

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI**

**Mexanika-matematika fakulteti
Differensial tenglamalar kafedrası**

JALOLI MEHRANGIZ ALISHERZODA

**INTEGRALLOVCHI KO'PAYTIRUVCHI METODI ORQALI BARCHA
BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI
INTEGRALLASH**

BITIRUV MALAKAVIY ISH

**5460100 - matematika ta'lim yo'nalishi bakalavr akademik
daraja olish uchun**

Ilmiy rahbar

dots. P.D. Xodizoda

«__»_____ 2013 yil

**Kafedra yig'ilishining 2013 yil 22-maydagi (9-bayonnoma) yig'ilishida
muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etildi.**

Kafedra mudiri

f.m.f.d. prof. A.H. Begmatov

**Bitiruv malakaviy ish 26-iyun 2013 yil YaDAK yig'ilishida himoya
qilindi va _____ ballga baholandi. (Bayonnoma №_____)**

YaDAK raisi:

A'zolar:

Samarqand – 2013

Mundarija

Kirish	3
I-bob. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning asosiy tarif va tushunchalari	5
1-§. Bir jinsli differensial tenglamalar.....	5
2-§. Birinchi tartibli chiziqli va unga keltiriladigan tenglamalar	16
II-bob. Asosiy qism	25
1-§. Simmetrik ko'rinishdagi differensial tenglamalar.....	25
2-§. To'liq differensialli tenglama haqida tushuncha.....	41
3-§. Integrallovchi ko'paytuvchi.....	44
Xulosa	51
Foydalanilgan adabiyotlar	52

KIRISH

Noma'lum funksiya, uning turli hosilalari va erkli o'zgaruvchilar qatnashgan tenglama differensial tenglama deyiladi. Agar noma'lum funksiya ko'p argumentli bo'lsa va tenglamaga funksiyaning shu argumentlar bo'yicha xususiy hosilalari qatnashsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Masalan:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

bunda noma'lum funksiya, ikkita erkli o'zgaruvchilarga bog'liq, ya'ni $z = z(x, y)$.

Agar noma'lum funksiya $y = y(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa va tenglamaga odatdagi hosilalar qatnashsa, bunday tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi, u quyidagicha belgilanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (*)$$

Yuqoridagi tenglama n - tartibli oddiy differensial tenglama.

1-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi deb, biror I oraliqda aniklangan n marta differensiallanuvchi va barcha $x \in I$ uchun berilgan differensial tenglamani qanoatlantiradigan, ya'ni $y = \varphi(x)$ tenglamaga, $y^{(k)} = \varphi^{(k)}(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) larni qo'yganda, uni ayniyatga aylantiradigan $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi. $y = \varphi(x)$ silliq chiziq bunda $\varphi(x)$ differensial tenglamaning yechimi integral chiziq (integral egri chiziq) deyiladi.

2-ta'rif. Biror I oraliqda aniqlangan parametrik ko'rinishda berilgan $x = x(t)$, $y = y(t)$ silliq funksiya (*) differensial tenglamaning parametrik ko'rinishdagi yechimi deyiladi, agar quyidagi ayniyat bajarilsa:

$$\Phi(x(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) \equiv 0, \quad t \in I.$$

3-ta'rif. I intervalda $x = x(t)$, $y = y(t)$ funkwiya (egri chiziq) silliq deyiladi, agar $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, bir vaqtda ikkalasi nolga teng bo'lmasa. Differensial tenglamani yechish (integrallash) bu uni barcha yechimlarini, ya'ni dastlabki tenglamada qatnashayotgan noma'lum funksiyaning

yelementar funksiyalar va ularning integrallari orqali ifodalashdir, bu amalni bajarish mumkin bo'lsa, differensial tenglama kvadraturalarda integrallandi deymiz.

1-Misol. Ushbu $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ $(-\infty, +\infty)$ integralda aniqlangan funksiya, quyidagi $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ differensial tenglama yechimi yekanini ko'rsatamiz. Haqiqatdan dastlabki tenglikni differensiallab, hosil qilamiz:

$$2x - 2yy' - 2c = 0, \quad y' = \frac{c - x}{y}.$$

Endi hosilaning topilgan ifodasini berilgan differensial tenglamaga qo'ysak, unda quyidagicha bo'ladi:

$$x^2 - y^2 + 2cx - 2x^2 = -(x^2 + y^2 - 2cx) \equiv 0.$$

Demak, $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ funksiya berilgan differensial tenglama yechimi yekan.

I BOB. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING ASOSIY TARIF VA TUSHUNCHALARI

Kvadraturada integrallanuvchi birinchi tartibli tenglamalarning asosiy sinfi: o'zgaruvchilarga ajraluvchi, chiziqli, bir jinsli, to'liq differensialli tenglamalar, Bernulli tenglamasi

1-§. Bir jinsli differensial tenglamalar

Eng avval bir jinsli funksiyaga ta'rif beramiz.

Ta'rif. Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (bu yerda $0 \neq t \in \mathbb{R}$)

$$f(tx,ty) \equiv t^n f(x,y) \quad (n\text{--o'zgarimas son}) \quad (1.1.1)$$

shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya ikki o'lchovli bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(tx,ty) = tx\sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t^2x\sqrt{x^2 + y^2} = t^2 \cdot f(x,y),$$

$$f(x,y) = \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 5y^2} \text{ yesa nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2(3x^2 - y^2)}{t^2(x^2 + y^2)} = f(x,y)$$

ya'ni

$$f(tx,ty) \equiv f(x,y) \quad (1.1.2)$$

ayniyat o'rinli bo'ladi.

Nol o'lchovli bir jinsli funksiyani $\varphi(\frac{y}{x})$ ko'rinishda yozish mumkin.

Haqiqatan ham t parametrni ixtiyoriy tanlab olish mumkin bo'lgani uchun $t=1/x$ deb olamiz, u holda bo'ladi:

$$f(x,y) = f(tx,ty) = f(1, y/x) \equiv \varphi(y/x).$$

Ta’rif. Agar birinchi tartibli $y' = g(x, y)$ differensial tenglamaning o'ng tomoni x va y ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday tenglama bir jinsli tenglama deyiladi.

Shunday qilib, bir jinsli tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.1.3)$$

Bir jinsli (1.1.3) tenglamani $y/x = u(x)$ o'rniga qo'yish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin, u holda $y = x \cdot u(x)$ bu yerda $u = u(x)$ —yangi noma'lum funksiya. Keyingi tenglikni differensiallab, $y' = u'x + u$ ni hosil qilamiz, y va y' ning qiymatlarini (1.1.3) tenglamaga qo'yib, quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani topamiz:

$$u' \cdot x = \varphi(u) - u \Rightarrow xdu = (\varphi(u) - u)dx.$$

O'zgaruvchilarni ajaratamiz:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (\varphi(u) - u \neq 0).$$

Integrallab topamiz

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Integrallashdan keyin u o'rniga y/x nisbatni qo'yib, (1.1.3) tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz.

Aytaylik $\varphi(u) - u = 0$ bo'lsin. Agar $u = u_0$ bu tenglamaning ildizi bo'lsa, unda bir jinsli tenglamaning yechimi $y = u_0 x$ bo'ladi.

Izoh. Ushbu

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.1.4)$$

tenglamada $M(x, y)$, $N(x, y)$ lar bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lganda bir jinsli differensial tenglama bo'ladi.

1-Misol. $(x^2 + y^2)dy + 2xydx = 0$ $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ va $f_2(x, y) = 2xy$ differensial tenglama bir jinslidir, chunki $x^2 + y^2$ va $2xy$ funksiyalar ikki o'lchovli bir jinslidir:

Haqiqatan

$$f_1(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f_1(x, y)$$

$$f_2(tx, ty) = 2(tx)(ty) = t^2 2xy = t^2 f_2(x, y).$$

Endi differensial tenglamani yechamiz, ya'ni $u=u(x)$ funksiya kiritib $y=ux$, $dy=u dx+x du$. Unda

$$(x^2 + x^2 u^2) (u dx + x du) + 2x^2 u dx = 0$$

yoki ixchamlab,

$$(1+u^2)dx+2ux dx=0$$

o'zgaruvchilarni ajratib,

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2} du = 0$$

hosil qilamiz.

Integrallab, $\ln x + \ln(1+u^2) = \ln C$ yoki $x(1+u^2) = C$ ni topamiz. $u=y/x$ almashtirishni hisobga olsak, berilgan tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz:

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

2-Misol. Ushbu

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \text{ yoki } y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (x \neq 0)$$

bir jinsli tenglamani yeching.

Yechish: O'ng tomoni nol o'lchovli bir jinsli funksiya iborat, $y/x = u$ almashtirish bajaramiz, u holda $y = ux$, $y' = u'x + u$, y va y' ning ifodalarini differensial tenglamaga qo'yamiz:

$$u'x + u = u + \sqrt{1 - u^2}, \quad u'x = \sqrt{1 - u^2}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo'ladi.

Oxirgi tenglikni dx ga ko'paytirib $x \cdot \sqrt{1 - u^2} \neq 0$ ga bo'lamiz, o'zgaruvchilar ajraladi.

Integrallab, topamiz: $\arcsin u = \ln x + \ln C$. Bu yerdan $y = x \sin(\ln Cx)$.

3-Misol. Ushbu $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$ differensial tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglamani x ga bo'lamiz, bo'ladi

$$y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Demak, qaralayotgan tenglama bir jinsli differensial tenglama, quyidagi $y=zx$, $z=z(x)$ almashtirishni bajaramiz. Unda $y' = z + xz'$ bo'lib, berilgan differensial tenglama, ushbu

$$xz' + z = z \cos \ln z$$

yoki

$$x \frac{dz}{dx} = z(\cos \ln z - 1)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Unda o'zgaruvchilarni ajratsak bo'ladi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)}, \quad (\cos \ln z = 1?)$$

Integrallaymiz

$$\ln|x| + \ln|c| = \int \frac{d \ln z}{\cos \ln z - 1}$$

yoki

$$\ln cx = \int \frac{du}{\cos u - 1} = - \int \frac{du}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \Rightarrow (u = \ln z) \Rightarrow \ln cx = \operatorname{ctg} \frac{u}{2}$$

yoki

$$\ln cx = \operatorname{ctg} \frac{\ln z}{2} \Rightarrow \ln cx = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x} \right)$$

berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi, bunda c ixtiyoriy o'zgarmas. Endi $\cos \ln z = 1$ tenglikni ko'ramiz, bundan

$$z = e^{2k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow y = xe^{2\pi k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

yechim hosil bo'ladi.

4-Misol. $\left(xe^{\frac{y}{x}} - y \right) dx + x dy = 0$ simmetrik ko'rinishdagi differensial tenglama

integrallansin.

