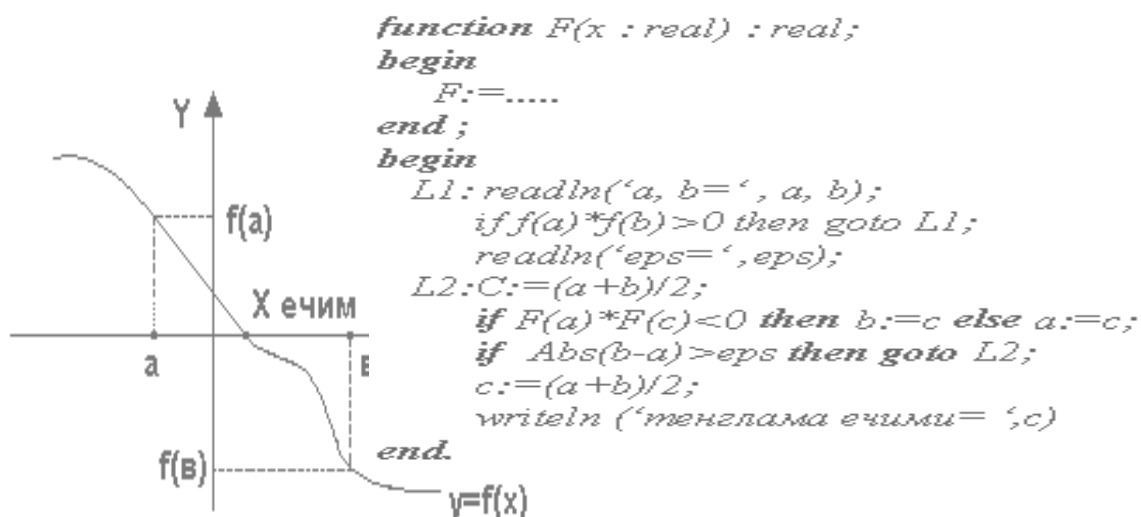


Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

Наманган муҳандислик-педагогика институти

**«Информатика ва ахборотлар технологияси»
кафедраси**

«СОНЛИ УСУЛЛАР ВА АЛГОРИТМЛАР» фанидан



Маърузалар матни

НАМАНГАН-2009

Ушбу муаммоли маърузалар матни информатика ва ахборотлар технологияси, 5140900 касб таълими ҳамда махсус сиртқи йўналишида таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган. Ушбу муаммоли маърузалар матни Давлат таълим стандартларига мос наъмунавий дастур ҳамда унга мос ишчи дастурлар асосида тузилган.

Муаммоли маърузалар матнидан, Сонли усуллар ва алгоритмлар фанини ўрганувчи талабалар, магистрлар ва ўқитувчилар фойдаланиши мумкин.

Тузувчилар: т.ф.н. доц. Ирисқулов С.
катта ўқитувчи Исманова К.
асс. Бекмирзаев Д.

Тақризчилар: НамМПИ т.ф.н. П. Каримов
НамДУ «Амалий математика»
кафедрасининг доценти А. Имомов

Қайта ишлаб чиқилган ва таҳрирланган ушбу муаммоли маърузалар матни «Информатика ва АТ» кафедрасининг _____ №____сонли мажлисида кўриб чиқилган ва маъқулланган.

НамМПИ илмий-услубий кенгаши томонидан ижобий баҳоланиб, нашр этишга тавсия этилган. (Баённома № «__» _____ йил)

Сўз боши

Малумки, таълим-тарбия, илм-фан, касб-ҳунар жабҳалари билан боғлиқ давлат сиёсати ва унинг самарали амалий ижроси энг аввало, соҳани тубдан ислоҳ қилишнинг конституциявий-ҳуқуқий асосларини аниқ белгилаб олишни тақозо этади. Мазкур қонуний талаб Ўзбекистон Республикасининг Конституциясида ҳамда унинг асосида қабул қилинган Ўзбекистон Республикасининг «Таълим тўғрисида»ги ва «Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури тўғрисида»ги қонунларида, тегишли меъёрий-ҳуқуқий ҳужжатларда ўзининг ҳуқуқий мақомига эга бўлди. Демак, галдаги энг асосий вазифа: ёш авлодни Ватан равнақи, юрт тинчлиги, халқ фаровонлиги каби олижаноб туйғулар руҳида тарбиялаш, юксак фазилатларга эга, эзгу ғоялар билан қуролланган комил инсонларни вояга етказиш, жаҳон андозаларига мос, кучли билимли, рақобатбардош кадрлар тайёрлашдир.

Талабалар дастурлаш тилларини ва йўналиш бўйича махсус фанларни ўрганиш натижасида дастурчи даражасига етишади. Лекин, улар олган назарий ва амалий билимларини амалий масалаларни ечишга қўллашда кўпгина қийинчиликларга дуч келишади. Чунки уларда типик, тақрибий масалаларни ечишда олий математика курсидан олган билимларгина мавжуд. Шунинг учун, ҳаётий масалаларнинг математик моделларини тушуна олишлари, уларни ечишнинг сонли-тақрибий, тақрибий-аналитик усуллариини ўрганишлари учун □ Сонли усуллар ва алгоритмлар □ фанининг аҳамияти катта ҳисобланади.

Шу мақсадда ушбу муаммоли маърузалар матни □ Информатика ва АТ □ йўналишлари бўйича таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган бўлиб, у Давлат таълим стандартларига мос наъмунавий дастур ҳамда унга мос ишчи дастурлар асосида тузилган. Маърузани ёзишда мавжуд адабиётлардан ва фанни ўқитишда тўпланган кўп йиллик тажрибаларни илмий таҳлилдан ўтказиш натижасида ҳосил бўлган хулосаларга асослангандир.

