилади:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$



Бу функция *Лаплас функцияси* дейилади. Унинг қийматлари иловадаги 2–жадвалда келтирилган, $x \geq 5$ бўлганда $\Phi(x) \approx 0,5$ деб қабул қилинади.

X тасодифий миқдорнинг математик кутилишидан четланишининг абсолют қиймати δ мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формула билан топилади.

Бу ерда $\delta = \sigma$; $\delta = 2\sigma$; $\delta = 3\sigma$ деб 2–жадвалдан қуйидагиларни

$$P\{|X - a| < \sigma\} = 2\Phi(1) = 0,6826,$$

$$P\{|X - a| < 2\sigma\} = 2\Phi(2) = 0,9544,$$

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0,9973$$

ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, агар X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, ўз қийматларини 0,9973 ишонч эҳтимоли билан $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ интервалда қабул қилади.

1–мисол. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор қийматларини $[14, 24]$ кесмада қабул қилиш эҳтимолини топинг (математик кутилиши $a=20$, ўртача квадратик четланиши $\sigma = 2$ га тенг).

Масала шартига кўра $\alpha=14$, $\beta=24$, $a=20$, $\sigma=2$; $P\{14 < X < 24\}$ ни топиш керак. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топиш

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

формуласига асосан

2–жадвалга асосан:

$$\Phi(2)=0,4772; \Phi(3)=0,4965$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$P\{14 < X < 24\} = -0,4772 + 0,4965 = 0,0193 \text{ бўлади.}$$

2–мисол. Заводда ишлаб чиқарилаётган консерва банкасининг ўртача

оғирлиги 250 г, ўртача квадратик четланиши 5 граммни ташкил этади. Банкаларнинг оғирлиги нормал тақсимланган деб унинг ўртачасидан оғишининг абсолют қиймати 8 граммдан ошмаслик эҳтимолини топинг.

Масала шартига кўра $a=250$, $\sigma=5$, $\delta=5,8$, $P\{|X - 250| < \delta\}$ ни топиш керак.

$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формулага асосан:

$$P\{|X - 250| < 8\} = 2\Phi\left(\frac{8}{5}\right) = 2\Phi(1,6).$$

Китоб охиридаги 2–жадвалдан $\Phi(1,6) = 0,4452$ ни топамиз. Демак,

$$P\{|X - 250| < 8\} = 2 \cdot 0,4452 = 0,8904 \text{ бўлади.}$$

42. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдор математик кутилиши a га, ўртача квадратик четланиши σ га тенг. Унинг (α, β) интервалдан қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

$$42. a=18, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 14, \quad \beta = 24.$$

$$43. a=12, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 10, \quad \beta = 16.$$

$$44. a=15, \quad \sigma = 5, \quad \alpha = 13, \quad \beta = 23.$$

$$45. a=10, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 7, \quad \beta = 16.$$

$$46. a=11, \quad \sigma = 6, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 23.$$

$$47. a=2, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 8,$$

$$48. a=9, \quad \sigma = 5, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 24,$$

$$49. a=5, \quad \sigma = 1, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 6,$$

$$50. a=18, \quad \sigma = 5, \quad \alpha = 13, \quad \beta = 33.$$

$$51. a=7, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 15. .$$

52. Кунгабоқар уруғининг оғирлиги нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Унинг математик кутилиши $a=58$ г ва ўртача квадратик четланиши $\sigma=1$ бўлса, тасодифий олинган уруғ оғирлиги 57 граммдан 60 граммгача бўлиш эҳтимолини топинг.

X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлиб, ўртача квадратик четланиши σ маълум бўлса, $|x - a| < \delta$ тенгсизлик бажарилиши эҳтимолини топинг:

$$53. a=15, \quad \sigma=3, \quad \delta=6.$$

$$54. a=15, \quad \sigma=5, \quad \delta=10.$$

$$55. a=11, \quad \sigma=6, \quad \delta=3.$$

$$56. a=2, \quad \sigma=3, \quad \delta=4.$$

$$57. a=12, \quad \sigma=8, \quad \delta=12.$$

ИИИ Б 0 Б

ТАНЛАНМА МЕТОД

1–§. Танланманинг статистик тақсимооти

Танланманинг статистик тақсимооти ҳақидаги масалани ечишдан аввал

математик статистиканинг айрим тушунчаларини айтиб ўтамиз. Математик статистика асосан иккита масалани ҳал қилади:

1. Статистик маълумотларни тўплаш ва агар лозим бўлса, группалаш усулларини кўрсатишдир.

2. Тадқиқот мақсадларига мувофиқ равишда статистик маълумотларни таҳлил қилиш методларини ишлаб чиқишдир.

Бир жинсли объектлар тўпламини ўрганиш бу объектларни характерловчи сифат ёки сон белгиларига қараб амалга оширилиши мумкин. Масалан, 1983 хўжалик йилида бирор колхоз ҳосилдорлиги унда етиштирилган пахтанинг килограмига (сон белгиси) ёки сортига (сифат белгиси) қараб баҳоланиши мумкин.

Баъзи ҳолларда объектлар тўпланининг барча элементларини бирор белгисига қараб текшириш мумкин. Аммо – бу усул объектлар тўплами катта бўлганда, жуда катта амалий қийинчилик туғдиради. Бундай ҳолларда тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда ажратиб олиниб, шу олинган объектларгина ўрганилади.

Танланма тўплам деб ўрганилаётган объектлар тўпламидан тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади.

Бош тўплам деб танлаш амалга ошириладиган объектлар тўпламига айтилади.

Тўпламнинг ҳажми деб тўпламдаги объектлар сонига айтилади.

Умуман танланма тўплам (бош тўпламдан) шундай олинishi керакки, унда бош тўпламнинг муҳим асосий хусусиятлари сақланган бўлсин, яъни олинган танланма тўпламни статистик таҳлил қилиш ёрдамида чиқарилган назарий ва амалий хулосалар бош тўпламини берилган ишончлилик даражаси билан етарлича тўлиқ характерлайдиган бўлсин. Математик статистикада бундай танланмани *репрезентатив танланма* дейилади. Бу хусусият кўпинча тасодифий танланмаларда сақланади.

Мисол. 70 га майдони бўлган бригаданинг биринчи теримда гектаридан ўртача неча центнердан пахта териб олишини тахминан баҳолаш талаб қилинган бўлсин. Айтайлик, 1 га майдонда ўртача 120000 туп ғўза бўладиган бўлса, табиийки, 70 га майдондаги ғўзалар сонини ва ҳар бирида очилган пахта чаноклари сонини санаб чиқиш амалий жиҳатдан бажариб бўлмайдиган ҳолдир. Шу сабабли барча пахта майдонини ўлчамини 100 кв. м. бўлган 7000 та квадратларга ажратиб уларни номерлаймиз ва улардан тасодифий равишда бир нечасини, масалан, 50 тасини оламиз. Бу мисолда бош тўплам бригаданинг барча майдони 70 га бўлиб, унинг ҳажми $H=7000$, танланма тўплам эса ажратиб олинган 0,5 га, ҳажми $n = 50$ бўлади.

Танлаш усуллари асосан қуйидагиларга бўлинади:

1. Бош тўпламни қисмларга ажратишни талаб қилмайдиган танлаш:

а) оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш;

б) оддий қайтариладиган тасодифий танлаш.

2. Бош тўпламни қисмларга ажратилгандан кейин танлаш:

а) типик танлаш;

б) механик танлаш;

в) серияли танлаш.

Айтайлик, бош тўпламни ўрганиш учун бирор белгисига қараб ҳажми n бўлган танланма тўплам олинган бўлсин. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта ва ҳоказо, x_k қиймат n_k марта кузатилган, $\sum n_i = n$ бўлсин. Кузатилган x қийматлар *варианталар* дейилади, Варианталарнинг ўсиб бориши тартибида ёзилган кетма–кетлик *вариацион қатор* дейилади. Кузатишлар сони n_u ни частоталар, $W = \frac{n_i}{n}$ ни *нисбий частоталар* дейиладн.

Буни мисолда тушунтирамиз. Маълум бир пахта майдонидан тасодифий равишда 100 туп ғўза олиниб, шу олинган ғўзаларнинг ҳар бир тупида очилган чаноклар сонини ҳисоблайлик. Бу мисолда барча ғўза тупи $n=100$ танланма ҳажми бўлиб, варианта қиймати $x_1=0$ эса очилган чаноклари сони 0 та бўлган ғўзани ва шундай ғўзалардан 100 туп ичида нечта бўлса, уларнинг сони n_2 (частотаси) бўлади, ва ҳоказо.

Танланманинг *статистик тақсимооти* деб вариацион қаторнинг x вариантлари ва уларга мос келувчи частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\begin{array}{ccccccc} x_u & x_1 & x_k \\ n_u & n_1 & n_2 \dots (n_1 + n_2 + \dots n_k = n) \\ x & x_1 & x_2 \dots x_k \\ W_u & W_1 & W_2 \dots W_k (W_1 + W_2 + \dots W_k = 1) \end{array}$$

1–мисол. Гурпуадаги ўқувчилардан 20 нафарининг бўйлари ўлчаниб, қуйидаги маълумотлар олинди:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
бўйи, см	145	147	151	155	163	147	168	155	179	155	163	171	174	145	169	163	166	168	151	155

Шу маълумотларга кўра статистик тақсимотни тузинг.

Биз кўрамызки, маълумотлардан айримлари такрорланиб келаяпти, масалан, $x=145$ икки марта, $x=147$ икки марта ва ҳоказо. Шунинг учун частотали ва нисбий частотали статистик тақсимоот тузишимиз мақсадга мувофиқдир:

x_u	Бўйи, см	145	147	151	155	163	166	168	169	171	174	179
n_u	Ўқувчилар сони	2	2	2	4	3	1	2	1	1	1	1
W_u	–	0,1	0,1	0,1	0,2	0,15	0,05	0,1	0,05	0,05	0,05	0,05

2–мисол. Танланма

$$\begin{array}{cccc} x_u & 5 & 7 & 12 \\ n_u & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

частоталар тақсимооти кўринишда берилган. Нисбий частоталар тақсимоотини топинг.

Танланманинг ҳажми қуйидагича:

$$n = 2 + 5 + 3 = 10$$

Нисбий частоталарни топамиз, бунинг учун ҳар бир частотани танламанинг ҳажмига бўламиз:

$$W_1 = 2/10 = 0,2 \quad W_2 = 5/10 = 0,5; \quad W_3 = 3/10 = 0,3.$$

Демак, нисбий частоталар тақсимоти:

x_i	5	7	12
W_i	0,2	0,5	0,3

Биз юқоридаги мисолларда танланма ҳажми кичик бўлганда унинг статистик тақсимотини тузишни ўргандик. Агар ўрганилаётган белги узлуксиз ўзгарувчи вариантадан иборат бўлса ёки дискрет бўлиб, қабул қиладиган қийматлари сони кўп (яъни танланма ҳажми $n \geq 30$) бўлса, бундай ҳолда статистик тақсимотнинг интервалли (группаларга ажратилган) вариацион қаторини тузиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бош тўпламнинг объектив статистик қонуниятини очишда танланма тўплами қуйидаги k та интервалга (группага) бўлиб (Стердеж таклиф қилган формула бўйича) таҳлил қилиш мумкин;

$$k = 1 + 3,322 \lg n$$

Агар бу ерда k нинг қиймати каср сон бўлса, у яхлитлаб олинади. Фойдаланишга қулайлик туғдириш учун танланма ҳажмига боғлиқ равишда Стердеж формуласидан аниқланувчи интерваллар сонининг жадвалини келтираамиз:

Танланма ҳажми (n)	Олинадиган интерваллар сони (k)
25–40	5–6
40–60	6–8
60–100	7–10
100–200	8–12
$n > 200$	10–15

Интерваллар узунлиги (группалар кенглиги) h ни топишда

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

формуладан фойдланиш мумкин, бу ерда $x_{\max}$, $x_{\min}$ мос равишда вариацион қаторнинг энг катта ва энг кичик қийматларидир. У ҳолда узунликлари k бўлган интерваллар (группалар) кетма–кетлигини қуйидаги тартибда олиш мумкин:

$$\left[x_{\min} - \frac{h}{2}; x_{\min} + \frac{h}{2} \right] \text{—биринчи интервал,}$$

$$\left[x_{\min} + \frac{h}{2}; x_{\min} + \frac{3h}{2} \right] \text{—иккинчи интервал,}$$

$$\left[x_{\min} + \frac{3h}{2}; x_{\min} + \frac{5h}{2} \right] \text{—учинчи интервал ва ҳоказо.}$$

Албатта, интервалларни шундай олиш керакки, ҳар бир варианта фақат битта интервалга тегишли бўлсин.

3–мисол. Пахта майдонидан тасодифий равишда олинган $n=50$ туп ғўзанинг ҳар бирдан териб олинган пахта ҳосилининг оғирлиги (грамм ҳисобида) қуйидагича бўлди:

38,0 51,5 48,3 40,8 33,2 40,2 49,2 34,6 32,0 27,5
 41,3 43,2 42,0 30,3 48,0 43,0 36,0 39,6 38,2 56,0
 47,3 53,8 45,6 33,2 38,2 39,0 35,0 40,5 45,0 44,4
 30,0 35,7 43,5 42,1 42,0 37,3 42,8 50,3 44,6 46,3
 59,0 46,0 37,8 45,0 36,1 44,3 51,7 44,5 48,5 36,4

Шу танланма тўпламнинг статистик тақсимотини тузинг.