Yechish: Misolda $M(x, y) = xe^{\frac{y}{x}} - y$ va $N(x, y) = x$ funksiyalar birinchi tartibli bir jinsli funksiyalar. Haqiqatan,

$$M(tx, ty) = (tx)e^{\frac{ty}{tx}} - (ty) = t \left(xe^{\frac{y}{x}} - y \right) = tM(x, y) \quad N(tx, ty) = tx = tN(x, y).$$

Demak, berilgan tenglama bir jinsli differensial tenglama va uni yechish uchun $\frac{y}{x} = z$ almashtirish kiritamiz. Unda $y=xz$, $dy=xdz+zdx$ ni tenglamaga qo'ysak, bo'ladi

$$(x ye^z - x z) dx + x (xdz + zdx) = 0$$

yoki $x \neq 0$ ga qisqartirib ixchamlasak, bo'ladi

$$x dz + ye^z dx = 0.$$

O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi, $x ye^z \neq 0$ deb, topamiz

$$-e^{-z} dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrallaymiz, bo'ladi

$$e^{-z} = \ln|x| + \ln|c| \text{ yoki } e^{-z} = \ln|cx| \Rightarrow z = -\ln \ln cx \text{ yoki } \frac{y}{x} = -\ln \ln cx,$$

bundan $y = -x \ln \ln cx$ – differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz, bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas.

Bir jinsli differensial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar.

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (1.1.5)$$

Bunda a, b, c, a_1, b_1, c_1 lar haqiqiy sonlar.

Agar $c=c_1=0$ bo'lsa (1.1.5) tenglama bir jinsli tenglama bo'ladi. Aytaylik, $|c| + |c_1| \neq 0$, unda ikki hol bo'lishi mumkin.

$$1) \text{ Determinant } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

$x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ deb yangi x_1 va y_1 o'zgaruvchilarni kiritamiz, α va β lar hozircha noma'lum o'zgarmaslar. Unda quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + a\alpha + b\beta + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1\alpha + b_1\beta + c_1} \quad (1.1.6)$$

quyidagi tengliklar bajarilsa,

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

ya'ni α, β lar (1.1.5) algebraik sistemaning yechimi bo'lsa bir jinsli tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

2) Determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo'lsa, (1.1.5) algebraik sistema yechimga yega

bo'lmaydi, bunday holda $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, ya'ni $a_1 = ak$, $b_1 = bk$ bo'ladi, (1.1.5)

differensial tenglamani $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{k \cdot (ax + by) + c_1}$ ko'rinishda yozish mumkin. $z = ax + by$

almashtirsak, bu tenglamani o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Izoh: (1.1.5) tenglamani integrallashda qo'llanilgan usul

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

bu yerda f – ixtiyoriy uzluksiz funksiya tenglamani integrallashda ham qo'llaniladi.

5-Misol. Ushbu $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish: Determinant: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$$

u holda quyidagiga yega bo'lamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta - 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}$$

Endi $\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$ sistemani yechib, $\alpha=2$, $\beta=1$ yekanini topamiz. natijada bir jinsli

$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$ tenglamaga yega bo'lamiz, uni $\frac{y_1}{x_1} = u$ o'rniga qo'yish yordamida

yechamiz: demak,

$$y_1 = ux_1, y_1' = u'x_1 + u, u'x_1 + u = \frac{1+u}{1-u}.$$

Soddalashtirishlardan so'ng o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$$x_1 \frac{du}{dx_1} + \frac{1+u^2}{1-u} \text{ yoki } \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

Tenglamani integrallab, topamiz:

$$u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x_1| + \ln|C| \text{ yoki } Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctg u}.$$

$u = \frac{y_1}{x_1}$ ni o'rniga qo'ysak, quyidagiga yega bo'lamiz:

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\arctg \frac{y_1}{x_1}}.$$

Nihoyat, $x_1 = x - 2$, $y_1 = y - 1$ almashtirishlarni bajarib, x va y o'zgaruvchilarga o'tamiz:

$$C = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\arctg \frac{y-1}{x-2}}$$

6-Misol. Ushbu $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish: Determinant: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ demak, tenglamani $\begin{cases} x = x_1 + \alpha \\ y = y_1 + \beta \end{cases}$ o'rniga

qo'yish yordamida yechish mumkin emas. Bu tenglamani $2x+y=z$ o'rniga qo'yish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiramiz, u holda $y' = z' - 2$

desak, tenglama $z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$ yoki $z' = \frac{5z+9}{2z+5}$ ko'rinishga keladi. Uni yechib topamiz:

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C$$

Endi $z=2x+y$ almashtirish bajarib x va y o'zgaruvchilariga o'tamiz:

$$10y - 5c = c - 7\ln|10x + 5y + 9|$$

Ba'zi tenglamalarni $y = z^m$ almashtirish orqali, bir jinsli differensial tenglamaga keltirish mumkin. Bunda m – sonini shunday tanlab olish kerakki, differensial tenglamaning barcha a'zolari bir xil o'lchovli (tartibli) bo'lsin, agar

$$x - 1 \text{ o'lchovli, } y - m \text{ o'lchovli, } \frac{dy}{dx} - m - 1 \text{ o'lchovli } c = \text{const} - 0 \text{ o'lchovli}$$

deb hisoblasak, o'lchovlar, darajalar kursatkichlardek ko'paytirilganda qo'shiladi, bo'lishda esa ayiriladi.

Masalan, ushbu tenglamada $yy' + 7xy = 5x^3$ birinchi had o'lchovi $m+(m-1)$, ikkinchi had ulchovi $1+m$, uchinchi had ulchovi 3.

Bu sonlarni tenglashtirib, hosil qilamiz.

$$m + (m - 1) = 1 + m = 3.$$

Bundan $m=2$. Demak, $y=z^2$ almashtirish berilgan differensial tenglamani bir jinsliga aylantiradi. Hosil bo'lgan bir jinsli tenglama $2z^3z' + 7xz^2 = 5x^3$ odatdagidek yechiladi.

Haqiqatan:

$$yy' + 7xy = 5x^3, \quad y = z^2, \quad y' = 2zz'$$

$$2z^2zz' + 7xz^2 = 5x^3$$

7-Misol. Ushbu $(4x^6 - y^4)dx - 2x^4ydy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $y = z^m$, $dy = mz^{m-1}dz$ almashtirish kiritamiz, bunda m hozircha noma'lum son. Yendi y va dy ifodalarini berilgan tenglamaga qo'ysak, bo'ladi

$$(4x^6 - z^{4m})dx - 2x^4z^m \cdot mz^{m-1}dz = 0.$$

Bu tenglama bir jinsli differensial tenglama bo'lishi uchun unga qatnashgan funksiyalarning o'lchovi teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$6 = 4m = 4 + m + m - 1 \Rightarrow 6 = 4m = 3 + 2m$$

Bundan $m = \frac{3}{2}$ kelib chiqadi. Aytaylik $y = z^{\frac{3}{2}}$, unda berilgan differensial tenglama ushbu ko'rinishda bo'ladi

$$(4x^6 - z^6)dx - 2x^4 z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot z^{\frac{1}{2}} dz = 0$$

yoki

$$(4x^6 - z^6)dx - 3x^4 z^2 dz = 0$$

Endi $z = u \cdot x$, $dz = udx + xdu$ deymiz, unda x^6 - ga qisqartirib hosil qilamiz:

$$(4 - u^6)dx - 3u^2(udx + xdu) = 0$$

yoki

$$(4 - 3u^3 - u^6)dx - 3u^2 x du = 0.$$

Bu tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dx}{x} = \frac{3u^2 du}{u^6 + 3u^3 - 4}.$$

Integralaymiz, o'ng tomondagi integralda $u^3 = t, dt = 3u^2 du$ deb, unda

$$\ln c + \ln|x| = - \int \frac{dt}{t^2 + 3t - 4} = - \int \frac{dt}{(t-1)(t+4)} = -\frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+4} \right) dt = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t+5}{t-1} \right|$$

yoki $cx^5 = \frac{t+4}{t-1}$, $t = u^3$ - ni hisobga olsak, $cx^5 \cdot (u^3 - 1) = u^3 + 4$ lekin $u = \frac{z}{x}$,

$cx^5(z^3 - x^3) = z^3 + 4x^3$, $z = y^{\frac{2}{3}}$ edi. Demak, $cx^5(y^2 - x^3) = y^2 + 4x^3$ berilgan tenglamaning umumiy integrali.

Ushbu $y' = f(ax + by + c)$ ko'rinishdagi tenglamalar $z = ax + by + c$ almashtirish orqali o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltiriladi.

8-Misol. Ushbu $(x + 2y)y' = 1$ differensial tenglamaning $x = 0$ da $y = -1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish: Yangi $z = z(x) \in C'$ funksiya kiritamiz, $z = x + 2y$ deb, unda $y' = \frac{1}{2} z' - \frac{1}{2}$. Yendi y va y' ifodalarini berilgan differensial tenglamaga qo'yamiz, bo'ladi:

$$\frac{1}{2}z(z' - 1) = 1 \Rightarrow zz' - z = 2 \Rightarrow zz' = z + 2.$$

O'zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo'ldi. dx ga ko'paytirib $z + 2 \neq 0$ ga bo'lsak, o'zgaruvchilari ajralgan tenglamani topamiz:

$$\frac{z}{z+2}dz = dx.$$

Integrallaymiz

$$\int \frac{z+2-2}{z+2} dz + \ln|c| = x \Rightarrow z - 2\ln|z+2| + \ln c = x$$

yoki oldingi funksiya y ga qaysak: $x + 2y - 2\ln|x+2y+2| + 2\ln|c| = x \Rightarrow$ ixchamlasak,

bo'ladi $y = \ln\left|\frac{x+2y+2}{c}\right|$ yoki $x + 2y + 2 = c \cdot e^y$ tenglamaning umumiy integrali $x=0$

da $y=-1$ boshlang'ich shartdan $0 = c \cdot e^{-1}$ ya'ni $c=0$ ni topamiz.

Shunday qilib, boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechim:

$$x + 2y + 2 = 0.$$

9-Misol. Urinma osti urinish nuqtasining absissasi va ordinatasining yig'indisiga teng bo'lgan egri chiziqlarni toping.