Маърузада асосан қуйидаги бўлимлар бўйича тақрибий ҳисоблаш усуллари берилган:

- чизиқсиз тенгламалар;
- чизиқли алгебраик тенгламалар системаси;
- аниқ интеграллар;
- биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар;
- математик-физика тенгламалари;

Ҳар бир маъруза учун ўқув модули бирликлари ва аниқлаштирилган ўқув мақсадлари кўрсатилган. Ҳар бир маъруза сўнгида ўз-ўзини текшириш учун назорат саволлари берилган. Ҳар бир маъруза сўнгида ёки маъруза орасида мавзуга тегишли, лекин жавоби аниқ кўрсатилмаган, талабани мустақил фикрлашга ундайдиган муаммоли савол ва топшириқлар берилган. Мавзуни ўрганиш давомида қўйилган

муаммоларга тўғри жавоб топган талаба ўқитувчига ўз фикрини билдиради, натижада шу фандан қўшимча балл олиш имкониятига эга бўлади. Муаммога жавобни излаш жараёнида талаба шу фандан ва бошқа барча фанлардан олган билимларини эслашга, таққослашга ва албатта ўзи мустақил хулоса чиқаришга мажбур бўлади. Бу эса фанни яна ҳам қизиқарли бўлишига сабаб бўлиб, талабанинг эркин фикрлаш қобилиятини ўстиради.

Маъруза сўнгида якуний назорат учун бериладиган таянч сўз ва иборалар келтирилган. Ушбу китобча чоп этилгандан ташқари электрон маъруза матни шаклида институт электрон кутубхонасига топширилди. Ҳал қилиниши керак бўлган муаммоларни баён қилишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилди:

МС - муаммоли савол;

МТ - муаммоли топшириқ;

МВ - муаммоли вазият;

ММ - муаммоли масала.

Яна шуни алоҳида таъкидлаш керакки, маъруза машғулотларида олинган билимларни мустаҳкамлаш учун амалий машғулот дарсларида турли интерактив усуллардан фойдаланиш, билимларни текшириш учун назоратнинг илғор ва мақбул усулларида фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун албатта, керакли услубий таъминотлар ишлаб чиқилган бўлиб, улардан фойдаланишни тавсия қиламиз. Бу фанни чуқур ва осонроқ ўзлаштирилишига сабаб бўлиши муқаррардир.

Маърузалар матни ҳақида билдирилган ҳар қандай таклиф ва мулоҳазаларни муаллифлар мамнуният билан қабул қиламиз. Бу ушбу соҳада олиб борилаётган изланишларга ижобий таъсир этади деб ўйлаймиз!

1-маъруза: "Сонли усуллар ва алгоритмлар" фанига кириш

Ўқув модули бирликлари:

1. Математик модел;
2. Ҳисоблаш тажрибасининг босқичлари;
3. Амалий дастурлар боғлами.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. «Сонли усуллар ва алгоритмлар» фанининг мақсади;
2. Математик моделлаштиришнинг асосий тушунчалари;
3. Ҳисоблаш тажрибасининг босқичлари;
4. Фанни ўзлаштириш жараёнида бажариладиган амалий дастурлар боғлами ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Янги техника ва технологиянинг кескин ўсиб бориши, математика фанининг замонавий бўлимларини халқ ҳўжалиги масалаларини ечишга янада кўпроқ қўлланила бошлагани амалий масалаларни ечишга ихтисослаштирилган бакалаврлар ва магистрларни тайёрлашга бўлган талабни борган сари орттириб бормоқда.

Ҳозирги кунда тайёрланаётган бакалаврларнинг математик маълумоти олий математика фанида ўқитилаётган анъанавий бўлимлар билан чегараланиб қолмаслиги зарур. Айниқса "Информатика ва ахборотлар технологияси" йўналиши бўйича таълим олаётган талабалардан замонавий математиканинг зарур бўлимларини билишни, биринчи галда эса ҳисоблаш математикасининг усулларини мустаҳкам эгаллашни ва улардан амалий масалаларни ечишда фойдаланишни ҳамда ечилаётган масалани дастурини яратиш, зарур сонли ечимни олишга эриша олишлари талаб этилади.

Шуни яна таъкидлаб ўтиш лозимки, замонавий ҳисоблаш техникасини унумли ишлатиш тақрибий ва сонли анализ усулларида оқилона фойдаланишсиз мумкин эмас. Шунинг учун, ривожланган чет эл мамлакатларида ва давлатимизда ҳисоблаш математикасига бўлган қизиқиш кескин ортиб бормоқда. ЭХМ ларнинг охириги пайтларда ривожланиб бориши сонли-тақрибий усулларнинг амалга тадбиқига кенг истиқбол яратди.

Маълумки, ҳаётда учрайдиган барча жараёнларнинг математик моделларини тузиш мумкин. Бу моделлар ўрганилаётган жараённинг асосий хусусиятларини ўзида иложи бориша тўлароқ, тўқисроқ мужассам қилиши керак. Бу эса математик моделларнинг иложсиз мураккаблашувига сабаб бўлади. Бундай математик моделларни ишлатиш, улар асосида қаралаётган жараён кўрсаткичларининг хусусиятларини тасвирловчи ечим олиш ҳам ўз навбатида мураккаблашади. Демак, изланувчи олдида бир-бирига зид икки масала кўндаланг бўлади: математик моделлар етарли даражада мукамал ва мураккаб бўлиши

керак, лекин бундай моделларни ишлатиш қатор қийинчиликларни ҳам келтириб чиқаради.

Математик моделларни ташкил қилувчи алгебраик, чизиқсиз дифференциал, интеграл, интегро-дифференциал ва бошқа тенгламаларни ечиш усуллари етарли даражада такомиллашмаган. Математика курсларида келтирилатган аниқ, аналитик усуллар фақат хусусий кўринишдаги, содда тенгламаларнинг ечимини топиш имконини беради, ҳолос. Сонли-тақрибий усуллар эса умумийроқ, анча мураккаб тенгламаларнинг ечимларини топишга имкон беради. Натижада аналитик усулда ечилмаган тенгламаларни ЭХМ ларда сонли-тақрибий усуллар билан ечиш имконияти яратилди.