Танланма ҳажми $n=50$. Стердеж формуласига асосан интерваллар (группалар) сонини топамиз:

$$k=1+3,322\lg 50=1+3,322\lg(10\cdot 5)=1+3,322\lg 10+3,322\lg 5=\\ =1+3,322+3,322\cdot 0,699=6,64 \text{ (чунки } \lg 10 = 1, \lg 5=0,699).$$

Демак, интерваллар (группалар) сонини ортиғи билан яхлитлаб $k=7$ деб оламиз. Танланма тўплам қийматлари жадвалидан $x_{\min}=27,5$ ва $x_{\max}=59$ бўлганлигидан интерваллар (группалар) узунлиги қуйидагича бўлади:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{59 - 27,5}{6,64} = \frac{31,5}{6,64} = 4,74$$

Бу мисолимизда узунлиги $h=4,74$ бўлган интерваллар қуйидагича бўлади:

[26,50–31,24], [31,24–35,98], [35,98–40,72], [40,72–45,46], [45,46–50,20], [50,20–54,94], [54,94–59,68]

Энди ҳар бир интервалга тушувчи вариантлар (сонини) частоталарини топамиз. Масалан, [26,50–31,24] – биринчи интервалга 3 та варианта тегишли, улар 27,5; 30,0 30,3 бўлиб, интервални ўртача қиймати 28,27 га тенг, нисбий частотаси $W_1=3/50=0,06$. Худди шундай иккинчи интервалга [31,24–55,98] тегишли вариантлар сони (частотаси) 6 та, яъни улар 34,6; 33,2; 32,0; 33,2; 35,0; 35,7. Интервалнинг ўртача қиймати 33,6 бўлиб, интервалга тушувчи вариантлар нисбий частотаси $W_2=6/50=0,12$ ва ҳоказо.

Юқоридаги ҳисоблашларга асосан танланма тўпламнинг тузилган вариацион катори қуйидагича бўлади:

Варианта интерваллари	Интервалга тегишли, вариантлар сони (частотаси) n_i	Интервал ўртаси	Нисбий частота (W)
26,50-31,24	3	28,87	0,06
31,24-35,98	6	33,61	0,12

35,98-40,72	12	38,35	0,24
40,72-45,46	15	43,09	0,30
45,46-50,20	8	47,83	0,16
50,20-54,94	4	52,87	0,08
54,94-59,68	2	57,31	0,04

Шундай қилиб, бу жадвал берилгн 50 та маълумотнинг статистик тақсимои бўлади.

Тажриба участкасидаги олмалардан 50 таси тартиб қўрилганда уларнинг оғирликлари қуйидагича бўлади (грамм ҳисобида):

65 28 38 55 77 100 40 46 52 80 74
70 25 30 58 46 80 69 60 25 33 50
60 74 87 90 98 22 39 60 74 80 55
92 95 38 78 70 49 30 92 100 50 43
95 40 80 92 90 50

Танланманинг вариацион қаторини тузинг.

2. Частотали статистик тақсимои берилган.

x_i	6	8	12	16	25
n_i	3	5	8	2	2

Нисбий частотали тақсимои тузинг.

2- §. Тақсимоининг эмпирик (интеграл) функцияси

Қуйидаги белгилашларни киритамиз; n —танланма ҳажми, n_x — x дан кичик вариантлар сони. У ҳолда $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси n_x/n бўлиб, x ўзгариши билан у ҳам ўзгариб борада, яъни x нинг функцияси бўлади, буни $F^*(x)$ билан белгилаймиз:

$$F^*(x) = n_x/n$$

$F^*(x)$ тақсимоининг эмпирик функцияси дейилади Эмпирик функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) $F^*(x)$ нинг қийматлари $]0; 1[$ кесмага тегишли.

2) $F^*(x)$ камаймайдиган функция.

3) Агар x , энг кичик варианта, x_2 эса энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x \leq x_2$ бўлганда $F^*(x)=0$; $x > x_2$ бўлганда эса $F^*(x)=1$ бўлади.

$F(x)$ бош тўпламдаги интеграл функция, яъни тақсимоининг назарий функцияси, $F^*(x)$ танланма тақсимоининг эмпирик функцияси бўлсин. $F^*(x)$ функция $F(x)$ функцияни статистик баҳолаш учун хизмат қилади.

1-мисол. Танланманинг ушбу тақсимои бўйича унинг эмпирик функциясини топинг:

x_u	2	5	7	8
n_u	1	3	2	4

Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n=1+3+2+4=10.$$

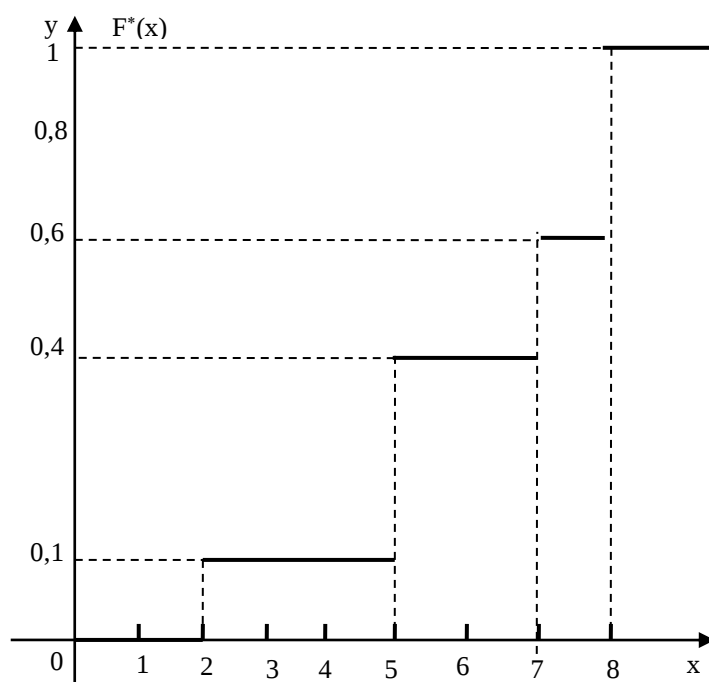
Энг кичик варианта 2 га тенг, шунинг учун $x \leq 2$ бўлганда $F^*(x)=0$ бўлади.

$x < 5$ қиймат, яъни $x_1=2$ қиймат 1 марта кузатилган, демак, $2 < x \leq 5$ бўлганда $F^*(x)=1/10=0,1$; $x < 7$ қийматлар; чунончи $x_1=2$, $x_2=5$ қийматлар $1+3=4$ марта кузатилган, демак, $5 < x < 7$ бўлганда $F^*(x)=4/10=0,4$; $x < 8$ қийматлар; чунончи $x_1=2$, $x_2=6$ $x_3=7$ қийматлар $1+3+2=6$ марта кузатилган, демак $7 < x < 8$ бўлганда $F^*(x)=6/10=0,6$.

$x_4=8$ энг катта варианта бўлганлиги учун $x > 8$ бўлганда $F^*(x)=1$ бўлади. Изланаётган эмпирик функция қуйидагича бўлади;

$$F^*(x) = \begin{cases} x \leq 2 \text{ бўлганда } 0; \\ 2 < x \leq 5 \text{ бўлганда } 0,1; \\ 5 < x \leq 7 \text{ бўлганда } 0,4; \\ 7 < x \leq 8 \text{ бўлганда } 0,6; \\ x > 8 \text{ бўлганда } 1; \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги эса қуйидагича бўлади (12.1-чизма):



3.1-чизма

Танланманинг қуйида берилган ушбу тақсимои бўйича унинг эмпирик функциясини топинг ва графикларини чизинг.

$$3) \begin{array}{c|c|c|c} x_i & 1 & 4 & 6 \\ \hline n_i & 10 & 15 & 25 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{c|c|c|c} x_i & 2 & 6 & 10 \\ \hline n_i & 12 & 18 & 30 \end{array}$$

$$5) \frac{x_i}{n_i} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 5 & 6 & 8 & 11 & \\ \hline 6 & 5 & 4 & 5 & \end{array} \right|$$

$$6) \frac{x_i}{n_i} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 7 & 9 & 11 & 13 & \\ \hline 7 & 8 & 6 & 6 & \end{array} \right|$$

Жавоблар

$$3. F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса;} \\ 0,2, & \text{агар } 1 < x \leq 4 \text{ бўлса;} \\ 0,5, & \text{агар } 4 < x \leq 6 \text{ бўлса;} \\ 1, & \text{агар } x > 6 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$4. F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2 \text{ бўлса;} \\ 0,2, & \text{агар } 2 < x \leq 6 \text{ бўлса;} \\ 0,5, & \text{агар } 6 < x \leq 10 \text{ бўлса;} \\ 1, & \text{агар } x > 10 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$5. F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 5 \text{ бўлса;} \\ 0,2, & \text{агар } 5 < x \leq 6 \text{ бўлса;} \\ 0,55, & \text{агар } 6 < x \leq 8 \text{ бўлса;} \\ 0,75, & \text{агар } 8 < x \leq 11 \text{ бўлса;} \\ 1, & \text{агар } x > 11 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6. F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 7 \text{ бўлса;} \\ 0,23, & \text{агар } 7 < x \leq 9 \text{ бўлса;} \\ 0,5, & \text{агар } 9 < x \leq 11 \text{ бўлса;} \\ 0,8, & \text{агар } 11 < x \leq 13 \text{ бўлса;} \\ 1, & \text{агар } x > 13 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

3- §. Полигон ва гистограмма

Ҳажми n бўлган танланма статистик тақсимооти билан берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n	n_1	n_2	$\dots$	n_k
W	W_1	W_2	$\dots$	W_k

бу ерда $x_1, x_2, \dots, x_k$ – вариантлар;

$n_1, n_2, \dots, n_k$ – мос частоталар;

$W_1, W_2 \dots, W_k$ – нисбий частоталар.

Частоталар полигони деб, $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots (x_k, n_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади.

Нисбий частоталар полигони деб $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \dots (x_k, W_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади.

Бу чизиқларнинг графикларини яшаш учун вариантлар қийматлари абсциссалар ўқида, частоталар ёки нисбий частоталар қийматлари ординаталар ўқида қўйиб чиқилади.

Статистик тақсимотнинг гистограммасини яшаш учун аввал барча кузатилган қийматларни узунлиги h бўлган кетма-кет қисмий интервалларга (группаларга) бўлинади ва ҳар бир интервалга тушган вариантларнинг частоталари топилади.

Частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{n_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. Бу ерда $\frac{n_i}{h}$ нисбат *частота зичлиги* дейилади.

Нисбий частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари $\frac{W_i}{h}$ нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

Частоталар гистограммасининг юзи танланма ҳажми n га, нисбий частоталар гистограммасининг юзи эса бирга тенг бўлади.

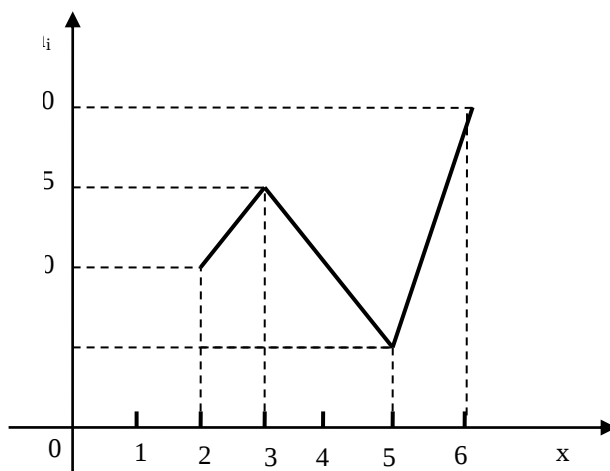
1) 1-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг.

1)	x_u	2	3	5	6
	n_u	10	15	5	20

2)	x_u	12	17	22	16	30	34	38
	n_u	2	5	9	12	8	8	4

1) Абсциссалар ўқида 2, 3, 5, 6 сонларни, ординаталар ўқида эса уларга мос 10, 15, 5, 20 сонларни белгилаймиз, яъни координаталари (2; 10), (3; 15), (5; 5), (6; 20) бўлган нуқталарни ясаб, уларни синиқ чизиқлар билан туташтирамиз (12.2- чизмага қаранг).

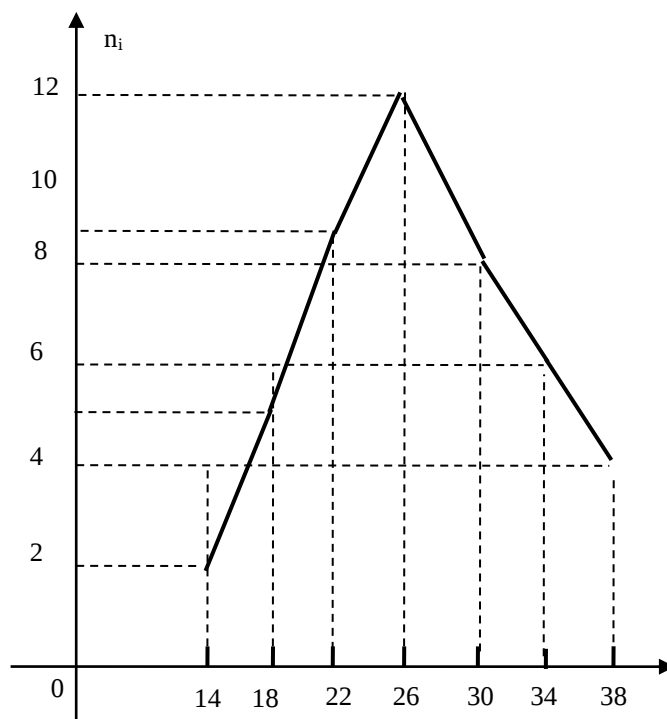
2) Юқоридаги мисол каби ечилади (12. 3-чизма).



3.2- чизма

2-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича гистограмма ясанг.

Қисмий интерваллар	Интервалдаги вариантларнинг частоталари йиғиндиси	Частоталар зичлиги
2-5	9	3
5-8	10	10/3
8-5	25	25/3
11-14	6	2



3.3- чизма

Интерваллар узунлиги $h=3$ эканлиги мисолнинг шартидан кўриниб турибди. Абсциссалар ўқида $h=3$ узунликдаги интервалларни, ординаталар ўқида частоталар зичлиги ўринларини аниқлаймиз, сўнгра у нуқталардан абсциссалар ўқида параллел қилиб, ҳар бир интервал устида кесма чизамиз. Уларни туташтириб гистограммани ҳосил қиламиз (3.4-чизма).

3-мисол. Жўхори донидан 100 дона олинди ва уларнинг ҳар бирини тортиб кўриб қуйидаги статистик тақсимот олинди:

Жўхорилар оғирликлари (г)	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9
Жўхорилар сони	18	52	18	12

Шу тақсимотнинг гистограммасини тузинг.