Yechish: Masala shartidan ushbu differensial tenglamani tuzamiz:

$$\frac{y}{y'} = x + y \Rightarrow ydx = (x + y)dy.$$

Bu tenglamada $x = y \cdot z$ almashtirishni bajarish qulaydir. U holda

$dx = ydz + zdy$ va tenglama $y(ydz + zdy) = y(z + 1)dy \Rightarrow ydz = dy; dz = \frac{dy}{y}$ ko'rinishga

keladi. Integrallaymiz $z = \ln y + \ln c, \Rightarrow y = ce^z$ egri chiziqlar oilasidan iborat yoki

$$y = c \cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

10-Misol. $y = f(x)$ egri chiziq $(1,1)$ nuqtadan o'tadi. Koordinatalar boshidan bu egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinmagacha bo'lgan masofa urinish nuqtasining absissasiga teng. Ko'rsatilgan egri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: $M(x, y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, bu nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini yozamiz:

$$Y - y = y'(X - x),$$

bunda (X, Y) urinma nuqtalarining o'zgaruvchi koordinatalari, yoki

$$X - \frac{1}{y'}Y + y - xy' = 0$$

urinmaning umumiy tenglamasi. Yendi, nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofani topish formulasidan foydalanib topamiz, $(0,0)$ nuqtadan urinmagacha bo'lgan masofa, bo'ladi

$$d = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

bu masofa masala shartiga ko'ra x ga teng. Demak izlanayotgan egri chiziqning differensial tenglamasi bo'ladi:

$$\frac{\left|y - x \frac{dy}{dx}\right|}{\sqrt{1 + (y')^2}} = x$$

yoki

$$y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 + x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

ya'ni

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

bir jinsli differensial tenglama hosil bo'ldi. Almashtirish kiritamiz $y = u \cdot x$, unda

$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, x^2 qisqartirib hosil qilamiz:

$$2xu \frac{du}{dx} + u^2 + 1 = 0.$$

O'zgaruvchilarni ajratib topamiz:

$$\frac{2u}{u^2 + 1} du + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\ln(u^2 + 1) + \ln|x| = \ln c \Rightarrow (u^2 + 1)x = c.$$

Lekin $u = \frac{y}{x}$ yedi, $y^2 + x^2 = cx$. Masala shartiga muvofiq egri chiziqliq (1,1) nuqtadan utadi: $1+1=s$, $s=2$. Shunday qilib, izlanayotgan egri chiziqliq tenglamasi

$$y^2 + x^2 = 2x$$

yoki

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

bu markazi (1; 0) nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan aylana.

2-§. Birinchi tartibli chiziqli va unga keltiriladigan tenglamalar

Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb noma'lum funksiya y va uning hosilasiga y' nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamaga aytiladi.

Uning ko'rinishi

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (1.2.1)$$

bu yerda $p(x), q(x)$ lar x ning (a, b) dagi qiymatlari uchun uzluksiz funksiyalardir, xususiyl holda bulardan bittasi o'zgarlas son bo'lishi mumkin.

Agar $q(x) \equiv 0$ bo'lsa, bu holda tenglama quyidagi

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (1.2.2)$$

ko'rinishda bo'ladi va u (1.2.1) differensial tenglamaga mos chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, uning umumiy yechimi:

$$y = c \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad (1.2.3)$$

Teorema. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = e^{-\int p(x)dx} (c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx) \quad (1.2.4)$$

formula orqali ifodalanadi, bunda s – ixtiyoriy o'zgarlas son.

Bu teoremaning isbot yetish uchun bir nechta usullardan foydalanish mumkin, masalan:

a) o'zgarmasni variatsiya usuli bilan, bunda (1.2.1) tenglamaning yechimini

$$y = c(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \quad (1.2.5)$$

ko'rinishda izlaydilar, bunda $c(x)$ – yangi noma'lum differensiallanuvchi funksiya.

1-Misol. Lagranj - o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan ushbu

$$y' - y \sin x = \sin x \cos x$$

chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Avvalo bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamani yechamiz:

$$y' - y \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = y \sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \sin x dx$$

integrallaymiz:

$$\ln|y| = -\cos x + \ln|c| \Rightarrow y = C \cdot e^{-\cos x}$$

bu bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi, bunda S – ixtiyoriy o'zgarmas.

Endi bu tenglikda $S=S(x)$ deb berilgan differensial tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y = C(x) \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y' = C'(x)e^{-\cos x} + C(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

endi berilgan tenglamaga u va y' ifodalarni qo'yamiz:

$$C'(x) \cdot e^{-\cos x} + C(x) \sin x \cdot e^{-\cos x} - C(x) \sin x \cdot e^{-\cos x} = \sin x \cos x$$

yoki

$$C'(x) \cdot e^{-\cos x} = \sin x \cos x \Rightarrow C'(x) = \sin x \cos x e^{\cos x}.$$

Keyingi tenglikdan topamiz:

$$C(x) = \int \sin x \cos x \cdot e^{\cos x} dx + C_1$$

O'ng tomondagi integralda $t=\cos x$ deb oson topish mumkin:

$$C(x) = -\cos x e^{\cos x} + e^{\cos x} + C.$$

Demak, berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C(x) \cdot e^{-\cos x} = e^{-\cos x} (-\cos x e^{\cos x} + e^{\cos x} + C)$$

yoki

$$y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$$

bo'ladi, bunda C - ixtiyoriy o'zgarmas.

2-Misol. Ushbu $y' - \frac{1}{x}y = x \cos x$ chiziqli tenglamani integrallang.

Yechish: Oldin mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \text{ dan } \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

integrallaymiz

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0 \Rightarrow y = C \cdot x,$$

bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas.

Endi $C = C(x)$ deb, berilgan tenglamaning yechimini $y = C(x) \cdot x$ ko'rinishda izlaymiz, ya'ni o'zgarmasni variatsiya usulini qo'llaymiz:

$$y' = C'(x) \cdot x + C(x).$$

u va y' ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini

$$y = Cx + \sin x$$

ko'rinishda topamiz, bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas.

3-Misol. Ushbu $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ chiziqli tenglamaning boshlang'ich shartni

$y(1) = \frac{1}{2}$ qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish: Oldin mos bir jinsli $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Ravshanki, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, bundan $y = Cx$, C – ixtiyoriy o'zgarmas.

Endi berilgan tenglamaning yechimini

$$y = C(x) \cdot x \quad (*)$$

ko'rinishda izlaymiz, $C(x)$ – noma'lum funksiya.

Endi u va y' ifodalarini berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$C'(x) \cdot x + C(x) - C(x) = x^2$$

yoki

$$C'(x) = x$$

bundan integrallab topamiz

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

buni (*) tenglamaga qo'yib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$y = Cx + \frac{1}{2}x^3,$$

bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas, ko'rinishda topamiz.

2-chi o'rniga qo'yish usuli

b) (1.2.1) differensial tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz

$$y = u \cdot v \quad (1.2.6)$$

bunda $u = u(x)$, $v = v(x)$ noma'lum funksiyalar bo'lib, birini aytaylik v ni ixtiyoriy tanlab olish mumkin.

Almashtirishni bajarsak, ya'ni $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ larni (1.2.1) tenglamaga qo'ysak

$$u'v + uv' + p(x)u \cdot v = q(x)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$u'v + (v' + p(x)v)u = q(x).$$

Yuqorida aytib o'tdik $v(x)$ funksiyani ixtiyoriy tanlab olish mumkin deb, uni $v' + p(x)v = 0$ shartdan topib olamiz

$$v = e^{-\int p(x)dx} \quad (1.2.7)$$

Ikkinchi noma'lum funksiya $u(x)$ ushbu $u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ tenglamani integrallash orqali hosil bo'ladi:

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C, \quad (1.2.8)$$

endi, $u(x)$ va funksiyalar uchun topilgan (1.2.7) va (1.2.8) ifodalarni ko'paytirsak (1.2.4) formulani hosil qilamiz.

4-Misol. $y' - 3y = 2e^x$ tenglamani yeching.

Yechish: Yechimni $y = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda izlaymiz, bunda $u = u(x)$, $v = v(x)$ hozircha noma'lum funksiyalar, y va $y' = u'v + uv'$ larni tenglamaga qo'yib, topamiz:

$$u'v + uv' + 3uv = 2e^x$$

$$u'v + u\left(\frac{dv}{dx} - 3v\right) = 2e^x$$

$v(x)$ noma'lum funksiyani shunday tanlab olamizki qavsdagi ifoda nolga teng bo'lsin:

$$\frac{dv}{dx} - 3v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 3dx$$

integrallaymiz

$$\ln|v| = 3x + \ln|c|, \quad v = c \cdot e^{3x}, \quad c = 1 \text{ desak,}$$

bo'ladi $v(x) = e^{3x}$.

$u(x)$ noma'lum funksiyani $e^{3x} \cdot \frac{du}{dx} = 2e^x$ tenglamadan topamiz, bo'ladi

$$du = 2e^{-2x} \cdot dx.$$

Integrallasak, $u(x) = -e^{-2x} + c$.

Endi, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning ifodalarini ko'paytirib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz

$$y = c \cdot e^{3x} - e^x,$$

bunda c – ixtiyoriy o'zgarmas.

Ba'zi differensial tenglamalar chiziqli bo'ladi, agar noma'lum funksiya y va argument x ning rollarini almashtirsa.

5-Misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{8x - y^3}$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamada y – noma'lum funksiya bo'lib, x argument. Ravshanki bu tenglama y ga nisbatan chiziqli emas.

Agar x va y larning rollarini almashtirsak, ushbu

$$\frac{dx}{dy} = \frac{8}{y}x - y^2, \quad x'(y) = a(y)x + b(y)$$

chiziqli tenglamaga kelimiz. Buning umumiy yechimini, qo'yidagi

$$x(y) = c \cdot e^{\int a(y)dy} + e^{\int a(y)dy} \cdot \int b(y) \cdot e^{-\int a(y)dy} dy$$

formula orqali topish mumkin, tenglamamizda $a(y) = \frac{8}{y}$, $b(y) = -y^2$.

Natijada, bo'ladi:

$$X(y) = c \cdot e^{\int \frac{8}{y} dy} - e^{\int \frac{8}{y} dy} \cdot \int y^2 \cdot e^{-\int \frac{8}{y} dy} dy = c \cdot e^{8 \ln|y|} - e^{8 \ln|y|} \cdot \int y^2 \cdot e^{-8 \ln|y|} dy = c \cdot y^8 - y^8 \cdot \int y^2 \cdot y^{-8} dy$$

Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$X = cy^8 + \frac{1}{5} y^8 \cdot y^{-5} \quad \text{ёки} \quad X = cy^8 + \frac{1}{5} y^3, \text{ bunda } c - \text{ixtiyoriy o'zgarmas.}$$

Ushbu

$$\ddot{y} + a(x)y = b(x)y^m \quad (1.2.9)$$

differensial tenglama (bunda m – haqiqiy son, $m \neq 0$, $m \neq 1$) Bernulli tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamani chiziqli differensial tenglamaga keltirish oson buning uchun (1.2.9) ning ikkala tomonini $y^m \neq 0$ bo'lamiz, bo'ladi

$$y^{-m}y' + a(x)y^{1-m} = b(x),$$

Endi $z = z(x)$ yangi funksiya kiritamiz $y^{1-m} = z$ deb, unda $z' = (1-m)y^{-m} \cdot y'$ va yuqoridagi differensial tenglama quyidagi ko'rinishga keltiriladi

$$z' + (1-m) \cdot a(x)z = (1-m)b(x)$$

ya'ni chiziqli differensial tenglamagani hosil qildik.