"Информатика ва АТ" йўналиши бўйича таълим олаётган бакалаврлар амалий масалаларни ЭХМда ечишлари учун иккита асосий йўналиш бўйича етарлича чуқур билимга эга бўлишлари керак. Биринчидан, улар ЭХМ учун бирор замонавий алгоритмик тилда маълум алгоритм асосида дастур тузишни билишлари, иккинчидан амалий масалаларни ечишнинг сонли-тақрибий усуллари ҳақида ҳам етарлича билимга эга бўлишлари керак. Мазкур маъруза матни ҳам ана шу иккинчи йўналиш бўйича назарий ва амалий билимлар беришга мўлжаллаб ёзилган.

Математик моделлаштиришнинг асосий тушунчалари.

Ечиладиган масалаларни ўрганиш унинг математик моделини тузишдан бошланади, яъни унинг асосий ўзига хос хусусиятлари ажратилади ва улар ўртасида математик муносабат ўрнатади. Математик модел тузилгач, яъни масала математик кўринишда ифодалангач, уни маълум математик усуллар билан таҳлил қилиш мумкин. Математик модел тузиш билан биз ўрта мактаб физика курсида танишганмиз. Бунда дастлаб ўрганилаётган физик ҳодисанинг моҳияти, белгилари, ишлатилаётган кўрсаткичлари, сўзлар ёрдамида батафсил ифода этилади. Кейин физик қонунлар асосида керакли математик тенгламалар келтирилиб чиқарилади. Бу тенгламалар ўрганилаётган физик жараён, ҳодисаларнинг математик моделидир.

Математик модел ҳеч қачон қаралаётган объектнинг хусусиятларини айнан, тўла ўзида мужассам қилмайди. У ҳар хил фараз ва чекланишлар асосида тузилгани учун тақрибий ҳарактерга эга демак, унинг асосида олинаётган натижалар ҳам тақрибий бўлади.

Моделнинг аниқлиги, натижаларнинг ишончлилик даражасини баҳолаш масаласи математик моделлаштиришнинг асосий масалаларидан биридир.

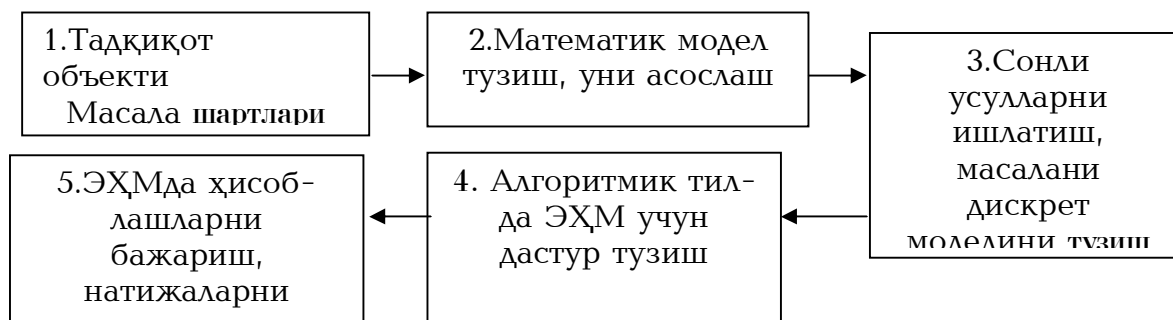
Математик модел ҳар хил воситалар ёрдамида берилиши мумкин. Бу воситалар функционал анализ элементларини ишлатиб дифференциал ва интеграл тенгламалар тузишдан то ҳисоблаш алгоритми ва ЭХМ дастурларини ёзишгача бўлган босқичларни ўз ичига олади. Ҳар бир босқич якуний натижага ўзига хос таъсир кўрсатади ва улардаги йўл қўйиладиган хатоликлар олдинги босқичлардаги хатоликлар билан ҳам белгиланади.



Амалий масалаларнинг математик моделларини сонли усуллар билан ҳисоблаш зурурияти қардан келиб чиқади.

Объектнинг математик моделини тузиш, уни ЭХМ да бажариладиган ҳисоблашлар асосида таҳлил қилиш "ҳисоблаш тажрибаси" дейилади.

"Ҳисоблаш тажрибасининг умумий схемаси 1-расмда кўрсатилган.



1-расм

Биринчи босқичда масаланинг аниқ қўйилиши, берилган ва изланувчи миқдорлар, объектнинг математик модел тузиш учун ишлатиш лозим бўлган бошқа хусусиятлари тасвирланади.

Иккинчи босқичда физик, механик, химиявий ва бошқа қонуниятлар асосида математик модел тузилади. У асосан алгебраик чизиқсиз, дифференциал, интеграл ва бошқа турдаги тенгламалардан иборат бўлади. Уларни тизимда ўрганилаётган жараёнга таъсир кўрсатувчи омилларнинг барчасини бир вақтнинг ўзида ҳисобга олиб бўлмайди, чунки математик модел жуда мураккаблашиб кетади. Шунинг учун, модел тузишда энг кучли таъсир этувчи асосий омилларгина ҳисобга олинади.

Учинчи босқичда масаланинг математик модели тузилгач, мос тенгламалар ечилиши ва керакли кўрсаткичлар аниқланиши лозим. Масалан, математик модел дифференциал тенглама билан тасвирланган бўлса, сонли усуллар ёрдамида у чекли сондаги нуқталарда аниқланган чекли-айирмали тенгламалар билан алмаштирилади.

Тўртинчи босқичда сонли усуллар ёрдамида аниқланган алгоритм асосида бирор - бир алгоритмик тилда ЭХМ да ишлатиш учун дастур тузилади. Масалан, у умумий хусусиятга эга бўлиши керак, яъни математик моделда ифодаланган масала параметрларининг етарлича катта соҳада ўзгарувчи қийматларида дастур яхши натижа бериши керак.