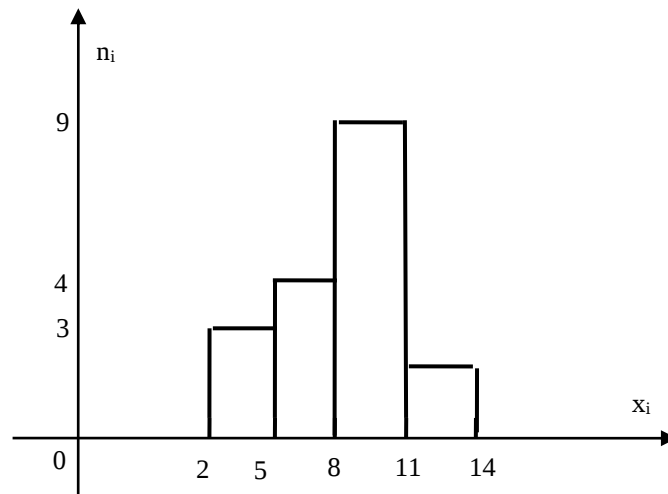
Интерваллар узунлиги $h=0,2$ га тенг бўлгани учун тўғри тўртбурчак баландликларининг нисбати мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\frac{n_1}{h} = \frac{18}{0,2} = 90; \quad \frac{n_2}{h} = 260; \quad \frac{n_3}{h} = 90; \quad \frac{n_4}{h} = 60;$$

Интервалларни абсциссалар ўқида, баландликларини ординаталар ўқида қўйиб поғонавий тўғри тўртбурчаклар ҳосил қиламиз (3.5-чизмага қаранг).

4-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимооти бўйича нисбий частоталар гистограммасини ясанг.

Интерваллар	Частоталар йиғиндиси
10-15	2
15-20	4
20-25	8
25-30	4
30-35	2



3.4-чизма.

Бу ерда $n=20$.

Нисбий частоталарни топамиз:

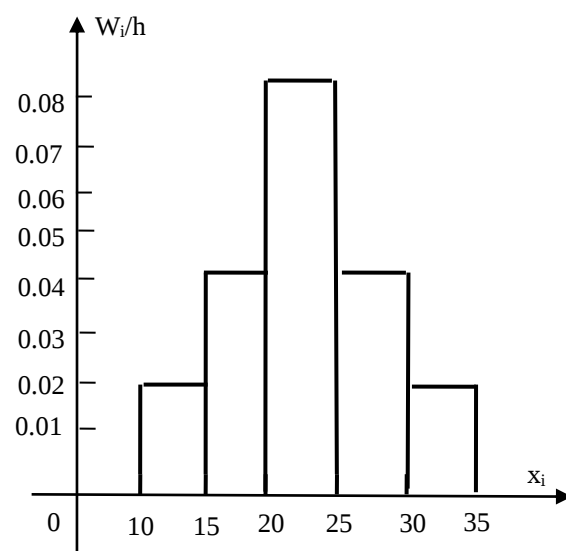
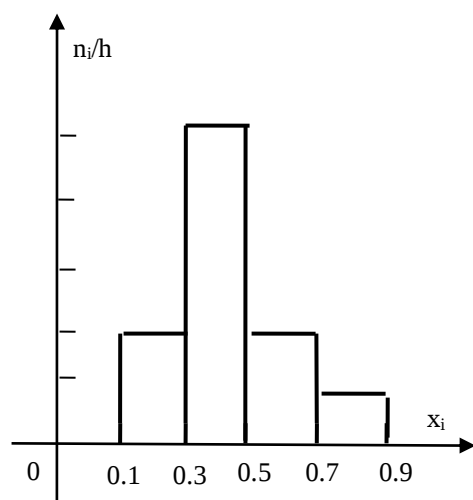
$$W_1 = \frac{0,1}{5} = 0,02 \quad W_2 = \frac{4}{20} = 0,2 \quad W_3 = 0,4 \quad W_4 = 0,2 \quad W_5 = 0,1$$

Нисбий частоталар зичлигини топамиз:

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \quad \frac{W_2}{h} = 0,04 \quad \frac{W_3}{h} = 0,08 \quad \frac{W_4}{h} = 0,04 \quad \frac{W_5}{h} = 0,02$$

Абсциссалар ўқида берилган қисмий интервалларни белгилаймиз. Нисбий частоталар зичликларини ординаталар ўқида белгилаймиз ва ҳар бир интервал устида кесмалар ўтказамиз, масалан (10, 15) интервал устида абсциссалар ўқида параллел ва ундан 0,02 масофада ётадиган кесма ўтказамиз ва ҳоказо (3. 6-

чизмага қаранг).



3.5-чизма

3.6-чизма

7. Частоталар полигонини ясанг.

1) x_u 1 4 5 7
 n_u 20 10 14 6

2) x_u 15 20 25 30 40
 n_u 10 15 30 20 25

8. Нисбий частоталар полигонини ясанг.

1) x_u 1 3 5 7 9
 n_u 10 15 30 33 12

2) x_u 2 4 6 8 10
 n_u 15 10 35 30 10

9. 100 боланинг бўйи ўлчаниши натижасида қуйидаги маълумотлар олинди:

Боланинг бўйи, см	90-94	94-98	98-102	102-106	106-110	110-114	114-118
Болалар сони	2	8	20	32	24	12	2

Статистик тақсимотнинг гистограммасини ясанг.

10. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотларга қараб гистограммани ясанг.

Қисмий интерваллар	Частоталар йиғиндиси
5-10	4
10-15	6
15-20	16
20-25	36

25-30	24
30-35	10
35-40	4

11. 400 га майдондаги экиннинг ҳосилдорлиги текширилиши натижасида қуйидаги маълумотлар олинди:

Ҳосилдорлик (ц)	8-10	10-12	14-14	14-16	16-18	18-20
га сони	6	19	54	141	102	78

Гистограммасини ясанг.

12. 50 колхозчининг меҳнат ҳақи бир йилда қуйидагича бўлди (сўм ҳисобида):

1336, 302, 1304, 1316, 1350, 1321, 1322, 1307
1296, 1298, 1368, 1370, 1302, 1316, 1320, 1321
1240, 1342, 1304, 1306, 1330, 1326, 1313, 1318
1340, 1308, 1290, 1310, 1281, 1280, 1316, 1342
1354, 1360, 1313, 1326, 1292, 1300, 1360, 1370
1324, 1326, 1300, 1342, 1321, 1331, 1330, 1332
1341, 1282

Интервалли вариацион қатор тузинг ва гистограммасини ясанг.

4-§. Бош ўртача қиймат ва дисперсия

Ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсия. Айтайлик, бош тўпلامнинг X дискрет сон белгиси ўрганилаётган бўлсин. Бош тўпلام ҳажми N бўлиб, X символ қабул қиладиган қийматлари $x_1, x_2, \dots, x_k$ лардан иборат бўлиб, уларни, мос равишда $H_1, H_2, \dots, H_k$ частоталар билан қабул қилса ($H_1 + H_2 + \dots + H_k = N$) у ҳолда

$$\bar{x}_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i x_i = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_k x_k}{N} \quad (1)$$

ифода бош ўртача қиймат дейилади. Бунда

$$D_B = \frac{1 \sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{N} \quad (2)$$

бош дисперсия дейилади.

Бош ўртача квадратик четланиш деб, бош дисперсиядан олинган квадрат илдишга айтилади:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \quad (3)$$

Бош тўпламни ўрганиш мақсадида n ҳажмли танланма олинган бўлсин. Агар n ҳажмли танланма бегининг барча $x_1, x_2, \dots, x_k$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталарга эга бўлиб, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ бўлса,

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} \quad (4)$$

ифода ўртача танланма қиймат дейилади.

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{h} \quad (5)$$

Танланма ўртача квадратик четланиш деб танланма дисперсиядан олинган квадратик илдизга айтилади:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \quad (6)$$

Иккала ҳолда ҳам дисперсияни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш қулайдир:

$$D = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2 \quad (7)$$

бу ерда

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

Вариацион қаторнинг яна бошқа сонли характеристикалари мавжуд. Биз улардан айримларини келтирамыз.

1. Вариантанинг энг катта частотага эга бўлган қиймати *мода* деб айтилади ва M_o билан белгиланади.

Медиана m_e деб вариацион қаторни вариантлар сонини тенг икки қисмга ажратадиган вариантага айтилади. Агар $n=2k+1$ бўлса, $m_e = x_{k+1}$ бўлади; агар $n=2k$ бўлса

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

3. *Вариация қулочи* деб энг кичик ва энг катта вариантлар айирмасига айтилади:

$$P_{\max} = x_{\max} - x_{\min}$$

4. *Ўртача абсолют четланиш* деб абсолют четланишларнинг ўртача арифметик қийматига айтилади:

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - x_T|}{\sum n_i}$$

Вариация коэффициентини деб ўртача танланма квадратик четланишнинг ўртача танланма қийматга нисбатининг процентларда ифодаланишига айтилади:

$$V = \frac{\sigma_T}{x_T} \cdot 100\%$$

Варианталар айирмалари бир хил c га тенг бўлган ҳол учун ўртача қийматни қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\bar{x} = a = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - a}{c} \right) n_i \quad (8)$$

Худди шу каби дисперсияни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - a}{c} \right)^2 n_i - (\bar{x} - a)^2 \quad (9)$$

бу ерда a - сохта ноль, яъни энг катта частотага эга бўлган варианта.

1-мисол. Туғилган 500 та бузоқдан 63 таси олиниб оғирлиги ўлчанганда қуйидаги маълумотлар олинди:

Бузоқлар оғирликлари (кг)	24	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	43	45
Бузоқлар сони	2	1	7	6	5	3	10	3	2	6	7	5	1	2	1	1	1

Танланма ўртача қиймат, дисперсия, ўртача квадратик четланишини топинг. Бу мисолни ечишда (4), (7), (6) формулалардан фойдаланамиз:

$$1) \bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{2066}{63} = 32,79$$

$$2) D = \frac{\sum n_i x_i^2}{\sum n_i} - [\bar{x}_T]^2 = 1092,76 - 1075,18 = 17,58 \quad D_T = 17,58$$

$$3) \sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{17,58} = 4,19 \quad \sigma = 4,19$$

2-мисол. Аввалги параграфдаги 12-мисолда келтирилган маълумотлар асосида 50 та колхозчининг бир йиллик меҳнат ҳақининг ўртача қийматини, дисперсиясини ва ўртача квадратик четланишини топинг.

(4) формулага асосан

$$\bar{x} = \frac{1285 \cdot 3 + 1295 \cdot 4 + 1305 \cdot 9 + 1315 \cdot 7 + 1325 \cdot 9 + 1335 \cdot 5 + 1345 \cdot 6 + 1355 \cdot 2 + 1365 \cdot 5}{50} = \frac{66190}{50} = 1323,8 \approx 1324$$

$$\bar{x} = 1323,8 \quad \text{сўм} \approx 1324 \text{ сўм}$$

Дисперсиясини топиш учун (5) формуладан фойдаланамиз:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{h} = 406,6 \quad D = 406,6$$

Энди ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{406,6} = 20,16$$

Демак, четланиш $\sigma=20$ сўм 15 тийин экан (яъни ўртача ҳақдан 20 сўм 15 тийинга фарқ қилар экан).

3-мисол. Сув омборида 20000 та балиқ бўлиб, уларнинг ўртача узунликларини аниқлаш учун 500 та балиқ олинган. Ҳар бир балиқ узунлиги ўлчанганда қуйидаги статистик тақсимот олинган:

Балиқлар узунликлари, см	12,5 13,5	13,5 -14,5	14,5 -15,5	15,5 -16,5	16,5 -17,5	17,5 -18,5	18,5 -19,5	19,5 -20,5	20,5 -21,5
Балиқлар ўртача узунликлари см, x_i	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Балиқлар сони n_i	20	15	40	80	150	100	60	20	15

Қуйидагиларни топинг:

- 1) Ўртача танланма қиймат;
- 2) танланма дисперсия;
- 3) ўртача квадратик четланиш;
- 4) мода;
- 5) медиана;
- 6) вариация қулочи;
- 7) ўртача абсолют четланиш;
- 8) вариация коэффиценти.

1) Ўртача танланма қийматни (8) формуладан фойдаланиб топамиз. Бу мисолда $a = 17$ деб оламиз, чунки 17 энг катта частотага эга, $c = 1$ деб оламиз, чунки вариантлар орасидаги айирма 1 га тенг. $\frac{x_i - a}{c}$ ни ҳисобласак: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ сонлар келиб чиқади, демак қуйидаги жадвал ҳосил бўлди:

x_u	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
h_u	20	15	40	80	150	100	60	20	15	
$\frac{x_i - a}{c}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
$\frac{x_i - a}{c} \cdot n_i$	-80	-45	-80	-80	0	100	120	60	60	55
$\left(\frac{x_i - a}{c}\right)^2 \cdot n_i$	320	135	160	80	0	100	240	180	240	1455

Олинган қийматларни (8) га келтириб қўямиз:

$$\bar{x} = a + \frac{c}{n} \sum_{i=1}^R \left(\frac{x_i - a}{c} \right) n_i = 17 + \frac{1}{500} \cdot 55 \approx 17,11 \quad \bar{x} = 17,11 \text{ см.}$$

2) Дисперсияни ҳисоблашда (9) формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - a}{c} \right)^2 n_i - (\bar{x} - a)^2 = \frac{1^2}{500} \cdot 1455 - (17,11 - 17)^2 \approx 2,92$$

$$\sigma^2 = 2,92$$

3) Ўртача квадратик четланиш қуйидагича бўлади:

$$\sigma_{\circ} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,92} \approx 1,7 \quad \sigma = 1,7$$

4) Модани ҳисоблаймиз: $M_0 = 17$ (чунки энг катта частотага эга бўлган вариантadır).

5) Медианани топамиз: $m_e = 17$.