Izoh. Bernulli tenglamasining yechimini to'g'ridan-to'g'ri $y = u(x) \cdot v(x)$ almashtirish yordamida ham topish mumkin. Buni misolda ko'rsatamiz.

6-Misol. Ushbu $xy' + y = y^2 \ln x$ Bernulli tenglamasini yeching.

Yechish: Bu tenglamani yechish uchun $y = u \cdot v$, ($u = u(x)$, $v = v(x)$) almashtirishni bajaramiz, $y' = u'v + uv'$ bo'ladi

$$xu'v + xv'u + uv = u^2v^2 \ln x,$$

yoki

$$xu'v + u(xv' + v) = u^2 v^2 \ln x$$

$xv' + v = 0$ bo'lishini talab qilamiz.

Unda $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x + \ln c, c=1$ deb $v = \frac{1}{x}$ ni topamiz.

Ikkinchi noma'lum $u = u(x)$ funksiyani $xu'v = u^2 v^2 \ln x$ tenglamadan topamiz

$v = \frac{1}{x}$ ni hisobga olsak, bo'ladi

$$x \frac{du}{dx} = u^2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx$$

integrallab hosil qilamiz

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{x} \ln x + 1 + cx \Rightarrow u = \frac{x}{\ln x + 1 + cx}, \quad y = u \cdot v$$

ekanligini hisobga olsak, bo'ladi

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

bu berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ravshanki, bizning tenglamamiz bundan tashqari $y = 0$ yechimga yega, bu yechim $c = \infty$ da umumiy yechimdan hosil bo'ladi.

7-Misol. Shunday egri chiziqlar topilsinki, uning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinma, shu nuqtadagi radius-vektor va absissa o'qining kesmasi bilan hosil bo'lgan uchburchak yuzi o'zgarmas a^2 ga teng bo'lsin.

Yechish: Egri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz.

Uchburchak yuzi:

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot MN$$

$$ON = X, \quad MN = Y$$

O'rinma osti

$$AN = \frac{y}{y'}; \text{ chizmadan ko'rinadiki}$$

$$OA = ON - AN \quad \text{ёки} \quad OA = X - \frac{y}{y'}$$

Masala shartiga ko'ra

$$\frac{1}{2}y\left(x - \frac{y}{y'}\right) = a^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2}{xy - 2a^2}$$

yoki

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x - \frac{2a^2}{y^2} \quad (*)$$

x -ga nisbatan chiziqli differensial tenglamani hosil qildik.

Bu tenglamani o'zgarmasni variatsiya metodi bilan yechamiz, shu uchun oldin unga mos bo'lgan chiziqli bir jinsli tenglamani yechamiz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = c \cdot y, \quad c - \text{ixtiyoriy o'zgarmas.}$$

Ushbu $x = c(y) \cdot y$, bunda $c(y)$ hozircha noma'lum, $(*)$ ko'rinishda differensial tenglama yechimini izlaymiz:

$$\frac{dx}{dy} = c(y) + y \cdot c'(y)$$

$$c(y) + y \cdot c'(y) = c(y) - \frac{2a^2}{y^2} \Rightarrow \text{soddalashtiramiz,}$$

$$\text{bo'ladi: } c'(y) = -\frac{2a^2}{y^3}, \text{ integrallaymiz: } c(y) = \frac{a^2}{y^2} + c.$$

Endi $c(y)$ ifodasini $x = c(y) \cdot y$ ga qo'yib, berilgan tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$x = \left(\frac{a^2}{y^2} + c\right) \cdot y \quad \text{ёки} \quad xy = a^2 + cy^2,$$

bunda c – ixtiyoriy o'zgarmas.

8-Misol. Shunday egri chiziqlar topilsinki, uning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmaning urinma osti uzunligi urinish nuqtasining o'rta arifmetigiga teng bo'lsin.

Yechish: Egri chiziq tenglamasi $y=f(x)$ bo'lsin, uning grafigida ixtiyoriy nuqta $M(x,y)$ bo'lsin.

$$\text{Urinma osti: } AN = \frac{y}{y'}. \text{ Masala shartiga ko'ra } |AN| = \frac{x+y}{2}.$$

Shunday qilib oxirgi ikkita tenglamalardan, ushbu

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2} \quad \text{ёки} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+y}$$

bir jinsli differensial tenglamani topamiz, yoki

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}x + \frac{1}{2}$$

x – ga nisbatan chiziqli differensial tenglamani topamiz.

Differensial tenglamani yechib, egri chiziq tenglamasini hosil qilamiz (tenglamani yechish kitobxonga topshiriladi).

II BOB. ASOSIY QISM

1-§. Simmetrik ko'rinishdagi differensial tenglamalar

Quyidagi x va y nisbatan simmetrik ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamani ko'rib chiqamiz:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.1.1)$$

Bu yerda $M(x, y)$ va $N(x, y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi x, y - argumentlarga bog'liq bo'lgan funksiyalardir. Ba'zi hollarda (2.1.1) tenglama hech bo'lmaganda, birorta quyidagi differensial tenglamalarning biriga ekvivalentdir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{yoki} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (2.1.2)$$

1 – ta’rif. (2.1.1) tenglamaning yechimi (oshkora ko'rinishda) deb, $Y \subset \mathbb{R}$ intervalda aniqlangan va (2.1.1) tenglamani hamma $x \in Y$ (yoki hamma $y \in Y$) larda tenglikka aylantiradigan $y = y(x)$ (yoki $x = x(y)$) differensiallanuvchi funksiyaga aytiladi.

Parametrik ko'rinishdagi yechim tushunchasi yanada umumiy bo'ladi.

2 – ta’rif. $Y \subset \mathbb{R}$ intervalda parametrik berilgan $x = x(t)$, $y = y(t)$ silliq funksiya (1)-tenglamaning yechimi (parametrik ko'rinishda) deb aytiladi, agar quyidagi tenglik bajarilsa:

$$M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t) = 0, \quad \forall t \in Y$$

2 – ta’rif uchun qayd. $x = x(t)$, $y = y(t)$ funksiya (egri) $Y \subset \mathbb{R}$ intervalda silliq deb aytiladi, agar x va y uzluksiz hosilalarga x'_t, y'_t ega bo'lsa va bu hosilalar bir vaqtda nolga aylanmasa.

3–ta’rif. (x^*, y^*) nuqta (2.1.1) tenglamaning muhim nuqtasi deb aytiladi, agar

$$M(x^*, y^*) = N(x^*, y^*) = 0.$$

4-ta'rif. $x = x(t)$, $y = y(t)$ silliq chiziqning grafigi (bu yerda, $x(t)$, $y(t)$ (2.1.1) tenglamaning yechimi) (2.1.1) tenglamaning integral chizig'i (egri chizig'i) deb aytiladi.

Misol. $x^2 - 5y^2 \frac{dx}{dy} + y(x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$

Tenglama parametrik ko'rinishdagi $x = \cos 2t \cos t$, $y = \cos 2t \sin t$, $t \in R$ yechimga ega. Bunga bevosita berilgan funksiyani tenglamaga qo'yib ishonch hosil qilish mumkin.

Berilgan tenglamaning integral chizig'i 57-chizmada chizilgan. U $t = \frac{\pi}{4}$ yoki $t = \frac{3\pi}{4}$ bo'lganda $(0,0)$ nuqta orqali o'tadi. Birinchi holda, urinmaning burchak koeffitsiyenti 1 ga teng, ikkinchi holda esa -1 ga teng. $(0,0)$ nuqta tenglamaning muhim nuqtasi bo'ladi.

5-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglama kvadraturada integrallanuvchi (yoki oddiygina integrallanuvchi) deb aytiladi, agar uning umumiy yechimi kvadratura va chekli sonli elementar (algebraik) amallar yordamida olingan bo'lsa.

Aytaylik, $M(x,y)$ va $N(x,y)$ ochiq $G \subset R^2$ to'plamda uzluksiz bo'lsin. Aytaylik, $D = G/T$ bo'lsin, bu yerda T - (2.1.1) tenglamaning maxsus nuqtalari to'plami M va N - ning uzluksizligidan va ham maxsus nuqtaning ta'rifidan, ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ nuqta uchun shunday uning atrofini ko'rsatish mumkinki, unda $M(x,y) \neq 0$ va $y_0 N(x,y) \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu atrofda (2.1.1) tenglama (2.1.2) tenglamalarning hech **bo'lmaganda** biriga ekvivalentdir. Agar boshlang'ich (x_0, y_0) nuqta D - ga arashli bo'lsa, unda Koshi masalasining yechimi shu nuqtaning ba'zi atrofida (2.1.2) tenglamaning biri Koshi masalasining yechimi bo'ladi. Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

1 – teorema. Faraz qilaylik, D - sohada quyidagi shartlardan biri bajarilsin:

1⁰) $M(x,y) \neq 0$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ va $\frac{\partial N}{\partial x}$ mavjud va uzluksizdir; 2⁰) $N(x,y) \neq 0$ $\frac{\partial M}{\partial y}$ va $\frac{\partial N}{\partial x}$

mavjud va uzluksizdir. U holda D - sohasi (2.1.2) tenglamaning ikkinchi tengligi uchun 1^0 holda va birinchi tengligi uchun 2^0 holda yagonalik sohasidir.

Agar ixtiyoriy $E \subset D$ to'plamda yo $M \neq 0$ va yo $N \neq 0$ bo'lib, (2.1.2) tenglama u yoki bunisi uchun mos ravishda yagonalik sohasi bo'lsa, u holda D (2.1.1) tenglama uchun yagonalik sohasi deb aytiladi.

6 – ta'rif. (2.1.1) tenglama G - sohada to'liq differensialli tenglama deb aytiladi, agar differensiallanuvchi $Q(x, y)$ funksiya mavjud bo'lib, (2.1.1) tenglamaning chap tomoni uchun G - sohada to'liq differensialni hosil qilsa, ya'ni

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Bunda $(x, y) \in G$ ixtiyoriy nuqta.

6 – ta'rif uchun qayd. 1) (2.1.1) – to'liq tenglama $dQ(x, y) = 0$ tenglamaga teng kuchlidir. Bundan ko'rinib turibdiki, uning umumiy integrali $D = G/T$ - da $Q(x, y) = c$ nisbat hosil qiladi, bu yerda c - hamma joiz qiymatlarni qabul qiladi. Bu nisbat R^2 - ning tekisligida hamma integral egri chiziqlar to'plamini aniqlaydi.