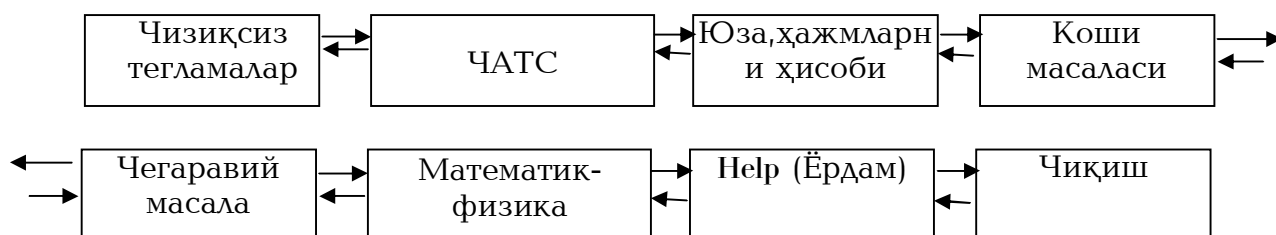
Охириги босқичда дастур ЭХМга қўйилади ва олинган сонли натижалар чуқур таҳлил қилиниб баҳоланади.

Натижаларга қараб мутахассис таҳлил қилинаётган жараён тўғрисида хулосалар чиқаради, унинг амалга ошишига маълум мақсад асосида таъсир кўрсатади, бошқариш воситаларини ишлаб чиқади, тавсиялар беради. Кўплаб вариантлар асосида бажарилувчи ҳисоблаш тажрибалари ёрдамида лойиҳачи у ёки бу белгига кўра барча вариантлар ичидан энг маъқулини танлаши мумкин.

1990 йиллардан бошлаб замонавий ШЭХМ ларнинг ишлаб чиқилиши, илмий ва ўқув жараёнларига кириб келиши маълум бир ютуқлардан ташқари баъзи ноқулайликларни ҳам юзага келтирди. Бу ноқулайлик шахсий компьютерлардан илмий, техник ва ижодий масалаларни ечишда фойдаланувчилар учун анча сезиларли бўлди. Бунга асосий сабаб шахсий компьютерларда юқорида эслатиб ўтилган катта ЭХМлар учун яратилган тадбиқий масалаларни ечиш учун мўлжалланган дастурлар кутубхонасини мавжуд эмаслигидир. Шунинг учун ҳозирда ана шу камчиликни бартараф қилиш йўлида турли хил изланишлар олиб борилмоқда. Шулардан бири сифатида маълум бир синф масалаларини ечишга мўлжалланган амалий дастурлар боғламларини яратишни кўрсатиш мумкин. Бу соҳада НамМПИ нинг "Информатика ва ахборотлар технологияси" кафедрасининг профессор-ўқитувчилари, "Ахборот ва техник таъминот" бўлимининг муҳандис-дастурчилари ва "Информатика ва АТ" йўналиши бўйича таълим олаётган иқтидорли талабалар илмий ва ҳўжалик ҳисобидаги ишлар асосида изланишлар олиб боришмоқда.

Маълумки, бирор жараённи ҳисоб ишларини бажариб берувчи стандарт дастур ўз ичига бир неча модул-дастурни олиши мумкин. Бу модул - дастурлар аниқ бир масalani ечишга мўлжалланган бўлади. Унга бериладиган ва ундан олинадиган маълумотлар типлари, кўринишлари олдиндан аниқланиб қўйилади. Модул-дастур процедура ёки процедура-функция кўринишида аниқланилиб олиниб компиляция қилинади ва фойдаланувчи яратаётган умумий дастурнинг бош қисмида unit файлари рўйхатига киритилиб қўйилади. (Биз дастурлаш тили сифатида Паскаль тилидан фойдаланганлигимиз учун барча кўрсатмалар шу тилга нисбатан айтилади). Шундай қилиб дастурчи ўзининг дастурлар кутубхонасига эга бўлади ва бу дастурлардан исталган масalani ечиш дастурида фойдаланиши мумкин.

АДБ ни меню принципида ишлашини ташкил этиш дастурдан фойдаланиш унумдорлигини кескин орттиради. Бу ҳолда асосий менюга ечиладиган масалалар синфи кўрсатилса (2-расм) меню ости менюсида эса мос равишда масалаларни ечиш усуллари танланади (3-расм).



2-расм

Ечиш усуллари менюсига зарур бўлган усул танланганда шу усулда мос компиляция қилинган файл ўз ишини давом эттиради. Бу файл стандарт ҳолатда модулли принципа тузилган ишчи дастурни ўз ичига олади. Файлни ишлаши учун зарур маълумотлар берилгач, масаланинг натижалари компьютер экранига, принтерга ёки кўрсатилган йўл бўйича дискка ёзилади.

1. Орали=ни тенг иккига былиш усули 2. Ватарлар усули 3. Уринмалар усули 4. Оддий кетма- кетлик усули 5. Ёрдам 6. Чи=иш	1. Гаусс усули 2. Детерминат ҳисоби 3. Тескари матрица топиш 4. Ёрдам 5. Чиқиш	1. Трапация усули 2. Тўғри тўртбур- чаклар усули 3. Параболар (Симпсон) усули 4. Ёрдам 5. Чиқиш
1. Эйлер усули 2. Рунге-Кутта усули 3. Ёрдам 4. Чиқиш	1. Чекли- айирмалар усули 2. Галеркин усули 3. Ёрдам 4. Чиқиш	1. Эллиптик типдаги тенгламани ечиш учун тўр усули 2. Параболик типдаги тенгламани ечиш учун тўр усули 3. Гиперболик типдаги тенгламани ечиш учун тўр усули

3-расм

Назорат саволлари

1. Математик модел тушунчасини тушунтириб беринг. Бу сўзни яна қаерларда учратгансиз?
2. Ҳисоблаш тажрибаси қандай босқичлардан иборат?
3. Сонли усул нима? Унга қандай талаблар қўйилади?
4. Тақрибий сон нима?
5. Хатоликнинг манбаларини санаб беринг.