6) Вариация қулочи қуйидагича бўлади:

$$P_{\max} = x_{\max} - x_{\min} = 21 - 13 = 8 \quad P = 8$$

7) Ўртача абсолют четланишни топиш учун $|x_i - x_T|$ ни ҳисоблаймиз:

$(x_i - x)$	4,11	3,11	2,11	1,11	0,11	0,89	1,89	3,89	
$(x_i - x)n_i$	82,2	46,65	88,8	16,5	89	113,4	57,8	58,35	537,10

8) Вариация коэффициентини топамиз:

$$V = \frac{\sigma_{\circ}}{x_T} \cdot 100\% = \frac{1,7}{17,11} \cdot 100\% \approx 99\%$$

13. Танланма тўплам тақсимои берилган:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Танланма дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоб. $\bar{x}_T = 2$, $m_e = 1$, $\sigma_T = 1$.

14. Қуйидаги статистик тақсимот берилган:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	4	10	39	13	7	3	2	1

$\bar{x}$, D , σ , M_o , m_e , v ларни топинг.

Жавоб. $\bar{x} = 4,35$; $D = 1,88$; $\sigma = 1,37$; $M_o = 4$; $m_e = 5$; $B = 31,5$

15. Кузатилган 200 асбобнинг бузилмасдан (тўхтамасдан) ишлаш вақти қуйидагича:

Ишлаш вақти x_u (соат)	25	75	125	175	225	275	325	375	725
Асбоблар сони n_u	1	1	24	30	71	31	21	13	2

Шу маълумотларга асосан асбобларнинг ўртача ишлаш вақти, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг:

Жавоб. $\bar{x} = 229$ соат; $D = 5846,5$; $\sigma_o = 76,5$

16. Танланманинг берилган

1)

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

2)

x_i	2560	2600	2650	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

статистик тақсимотлари бўйича танланма қийматини ва дисперсиясини топинг.

ИВБОБ ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИНГ СТАТИСТИК БАҲОЛАРИ

1-§. Нуқтавий баҳо

Айтайлик назарий мулоҳазаларга асосан бош тўпламнинг сон белгиси x маълум типдаги тақсимотга эга бўлсин. Бу ҳолда табиий равишда тақсимотни аниқловчи параметрларни бош тўпландан олинган танланма тўплам ёрдамида баҳолаш масаласи туғилади. Масалан, ўрганилаётган x белги бош тўпланда нормал тақсимланганлиги маълум бўлса, нормал тақсимот математик кутилиши ва дисперсияси билан тўлиқ аниқланганлиги сабабли бу номаълум параметрларни танланма ёрдамида баҳолаш зарур бўлади. Умуман, назарий тақсимот номаълум параметрининг *статистик баҳоси* деб, кузатиш натижаларининг бир қийматли ихтиёрий функциясига айтилади.

Номаълум параметрларни танланма ҳажми катта бўлганда нуқтавий

баҳо ва танланма ҳажми кичик бўлганда интервалли баҳо ёрдамида баҳолаш мумкин.

Нуқтавий баҳо деб, битта сон билан аниқланадиган статистик баҳога айтилади. “Яхши” яқинлашиши учун у 1) силжимаган; 2) эффектив ва 3) асосли баҳо бўлиши керак.

1) *Силжимаган* (систематик хатога эга бўлмаган) баҳо деб математик кутилиши исталган ҳажмли танланма бўлганда ҳам, баҳоланаётган θ параметрга тенг бўлган θ^* статистик баҳога айтилади, яъни θ^* статистик баҳо номаълум θ параметрга силжимаган баҳо бўлиши учун $M\theta^* = \theta$ бўлиши керак.

Масалан, кўрсатиш мумкинки $\bar{x}_B$ бош ўртача қиймат, учун $\bar{x}_T$ танланма ўртача қиймат силжимаган баҳо бўлади, яъни $\overline{Mx}_T = \bar{x}_B$. Аммо бош дисперсия D_B учун танланма дисперсия D_T силжимаган баҳо бўла олмайди. Бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси учун тузатилган

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}$$

танланма дисперсия олинади.

2) *Эффектив баҳо* деб (танланманинг ҳажми n берилганда) мумкин бўлган энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳога айтилади.

3) *Асосли баҳо* деб $n \rightarrow \infty$ да баҳоланаётган параметрга эҳтимол бўйича яқинлашадиган статистик баҳога айтилади.

Масалан, хусусий ҳолда, агар $n \rightarrow \infty$ да баҳонинг дисперсияси нолга интилса, бундай баҳо асосли ҳам бўлади.

Юқорида айтилган $\bar{x}_T, D_T, C^2$ баҳолар – нуқтавий баҳолардир.

1-мисол. Бош тўпландан $n=60$ ҳажмли танланма олинган:

x_u	1	3	6	26
n_u	8	40	10	2

Бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳосини топинг.

Ўртача танланма қиймат бош ўртача қиймат учун силжимаган баҳо бўлгани учун, уни

$$\bar{x}_T = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

формула билан ҳисоблаймиз.

$$\bar{x}_T = \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 40 + 6 \cdot 10 + 26 \cdot 2}{60} = \frac{8 + 120 + 60 + 52}{60} = 4$$

демак,

$$\bar{x}_T = 4.$$

2-мисол. $n=51$ ҳажмли танланма бўйича бош дисперсиянинг $D_T=5$ силжиган баҳоси топилган. Бош тўплам дисперсиясининг силжимаган баҳосини топинг.

Тузатилган танланма C^2 дисперсиясини қуйидаги формула орқали топамиз:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{51}{50} \cdot 5 = 5,1. \quad S^2 = 5,1$$

2-§. Баҳонинг аниқлиги, ишончли эҳтимол. Ишончли интервал

Айтайлик, бош тўпламнинг x сон белгиси маълум тақсимотга эга бўлсин. Бу тақсимотнинг номаълум параметрларини, танланма ҳажми кичик бўлганда, нуқтавий баҳо ёрдамида баҳолаш қўпол хатога олиб келиши мумкин.

Бундай ҳолда интервал баҳодан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. *Интервал баҳо* деб иккита сон интервалнинг учлари билан аниқланадиган баҳога айтилади. θ –номаълум параметр, θ^* –танланма маълумотлари бўйича топилган статистик характеристика, яъни θ нинг баҳоси бўлсин.

Равшанки, $|\theta - \theta^*|$ қанча кичик бўлса, яъни $|\theta - \theta^*| < \delta$ шартда δ қанча кичик бўлса, θ^* баҳо шунча аниқ бўлади. Бунда θ сон θ^* баҳонинг аниқлиги дейилади.

θ баҳонинг θ^* бўйича *ишончлилиги* (*ишончли эҳтимол*) деб $|\theta - \theta^*| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиш эҳтимолига айтилади, яъни

$$P \{ |\theta - \theta^*| < \delta \} = \gamma$$

Ишончли интервал деб номаълум параметрни берилган γ ишончлилиқ билан қоплайдиган $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ интервалга айтилади. Бош тўпламнинг бирор характеристик сон белгиси x нормал тақсимланган бўлсин. Шу миқдорнинг a математик кутилишини унинг ўртача квадратик четланиши маъ[ум бўлганда x_T танланма ўртача қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинган бўлсин. Бу ҳолда бош тўпламнинг номаълум математик кутилиш a учун ишончлилиқ даражаси билан тузилган ишончли интервал

$$\bar{x}_T - t\gamma \frac{\tau}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\gamma \frac{\tau}{\sqrt{n}}$$

бўлади, бу ерда $\delta = t\gamma \frac{\tau}{\sqrt{n}}$ баҳонинг аниқлиги; n –танланма ҳажми; $t\gamma$ – Лаплас

функцияси $\Phi(t\gamma)$ аргументнинг $\Phi(m) = \gamma/2$ бўладиган қиймати (2-жадвал).

σ номаълум бўлганда, юқоридаги баҳо учун

$$\bar{x}_T - t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$$

интервал хизмат қилади, бу ерда S –тузатилган ўртача квадратик четланиш $t\gamma$ ни (Стьюдент тақсимооти бўйича) 3-жадвалдан берилган n ва γ бўйича топилади.

Танланма аниқлигини баҳолашда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) баҳонинг аниқлиги δ берилади, $P\{|\bar{x}_T - a| \leq \delta\}$ эҳтимолни топиш керак бўлади.

2) $P\{|\bar{x}_T - a| \leq \delta\}$ эҳтимол берилади, δ ни топиш керак бўлади.

3) баҳонинг аниқлиги δ ва $P\{|\bar{x}_T - a| \leq \delta\}$ эҳтимоли берилган бўлиб, танланма ҳажми n ни топиш керак бўлади.

Нормал тақсимланган X миқдорий белгининг σ ўртача квадратик четланишини, C тузилган танланма ўртача квадратик четланиш бўйича γ ишончлилик билан баҳолаш учун ушбу ишончли интерваллар хизмат қилади:

$$C(1-\gamma) < \sigma < C(1+\gamma) \quad (\gamma < 1),$$

$$0 < \sigma < C(1+\gamma) \quad (\gamma > 1),$$

бу ерда γ ни 4-жадвалдан берилган n ва γ бўйича топилади.

1-мисол. Нормал тақсимланган X белгининг ўртача квадратик четланиши $\sigma=2$, танланма ўртача қиймати $x_T=5,4$ ва танланма ҳажми $n=10$ бўлса, унинг номаълум a математик кутилишига $\gamma=0,95$ ишончлилик билан ишончли интервални тузинг.

Аввал $2\Phi(m)=0,95$ тенгликдан $\Phi(m)=0,475$ ни ҳосил қиламиз. Китоб охиридаги 2-жадвалдан $m_{0,95}=1,96$ ни топамиз. Энди баҳонинг аниқлиги δ ни

$\delta = \frac{t\sigma\gamma}{\sqrt{n}}$ формуладан топамиз:

$$\delta = \frac{1,96 \cdot 2}{\sqrt{10}} \approx 1,24$$

Ишончли интервал $\bar{x}_T - 1,24 < a < \bar{x}_T + 1,24$ ёки $5,4 - 1,24 < a < 5,4 + 1,24$ ёки $4,16 < a < 6,64$ бўлади.

Демак, 95% ишонч билан айтиш мумкинки (4,16; 6,64) ишончли интервал номаълум a параметрни тўла қоплайди. Баҳонинг аниқлиги $\delta=1,24$.

2-мисол. Экилган канопадан 100 тупи танлаб олинди. Канопа пояларининг узунликларини ҳисоблаб чиқилганда қуйидаги маълумотлар олинди (см):

Варианталар x_u	45	55	65	75	85	95	105	115
Частоталар n_u	1	5	11	26	33	16	7	1

X бош тўплам ўрта қиймати учун ишончли интервални топинг ($\gamma=0,95$).

Аввал статистик характеристикаларни ҳисоблаймиз. Бунинг учун ҳисоблаш җадвалини қуйидагича тузамиз:

- 1) биринчи устунга вариантларни;
- 2) иккинчи устунга частоталарни;
- 3) учинчи устунга частоталар билан вариантлар кўпайтмасини;
- 4) тўртинчи устунга вариантлар квадратларини;
- 5) бешинчи устунга вариантлар квадратларининг мос частоталарга

кўпайтмасини жойлаштирамиз.

6) жадвал остига мос устунлардаги рақамлар йиғиндисини ёзамиз.

x_u	H_u	$x_u H_u$	x_i^2	$x_i^2 H_u$
45	1	45	2025	2025
55	5	275	3025	15125
65	11	715	4225	46475
75	26	1950	5625	146250
85	33	2805	7225	238425
95	16	1520	9025	144400
105	7	735	11025	77175
115	1	115	13225	111225
$\sum$	100	8160	—	683100

7) танланма ўртасини

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum x_i n_i$$

формула орқали ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни ўрнига қўйиб чиқамиз:

$$\bar{x}_T = \frac{8160}{100} = 81,6 \quad \bar{x}_T = 81,6$$

8) дисперсияни

$$D_T = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum n_i x_i \right)^2$$

формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Жадвалдаги қийматларни қўямиз:

$$C^2 = 6831 - (81,60)^2 = 180,44; C = 180,44;$$

9) ўрта квадратик четланишни топамиз:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{180,44} \approx 13,4 \text{ см};$$

10) вариация коэффицентини топамиз:

$$V = \frac{S}{x_T} \cdot 100\% = \frac{13,4}{81,6} \cdot 100\% = 16,3\%;$$

11) танланма ўртасининг абсолют хатоси қуйидагича:

$$\theta = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{13,4}{10} = 1,34 \text{ см};$$

12) бош тўпلام ўртасининг ишончли интервалини топамиз: Бизда $\bar{x}_T = 81,6$; $\gamma = 0,95$; $n=100$; $C=13,4$.

Ишонч интервали

$$\bar{x}_T - t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

тенгсизликдан топилади.

$t\gamma$ ни 3-жадвалда берилган n ва γ лар бўйича топамиз. ($n=100$, $\gamma=0,95$)
 $t\gamma=1,984$. Буларни (*) тенгсизликка олиб бориб қўямиз:

$$81,6 - 1,984 \cdot \frac{13,4}{\sqrt{100}} < a < 81,6 + 1,984 \cdot \frac{13,4}{\sqrt{100}}$$
$$78,9 < a < 84,3$$

3-мисол: Танланманинг шундай минимал ҳажмини топингки, нормал тақсимланган бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлиги 0,925 ишончлилик билан 0,2 га тенг бўлсин. Бош тўпламнинг ўртача квадратик четланиши маълум: $\sigma = 1,5$.

Бизга қуйидагилар берилган:

$\gamma=0,925$; $\sigma=1,5$; $\delta=0,2$; $2\Phi(m)=0,925$. Булардан фойдаланиб $\Phi(m)$ ни топамиз:

$$\Phi(t) = \frac{0,925}{2} = 0,4625$$

2-жадвалда $\Phi(m)=0,4625$ га m нинг $m=1,78$ қиймати мос келади.

Бош тўплам математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг аниқлигини ифодалайдиган

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\sqrt{n} = \frac{1\sigma}{\delta} \quad \text{ёки} \quad n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

Бу ерда m , σ , δ ларнинг қийматларини қўямиз:

$$n = \frac{(1,78)^2 \cdot (1,5)^2}{(0,2)^2} = 177, \quad n = 177$$

4-мисол. Бош тўпламнинг x сон белгиси нормал тақсимланган ҳажмли танланма бўйича тузатилган ўртача квадратик четланиш s топилган.