2) Koshi masalasining yechimi (2.1.1) tenglamaning boshlang'ich qiymatlari (x_0, y_0) uchun $Q(x, y) = Q(x_0, y_0)$ nisbatni aniqlaydi. Agar (x_0, y_0) nuqta (2.1.1) to'liq tenglamaning maxsus nuqtasi bo'lmasa, u holda Koshi masalasi (x_0, y_0) boshlang'ich qiymatlari bilan, shu nuqtaning atrofida yagona yechimga ega.

Misol. $x dx + y dy = 0$ tenglama uchun umumiy integral $x^2 + y^2 = c$ ko'rinishda yoziladi (buni bevosita differensiallab tekshirish mumkin). Bundan ko'rinib turibdiki, umumiy integral bilan aniqlanadigan integral chiziqlar, markazi koordinata boshida joylashgan konsentrik aylanalardan iborat bo'ladi. Tenglama boshlang'ich shartli $y(0) = 0$ yechimga ega emas. $(0, 0)$ nuqta maxsus bo'lsa, ya'ni $(0, 0) \in T$, yagonalik sohasi D quyidagi ko'rinishga ega: $D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ va } y \neq 0\}$

Koshi masalasining yechimi boshlang'ich sharti $y(0) = \sqrt{3}$ bilan $x^2 + y^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$ yoki $x^2 + y^2 = 4$ ko'rinishga ega. $c = 4$ munosabatda aylana $M_0(\sqrt{3})$ nuqtadan o'tadi.

2 – teorema. Faraz qilaylik, $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar D - ochiq to'plamda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. (2.1.1) tenglama to'liq differensiallanuvchi bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarurdir:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D \quad (2.1.3)$$

Agar D -to'plam bir bog'lamli soha bo'lsa, u holda (2.1.3) – shart yetarlidir.

2 – teorema uchun qayd. D -to'plam bir bog'lamli deb aytiladi, agarixitoyoriy unda yotuvchi yopiq egrilikni D -to'plamga qarashli bo'lgan nuqtaga bog'lash mumkin bo'lsa, bog'lash jarayoni mobaynida egrilik D - to'plami chegaralaridan chiqib ketmasligi lozim.

Isbot. Faraz qilaylik, (2.1.1) tenglama to'liq bo'lsin. U holda, to'liq tenglama ta'rifidan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = N(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \quad (2.1.4)$$

kelib chiqadi. Birinchi tenglikni y - bo'yicha, ikkinchi tenglikni x - bo'yicha differensiallab, $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$ - ga ega bo'lamiz. Darhaqiqat, aralash hosilalar uzluksizdir va ular tengdir. Bundan esa, (2.1.3) – shartning to'g'riligi kelib chiqadi.

Aytaylk, D - birbog'lamli to'plam bo'lsin. Bu holda (2.1.3)-shart yetarli ekanligini ko'rsatamiz. (2.1.4)-tenglikdan y - ni doimiy hisoblab, birinchisini x - bo'yicha integrallaymiz:

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y) \quad (2.1.5)$$

bu yerda x_0 – D yagonalik sohasidan ixtiyoriy nuqtasining absissasidir. $\varphi(y)$ – y - ga bog'liq bo'lgan doimiy integrallovchi $\varphi(y)$ - funksiyani shunday tanlab olamizki, (2.1.4) shartlarning ikkinchisi bajarilsin. Buning uchun, (2.1.5) tenglikda x - ni doimiy deb, y - bo'yicha differensial olamiz:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial'}{\partial y} \left[\int_{x_0}^x M(x, y) dx \right] + \varphi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y) \quad (2.1.6)$$

(2.1.3) ni hisobga olsak,

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y) \text{ yoki } N(x, y) = N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Bu yerdan,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y), \text{ ya'ni } \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy \quad (2.1.7)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $y_0 - D$ yagonalik sohasiga tegishli ixtiyoriy nuqtaning ordinatasidir, doimiy ixtiyoriy o'zgarmasni nolga teng deb hisoblaymiz. (2.1.5) va (2.1.7) tengliklaridan

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar D - sohada (2.1.1) tenglamaning maxsus nuqtalari bo'lmasa va (2.1.3) shart bajarilsa, u holda (2.1.1) tenglamaning umumiy integrali quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C, \quad (x_0, y_0) \in D \quad (2.1.8)$$

Bu yerda S – (2.1.8) tenglikning D - sohada integral chiziqlarni aniqlovchi qiymatlarini qabul qiladi. Shuni qayd etish lozimki, (2.1.8) tenglikda faqat bitta ixtiyoriy o'zgarmas S -mavjuddir.

2 – misol. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechim. Bizga ma'lumki, $D = \{(x, y) : x \neq 0\}$ - shu tenglamaning yagonalik sohasidir.

$$M(x, y) = 4 - \frac{y^2}{x^2}, \quad N(x, y) = \frac{2y}{x}$$

belgilab va (2.1.3) – shartning bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} \text{ ya'ni } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Berilgan tenglama to'liq bo'ladi va uning umumiy integrali (2.1.8) ko'rinishga egadir. Bu yerda $(x_0, y_0) \in D$ sohaning ixtiyoriy nuqtasidir. Faraz qilaylik, $x_0 = 1$ va $y_0 = 0$ bo'lsin. Agar $(0, 0) \in D$ bo'lsa, u holda

$$\int_1^x \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \int_0^y \frac{2y}{1} dy = C.$$

Bu tenglikni integrallab, $4x - 4 + \frac{y^2}{x} - y^2 = c_1$ - ga ega bo'lamiz. $c = c_1 + 4$ orqali belgilab, berilgan tenglama uchun umumiy integralni topamiz:

$$4x + \frac{y^2}{x} = c.$$

3^o. Integrallovchi ko'paytuvchi. Faraz qilaylik, (2.1.3) shart bajarilmasin, u holda (2.1.1) tenglama to'liq bo'lmaydi. Lekin uni integrallashimiz mumkin, agar shunday ochiq $D_1 \subset D$ to'plamda berilgan $\mu(x, y) \neq 0$ funksiyani topib, uni (2.1.1) tenglamaning har bir hadiga ko'paytirganda u to'liq bo'ladi.

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0 \quad (2.1.9)$$

Bu funksiya (2.1.1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deb aytiladi. (2.1.9) tenglamaning umumiy yechimi (2.1.1) tenglamaning umumiy yechimi bilan mos tushadi.

Hamma xil (2.1.1) tenglama uchun, bu yerda M va N - uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar, integrallovchi ko'paytuvchi mavjudligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, (2.1.1) tenglama to'liq bo'lmasin. Mavjudiylik va yagonalik teoremlariga asosan, (2.1.1) tenglama noma'lum ko'rinishdagi $u(x, y) = C$ umumiy yechimga ega. Bu tenglikni x - bo'yicha differensiallab, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ ega bo'lamiz.

(2.1.1) tenglamadan $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ kelib chiqadi, u holda

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{N(x, y)}.$$

μ - orqali bu ikkita tenglik nisbatining umumiy kattaligini belgilaymiz, u holda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(x, y) M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x, y) N(x, y) \quad (2.1.10)$$

$u(x, y) = c$ (2.1.1) tenglamaning umumiy integrali bo'lishidan, biz $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan (2.1.10) munosabatni hisobga olsak, to'liq bo'lgan (2.1.9) ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz. Binobarin, $\mu(x, y)$ - (2.1.1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisidir.

(2.1.9) tenglama to'liq bo'ladi, (2.1.3) shart natijasida integrallovchi ko'paytuvchi

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \text{ yoki } M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.1.11)$$

munosabatni qanoatlantirsa.

(2.1.11) differensial tenglama izlanayotgan $\mu(x, y)$ - funksiyaga nisbatan xususiy hosilali tenglama bo'ladi. Uning ixtiyoriy xususiy yechimi integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi. Lekin, (2.1.11) tenglamani integrallash oddiy differensial tenglamalarni integrallashga qaraganda murakkabdir, lekin (2.1.10) tenglamadan bir necha xususiy hollarda integrallovchi ko'paytuvchini aniqlash oson. Bu xususiy hollarni qarab chiqamiz.

1) $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N$ munosabat faqatgina x bo'yicha $g(x)$ funksiya bo'ladi. U holda $\mu(x, y) = \exp \int g(x) dx$ funksiya integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi.

2) $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / M$ munosabat faqatgina y bo'yicha $p(y)$ funksiya bo'ladi.

U holda $\mu(x, y) = \exp \int p(y) dy$ funksiya integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi.

1 – misol. $x^2 - 3y^2 dx + 2xy dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechim. Bu yerda $M = x^2 - 3y^2$, $N = 2xy$ (2.1.3) shart bajarilishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

bundan tenglama to'liq emasligi kelib chiqadi. Quyidagi nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = \frac{-4}{x} = g(x).$$

$g(x)$ - funksiya faqatgina x bo'yicha bo'lganligi uchun integrallovchi ko'paytuvchi

$$\mu(x) = \exp \left[\int \left(-\frac{4}{x} \right) dx \right] = e^{-4 \ln x} = x^{-4}$$

ko'rinishga ega. Bu yerda doimiy integrallovchi aniqlik uchun nolga teng bo'lingan. Berilgan tenglamani integrallovchi ko'paytuvchiga ko'paytirib,

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} \right) dx + 2 \frac{y}{x^3} dy = 0$$

ga teng bo'lamiz. Bu tenglama to'liq bo'ladi (haqiqatdan ham, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -6 \frac{y}{x^4}$).

Bu tenglamaning yagonalik sohasi $D = \{x, y; x \neq 0\}$ bo'ladi. $x_0 = 1, y_0 = 0$ deb, faraz qilib, (2.1.8) formuladan umumiy integralni topamiz:

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} \right) dx + \int_0^y \frac{2y}{x^3} dy = c.$$

Bu tenglikni integrallab, $-\frac{1}{x} + 1 + \frac{y^2}{x^3} - y^2 + y^2 = c$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini ham x^3 - ga ko'paytirib, $y^2 = c_1 x^3 + x^2$ - ni topamiz. Bu yerdan $c_1 = c - 1$.

2 – misol. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ tenglamani yeching.