2-маъруза. Хатоликлар ва уларни баҳолаш.

Ўқув модули бирликлари:

1. Тақрибий сонлар;
2. Хатолик ва унинг турлари;
3. Хатоликлар устида амаллар;
4. Хатоликнинг манбалари;
5. Сонли усулларга қўйиладиган талаблар.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзуни тўла ўзлаштирганларидан сўнг:

1. Тақрибий сонлар ва уларнинг келиб чиқиш манбалари;
2. Хатоликлар ва уларнинг турлари;
3. Хатоликларни қўшиш, айириш, кўпайтириш;
4. Бошланғич хатолик, яхлитлаш хатолиги, масаланинг хатоси, қолдиқ хатолиги;

5. Сонли усул, сонли усулларнинг яқинлашиш шартлари ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Тақрибий сонлар

ЭХМ ларда сонлар қўзғалмас ва сузувчи вергул шаклида тасвирланади. Ҳақиқий сонлар тўплами чексиздир, лекин ЭХМ нинг сонлар тасвирланувчи қурилмасида чекли хоналарга эга бўлган сонлар ёзилиши мумкин. Шунинг учун ҳақиқий сонлар ЭХМ да тақрибий тарзда тасвирланади.

Тақрибий сонлар устида амаллар бажарилганда хатоликни баҳолаш катта аҳамиятга эга. Хатолик икки хил бўлади: абсолют ва нисбий хато. Абсолют хато соннинг аниқ ва тақрибий қийматлари орасидаги фарқдан иборатдир, яъни агар X -бирор соннинг аниқ, $\bar{X}$ эса унинг тақрибий қиймати бўлса, абсолют хато $\Delta X = |X - \bar{X}|$ бўлади. Нисбий хато соннинг абсолют хатосини унинг тақрибий қийматига, нисбатига тенг, яъни $\delta_x = \Delta X / \bar{X}$. Сонларнинг аниқ қиймати кўп масалаларни ечишда номаълум бўлади. Шунинг учун пировард абсолют хато тушунчаси киритилади: у абсолют хатолар модулларининг юқори чегарасидир, яъни $\Delta \bar{X} \geq |X|$. Соннинг аниқ қиймати қуйидаги оралиқда бўлади:

$$\bar{X} - \Delta \bar{X} \leq X \leq \bar{X} + \Delta \bar{X}$$

Арифметик амаллар бажаришда абсолют ва нисбий хатоларнинг ўзгаришини кўриб чиқайлик.

Йиғинди (айирма) хатолиги

Иккита $X = \bar{X} + \Delta X$, $y = \bar{y} + \Delta y$ сон берилган бўлса, уларнинг йиғиндис

$$X + y = \bar{X} + \bar{y} + \Delta X + \Delta y$$

бўлади. Йиғиндининг абсолют хатолиги

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y$$

Худди шундай, айирманинг абсолют хатолиги

$$\Delta_{x-y} = \Delta_x + \Delta_y$$

бўлади.

Кўпайтма хатолиги.

Берилган сонларнинг кўпайтмаси қуйидагича топилади:

$$x \cdot y = (\bar{x} + \Delta x)(\bar{y} + \Delta y) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \Delta y + \bar{y} \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Бу ифодада охириги кўпайтма бошқа ҳадларга нисбатан иккинчи даражали кичик миқдордир.

Шунинг учун уни эътиборга олмаймиз. Демак, кўпайтманинг абсолют хатолиги қуйидагича бўлади:

$$\Delta_{xy} = \bar{x} \cdot \Delta y + \bar{y} \cdot \Delta x$$

Бўлинма хатолиги.

Нисбатнинг абсолют хатосини топиш учун айрим алмаштиришларни бажарамиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + \Delta x}{\bar{y} + \Delta y} = \frac{\bar{x} + \Delta x}{\bar{y}(1 + \frac{\Delta y}{\bar{y}})}$$

Нисбий хато $\frac{\Delta y}{y} \ll 1$ эканлигидан фойдаланиб $(1 + \frac{\Delta y}{y})^{-1}$ ифодани қаторга ёямиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x} + \Delta x}{y} \left[1 - \frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^2 - \dots \right]$$

Бу ерда ҳам иккинчи ва ундан юқори даражали кичик миқдорларни ҳисобга олмаган ҳолда

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\bar{x}}{y} + \frac{\Delta x}{y} - \frac{\bar{x}}{y^2} \Delta y$$

га эга бўламиз. Демак,

$$\frac{\Delta x}{y} = \frac{\Delta x}{y} - \frac{\bar{x}}{y^2} \cdot \Delta y$$

Арифметик амалларни бажаришда нисбий хатолар (б) қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned} \delta_{x+y} &= \frac{\Delta(x+y)}{x+y} = \frac{\bar{x}}{x+y} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{\bar{y}}{x+y} \cdot \frac{\Delta y}{y} = \frac{\bar{x}}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{\bar{y}}{x+y} \cdot \delta_y; \\ \delta_{x-y} &= \frac{\Delta x - y}{x-y} = \frac{\bar{x}}{x-y} \cdot \delta_x - \frac{\bar{y}}{x-y} \cdot \delta_y; \\ \delta_{xy} &= \frac{\Delta xy}{xy} = \frac{\bar{x} \cdot \Delta y}{x \cdot y} + \frac{\bar{y} \cdot \Delta x}{x \cdot y} = \delta_x + \delta_y; \\ \delta_{\frac{x}{y}} &= \frac{\Delta x/y}{x/y} = \left(\frac{\Delta x}{y} - \frac{\Delta y}{y^2} x \right) \frac{\bar{y}}{x} = \delta_x - \delta_y. \end{aligned}$$

Юқорида келтирилган формулалар арифметик амаллар бажаришда йўл қўйиладиган абсолют ва нисбий хатоларни баҳолаш имкониятини беради.