Агар а) $n=10$, $s=5,1$; б) $n=50$, $s=14$ бўлса, a ўртача квадратик четланишни 0,999 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

$\gamma=0,999$ ва $n=10$ бўйича 4-жадвалдан $q=1,80$ ни топамиз.

Маълумки, ишончлилик интервалини топиш учун қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$c(1-\kappa) < \sigma < c(1+\kappa) \quad (\text{агар } \kappa < 1 \text{ бўлса})$$

ёки

$$0 < \sigma < c(1+\kappa) \quad (\text{агар } \kappa > 1 \text{ бўлса})$$

$\gamma = 1,80 > 1$ бўлгани учун иккинчи формуладан фойдаланамиз:

$$0 < a < 5,1 - (1 + 1,8) \text{ ёки } 0 < z < 14,28.$$

б) 4-жадвалдан $\kappa = 0,43$ ни топамиз. $\kappa < 1$ бўлгани учун формуладан фойдаланамиз:

$$c(1-\kappa) < \sigma < c(1+\kappa)$$

$$14 \cdot (1 - 0,43) < \sigma < 14(1 + 0,43) \text{ ёки } 7,98 < \sigma < 20,02 \text{ бўлади.}$$

5-мисол. 10000 гектар майдонда танлаб олиш йўли билан 500 гектари олинган ва ундаги экиннинг ҳосилдорлиги ўлчанганда қуйидаги маълумотлар олинган (такрорланмаган тасодифий танланма):

1 га даги ҳосилдорлик, ц	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	Жами
Гектарлар сони	8	37	79	165	126	35	n=500

Таксимотни нормал деб фараз қилиб:

1) бутун майдондаги ҳосилдорликнинг танлаб олинган участкасидаги ҳосилдорлик ўртачасидан 0,2 ц га ортмаслик эҳтимолини топинг;

2) ўртача ҳосилдорлик чегараси (интервали) ни 0,95 эҳтимол билан топинг.

а) Аввал танланма ўртачасини

$$\bar{x}_T = a + \frac{c}{n} \sum \left(\frac{x_i - a}{c} \right) n_i$$

формула орқали топамиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз (танланма ўртачасини юқорида ҳам ҳисоблаган эдик) формулада $a=15$; $c=2$ деб оламиз:

x_u	9	11	13	15	17	19	Жами
n_u	8	37	79	165	126	85	500
$\frac{x_i - a}{c}$	-3	-2	-1	0	1	2	-
$\left(\frac{x_i - a}{c} \right)^2$	9	4	1	0	1	4	-
$\left(\frac{x_i - a}{c} \right) n_i$	-27	-74	-79	0	126	170	119
$\left(\frac{x_i - a}{c} \right)^2 n_i$	72	148	79	0	126	340	765

$$\bar{x}_T = 15 + \frac{2}{500} \cdot 119 = 15,676. \quad \bar{x}_T = 15,676.$$

Танланма дисперсиясини топишда

$$\sigma^2 = \frac{c^2}{n} \sum \left(\frac{x_i - a}{c} \right)^2 n_i - (\bar{x}_T - a)^2$$

формуладан фойдаланамиз:

$$\sigma^2 = \frac{4}{500} \cdot 765 - (15,676 - 15)^2 \approx 5,66$$

Энди $P\{|\bar{x}_T - a| \leq \delta\}$ эҳтимолни топишимиз керак, бу ерда $\delta=0,2$ танланма такрорланмайдиган бўлгани учун эҳтимолни топишда

$$P\{|\bar{x}_T - a| \leq \delta\} = \Phi \left(\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{\sigma_0^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right)}} \right)$$

формуладан фойдаланамиз, бу ерда a –бош тўпламнинг ўртача қиймати.

$n=500, N=10000$ σ_0^2 номаълум бўлгани учун унинг ўрнига σ^2 – ни оламиз:

$$P\{|\bar{x}_T - a| \leq 0,2\} = \Phi \left(0,2 \cdot \sqrt{\frac{500}{5,66 \left(1 - \frac{500}{10000}\right)}} \right) = \Phi(0,2 \cdot \sqrt{92,3}) = \Phi(1,92)$$

Китоб охиридаги 2-жадвалдан

$$\Phi(1,92) = 0,4726$$

ни топамиз.

Демак $P\{|\bar{x}_T - a| \leq 0,2\} = 0,4726$ бўлади;

б) аввал δ ни топиш учун

$$\delta = t \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right)}{n}}$$

формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун t ни $2\Phi(t)=0,95$ тенгликдан топамиз. 2-жадвалдан $t=1,96$ ни аниқлаймиз:

$$\sigma = 1,96 \sqrt{\frac{5,66 \left(1 - \frac{500}{10000}\right)}{500}} \approx 0,2$$

Демак ишончли интервал

$$\bar{x}_T - \delta \leq a \leq \bar{x}_T + \delta$$

дан фойдалансак $15,676 - 0,2 \leq a \leq 15,676 + 0,2$ ёки $15,476 \leq a \leq 15,876$ бўлади.

1. Бош ўртача квадратик четланиш, σ танланма ўртача қиймат $\bar{x}_T$ ва танланма ҳажми n берилган. Бош тўпламни нормал тақсимланган деб, унинг номаълум a математик кутилишига 0,95 ишончлилиқ даражаси билан ишончли интервалларни тузинг:

- 1) $\sigma=5$, $\bar{x}_T=14$, $n=25$;
- 2) $\sigma=4$, $\bar{x}_T=10,2$, $n=16$.

Жавоб. 1) $12,04 < a < 15,96$; 2) $7,63 < a < 12,77$

2. Бош тўпламдан $n=10$ ҳажмли танланма олинган:

x_u	-2	1	2	3	4	5
n_u	2	1	2	2	2	1

Бош тўпламнинг нормал тақсимланган x белгисининг a математик кутилишини танланма ўртача қиймат бўйича 0,95 ишончлилиқ билан ишончли интервал ёрдамида баҳоланг.

Жавоб. $0,3 < a < 3,7$.

3. Бош тўпламдан олинган $n=16$ ҳажмли танланманинг нормал тақсимланган миқдорий белгининг тузатилган ўртача квадратик чекланиши $c=1$ топилган. σ бош ўртача квадратик четланишни 0,95 ишончлилиқ билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Жавоб. $0,56 < \sigma < 1,44$.

4. Буғдой донининг оқсилени аниқлаганда қуйидаги маълумотлар олинган: $\bar{x}_T=14,80\%$. Танланма ўртачасининг нисбий хатоси $S_x = 0,20\%$ $n=4$. Бош ўртача учун 95% ли ва 99% ли ишончли интервалларни топинг.

Жавоб. а) (14,16; 15,44); б) (13,63; 15,97).

Кўрсатма. $\bar{x}_T \pm t \frac{S}{\sqrt{n}}$ формуладан фойдаланиш керак.

5. Катта партиядо тайёрланган деталлардан n ҳажмли танланмадаги деталлар узунликларининг ўртача арифметиғи $\bar{x}_T$ топилган. Деталлар узунлиғи X –нормал тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. Бош тўплам ўртача квадратик четланиши. $\sigma=0,5$ мм маълум бўлса, номаълум математик кутилиши a ни γ ишончли эҳтимол билан қопловчи ишончли интервалини топинг:

- а) $\bar{x}_T=50$ мм; $n=64$; $\gamma=0,95$;
- б) $\bar{x}_T=51$ мм; $n=49$; $\gamma=0,99$;
- в) $\bar{x}_T=52$ мм; $n=36$; $\gamma=0,999$.

Жавоб.

- а) $49,8775 < a < 50,1225$;
- б) $50,815 < a < 51,185$;
- в) $51,725 < a < 52,275$.

6. Деталларнинг узунликлари нормал тақсимланган X тасодифий миқдор бўлсин. Агар бош ўртача квадратик четланиш $\sigma=0,5$ мм бўлиб,

ишончли эҳтимоллари γ маълум бўлса, математик кутилиш a ни $\delta=0,25$ баҳо аниқликда қопловчи энг кичик танланма ҳажмини топинг.

а) $\gamma=0,95$; б) $\gamma=0,99$; в) $\gamma=0,999$.

Кўрсатма. $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$ формуладан фойдаланиш керак.

7. Бош тўпламнинг сон белгиси x нормал тақсимланган. $n=10$ ҳажмли танланма бўйича “тузатилган” ўртача квадратик четланиш $c=0,16$ топилган. Бош ўртача квадратик четланиш σ ни 0,999 ишончилилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

Жавоб. $0 < \sigma < 0,448$.

3-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

1. Тенг узоқлашган вариантлар. Вариантларнинг қабул қиладиган қийматлари катта сонлар бўлганда, танланманинг йиғма характеристикаларини куйидаги кўпайтмалар методи билан ҳисоблаш кулайдир.

Тенг узоқликдаги варианта деб x айирмали арифметик прогрессия ташкил этадиган вариантага айтилади. *Шартли вариантлар* деб

$$u_i = \frac{x_i - c}{h} \quad (i = \overline{1, k})$$

тенглик билан аниқланадиган вариантларга айтилади, бу ерда c - сохта ноль (энг катта частотага эга бўлган варианта), h - икки варианта орасидаги масофа (бирлик.)

Танланманинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашда эмпирик моментлардан фойдаланиш кулайдир. Эмпирик моментлар кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланади:

$M'_k = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - c)^k$ ифода k - тартибли оддий эмпирик момент дейилади, бу ерда c - сохта ноль, $n = \sum n_i$ танланма ҳажми, n_i - частота.

$M_k = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^k$ ифода k - тартибли бошланғич эмпирик момент дейилади.

$k=1$ бўлса, $M_1 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i = \bar{x}_T$ бўлади, $m_k = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^k$ ифода k - тартибли марказий эмпирик моменти дейилади.

$$m_k = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 = D_T$$

Эмпирик қийматларни ҳисоблашда осонлик учун шартли эмпирик моментлардан фойдаланиш мумкин:

$$M^*_k = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^k = \frac{1}{n} \sum n_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right)^k$$

ифода k - тартибли шартли эмпирик момент дейилади

$$M_1^* = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sum n_i u_i - c \frac{1}{n} \sum n_i \right] = \frac{1}{h} (\bar{x}_T - c)$$

ёки бу ердан $\bar{x}_T$ ни топамиз: $\bar{x}_T = M_1^* h + c$ формула танланма ўртача қийматини топиш формуласидир. $D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2$ эса танланма дисперсиясини ҳисоблаш формуласи.

$\bar{x}_T$ ва D_T ларни ҳисоблашда, кўпайтмалар методидан фойдаланиш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш керак.

1) Жадвалнинг биринчи устунига вариантлар ортиб бориш тартибида ёзилади;

2) иккинчи устунга вариантларнинг мос равишдаги частоталари ёзилади. Устун тагига частоталар йиғиндиси ёзилади;

3) учинчи устунга шартли вариантлар $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ ёзилади;

4) тўртинчи устунга частоталар шартли вариантларга кўпайтириб ёзилади. Устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

5) бешинчи устунга частоталар шартли вариантлар квадратларига кўпайтирилиб ёзилади, устун тагига уларнинг йиғиндиси ёзилади;

6) олтинчи устунга частоталар ҳар қайсисини битта орттирилган шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтириб ёзилади ва устун тагига $\sum n_i (u_i + 1)^2$ йиғинди ёзилади.

Бу устун *контрол устун* дейилади. Агар $\sum n_i (u_i + 1)^2$ йиғинди

$$\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$$

йиғиндига тенг бўлса, у ҳолда ҳисоблашлар тўғри бажарилган деб ҳисобланади. Жадвал тўлдирилгандан кейин шартли моментлар топилади. Сўнгра $\bar{x}_T$ ва D_T лар ҳисобланади.

1-мисол. Танланманинг берилган тақсимооти бўйича танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсиясини кўпайтмалар методи билан топинг.

а) варианта	x_u	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
частота	n_u	4	6	30	40	18	2
б) варианта	x_u	65	70	75	80	85	
частота	n_u	2	5	25	15	3	

а) Ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

$x_{и}$	$n_{и}$	$y_{и}$	$x_{и} y_{и}$	$x_{и} u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
18,6	4	-3	-12	36	16
19,0	6	-2	-30	24	6
19,4	30	-1	-54	30	0
19,8	40	0	18	0	40
20,2	18	1	4	18	72
20,6	2	2	22	8	18
$\sum$	$n=100$		$\sum n_i u_i = 32$	$\sum n_i u_i^2 = 116$	$\sum n_i (u_i + 1) = 152$

Ҳисоблашларни текшириш учун

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$$

айниятдан фойдаланамиз:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 116 - 64 + 100 = 152$$

Контрол йиғиндиларнинг бир хил эканлиги ҳисоблашлар тўғри бажарилганидан далолат беради. Энди, биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M^*_{-1} = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \frac{32}{100} = -0,32$$

$$M^*_{-2} = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 = \frac{116}{100} = 1,16$$

Берилган мисолда $x = 19 - 18,6 = 0,4$; $c = 19,8$ эканини ҳисобга олсак:

$$\bar{x}_T = M^*_1 h + c = -0,32 \cdot 0,4 + 19,8 = 19,672$$

$$D_T = [M^*_2 - (M^*_1)^2] h^2 = [1,16 - (-0,32)^2] \cdot 0,4^2 = 0,1692$$

б) Бу мисолда ҳам осонлик учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

1	2	3	4	5	6
$x_{и}$	$n_{и}$	$y_{и}$	$x_{и} y_{и}$	$x_{и} u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
65	2	-2	-4	8	2
70	5	-1	-5	5	0
75	25	0	-9	0	25
80	15	1	15	15	60
85	3	2	6	12	27
			21		
$\sum$	50		12	40	114

Контрол: $\sum n_i (u_i + 1)^2 = 114$.

$$\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 40 + 24 + 50 = 114$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M^*_1 ва M^*_2 ни ҳисоблаймиз:

$$M^*_1 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \frac{32}{50} = 0,24$$

$$M^*_2 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 = \frac{40}{50} = 0,8$$

Берилган мисолда $\bar{x} = 70 - 65 = 5$; $c = 70$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$\bar{x}_T = M^*_1 h + c = 0,24 \cdot 5 + 75 = 76,2$$

$$D_T = [M^*_2 - (M^*_1)^2] h^2 = [0,8 + (0,24)^2] \cdot 25 = 18,56$$

Танланманинг берилган тақсимоти бўйича танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг.