Yechim. (2.1.3) – shart bajarilishini tekshiramiz:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x};$$

bundan tenglama to'liq emasligi kelib chiqadi. Quyidagi nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{1 + 2xy + 1}{y + xy^2} = \frac{2}{y} = p(y).$$

Integrallovchi ko'paytuvchini topamiz:

$$\mu(y) = \exp \left[- \int \frac{2}{y} dy \right] = e^{-2 \ln y} = y^{-2}.$$

Mos keluvchi to'liq tenglama

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2} dy = 0 \left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$$

ko'rinishga ega. Bu tenglama uchun yagonalik sohasi $D = \{x, y \mid y \neq 0\}$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $x_0 = 0, y_0 = 0$ bo'lsin. Umumiy integralni topamiz:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \int_0^y \frac{0}{y^2} dy = c$$

bu yerdan, tenglamani integrallab, $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$ - ga ega bo'lamiz.

4°. O'zgaruvchilarga ajraluvchi tenglamalar. Amaliyotda tez-tez uchradigan (1) tenglamaning ikkita xususiy hollarini ko'rib chiqamiz.

7 – ta'rif. Faraz qilaylik, (2.1.1) tenglamada M va N funksiyalar faqatgina bitta argumentga bog'liq bo'lsin, ya'ni $M = m(\xi)$ va $N = n(\eta)$.

$$m(\xi) d\xi + n(\eta) d\eta = 0 \quad (2.1.12)$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilarga ajralgan tenglama deb aytiladi.

(2.1.12) tenglama to'liq tenglama bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\frac{\partial m}{\partial \eta} - \frac{\partial n}{\partial \xi} = 0$,

ya'ni (2.1.3) – shart bajariladi. (2.1.8)-formulaga ko'ra, (2.1.12) tenglamaning umumiy integrali

$$\int_{x_0}^x m(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y n(\eta) d\eta = c \quad (2.1.13)$$

ko'rinishga ega.

8 – ta'rif. Faraz qilaylik, (2.1.1) tenglamada M va N funksiyalar har biri faqatgina bitta argumentga bog'liq bo'lgan, ikkita funksiyaning ko'paytmasi ko'rinishida berilgan bo'lsin, ya'ni

$$m(\xi) \eta d\xi + m_2(\eta) \xi d\eta = 0 \quad (2.1.14)$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilarga ajraluvchi tenglama deb aytiladi.

(7) va (8) ta'riflar uchun qayd. (2.1.13)-formuladagi har bir integral ostidagi ifoda faqatgina bitta argumentga bog'liqdir (x - dan yoki y - dan), ya'ni

o'zgaruvchilar ajralgan. Bundan esa, (2.1.12) va (2.1.14) tenglamalarning nomlanishi kelib chiqadi.

Umumiy holda (2.1.14) tenglama to'liq bo'lmaydi. Lekin, uni (2.1.12) to'liq tenglama ko'rinishiga olib kelish mumkin, agar integrallovchi ko'pytuvchi sifatida

$$\mu(x, y) = \frac{1}{n_1 m_2} \quad (2.1.15)$$

belgilasak.

Haqiqatdan ham, (2.1.15) integrallovchi ko'paytuvchini (2.1.14) tenglamaga ko'paytirsak,

$$\frac{m_1}{m_2} dx + \frac{n_2}{n_1} dy = 0$$

ga ega bo'lamiz.

Oxirgi tenglama

$$m \frac{dx}{m_2} + n \frac{dy}{n_1} = 0$$

(2.1.12) tenglama ko'rinishiga ega bo'ladi. Bundan esa, (2.1.14) tenglamaning umumiy integrali (2.1.13) ko'rinishga ega bo'ladi.

1 – misol. $x - yy' = 0$ tenglamani yeching.

Yechim. Berilgan tenglamani (2.1.1) ko'rinishda yozamiz. $y' = \frac{dy}{dx}$ bo'lsa, tenglamaning har bir tomonini dx - ga ko'paytirsak, $xdx + ydy = 0$ - ga ega bo'lamiz. Bu yerda, $M = x$, $N = y$, bundan esa, bu tenglama o'zgaruvchilarga ajralgan (2.1.12) ko'rinishdagi tenglama ekanligi kelib chiqadi. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ deb, faraz qilib, (2.1.8) yoki (2.1.13) formuladan umumiy integral $\int_0^x x dx + \int_0^y y dy = c$ topamiz. Bu tenglikni integrallab va ikkala tomonini 2-ga ko'paytirib, $x^2 + y^2 = c_1$ topamiz, bu yerda $c_1 = 2c$.

2 – misol. $x + xy + y' + xy = 0$ tenglamani yeching.

Yechim: Berilgan tenglamani (2.1.1) ko'rinishda yozib olamiz:

$$x + y \frac{dx}{dy} + x \frac{dy}{dy} = 0.$$

Bu tenglama to'liq bo'lmaydi, ya'ni

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x};$$

Lekin, bu tenglama (2.1.14) ko'rinishdagi o'zgaruvchilarga ajraluvchi tenglama bo'ladi, bu yerda

$$m_1(x) = x, \quad m_2(y) = 1+y, \quad m_2(x) = 1+x, \quad n_2(y) = y \quad (2.1.15)$$

formulaga asosan, integrallovchi ko'paytuvchini topamiz:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{m_1(x)m_2(y)} = \frac{1}{(1+y)(1+x)}.$$

Tenglamaning har bir hadini $\mu(x, y)$ - ga ko'paytirib, o'zgaruvchilarga ajralgan $\frac{x}{1+x}dx + \frac{y}{1+y}dy = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning yagonalik sohasi $D = \{(x, y) : x \neq -1, y \neq -1\}$ bo'ladi. $x_0 = 0, y_0 = 0$ deb, faraz qilib, umumiy integralni topamiz:

$$\int_0^x \frac{x dx}{1+x} + \int_0^y \frac{y}{1+y} dy = c.$$

Bu tenglikni integrallab,

$$x - \ln|x+1| + y - \ln|y+1| = \ln c_1$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $\ln c_1 = c$. Tamoman, $x + y = \ln c_1 |x+1||y+1|$ ega bo'lamiz.

5°. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar.

9 – ta'rif. $f(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan n - chi darajali bir jinsli funksiya deb aytiladi, agar ixtiyoriy τ uchun quyidagi tenglik to'g'ri bo'lsa:

$$f(x, \tau y) = \tau^n f(x, y)$$

Misol. $f(x, y) = xy^3 + x^2y^2$ to'rtinchi darajali birjinsli funksiyadir, chunki

$$f(x, \tau y) = (x)(\tau y)^3 + (x^2)(\tau y)^2 = \tau^4 (xy^3 + x^2y^2) = \tau^4 f(x, y).$$

10 – ta'rif. (2.1.1) ko'rinishdagi tenglama bir jinsli deb aytiladi, agar $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar bir xil n - chi darajali bir jinsli funksiyalar bo'lsa.

Umumiy holda, bir jinsli tenglama to'liq bo'lmaydi, lekin x va $u = \frac{y}{x}$ ga nisbatan (2.1.12) o'zgaruvchilarga ajralgan tenglamaga olib kelish mumkin, agar integrallovchi ko'paytuvchini quyidagi ko'rinishda tanlasak:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{M(x, y)x + N(x, y)y}, \text{ bu yerda } y = 4x \quad (2.1.16)$$

Bu tenglikni isbotlaymiz. Ravshanki tenglama bir jinslidir, u holda

$$M(x, \tau y) = \tau^n M(x, y), \quad N(x, \tau y) = \tau^n N(x, y).$$

Faraz qilaylik, $\lambda = \frac{1}{x}$ va $\frac{y}{x} = n$ bo'lsin, u holda

$$M(x, n) = \frac{1}{x^n} M(x, y), \quad N(x, n) = \frac{1}{x^n} N(x, y) \quad (2.1.17)$$

ega bo'lamiz. (2.1.1) tenglamani $\mu(x, y)$ - ga ko'paytirib,

$$\frac{M(x, y)dx + N(x, y)dy}{M(x, y)x + N(x, y)y} = 0$$

hosil qilamiz. (2.1.17) munosabatni hisobga olib, oxirgi tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{M(x, n)dx + N(x, n)dy}{x[M(x, n) + N(x, n)n]} = 0.$$

$y = ux$, $dy = xdu + udx$ ifodalardan

$$\frac{M(x, n) + N(x, n)u}{x[M(x, n) + N(x, n)u]} dx + \frac{xN(x, n)}{x[M(x, n) + N(x, n)u]} du = 0$$

kelib chiqadi.

Suratini maxrajga hadma-had bo'lib, x va n - ga nisbatan o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga kelimiz:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(x, n)du}{M(x, n) + N(x, n)u} = 0.$$

Bu tenglamaning umumiy integralini (2.1.13) formula bo'yicha $u = \frac{y}{x}$ - ning yeyinchi qo'yilishi yordamida topamiz.

Misol. $x^2 + y^2 dx - 2xydy = 0$ tenglamani yeching.

Yechim. $M(x, y) = x^2 + y^2$ va $N(x, y) = -2xy$ belgilaymiz. Bu tenglama to'liq bo'lmaydi, chunki $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial y} = -2x$ ya'ni $\frac{\partial M}{\partial x} \neq \frac{\partial N}{\partial y}$. Tenglama birjinsli ekanligini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} M(x, \tau y) &= \tau^2(x^2 + y^2) = \tau^2 M(x, y) \\ N(x, \tau y) &= -2\tau^2 xy = \tau^2 N(x, y). \end{aligned}$$

Shunday qilib, M va N bir xil (ikkinchi) darajali birjinsli funksiyalar bo'lsa, berilgan tenglama birjinsli bo'ladi. (2.1.16) formula bo'yicha integrallovchi ko'paytuvchini topamiz:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2xy}, \text{ bu yerda } y = ux.$$

Berilgan tenglamani $\mu(x, y)$ ga ko'paytirib va bir vaqtning o'zida $y = ux$, $dy = xdu + udx$ ifodalaridan foydalanib,

$$\frac{(x^2 + u^2 x^2)dx - 2x(ux)du + udx}{(x^2 + u^2 x^2 + 2x(ux)x)} = 0$$

hosil qilamiz. Soddashtirishdan keyin $\frac{dx}{x} - \frac{2ndu}{1-n^2} = 0$ ga ega bo'lamiz.

Natijada, (2.1.12) ko'rinishidagi o'zgaruvchilari ajralgan tenglamani hosil qildik. Uning yagonalik sohasi $D = \{(x, u) | x \neq 0, u \neq \pm 1\}$ bo'ladi.

$x_0 = 1$, $u_0 = 2$ deb, faraz qilib, umumiy integralni topamiz:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} - \int_2^u \frac{2udu}{1-u^2} = c.$$

Bu tenglikni integrallab va $c = \ln c_1$ deb belgilab, $\ln(x^2 - 1) = \ln 3c_1$ yoki $x^2 - 1 = c_2$ ga ega bo'lamiz, bu yerda $c_2 = 3c_1$, $u = \frac{y}{x}$ ekanligidan $y^2 - x^2 = c_2 x$ kelib chiqadi.