Ҳисоблаш хатоликлари.

Масалани ЭҲМ да ечиш жараёнида муайян хатоликларга йўл қўйиш мумкин. Қуйида улардан айримларини келтириб ўтамиз.

1. Бартараф қилиш мумкин бўлмаган хатоликлар.

Бу хилдаги хатоликлар масалани ечишда тузилган математик моделда йўл қўйилган тахминлар, фаразлар ва шунинг оқибатида моделда пайдо бўлган айрим камчиликлар ва қусурлар билан аниқланади. Масалан, математик модел унга кирувчи ўзгарувчилар ва параметрларнинг ўзгариш соҳасининг маълум бир қисмида яхши натижалар бериб, бошқа бир қисмида эса яроқсиз ечим бериши мумкин. Шунинг учун математик моделнинг "ишлаш" соҳасини топиш масала ечиш босқичларидаги ҳал қилиниши лозим бўлган асосий вазифалардан биридир.

Бартараф қилиш мумкин бўлмаган хатоликларга математик моделларда ишлатилувчи параметрларнинг дастлабки берилган қийматларининг хатоликлари ҳам киради. Параметрларнинг бу

қийматларни ҳар хил физик, техник, кимёвий тажрибалар, муҳандислик изланишлари асосида топилади. Айрим параметрлар эса дастлабки ҳисоб-китоблар орқали асосланадики, бу босқичнинг ўзидаёқ уларга ҳисоблаш хатоликлари қўшилади. Тажрибалар аниқлигини ошириб бу хатоликларни камайтириш мумкин, лекин уларни батамом бартараф этиб бўлмайди. Ҳисоблашларда математик моделда қатнашувчи параметрларнинг дастлабки қийматлари бир-бирига яқин тартибдаги хатоликларга эга бўлишига эришиш зарур. Чунки маълум параметрларнинг жуда юқори тартибдаги аниқлик билан олиниши якуний натижаларни ҳам шундай аниқликда олишга ҳамма вақт имконият яратмайди.

2. Математик усулларнинг хатоликлари.

Математик моделдаги тенгламаларни ҳамма вақт ҳам аниқ усуллар билан ечиб бўлмайди. Фақат айрим хусусий ҳоллардагина бунинг имконияти мавжуд. Лекин олинган ечим кўпинча жуда мураккаб кўринишда бўлади, улар асосида топилган кўрсаткичларнинг сон қийматларини ЭҲМда ҳисоблаш ўз навбатида осон масала эмас. Бундай ҳолларда масала тақрибий усуллар ёрдамида ечилади. Табиийки, бунда аниқ ечим эмас, балки тақрибий ечим ҳосил қилинади.

Тақрибий усулларнинг асосини сонли усуллар ташкил қилади. Сонли усулларнинг аниқлигини маълум даражада ошириш мумкин, лекин, бу усулнинг ишлашига кетадиган вақт миқдорини кескин кўпайтириб юбориши мумкин. Сонли усул аниқлигини ўта ошириш ҳамма вақт ҳам натижаларнинг аниқлигини оширавермайди. Шунинг учун сонли усулларнинг аниқлигини математик моделга кирувчи параметрлар аниқлигидан бир-икки тартиб юқорироқ олиш билан чекланиш мумкин.

Сонли усулларга қўйиладиган талаблар.

Математик моделдаги тенгламаларни ҳар хил сонли усуллар билан ечиш мумкин. Лекин ҳамма усуллар ҳам керакли аниқликдаги ечимни беравермайди. Айниқса масала ҳозирги замон ЭҲМларида ечилганда ҳисоблаш алгоритми турли, ўзига хос шартларни бажариши керак. Сонли усулларга қўйиладиган талаблар икки гуруҳга бўлинади. Биринчи гуруҳга сонли усуллар қўлланиши натижасида ҳосил қилинган дискрет(узук-узук)масаланинг математик моделдаги дастлабки масалага мос келиш шартлари киради.

Сонли усулларнинг яқинлашиши, дискрет масалаларда сақланиш қонунларининг бажарилиши, турғунлик, корректлик каби талаблар биринчи гуруҳга киради. Шулардан айримларини қараб ўтамыз.

Математик моделдаги параметрларнинг дастлабки қийматларидаги хатоликни бартараф этиш мумкин бўлмаган хатолик эканлигини юқорида кўрсатган эдик. Бу хатоликни масала ечимига кўрсатадиган таъсир даражасини билиш катта аҳамиятга эга. Сонли усулларнинг бундай сезувчанлигини (таъсирчанлигини) турғунлик деган тушунча ёрдамида текшириш мумкин.

Агар қўйидаги шартлар бажарилса, масала коррект қўйилган дейилади: 1) ечим мавжуд; 2) ягона; 3) турғун. Кўрсатилган шартлардан бирортаси бажарилмаса, масала коррект қўйилмаган дейилади. Бундай масалаларга сонли усулларни қўллаш фойдасиздир, чунки бунда етарли даражадаги шартларни қаноатлантирувчи сифатли ечимни олиш имконияти йўқдир. Шунини ҳам айтиш керакки, айрим коррект қўйилмаган масалаларни ечиш усуллари ҳам яратилган. Бу усуллар дастлабки қўйилган масалани ечишга асослангандир. Ёрдамчи масалада қўшимча α параметр қатнашади. Шундай йўл билан дастлабки масала регуляриштирилади. Агар $\alpha \rightarrow 0$ бўлса, ёрдамчи масаланинг ечими дастлабки масаланинг ечимиغا интилиши керак.

Юқоридагига ўхшаш сонли усулларнинг корректлик тушунчаси киритилган. Агар масаладаги параметрларнинг барча қийматларида сонли ечим мавжуд, ягона ва турғун бўлса, у коррект дейилади.