8.	x_u	12	14	16	18	20	22
	n_u	5	15	50	16	10	4

Жавоб. $\bar{x}_T = 16,46$; $D_T = 4,87$.

9.	x_u	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12
	n_u	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Жавоб. $\bar{x}_T = 11,1$; $D_T = 0,14$.

10.	x_u	15	20	25	30	35	40	45	50	55
	n_u	6	13	38	74	106	85	30	10	4

Жавоб. $\bar{x}_T = 34,7$; $D_T = 54,46$.

11.	x_u	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
	n_u	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Жавоб. $\bar{x}_T = 90,72$; $D_T = 17,20$.

2. Тенг узоқликда бўладиган вариантлар. Кузатиш натижаларида вариантлар ҳамма вақт ҳам тенг узоқликда жойлашган бўлавермайди. Тенг узоқликдаги вариантларга келтириш учун белгининг кузатилаётган ҳамма қийматлари кирган интервални бир неча тенг қисмий интервалларига бўлинади, сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади. Ҳар бир янги интервал частотаси учун шу интервалдаги частоталар йиғиндиси олинади.

2-мисол. $n=50$ ҳажмли танланманинг тенг узоқликда бўлмаган вариантлари тақсимоти бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни кўпайтмалар методи билан топинг.

x_u	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_u	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

6–26 интервални узунлиги $h=4$ бўлган 5 та қисмий интервалга бўламиз:

6-10 10-14, 14-18, 18-22 22-26

Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_u -вариантлар сифатида олиб,

тенг узокликдаги вариантларни ҳосил қиламиз:

$$y_1=8, \quad y_2=12, \quad y_3=16, \quad y_4=20, \quad y_5=24.$$

Ҳар бир интервалнинг частоталари қуйидагича бўлади:

$$n_1=1+9=10, \quad n_2=6+6=12, \quad n_3=4+6=10, \quad n_4=8, \quad n_5=5+4+1=10.$$

Демак, тенг узокликдаги вариантлар тақсимоти:

$$\begin{array}{c} y_u \quad 8 \quad 12 \quad 16 \quad 20 \quad 24 \\ n_u \quad 10 \quad 12 \quad 10 \quad 8 \quad 10 \end{array}$$

Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз, бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

y_u	n_u	y_u	$x_u y_u$	$x_u u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
8	10	-1	-10	10	0
12	12	0	-10	0	12
16	10	1	+10	10	40
20	8	2	16	32	72
24	10	3	30	90	160
			56		
Σ	50		46	142	284

$$\text{Контрол: } \sum n_i (u_i + 1)^2 = 284.$$

$$\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 142 + 92 + 20 = 284$$

Демак, ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M^*_{-1} ва M^*_{-2} ларни ҳисоблаймиз:

$$M^*_{-1} = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \frac{46}{50} = 0,92$$

$$M^*_{-2} = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 = \frac{142}{50} = 2,84$$

Берилган мисолда $h=4$, $c=12$ бўлгани учун:

$$\bar{y}_T = M^*_{-1} h + c = 0,92 \cdot 4 + 12 = 15,68$$

$$D_T = [M^*_{-2} - (M^*_{-1})^2] h^2 = [2,84 - (0,92)^2] \cdot 16 = 32$$

Танланма дисперсияни ҳисоблашда группалаш натижасида вужудга келган хатони камайтириш мақсадида *Шеф-фард тузатмаси* киритилади, у қуйидагига тенг:

$$D'_T = D_T - \frac{1}{12}h^2$$

D_T ва k нинг қийматларини ўрнига қўямиз:

$$D'_T = 32 - \frac{1}{12} \cdot 4^2 = 32 - 1,3 = 30,7$$

Қуйидаги мисолларда $\bar{x}_T$, ва D_T , D'_T ларни кўпайтмалар усули билан топинг.

12.	x_u	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	26	26
	n_u	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Жавоб. $\bar{x}_T = 15,56$; $D_T = 45,14$; $D'_T = 42,14$.

13.	x_u	10	13		15	17	19	23	24	26	28	32	34
		35											
	n_u	2	4	6	8	9	6	20	25	10	8	7	5

Жавоб. $\bar{x}_T = 24,35$, $D_T = 31,83$ $D'_T = 29,75$.

4-§. Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси

Математик статистикада нисбий частоталар тақсимои *эмпирик тақсимот* дейилади (эҳтимоллар назариясида эҳтимоллар тақсимои *назарий тақсимот* деб юритилади). Баъзан эмпирик тақсимотнинг назарий нормал тақсимотдан четланишини баҳолашда асимметрия ва эксцесс каби махсус характеристикалардан фойдаланилади.

Нормал тақсимот учун бу характеристикаларнинг қийматлари нолга тенг. Агар ўрганилаётган тақсимот учун асимметрия ва эксцесс қийматлари нолга яқин бўлса, у ҳолда бу статистик тақсимотнинг нормал тақсимотга яқинлигини тахмин қилиш мумкин. Эмпирик тақсимотнинг нормал эгри чизикқа қараганда кўп ёки кам кўтарилишини баҳолаш учун эксцесдан фойдаланилади.

Эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцесси қуйидаги тенгликлар билан топилади:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_T^3} \quad l_s = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3$$

бу ерда σ_T — танланма ўртача квадратик четланиши;

$m_3 = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^3$ — учинчи тартибли марказий эмпирик момент,

$m_4 = \frac{1}{n} \sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^4$ — тўртинчи тартибли марказий эмпирик момент.

Агар вариантлар $лс$ қадамли тенг узоқликдаги вариантлар бўлса, m_3 ва m_4 лар қуйидаги формулалар орқали ҳисобланади:

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^*M_2^* + 2(M_1^*)^2]h^3$$

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^*M_3^* + 6(M_1^*)^2M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4$$

$$M_k^* = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^k, \quad u_i = \frac{x_i - c}{h}$$

c —сохта ноль.

1-мисол. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг.

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз. Бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз. 1—5 устунлар аввалги параграфдаги каби тўлдирилади, яъни бу ерда шартли $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ вариантларга ўтиб ($c=11$, 2 энг катта частотали варианта, $x = x_{u+1} - x_u = 0,2$) учинчи устунни тўлдираемиз. Сўнгра иккинчи ва учинчи устунлардаги мос элементларни кўпайтириб тўртинчи учун элементларини, учинчи ва тўртинчи устундаги мос элементларни кўпайтириб, бешинчи устун элементларини ҳосил қиламиз ва ҳоказо. Охирги устунни ҳосил қилиш учун эса учинчи устун элементларига 1 ни кўшиб, уларнинг тўртинчи даражаларини иккинчи устуннинг мос элементларига кўпайтираемиз.

x_u	n_u	y_u	$n_u y_u$	$n_u u_i^2$	$n_u u_i^3$	$n_u u_i^4$	$n_i (u_i + 1)^2$
10,6	5	-3	-15	45	-135	405	80
10,8	10	-2	-20	40	-80	160	10
11,0	17	-1	-17	17	-17	17	0
11,2	30	0	-52	0	-232	0	30
11,4	20	1	20	20	20	20	320
11,6	12	2	24	48	96	192	972
11,8	6	3	18	54	162	486	1536
			62		278		
$\sum$	100		$\sum n_i u_i = 10$	$\sum n_i u_i^2 = 224$	$\sum n_i u_i^3 = 46$	$\sum n_i u_i^4 = 1280$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 2948$

Контрол: $\sum n_i (u_i + 1)^4 = 1948$.

$$\sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + n = 1280 + 184 + 1344 + 40 + 100 = 2948$$

Демак ҳисоблашлар тўғри экан. Энди M_1^* , M_2^* , M_3^* , M_4^* ва $\bar{x}_T$, D_T ларни ҳисоблаймиз:

$$M^*_1 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$M^*_2 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^2 = \frac{224}{100} = 2,24$$

$$M^*_3 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^3 = \frac{46}{100} = 0,46$$

$$M^*_4 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i^4 = \frac{1280}{100} = 12,8$$

$$\bar{x}_T = M^*_1 h + c = 0,1 \cdot 0,2 + 11,2 = 11,22$$

$$D_T = [M^*_2 - (M^*_1)^2] h^2 = [2,24 - (0,1)^2] \cdot 0,04 = 0,0892$$

$$\delta_T = \sqrt{0,0892} \approx 0,92$$

Учинчи ва тўртинчи тартибли марказий эмпирик моментларни топамиз:

$$m_3 = [M^*_3 - 3M^*_1 M^*_2 + 2(M^*_1)^3] h^3 = 0,00168$$

$$m_4 = [M^*_4 - 4M^*_1 M^*_3 + 6(M^*_1)^2 M^*_2 - 3(M^*_1)^4] h^4 = 0,0204$$

Асимметрия ва эксцессни топамиз:

$$a_s = \frac{m^3}{\sigma_T^3} = -\frac{0,00168}{0,02586} = -0,06$$

$$l_k = \frac{m_4}{\sigma_T^4} - 3 = \frac{0,0204}{0,0079} - 3 \approx +0,4$$

Бу топилганлардан қуйидагича хулоса чиқариш мумкин:

а) асимметрия ва эксцесс кийматлари нолга яқин (мос равишда 0,06 ва 0,4 тенг) бўлгани учун бош тўпламни нормал тақсимотга яқин деб қараш мумкин; б) асимметрия манфий сон бўлгани учун эгри чизикнинг «узун қисми» ўрта кийматдан чапда ётар экан; в) эксцесс мусбат бўлгани учун эгри чизик нормал эгри чизикқа қараганда «баландроқ», «ўткирроқ» учга эгадир.

Қуйидаги мисолларда эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг.

14.	$\frac{x_i}{n_i}$	26	32	38	44	50	56	62
		5	15	40	25	8	4	3

15.	$\frac{x_i}{n_i}$	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
		5	15	40	25	8	4	3

16.	$\frac{x_i}{n_i}$	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
		8	10	60	12	5	3	2

17.	$\frac{x_i}{n_i}$	100	115	120	125	130	135	140
		5	10	30	25	15	10	5

18.

x_i	102	112	122	132	142	152	162
n_i	4	6	10	40	20	12	8

ВБОБ КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ

1- §. Чизикли корреляция

Математикада ва техникада функционал боғланиш тушунчасини кўп учратиш мумкин. Масалан, доира юзи радиусига боғлиқ ($S = \pi R^2$), газ босими ҳажм ва температурага боғлиқ ($p = R \cdot \frac{t}{v}$, p – газ босими, t – температура, v – ҳажм, R – ўзгармас коэффициент) ва ҳоказо. Функционал боғланиш тасодифий миқдорлар орасида ҳам бўлиши мумкин.

Статистик боғланиш деб шундай боғланишга айтиладики, унда миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг тақсимоти ўзгаришига олиб келади. Хусусан, статистик боғлиқлик миқдорлардан бирининг ўзгариши иккинчисининг ўртача қийматини ўзгаришида кўринади; бу ҳолда статистик боғланиш *корреляцион боғланиш* деб аталади.

Масалан, бир неча майдонга бир хил миқдорда ўғит солсак ҳам олинган ҳосилдорлик ҳар хил миқдорда бўлади. Лекин ўртача ҳосилдорлик солинган ўғит миқдорида боғлиқ бўлади. Бу ерда ҳосилдорликни ўртача қиймати билан ўғит миқдори орасида корреляцион боғланиш мавжуд деб қараш мумкин.

Шартли ўртача қиймат $\bar{y}_x$ деб Y нинг $X=x$ қийматга мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Y нинг X га *корреляцион боғлиқлиги* деб, $\bar{y}_x$ шартли ўртача қийматнинг x га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\bar{y}_x = f(x) \quad (1)$$

(1) тенглама Y нинг X га *регрессия тенгламаси* дейилади;

$f(x)$ функция Y нинг X га регрессияси, унинг графиги эса Y нинг x га *регрессия чизиги* дейилади.

$$\bar{X}_y = \varphi(y) \quad (2)$$

тенглама x нинг y га *регрессия тенгламаси* дейилади. Корреляцион боғлиқлик икки хил бўлади: чизикли ва эгри чизикли.

Корреляцион боғлиқлик чизикли бўлганда регрессия тенгламаси

$$\bar{y}_x = ax + b \quad (3)$$

кўринишда бўлади.

Бу тенгламадаги a танланманинг *регрессия коэффициенти* дейилади.

(3) даги a ва b ни энг кичик квадратлар методи ёрдамида қуйидаги нормал тенглама системасидан топамиз:

$$\left. \begin{aligned} b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ nb + a \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Й нинг X га регрессия тўғри чизигининг танланма тенгламаси

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad (5)$$

кўринишда бўлади, бу ерда y_x – шартли ўртача қиймат, x ва y текширилаётган X ва Y белгиларнинг танланма ўртача қийматлари; a_x , a_y – танланма ўртача квадратик четланишлари, p_T – танланма корреляция коэффициенти, у қуйидаги формула орқали топилади:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} \cdot XY - nXY}{n\sigma_x\sigma_y} \quad (6)$$

Чизиқли корреляцион боғланиш зичлигини баҳолаш учун танланма корреляцион коэффициенти p_T – хизмат қилади; $|p_T|$ бирга қанча яқин бўлса, боғланиш шунча кучли бўлади.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун ҳисоблаш жадвалини тузиш қулай.

Агар X ва Y белгилар устидаги кузатиш маълумотлари тенг узоқликдаги вариантали корреляцион жадвал кўринишида берилган бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1} \quad v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2}$$

шартли вариантларни киритамиз. c_1 , c_2 лар мос равишда “сохта” ноллар, h_1 h_2 лар эса мос равишдаги қадамлар. Шартли вариантлар орқали танланма корреляция коэффициенти қуйидагича топилади:

$$r_T = \frac{\sum n_{uv} \cdot uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} \quad (7)$$

бу ердаги $\sum n_{uv} \cdot uv$ ни ҳисоблашни келгусида мисол орқали тушунтирамиз.