6°. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

4 – ta'rif. $y' + P(x)y = Q(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamaga birinchi tartibli chiziqli tenglama deb aytiladi. Birinchi tartibli chiziqli tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$P(x)y - Q(x)dx + dy = 0 \quad (2.1.18)$$

(2.1.18) tenglama (2.1.1) ko'rinishdagi tenglama bo'ladi, bu yerda

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x), \quad N(x, y) = 1.$$

Ravshanki, umumiy holda (2.1.18) tenglama to'liq bo'lmaydi. Lekin, uning uchun faqatgina x - ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchini tanlash mumkin. Quyidagi nisbatni tuzamiz:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) N = P(x) - 0 = P(x) = g(x).$$

U holda integrallovchi ko'paytuvchi (2.1.9)

$$\mu(x) = \exp \int g(x) dx = \exp \int P(x) dx$$

bo'ladi.

Misol. $y' + \frac{2}{x}y = x$ ($x \neq 0$) tenglamani yeching.

Yechim. Berilgan tenglamani (2.1.1) ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\frac{2}{x} \cdot y - x \right) dx + dy = 0.$$

Bk tenglama to'liq bo'lmaydi, chunki $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Lekin, berilgan tenglama chiziqli bo'ladi, bu yerda $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x$.

(2.1.19) formula bo'yicha integrallovchi ko'paytuvchini topamiz.

$$\mu(x) = \exp \left[\int \frac{2}{x} dx \right] = e^{2 \ln x} = x^2.$$

Tenglamaning hamma hadini $\mu(x) = x^2$ - ga ko'paytirib, $(xy - x^3)dx + x^2dy = 0$ hosil qilamiz. Oxirgi tenglama to'liq bo'ladi, chunki, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$. Bu tenglamaning yagonalik sohasi butun $x \neq 0$ tekisligi bo'ladi.

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$ deb, faraz qilib, (2.1.8) formula bo'yicha umumiy integralni topamiz:

$$\int_0^x (xy - x^3) dx + \int_0^y 0 \cdot dy = c,$$

bundan $x^2 \left(y - \frac{x^2}{4} \right) = c$.

Bu ifodadan $y = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}$ - ni topish oson. Shuni qayd etish lozimki, bu tenglamaning yagonalik sohasidan $x = 0$ bo'lgan nuqtalar olib tashlanadi. Lekin, yechim sohasida hech qanday qisqartirishlar bo'lmaydi, chunki berilgan tenglamada $x \neq 0$.

7^o. **Bernulli tenglamasi.**

12 – ta'rif.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.1.20)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamaga, bu yerda $n \geq 2$, Bernulli tenglamasi deyiladi.

Bernulli tenglamasi $u = y^{1-n}$ va $u' = (1-n)y^{-n}y'$ belgilashlar bilan birinchi tartibli chiziqli tenglamaga olib kelinadi. (2.1.20) tenglamaning har bir hadini y^n - ga bo'lib,

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2.1.21)$$

hosil qilamiz.

(2.1.21) tenglamaning hamma hadini $(1-n)y^{-n}$ - ga ko'paytirib va $u = y^{1-n}$ belgilashdan foydalanib,

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x) \quad (2.1.22)$$

ega bo'lamiz.

(2.1.22) tenglama u - ga nisbatan chiziqli bo'ladi. Uning umumiy integralini topamiz, keyin u - ning o'rniga y^{1-n} ifodani qo'yib, (2.1.20) – Bernulli tenglamasining umumiy integralini topamiz.

1 – misol. $y' + \frac{1}{x}y = -y^2$ tenglamani yeching.

Yechim. Bu Bernulli tenglamasi $n = 2$ bo'lganda. Tenglamaning hamma hadini y^2 - ga bo'lib va $(-1)y^{-1}$ - ga ko'paytirib,

$$-y'y^{-2} - \frac{1}{x} \cdot y^{-1} = 1 \quad (*)$$

ega bo'lamiz.

(*) tenglamada $n = y^{-1}$, $n' = (-1)y^{-2}y'$ belgilashlarni bajargandan so'ng

$$n' - \frac{1}{x} \cdot u = 1 \quad (**)$$

ko'rinishida chiziqli tenglamani hosil qilamiz. (**) tenglamaning yagonalik sohasi $D = \{x, y \mid x \neq 0\}$ bo'ladi. Bu tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi

$$\mu(x) = \exp \left[\int \left(-\frac{1}{x} \right) dx \right] = \exp \left[\ln \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x}$$

funksiya bo'ladi.

(**) tenglamani integrallovchi ko'paytuvchi funksiyaga ko'paytirib, uni to'liq differensialli tenglamaga olib kelimiz.

$$\left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx - \frac{1}{x} du = 0.$$

Oxirgi tenglamaning umumiy integrali

$$\int_1^x \left(\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx + \int_0^4 -\frac{1}{u} du = c$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bundan $u = x \ln(x)$ ekanligi kelib chiqadi. $u = y^{-1}$ ifodadan va oxirgi munosabatdan berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

2 – misol. $y' e^{x^2} = (e^{x^2} - y^2) y$ tenglamani yeching.

Yechim. Berilgan tenglamani $y' - xy = -e^{-x^2} y^3$ ko'rinishga olib kelimiz. Bu $n=3$ bo'lganda Bernulli tenglamasidir. $u = y^{-2}$, $u' - 2y^{-3} y' = 2e^{-x^2}$ ifodalardan foydalanib, $u' + 2xu = 2e^{-x^2}$ ko'rinishdagi chiziqli tenglamani hosil qilamiz. Integrallovchi ko'paytuvchi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\mu(x) = \exp \left(\int 2x dx \right) = e^{x^2}.$$

Yagonalik sohasi $x \neq 0$ tekisligi bo'ladi. Bu tenglamaga mos keluvchi to'liq tenglama

$$2(e^{x^2} u - 1) dx + e^{x^2} du = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu tenglamaning umumiy integrali

$$\int_0^x 2(e^{x^2} u - 1) dx + \int_0^u 1 \cdot du = c$$

ifoda bo'ladi, bu yerdan $ue^{x^2} = c + 2x$ ekanligi kelib chiqadi. $u = y^{-2}$ ekanligini hisobga olib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y^2 = e^{\frac{x^2}{2} + 2x}.$$

2-§. To'liq differensialli tenglama haqida tushuncha

Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.2.1)$$

tenglamaning chap tomoni birorta $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialli, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)$$

bo'lsa, (2.2.1) tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi. Bu holda uni quydagicha yozish mumkin: $du(x, y) = 0$.

Shuning uchun uning umumiy integrali $u(x, y) = c$ bo'ladi, bu yerda c - ixtiyoriy o'zgarmas.

1-Misol. Ushbu tenglama integrallansin. $(2x - y)dx + (4y - x)dy = 0$

Yechish: Bu tenglamani quyidagicha yozamiz.

$$2xdy + 4ydy - (ydx + xdx) = 0$$

ravshanki tenglamaning chap tomoni $u(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ funksiyaning to'liq differensialli. Shuning uchun tenglamani $d(x^2 + 2y^2 - xy) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin, bundan $x^2 + 2y^2 - xy = c$ umumiy integralni topamiz, c - ixtiyoriy o'zgarmas.

2-Misol. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $ydx - xdy + xy^2dx = 0$

Tenglamaning ikkala tomonini $y^2 \neq 0$ bo'lib olsak, chap tomoni to'la differensial bo'ladi $\frac{ydx - xdy}{y^2} + xdx = 0$, $d\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$

Demak, tenglamaning umumiy integrali $2x + x^2y = cy$ bo'ladi.

3-Misol. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ tenglamaning $y(1)=1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $ydx - xdy + xy^2dx = 0$.

Endi buning ikkala tomonini $y^2 \neq 0$ bo'lib olamiz

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} + xdx = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

to'la differensial tenglama hosil bo'ldi.

Bundan: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c, \Rightarrow 2x + x^2y = cy$ umumiy integralni yozib olamiz,

bunda c - ixtiyoriy o'zgarmas.

Endi $x=1$ da $y=1$ deb olsak, $c=3$ bo'ladi va izlanayotgan xususiy yechim hosil bo'ladi

$$2x + x^2y = 3y.$$

Teorema. Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

differensial tenglamaning (bu yerda $M(x, y)$ va $N(x, y)$ funksiyalar biror D sohada x va y bo'yicha uzluksiz hosilalarga yega) to'liq differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2.2.2)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

(2.2.1) tenglikning umumiy integralini

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = c \quad (2.2.3)$$

yoki

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = c \quad (2.2.4)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda $(x_0, y_0) \in D$.

4-Misol. Ushbu $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$ tenglama integrallansin.

Yechish: Bu yerda

$$M(x, y) = 2xy + 3y^2$$

$$N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y.$$

(2.2.2) shart bajariladi.

Berilgan tenglama to'liq differensialli tenglama yekan, ya'ni

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy \equiv \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{\partial N}{\partial x} dy.$$

Bundan,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2$$

oxirgi ikki tengliklardan birinchi tenglikni y ni o'zgarmas deb, x bo'yicha integrallaymiz:

$$u(x, y) = \int (2xy + 3y^2) dx + \varphi(y) = x^2 y + 3xy^2 + \varphi(y),$$

bunda $\varphi(y) \in C'$ funksiya y ning hozircha noma'lum funksiyasi. Bu munosabatni y bo'yicha differensiallab va

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2$$

ekanini ye'tiborga olib,

$$x^2 + 6xy + \varphi'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\varphi'(y) = -3y^2, \quad \varphi(y) = -y^3 + c_1,$$

bunda c_1 - ixtiyoriy o'zgarmas.

Shunday qilib, dastlabki tenglamaning umumiy integrali

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

3-§. Integrallovchi ko'paytuvchi

Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.3.1)$$

tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning to'la differensialli bo'lmasin. Ba'zan holda shunday $\mu(x, y) \neq 0$ funksiya tanlab olish mumkin bo'ladiki, tenglamaning barcha hadlarini $\mu(x, y)$ ga ko'paytirishda tenglamani chap tomoni biror funksiyaning to'la differensialli bo'lib qoladi.

Shu usul bilan hosil qilingan tenglamaning umumiy integrali dastlabki tenglamaning umumiy yechimi bilan bir xil bo'ladi: $\mu(x, y)$ funksiya (2.3.1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. Har qanday $U(x, y) = C$ umumiy integralga yega bo'lgan (2.3.1) differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi mavjud, biroq bu uni topish oson degan so'z emas.

Teorema. Ushbu

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega) \quad (2.3.5)$$

shartning bajarilishi (2.3.1) differensial tenglamaning $\omega = \omega(x, y)$ funksiyaga bog'liq bo'lgan $\mu = \mu(\omega)$ integrallovchi ko'paytuvchisining mavjudligi uchun yetarli va zaruriy shart, shu bilan birga

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} \quad (6)$$

bo'ladi.