Сонли усуллар билан топилган ечим масаланинг ҳақиқий ечимиغا яқин бўлиши керак. Буни сонли усулларнинг яқинлашиши тушунчаси ёрдамида таҳлил қилишимиз мумкин. Дискретлашган масалалар мисолида яқинлашиш тушунчасини қўйидагича беришимиз мумкин. Агар дискретлаштирилган масаланинг ечими дискретлаштириш параметри нолга интилганда дастлабки узлуксиз масаланинг ечимиغا интилса, сонли усул яқинлашади дейилади.

Сонли усуллар ичида энг кўп ишлатиладиганлари айирмалли усуллардир. Бу усуллар ёрдамида узлуксиз математик моделлардан дискрет моделлар ҳосил қилинади. Бунинг учун масала қаралаётган соҳа дискрет нуқталар мажмуаси - тўр билан алмаштирилади, тенгламадаги, чегаравий ва бошланғич шартлардаги хоссалардан чекли айирмаларга ўтилади. Натижада тўрнинг тугун нуқталарида аниқланган функцияларга нисбатан алгебраик тенгламалар системаси ҳосил қилинади. Маълумки, математик моделлар асосида ётувчи тенгламалар аксарият ҳолларда физика, механикадаги сақланиш қонунлари асосида тузилади. Бу қонунлар математик моделдаги тенгламалар дискрет тенгламалар - чекли айирмалли схемалар билан алмаштирилганда ҳам бажарилиши керак. Бундай чекли айирмалли схемаларга консерватив схемалар дейилади. Консерватив схемалар тенгламалар ечимини физик нуқтаи назардан тўғри олиш имкониятини беради. Шунинг учун чекли айирмалли схемаларнинг консервативлик шарти масалалар ечишда бошқа шартлар қатори текширилиши керак.

Сонли усулларга қўйиладиган талабларнинг иккинчи гуруҳини дискрет моделни ЭХМда ўтказиш имкониятлари ташкил қилади. Сонли усуллар шундай алгоритмларга олиб келиши керакки, ЭХМнинг хотира қурилмаси улар учун етарли бўлиши керак ва ҳисоб-китоб вақти иложи борица кам бўлиши керак.

Сонли усулларга қўйиладиган талабларнинг иккинчи гуруҳини дискрет моделни ЭХМда ўтказиш имкониятлари ташкил қилади. Сонли усуллар шундай алгоритмларга олиб келиши керакки, ЭХМнинг хотира қурилмаси улар учун етарли бўлиши керак. Ҳисоблаш алгоритмлари етарли самарадорликка эга бўлиши керак. Алгоритмдаги арифметик ва

мантиқий амаллар сони иложи борица кам бўлиб, у ЭҲМнинг хотира қурилмасида кам ҳажмни эгаллаши керак.



мс «Хаётда барча ўлчов натижалари нисбийдир» деган фикрга сиз қандай қарайсиз? Фикрингизни изоҳланг.

Назорат саволлари

1. Хатоликнинг қандай турлари мавжуд?
2. Абсолют ва нисбий хатоликка таъриф беринг.
3. Хатоликнинг манбалари қаерда?
4. Сонли усул тушунчаси нима?
5. Нима учун сонли усуллар ишлатилади?
6. Сонли усулларга қандай талаблар қўйилади?

3-маъруза: Чизиқсиз тенгламаларни сонли-тақрибий ечиш усуллари. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули.

Ўқув модули бирликлари:

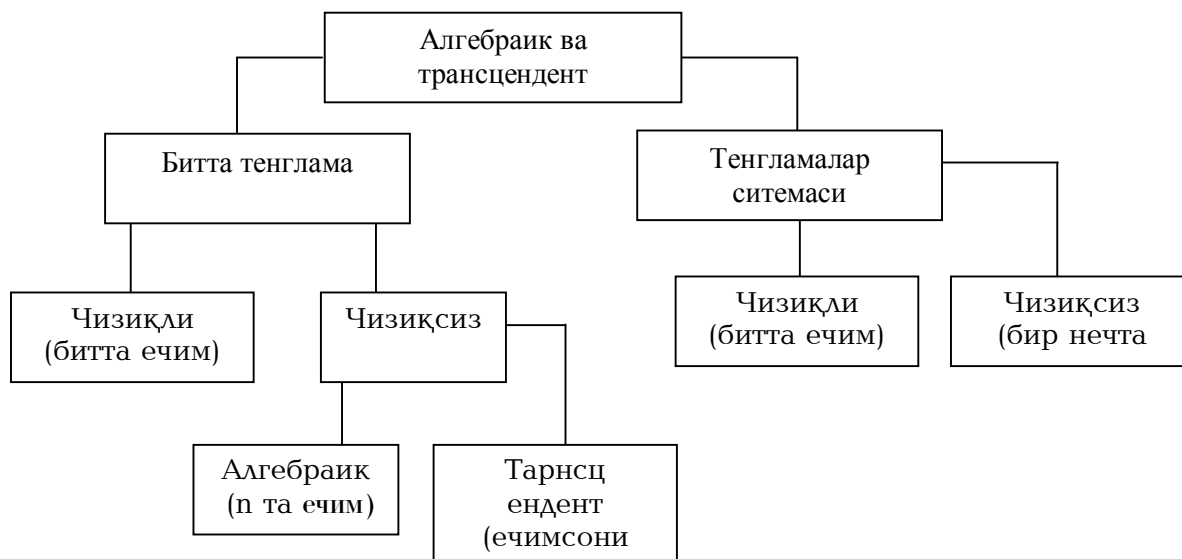
1. Чизиқсиз тенглама;
2. Чизиқсиз тенгламани ечиш усуллари
3. Итерацион усуллар
4. Илдизнинг мавжудлик шарти;
5. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Чизиқли ва чизиқсиз тенгламалар;
2. Чизиқсиз тенгламаларни ечишнинг аниқ ва итерацион усуллари
3. Чизиқсиз тенглама илдизи ётган оралиқни ажратишнинг аналитик ва график усуллари;
4. Илдизнинг мавжудлик шартидан қандай фойдаланиш;
5. Оралиқни тенг иккига бўлиш усулининг геометрик маъноси ва моҳияти;
6. Усулнинг афзаллиги ва камчилиги ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Чизиқли бўлмаган тенгламалар ва уларнинг системаларига кўпгина илмий изланишларда ва муҳандислик – лойиҳалаш масалаларини ечишда дуч келамиз. Алгебраик масалалар классификацияси 4-расмда келтирилган.