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u \cdot u}{n}, \quad \bar{v} = \frac{\sum n_v \cdot v}{n}, \quad \sigma_u = \sqrt{u^2 - (\bar{u})^2} \quad \sigma_v = \sqrt{v^2 - (\bar{v})^2}$$

ифодалар кўпайтмалар методи орқали топилади. Уларни топгандан сўнг регрессия тенгламасидаги ифодаларни қуйидагича топамиз:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1, \quad \bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2, \quad \delta = \delta_u h \quad \sigma_y = \sigma_v h_2$$

1- мисол. Берилган майдонда ўғитни ҳосилдорликка таъсирини ўрганиш мақсадида ўтказилган 10 та тажриба натижаси қуйидагича:

x_i	6	11	11	7	8	10	12	6	10	9
n_i	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

бу ерда x ҳар бир гектар ерга солинган ўғит миқдори (тонна). y – ҳар бир гектар ердан олинган ҳосилдорлик. $\bar{Y}$ нинг X га тўғри чизиqli регрессия танланма тенгламасини топинг ва уни кузатиш натижалари билан таққосланг.

Ўғит миқдорининг оширилиши билан ҳосилдорлик ортишини кўрамыз. Бу икки миқдор ўзаро тўғри чизиqli боғланишга эга деб қараймиз:

$$\bar{y}_x = ax + b$$

Бу ердаги параметрлар a ва b ни топиш учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

1-жадвал

Тажриба номери	y_u	x_u	x_u^2	$x_u y_u$
1	27	6	36	162
2	32	11	121	352
3	33	11	121	363
4	30	7	49	210
5	30	8	64	240
6	33	10	100	330
7	34	12	144	408
8	28	6	36	168
9	31	10	100	310
10	32	9	81	288
$n=10$	$\sum y_i = 310$	$\sum x_i = 90$	$\sum x_i^2 = 852$	$\sum x_i y_i = 2831$

a ва b параметрларни топиш учун (4) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} 90b + 852a = 2831 \\ 10b + 90a = 310 \end{cases}$$

Иккинчи тенгликни 9 га кўпайтириб биринчи тенгликдан айирамиз:

$$42a = 41; \quad a = \frac{41}{42};$$

$$b = \frac{310 - 90a}{10} = 22\frac{5}{14}$$

У ҳолда талаб қилинган регрессия тенгламаси

$$\bar{y} = \frac{41}{42}x + 22\frac{5}{14} \quad (*)$$

кўринишда бўлади.

Энди бир хил миқдордаги ўғит солинганда (*) тенглик бўйича $\bar{y}$ кутиладиган ҳосилдорлик қийматларининг y_u танланма қиймати миқдорларидан оғишини 0,01 аниқликда топамиз:

2-жадвал

x_u	y_u	$\bar{y}$	$\bar{y}_x - y_i$
6	27	28,06	1,06
11	32	32,96	0,96

11	33	32,96	-0,04
7	30	29,04	-0,96
8	30	30,02	0,02
10	33	31,98	-1,02
12	34	33,94	-0,06
6	28	28,06	0,06
10	31	31,98	0,98
9	32	31	-1,00

$\bar{y}_x - y_i$ қийматларидан кўринадики кутиладиган ҳосилдорлик ўғит миқдориға жуда боғлиқ экан.

Кузатишлар сони катта бўлганда x қийматнинг ўзи n_x марта, y қийматнинг ўзи n_y марта, сон жуфти $(x; y)$ нинг ўзи n_{xy} марта учраши мумкин. Шу сабабли кузатиш маълумотлари группаланади, яъни n_x , n_y , n_{xy} частоталар ҳисобланади ва жадвал кўринишида ёзилади. Бундай ҳолатда қуйидаги мисолни ечиш схемасидан фойдаланган маъқул.

2-мисол. Бирорта ўсимлик оғирлигининг (бутун ўсимлик оғирлиги x грамм ҳисобида) экилган уруғ оғирлиги (y грамм ҳисобида) бўйича тақсимооти жадвал усулида берилган.

3-жадвал

x/y	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	n_x
25	3	2											5
35		6	4										11
45		1	13	5									19
55		1	2	4	8	1							16
65			1		4	4	2						11
75					2	6	6	1					15
85							1	5					6
95								1	4	1			6
105									2	4	1	1	8
115										1		1	2
125												1	1
n_y	3	10	20	9	14	11	9	7	6	6	1	3	100

Бу ерда ўсимлик оғирлиги ва уруғ оғирликлари синфларга ажратилган бўлиб, бу синфларнинг ўрталари x – 25, 35 ва ҳ. к. y –13, 18 ва ҳ. к. деб олинган. 3 сони – умумий оғирлиги 25 г ҳамда уруғ оғирлиги 13 г дан бўлган уч ўсимлик борлигини кўрсатади ва ҳоказо. Сўнгги устунда умумий оғирликка мос ўсимликлар частотаси жойлашган. 100 ўсимликдан 5 тасининг умумий оғирлиги 25 грамм, 11 тасининг умумий оғирлиги 35 г ва ҳоказо. Сўнгги йўлда уруғ оғирлигига мос ўсимлик частоталари n_y жойлашган. Энди корреляция коэффиценти y нинг x га регрессия тўғри чизигининг танланма тенгламасини тузамиз.

x қийматлари ўзгармас айирма 10 га, y қийматлари эса ўзгармас айирма 5 га эга эканига диққатни жалб этиб, шартли вариантларни киритамиз. x урнига $u = \frac{x-15}{10}$ миқдорни ва y ўрнига $v = \frac{y-8}{5}$ миқдорни киритамиз.

Бу ҳолда $x=25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, 125$ қийматлар мос равишда

$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

қийматлар билан, y нинг

$y = 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68$

қийматлари эса v нинг

$v = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 41, 12$

қийматлари билан алмашади.

Натижада янги шартли вариантлар бўйича қуйидаги корреляцион жадвални ҳосил қиламиз:

4-жадвал

v/y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_y
1	3	2											5
2		6	4										11
3		1	13	5									19
4		2	2	4	8	1							16
5			1		4	4	2						11
6					2	6	6	1					15
7							1	5					6
8								1	4	1			6
9									2	4	1	1	8
10										1		1	2
11												1	1
n_v	3	10	20	9	14	11	9	7	6	6	1	3	100

$\bar{u}$, $\bar{v}$ ларни ҳисоблаш учун тўрт майдон усулидан фойдаланиб қуйидаги 5-жадвални тузамиз.

5-жадвал

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\gamma = \sum_{uv} \gamma$	$u - v$
1	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$											7	7
2		$\frac{12}{12}$	$\frac{12}{8}$										32	64
3		$\frac{2}{3}$	$\frac{39}{13}$	$\frac{20}{15}$									61	183
4		$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{40}{32}$	$\frac{6}{4}$							70	280
5			$\frac{3}{5}$		$\frac{20}{20}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{14}{10}$						61	305
6					$\frac{10}{12}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{8}{6}$					96	576
7							$\frac{7}{7}$	$\frac{40}{5}$					47	326
8							$\frac{8}{8}$	$\frac{36}{32}$	$\frac{10}{8}$				54	432
9								$\frac{18}{18}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{12}{9}$		81	729
10									$\frac{10}{10}$		$\frac{12}{10}$		22	220
11											$\frac{12}{11}$		12	132
$u = \sum_{uv} u$	3	21	60	31	64	60	53	51	50	54	9	30	543	3257
$v = u$	3	42	180	124	320	360	371	408	450	540	99	360	3257	

Ҳар бир катак ўнгдаги юқори пастки чап бурчакдаги рақамлар мос равишда v ва u шартли вариантлар қийматларини частотасига кўпайтириш билан ҳосил қилинади. Бу юқори ўнг (пастки чап) бурчакдаги рақамларни сатр (устун) бўйича еғиб охирги аввалги устунга (сатрга) ёзамиз. Масалан, тўртинчи сатр ва бешинчи устундаги бу рақамлар йиғиндиси қуйидагича топилади:

$$70 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + = 2 + 6 + 16 + 40 + 6$$

$$64 = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 2 - 32 + 20 + 12$$

Пастки чап бурчакдаги сонлар частотасини u кўпайтиришдан ҳосил қилинади.

Охирги устун (сатр) катакларига $u \cdot v(v \cdot u)$ қийматлари жойлаштирилиб, охирида улар йиғиндиси ёзилади.

Бу жадвалдан фойдаланиб қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{uv} u}{n} = \frac{u}{n} = \frac{486}{100} = 4,86$$

$$\bar{v} = \frac{\sum u_{uv} v}{u} = \frac{v}{n} = \frac{543}{100} = 5,43$$

Энди қуйидаги жадвалларни тузамиз

6-жадвал

u	H_y	$H_y y$	$H_y y^2$
1	5	5	5
2	11	22	44
3	19	57	171
4	16	64	256
5	11	55	275
6	15	90	540
7	6	42	294
8	6	48	384
9	8	72	648
10	2	20	200
11	1	11	121
Σ	100	486	2938

7-жадвал

u	H_y	$H_y y$	$H_y y^2$
1	3	3	3
2	10	20	40
3	20	60	180
4	9	36	144
5	14	70	350
6	11	66	396
7	9	63	441
8	8	64	512
9	6	54	486
10	6	60	600
11	1	11	121
12	3	36	432
Σ	100	534	3705

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum n_u u^2}{n} - (\bar{u})^2 = \frac{2938}{100} - (4,86)^2 = 5,7604$$

$$\sigma_u = \sqrt{5,7604} = 2,400$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sum n_u u^2}{n} - (\bar{u})^2 = \frac{3705}{100} - 29,4849 = 7,5651;$$

$$\sigma_v = \sqrt{7,5651} = 2,750$$

Энди p_T ни ҳисоблаймиз:

$$r_T = \frac{\sum n_{uv} \cdot uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{1}{\sigma_u\sigma_v} \left(\frac{\sum n_{uv} \cdot uv}{n} - \bar{u}\bar{v} \right) =$$

$$\frac{1}{2,4 \cdot 2,75} \left(\frac{3,275}{100} - 4,86 \cdot 5,43 \right) = \frac{6,1802}{6,600} = 0,936$$

Маълумки, r_T нинг қиймати (± 1) га яқин чиқса биз қараётган x ва y миқдорлар орасидаги боғланишни чизиқли боғланиш деб қарашимиз мумкин. x ва y лар учун қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$(\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1; \quad (\bar{y} = \bar{u}h_2 + C_2;)) \quad \sigma_x = \sigma_u \cdot h; \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2$$

Бундан:

$$\bar{x} = 10\bar{u} + 5 = 63,50; \quad \sigma_x = 10 \cdot \sigma_u = 24,00;$$

$$\bar{y} = 5\bar{v} + 8 = 35,15; \quad \sigma_y = 5\sigma_v = 13,75$$

келиб чиқади.

Регрессия тенгламасини келтириб чиқариш учун регрессия коэффицентини ҳисоблаймиз:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,936 \cdot \frac{13,75}{24} = 0,536$$

y нинг x га регрессия тенгламаси $\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x})$ га асосан $\bar{y}_x = 35,15 - 0,536(x - 63,50)$ ёки $y_x = 0,536x + 1,11$ келиб чиқади.

Энди x ўрнига унинг турли қийматларини қўйиб $\bar{y}_x$ қийматларини топамиз:

$$\bar{y}_1 = 0,535 \cdot 25 + 1,11 = 14,51 = 14,5$$

$$\bar{y}_2 = 0,535 \cdot 35 + 1,11 = 19,9$$

ва ҳоказо.

Қуйидаги жадвални тузамиз:

X	y'_x	y'_x	$y'_x - y_x$	x	y'_x	y'_x	$y'_x - y_x$
25	14,5	15,0	-0,5	75	41,3	40,0	1,3
35	19,9	22,6	-2,7	85	46,7	47,2	-0,5
45	25,2	24,1	1,1	95	52,0	53,0	-1,0
55	30,6	29,9	0,7	105	57,4	58,6	-1,2
65	36,0	35,3	0,7	115	62,8	63,0	-0,2
				125	68,1	68,0	0,1

Жадвалдан кўринадикки хусусий ўртача ҳақиқий ўртачага етарли яқин эканини кўрамиз.

Эслатма. Учинчи устундаги $\bar{y}_x$ нинг хусусий ўртача қийматлари қуйидагича топилади:

$$\bar{y}_1 = \frac{13 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{3 + 2} = 15;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{186 + 23 + 481}{6 + 4 + 1} = 22,6$$

ва ҳоказо.

3-мисол. Тупроқнинг нисбатан намгарчилиги (x) ва ёпишқоқлиги (y) тўғрисида аниқланган маълумотлар қуйидагича

$x(\%)$	19,9	20,9	26,1	29,4	30,5	40,3	44,8
	47,6	56,6	58,3	64,5	75,6		

$y(\text{г/см}^2)$	0,0	0,6	0,1	1,1	1,7	1,7	2,6	3,4
	42	5,8	6,3	7,3				

$n=12$

Маълумотларнинг корреляция коэффицентини ва регрессия чизигининг танланма тенгламасини тузинг.