Ba'zi xususiy hollarda, jumladan, integrallovchi ko'paytuvchini faqat x ga, y ga, xy ga, $x+y$ ga, x^2+y ga, x^2+y^2 ga va h.k. bog'liq deb qarab, (2.3.1) tenglamani integrallash mumkin.

Masalan, a) $\mu = \mu(x)$, ya'ni $\omega = x$ bo'lsin, unda $\omega'_x = 1$, $\omega'_y = 0$ va (2.3.5) ifoda soddalashib, quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi \quad (2.3.7)$$

Demak,

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x) dx} \quad (2.3.8)$$

shunday qilib, agar $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda faqat x ning funksiyasi bo'lsa, u holda x ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x)$ mavjud bo'ladi va u (2.3.8) formula bilan aniqlanadi.

5-Misol. Birinchi tartibli chiziqli tenglama uchun faqat x ning funksiyasidan iborat integrallovchi ko'paytuvchi mavjudligini isbotlaymiz.

Yechish: Haqiqatan,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani simvolik ravishda quyidagicha yozamiz:

$$p(x)y - q(x) \bar{d}x + dy = 0.$$

Oddiy hisoblashdan

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$$

kelib chiqadi. Demak, faqat x ga bog'liq $\mu(x)$ mavjud va uning qiymati (2.3.7) dan topiladi:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

b) $\mu = \mu(y)$, ya'ni $\omega = y$ bo'lsin, unda $\omega'_x = 0$, $\omega'_y = 1$ va (2.3.5) ifoda

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \psi(y) \quad (2.3.9)$$

ko'rinishni oladi va (2.3.6) dan topamiz:

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy} \quad (2.3.10)$$

6-Misol. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$ tenglama integrallansin.

Yechish: $M(x, y) = 2xy^2 - y$, $N(x, y) = y^2 + x + y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

(2.3.9) ni topamiz

$$\psi(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4xy - 1 - 1}{-y(2xy - 1)} = \frac{2(2xy - 1)}{-y(2xy - 1)} = -\frac{2}{y}.$$

Demak, berilgan tenglama faqat y ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchiga yega yekan. Bu misol uchun

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

Berilgan tenglamani $\mu = \frac{1}{y^2}$ ga ko'paytirsak,

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

to'liq differensialli tenglama hosil bo'ladi.

$$\text{U holda } u(x, y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right)dx + \varphi(y) \text{ yoki } u(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y),$$

bu yerdan $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$

$$\text{Ikkinchi tomondan } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \text{ ya'ni } \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}.$$

U holda

$$\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi'(y) = 1 + \frac{1}{y} \text{ yoki } \varphi(y) = y + \ln y + C_1.$$

Demak, $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln y = C$ tenglamaning umumiy integrali yekan, bunda C

- ixtiyoriy o'zgarmas.

s) $\mu = \mu(x \cdot y)$, ya'ni $\omega = x \cdot y$ bo'lsin, unda $\omega'_x = y$, $\omega'_y = x$ va (2.3.5) ifoda ushbu ko'rinishni oladi:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{y \cdot N - x \cdot M} = \psi(x \cdot y) \quad (2.3.11)$$

Demak,

$$\mu(x \cdot y) = e^{\int \psi(x \cdot y) d(x \cdot y)} \quad (2.3.12)$$

7-Misol. $(x^2 y^3 + y)dx + (x^3 y^2 - x)dy = 0$ tenglamani $\mu = \mu(x \cdot y)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchiga yega yekanligini ko'rsating.

Yechish: $M(x, y) = x^2 y^3 + y$, $N(x, y) = x^3 y^2 - x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 1, \quad \omega = x \cdot y, \quad \omega'_x = y, \quad \omega'_y = x$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{-1}{x \cdot y} = \frac{-1}{\omega}$$

Demak, berilgan tenglama uchun $\mu = \mu(\omega)$, $\omega = x \cdot y$ ko'rinishdagi integrallovchi ko'paytuvchi mavjud yekan u

$$\mu = e^{\int \varphi(\omega) d\omega} = e^{-\int \frac{1}{\omega} d\omega} = e^{-\ln \omega} = \omega^{-1} = \frac{1}{xy}$$

Dastlabki tenglamani $\mu = \frac{1}{xy}$ ko'paytiramiz, bo'ladi:

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

$$M(x, y) = xy^2 + \frac{1}{x}, \quad N(x, y) = x^2 y - \frac{1}{y}$$

ravshanki $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, ya'ni to'liq differensialli tenglamani hosil qildik. Bu tenglamani $x_0=1, y_0=1$ olib (2.3.3) formuladan foydalanib umumiy integralini topamiz

$$\int_1^x \left(xy^2 + \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^y \left(y - \frac{1}{y} \right) dy = c \Rightarrow x^2 y^2 + \ln \frac{x}{y} = c, \quad c = \text{const}.$$

d) $\mu = \mu(x + y^2)$, ya'ni $\omega = x + y^2$ bo'lsin, unda $\omega'_x = 1$, $\omega'_y = 2y$ va (2.3.5)

ifoda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \cdot 1 - 2y \cdot M} = \psi(x + y^2) \quad (2.3.12)$$

$$\mu = e^{\int \psi(x+y^2) d(x+y^2)} \quad (2.3.13)$$

8-Misol. $3y^2 - x \, dx + 2y^3 - 6xy \, dy = 0$ tenglamani $\mu = \mu(x + y^2)$ ko'rinishdagi integrallovchi ko'paytuvchiga yega yekanligini ko'rsating.

Yechish: Berilgan

$$M(x, y) = 3y^2 - x, \quad N = 2y^3 - 6xy, \quad \omega = x + y^2,$$

u holda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6y, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2y$$

bo'lib, (2.3.12) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\psi(\omega) = \frac{6y + 6y}{(2y^3 - 6xy) \cdot 1 - (3y^2 - x) \cdot 2y} = \frac{12y}{-4y^3 - 4xy} = \frac{-3}{x + y^2} = \frac{-3}{\omega}$$

Demak, berilgan tenglama $\mu = \mu(\omega)$, $\omega = \frac{-3}{x + y^2}$ ko'rinishdagi integrallovchi

ko'paytuvchiga yega yekan.

(2.3.6) formulaga asosan

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} = e^{-3 \int \frac{d\omega}{\omega}} = e^{-3 \ln \omega} = \omega^{-3} = (x + y^2)^{-3} = \frac{1}{(x + y^2)^3}$$

Dastlabki tenglamani $\mu = \frac{1}{(x + y^2)^3}$ ko'paytirib, hosil qilamiz:

$$\frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3} dx + \frac{2y(y^2 - 3x)}{(x + y^2)^3} dy = 0. \quad (*)$$

Bundan,

$$M(x, y) = \frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3}, \quad N(x, y) = \frac{2y(y^2 - 3x)}{(x + y^2)^3} dy.$$

Oson ko'rsatishki $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, ya'ni $\mu(x, y) = \frac{1}{(x + y^2)^3}$, tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi yekan. Demak, (*) tenglama to'liq differensialli tenglama, uning umumiy integralini (2.3.3) yoki (2.3.4) formula orqali topish mumkin.

1-Izoh. $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = du(x, y)$ dan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{1}{\mu} \cdot du = 0$

kelib chiqadi. (2.3.1) tenglamaning yechimi $du(x, y) = 0$ va $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$, tenglamalardan topiladi, ya'ni $u(x, y) = c$ va $\mu(x, y) = \infty$ yechimni beradi. Ayrim hollarda bu yechimlar maxsus yechim bo'lishi mumkin.

9-Misol. $2\sqrt{y}dx + dy = 0$ agar bu tenglama uchun $\mu = \mu(y)$ mavjud bo'lsa, tenglamani yeching.

Yechish: Bunda $M = 2\sqrt{y}$, $N = -1$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ chunki $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}}{-2\sqrt{y}} = -\frac{1}{2y} = \psi(y)$$

Haqiqatan, $\mu = \mu(y)$ mavjud yekan, uni topamiz

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy} = e^{-\int \frac{dy}{2y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Dastlabki tenglamani $\mu = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ko'paytiramiz, unda $2dx - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$ hosil

qilamiz. $x - \sqrt{y} = c$ umumiy integralni $\mu = \frac{1}{\sqrt{y}} = \infty$ dan $y=0$ maxsus yechim kelib chiqadi.

2 - Izoh. Integrallovchi ko'paytuvchi usuli yordamida o'zgaruvchilarga ajraladigan, bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni integrallash mumkin.

10-Misol. $xydx + dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.

$$M=xy, N=1, \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ravshanki $\mu = \frac{1}{y}$ ga tenglamani ikkala tomonini ko'paytirsa, to'liq differensialli tenglama hosil bo'ladi:

$$xdx + \frac{1}{y}dy = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

(boshqa tomondan bu o'zgaruvchilari ajralgan tenglama)

$$\frac{x^2}{2} + \ln|y| = \ln|c| \Rightarrow y = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

dastlabki tenglamaning umumiy yechimi, bunda c - ixtiyoriy o'zgarmas.

$\mu = \frac{1}{y} = \infty$ dan $y=0$ xususiy yechim kelib chiqadi, chunki u $y = c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ dan

$c=0$ da hosil bo'ladi.

XULOSA

Birinchi mavzularni o'tish soati qarib uch marta kamayadi. Ikkinchi talabalarga to'liq differensialli tenglama ko'rinishini bilgan holda ushbu

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

yoki

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy$$

Tayyor formulalardan foydalanib birinchi tartibli asosiy tenglamalar (o'zgaruvchilari ajraladigan bir jinsli chiziqli va ularga keltiriladigan) umumiy integralni yozish mumkin. Uchinchi talabalarning o'zlashtirishi oson bo'ladi.

Bitiruv ishidan matematika, amaliy matematika, fizika, mexanika va boshqa oliy maskanlar bo'lgan

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Salohiddinov M. S., Nasretdinov F. N. Oddiy differensial tenglamalar, Toshkent, «O'qituvchi», 1982.
2. Sharipov Sh. R., Mo'minov N. S. Oddiy differensial tenglamalar, Toshkent, «O'qituvchi», 1992.
3. Guter R. S., Yanpolskiy A. R. Differensial tenglamalar, Toshkent, «O'qituvchi», 1978.
4. Elsgols L. Eyu Differentsialnyye uravneniya i varisionnoye ischisleniye, Moskva, «Nauka», 1965.
5. Fillipov A. F. Sbornik zadach po differentsialnyem uravneniyam, Moskva, «Nauka», 1985.
6. Hodi Zoda P. D. Differensial tenglamalar, 163 bet. Samarqand 2013.