Ҳисоблаш жадвалини тўғридан-тўғри тузамиз:

	$X(x)$	$Y(\text{г/см}^2)$	x^2	y^2	xy
2	19,9	0,0	396,01	0,00	0,00
2	20,9	0,6	436,81	0,36	12,54
3	26,1	1,1	681,21	1,21	28,71
4	29,4	1,2	864,36	1,44	35,28
5	30,5	1,7	930,25	2,89	51,85
6	40,3	1,7	1624,09	2,89	68,51
7	44,8	2,6	2007,64	6,76	116,48
8	47,8	3,4	2284,84	11,56	162,52
9	55,6	4,2	3091,36	17,64	233,52
10	58,3	5,8	3398,89	33,64	338,14
11	64,5	6,3	4160,25	39,69	406,35
12	76,6	7,3	5867,56	53,29	559,18
Σ	$\Sigma x = 514,7$	$\Sigma y = 35,9$	25742,67	171,37	2013,08

x ва y қийматлари бир мартадан такрорлангани учун тўғридан-тўғри формулалардан фойдаланамиз:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{514}{12} = 42,89, \quad \bar{x} = 42,89\%$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{35,9}{12} = 2,99, \quad \bar{y} = 2,99 \text{ г/см}^2.$$

$$\sum (X - x)^2 = \sum x^2 - (\sum x)^2 : n = 25742,67 - (514,7)^2 : 12 = 3666,33;$$

$$\sum (Y - y)^2 = \sum y^2 - (\sum y)^2 : n = 171,37 - (35,9)^2 : 12 = 63,97;$$

$$\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y}) = 2013,08 - (514,7 \times 35,9) : 12 = 473,27$$

Энди танланма корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$r_T = \frac{\sum (X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{x})^2 \sum (Y - \bar{y})^2}} = \frac{473,27}{\sqrt{3666,33 \cdot 63,97}} = 0,977$$

Регрессия коэффициенти:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,977 \frac{\sqrt{63,97}}{\sqrt{3666,33}} = 0,132 / \text{см}^2$$

Демак регрессия тенгламаси:

$$Y_x - \bar{y} = \rho_{yx} (X - \bar{x})$$

ёки

$$Y_x = 2,99 + 0,13(x - 42,89) = 0,13x - 2,58$$

$$Y_x = 0,13x - 2,58$$

X (1 га майдонга солинган ўғит миқдори, т.)	$\bar{Y}$ (1 га майдондан олинган ҳосил, ц.)
5,0	13,8
5,5	14,0
5,6	14,3
6,5	14,8
7,0	15,1
8,0	15,6
7,0	15,8
7,3	16,1
6,5	16,4
7,5	16,6
8,3	16,8
6,0	17,0
7,5	17,2
8,5	17,6
6,0	17,9
8,0	18,1
9,5	18,3
10,0	19,5
10,9	20,3

Қуйидаги мисолларда корреляция коэффициенти, регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини юқоридаги усуллардан бирини қўлланиб топинг.

1. Ўғит миқдори (x) ва олинган буғдой ҳосилдорлиги (y) орасидаги боғланиш корреляция коэффициентини ва регрессия чизиғи танланма тенгламасини тузинг:

2. $\bar{Y}$ нинг X га регрессия тўғри чизигининг танланма тенгламасини, қуйидаги

корреляцион жадваллар орқали келтирилган маълумотлар бўйича топинг.

y/x	20	25	30	35	40	
16	4	6	—	—	—	10
26	—	8	10	—	—	18
36	—	—	32	3	9	44
46	—	—	4	12	6	22
56	—	—	—	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n=100$

Жавоб. $p_T=0,76$; $\bar{y}_x=1,45x-10,36$.

y/x	18	23	28	33	38	43	48	
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	—	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n_x=50$

Жавоб. $\bar{Y}_x = 4x+57,8$

4. Икки турдаги объектни мос равишда уларнинг x ва y аломатларининг берилган қийматлари бўйича регистрация қилишда бу аломатларнинг берилган қийматларини такрорлиқ сонлари (частоталари) ҳосил қилинган:

y/x	2	4	6	8
1	1	2	1	
3	2	4	4	2
5		1	2	1

Бу миқдорларнинг корреляция коэффициентини топинг.

5. Қуйидаги корреляцион жадвал орқали уч йиллик қарағайнинг баландлиги билан ундан чиққан навада узунлиги орасидаги боғланишнинг корреляция коэффициентини топинг.

Баландлиги (см)	Узунлиги см							Σ	Ўртача узунлиги
	3	7	11	15	19	23	27		
6	5	3		2				8	4,50
16	7	15	1	2				25	6,68
26	2	21	17	20				42	8,81
36		15	37	26	4			75	11,59
46		1	31	27	12			62	13,13
56		2	8	9	24	1		50	15,16
66			2	4	7	4	2	41	18,51
76			1	1	—	6	2	20	19,80
86						3	—	4	21,00
96						1	2	3	25,67
96	4	57	97	91	50	15	6	330	13,12
Ўртача см	13,86		39,92	49,41	61,60	75,33	79,33		

$$p_T=? \quad \bar{y}_x=? \quad p_T=0,80$$

6. 2–мисолдаги корреляцион жадвал маълумотларига асосланиб, X ва Y га тўғри чизиқли регрессия тенгламасини топинг.

2– §, Эгри чизиқли корреляция

Агар регрессия графиги эгри чизиқли деб қаралса, корреляцион боғланиш *эгри чизиқли корреляция* дейилади. Иккинчи тартибли параболик корреляция бўлган ҳолда Y нинг X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c \quad (*)$$

қўринишда бўлади (иккинчи тартибли параболик корреляция), a , b ва c параметрлар энг кичик квадратлар усулидан фойдаланиб қуйидаги нормал тенгламалар системасидан топилади:

$$(A) \begin{cases} a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 = \sum x^2 \bar{y}_x \\ a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x = \sum x \bar{y}_x \\ a \sum x^2 + b \sum x + c n = \sum \bar{y}_x \end{cases}$$

Бу X ва Y миқдорлар такрорланмай келган ҳолдир.

Агар X ва Y миқдорлар такрорланиб келса, яъни n_x ва n_y частоталарга эга бўлса, маълумотлар корреляцион жадвал орқали берилган бўлиб, нормал тенглама қўриниши қуйидагича бўлади:

$$(A) \begin{cases} (\sum n_x x^4) a + (\sum n_x x^3) b + (\sum n_x x^2) c = \sum n_x \bar{y}_x x^2 \\ (\sum n_x x^3) a + (\sum n_x x^2) b + (\sum n_x x) c = \sum n_x \bar{y}_x x \\ (\sum n_x x^2) a + (\sum n_x x) b + nc = \sum n_x \bar{y}_x \end{cases}$$

Бунда a , b ва c параметрлар топилиб $(*)$ тенгламага қўйилади.

Худди шу йўл билан Y ни X га регрессиясининг танланма тенгламаси

$$x_y = a_1 y^2 + b_1 y + c_1 \quad (**)$$

формула ёрдамида топилади.

Y нинг X га корреляциясининг зичлигини баҳолаш учун ушбу

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}}{\sigma_y} \quad (C)$$

танланма корреляцион нисбат топилади. Бу ерда

$$\sigma_{y_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}} \quad (D)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y} - y)^2}{n}} \quad (E)$$

x нинг y га корреляцион зичлигини топиш учун эса

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x} \quad (F)$$

топилади.

1–мисол. Тажриба натижасида қуйидаги маълумотлар олинган:

x	2	4	6	8	10
y	9	6	5,5	6,5	11

кўринишдаги тенглама билан боғланган деб, a , b ва c ларни энг кичик квадратлар усули билан топинг.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

x	2	4	6	8	10	$\sum x = 30$
y	9	6	5,5	6,5	11	$\sum y = 38$
xy	18	24	33	52	110	$\sum xy = 237$
X^2	4	16	36	64	210	$\sum x^2 = 220$
$X^2 y$	36	96	198	416	1100	$\sum x^2 y = 1846$
X^3	8	64	216	512	1000	$\sum x^3 = 1800$
X^4	16	256	1296	4096	10000	$\sum x^4 = 15664$

Топилган қийматларни (A) нормал тенгламага келтириб қўямиз:

$$\left. \begin{aligned} 15664a + 1800b + 220c &= 1846 \\ 1800a + 220b + 30c &= 237 \\ 220a + 30b + 5c &= 38 \end{aligned} \right\}$$

Энди бу системани a , b , c ларга нисбатан ечамиз. Учинчи тенгламани 44 га кўпайтириб биринчи тенгламадан айирамиз:

$$15664a + 1800b + 220c = 1846$$

$$\underline{9680a + 1320b + 220c = 1672}$$

$$5984a + 480b = 174$$

Учинчи тенгламани 6 га кўпайтириб иккинчи тенгламадан айирамиз:

$$1800a + 220b + 30c = 237$$

$$\underline{1320a + 180b + 30c = 228}$$

$$480a + 40b = 9$$

Шундай қилиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5984a + 480b = 174 \\ 480a + 40b = 9 \end{cases}$$

Бу системани a ва b га нисбатан ечсак:

$$a = \frac{33}{112} \approx 0,3 \qquad b = -\frac{927}{290} \approx -3,3$$

келиб чиқади. Булардан фойдаланиб c ни топамиз: $c \approx 14,5$ x ва y орасидаги боғланишни кўрсатувчи функция (*)

$$\bar{y}_x = 0,3x^2 - 3,3x + 14,5$$

кўринишда бўлади.

2–мисол. Қуйидаги корреляцион жадвалда берилган маълумотлар орқали $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ танланма регрессия тенгламасини ва корреляцион нисбатни топинг.

y/x	2	3	5	H_y
25	20	—	—	20
45	—	20	1	31
110	—	1	48	49
H_x	20	31	49	$H=100$

Параметрларни топиш учун қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

x	H_x	$\bar{y}_x$	$H_x x$	$H_x x^3$	$H_x x^4$	$H_x \bar{y}_x$	$H_x \bar{y}_x$	$H_x \bar{y}_x$	$H_x \bar{y}_x x$
2	20	25	40	80	160	320	500	1000	2000
3	31	47,1	93	279	837	2511	1460	4758	13141
5	49	108,7	245	1125	6125	30625	5325	26614	133121
	100	—	378	1548	7122	33456	728,5	32004	148262

$\bar{y}_x$ ни топиш усулуни тушунтирамиз:

$$\bar{y}_2 = \frac{20 \cdot 25}{20} = 25$$

$$\bar{y}_3 = \frac{30 \cdot 45 + 100}{31} = 47,1$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1 \cdot 45 + 48 \cdot 100}{49} = 108,7$$

Жадвалдаги топилган қийматларни (B) формулага қўямиз:

$$\begin{cases} 33456a + 71226b + 1584c = 148262 \\ 7122a + 1584b + 378c = 32004 \\ 1584a + 378b + 100c = 7285 \end{cases}$$

Бу системани ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$a = 2,94, \quad b = 7,27, \quad c = -1,25.$$

Шундай қилиб изланаётган танлаима регрессия тенгламаси ушбу

$$\bar{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25$$

кўринишга эга экан.

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар ҳисоблаш жадвалдаги шартли ўртача қийматлардан сал фарқ қилиши мумкин, масалан $x = 2$ да жадвал бўйича, $\bar{y}_1 = 25$ тенглама бўйича

$$\bar{y}_x = 2,94 \cdot 4 + 7,27 \cdot 2 - 1,25 = 25,15$$

Демак топилган тенглама кузатиш маълумотлари билан жуда мос келади. Энди корреляцион нисбатни топамиз. Бунинг учун аввал умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 100}{100} = 72,35$$

Сўнгра умумий квадратик четланишни топамиз:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{\sum n_x (y - \bar{y})^2}{n}} = \\ &= \sqrt{\frac{20 \cdot (25 - 72,35)^2 + 31 \cdot (45 - 72,35)^2 + 49 \cdot (100 - 72,35)^2}{100}} \approx 37,3 \end{aligned}$$

Группалараро ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - y)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25(25 - 72,35)^2 + 45(47,9 - 72,35)^2 + 110(107 - 72,35)^2}{100}} = 35,9$$

Демак, корреляцион нисбат тақрибан қуйидагига тенг:

$$\mu_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y} = 35,9 = 0,96$$

7. Қаралаётган 6 марта кузатиш натижаси объектнинг x ва y сифат белгилари учун қуйидаги жадвалда келтирилган. Уларнинг корреляция коэффицентини топинг.

x_i	28,9	20,4	17,8	15,0	7,1	6,3
n_i	6,86	5,92	5,38	4,40	2,30	2,32

Жавоб. $\eta_T = 0,98$.

8. Тупроқни анализ қилиш натижасида қуйидаги маълумотлар олинган:

$\bar{y}/x$	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	$n_{\bar{y}}$
0,5	-	-	-	-	-	-	1	1	1
1,0	-	-	-	-	-	1	2	-	2
1,5	-	-	-	-	3	4	-	-	7
2,2	-	1	2	3	4	1	1	-	12
2,5	-	-	2	2	6	2	-	-	12
3,0	-	3	2	1	-	-	-	-	6
3,5	2	3	1	-	-	-	-	-	6
4,0	1	-	-	-	-	-	-	-	1
n_x	3	7	7	6	13	8	2	1	$M=17$

Жавоб. $p_T = 0,8$.

9. Ернинг хайдалиш чуқурлиги билан олинган ҳосилдорлик орасидаги боғлиқликни кузатиш натижалари қуйидагича:

Ўртача ҳосилдорлик, см	7	8	8	10	11	12
Ўртача ҳосилдорлик 1 га олинганб, ц.	8,1	8,3	8,2	9,1	10,3	10,8

Танланма корреляция коэффицентини ва тўғри чизиqli регрессия тенгламасини топинг.

Жавоб. $p_T=0,94$, $\bar{y}_x = 0,583x + 3,615$.

40. Қуйидаги жадвалда балик узунлиги билан унинг оғирлиги тўғрисидаги маълумотлар мослиги берилган. Улар орасидаги боғланишни $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ параболик боғланиш деб қараб, a , b , c параметрларни энг кичик квадратлар усули билан топинг.

y/x	145	155	175	185	195	205	215	225	235	245	$H_{\bar{y}}$
50	2	2									4
70		2									2
90			9	2	1						12
110			2	12	17						21
130				3	11						16
150					2	1	1				10
170						8	2				3
190						1		1			1
210							2	1			3
230									1		1
250											-
270											-
390								1			1
310											-
330											1
H_x	2	4	11	17	21	10	5	2	2	1	$H=75$

Кўрсатма. Сохта ноль сифатида 190 ва 195 қийматлар олинадиган ва мисол тўрт майдон усулида ечилади.

Жавоб. $\bar{y}_x = 0,0161x^2 - 3,6246x + 246,71$

$\eta_{\bar{y}x} = 0,946$.

11.

x	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145
$\bar{y}$	1,74	2,02	2,12	2,17	2,74	2,40	2,40	2,48	2,50	2,39

Жадвалда берилган маълумотлар бўйича x ва y орасидаги боғланиш $y = ax^2 + bx + c$ қўринишида берилган. a , b , c параметрларни топинг.

Жавоб. $\bar{y}_x = -0,0001x^2 + 0,0275x + 0,567$.