4-расм

Чизиқсиз тенгламаларни умумий шаклда қуйидагича ёзамиз:

$$f(x)=0$$

Бунда $f(x)$ -бирор узлуксиз функция.

Чизиқли бўлмаган тенгламаларни 4-расмдагидай икки хилга бўлиш мумкин: алгебраик ва трансцендент. Алгебраик тенгламалар деб алгебраик (бутун, рационал, иррационал) функциялардан ташкил топган тенгламаларга айтилади. Агар тенгламада бошқа функциялар (тригонометрик, кўрсаткичли, логарифмлик ва х.к) қатнашса, бундай тенгламага трансцендент тенглама дейилади.

Чизиқсиз тенгламаларни ечиш усуллари иккита гуруҳга бўлинади: аниқ (тўғри) ва итерацион (тақрибий) усуллар. Аниқ усул ёрдамида тенгламанинг ечими формулалар орқали аниқланади. Масалан, квадрат тенгламанинг ечимини топишни шу усулга мисол сифатида кўрсатиш мумкин:

$ax^2+bx+c=0$ -чизиқсиз тенгламани ечимлари:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Итерацион усуллар билан чизиқли бўлмаган тенгламаларни ечиш бир неча босқичга бўлинади. Биринчидан, ечимлар сонини, уларнинг сонлар ўқида тақсимланишини баҳолаш керак.

Илдизларни ажратишнинг умумий усули йўқ. Бунинг учун маълум қадам билан ўзгарувчи x ларда $f(x)$ функциясининг қийматларини ҳисоблаб қуриш мумкин. Агар ёнма-ён иккита a ва b нуқталарда $f(x)$ функция ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, яъни $f(a) \cdot f(b) < 0$ бўлса, $f(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги учун $[a, b]$ кесмада унинг ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлади.

Итерацион усулларда илгари кўрилганидек ечимнинг дастлабки x_0 ихтиёрий яқинлашиши олинади ва у кетма-кет аниқлаштирилиб борилади. Натижада ечимнинг $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлиги ҳосил

қилинади. Агарда бу кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ бўлганда аниқ x ечимга интилса, итерация жараёни яқинлашади дейилади.

Ечимнинг тақрибий қийматини топиш учун график усулдан ҳам фойдаланиш мумкин. Бунда $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасида графиги чизилиб, унинг Ox ўқи билан кесишган нуқталари топилади. Бу нуқталарга мос келувчи x лар тақрибий ечим деб қабул қилинади. Айрим ҳолларда $f(x)=0$ тенгламани унга тенг кучли бўлган $f_1(x)=f_2(x)$ кўринишда тасвирланади. Кейин $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг графиклари алоҳида- алоҳида чизилиб, иккала графикнинг кесишиш нуқталари топилади. Бу нуқталарнинг абсциссалари илдизларнинг тақрибий қийматлари деб қабул қилинади. Тақрибий илдиз ётган $[a,b]$ кесмани ҳақиқатда тўғри олинганлигини аналитик йўл билан текшириб кўриш мумкин. Бунинг учун яна илдизнинг мавжудлик шарти $f(a)f(b)<0$ дан фойдаланамиз. Агар шарт бажарилса оралик тўғри танланган бўлади.



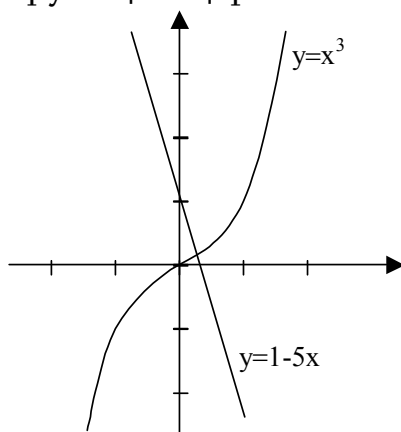
МВ Айтайлик, $f(a)f(b)=0$ шарт бажарилди. Сиз бу вазиятда қандай йўл тутасиз?

М и с о л. Ушбу

$$f(x)=x^3+5x-1 \quad (5.2)$$

тенгламанинг тақрибий илдизини $\varepsilon 0,01$ аниқликда топинг.

Е ч и ш. Аввало илдизни ажратиб олишимиз керак. Бунинг учун $f_1(x)=x^3$ ва $f_2(x)=1-5x$ функцияларнинг графигини чизиб оламиз (5-расм). $x \leq 0$ ва $x \leq 1$ нуқталарда $f(x)$ функция ҳар хил ишорали қийматларига эга:



5-расм

$$f(0)=-1<0, f(1)=5>0.$$

Демак, илдиз $[0;1]$ кесмада ётади. Оралик аниқлангач, турли усуллардан бирини ишлатиб, керакли аниқликдаги ечимни олиш мумкин.

Итерацион усулларнинг айримларини қуйида қараймиз.

1. О р а л и қ н и т е н г и к к и г а бўлиш (б и с е к ц и я) у с у л и

Бу усул итерацион усуллар ичида энг соддасидир. Уни ишлатиш учун махсус шартларнинг бажарилиши талаб қилинмайди. Фақат изланаётган илдиз ажратилган бўлиши керак яъни $x \in [a,b]$ кесмада ётган бўлсин. Кесманинг ўртаси $c_0=(a+b)/2$ да $f(c_0)$ ни ҳисоблаймиз. Берилган $[a,b]$

кесмани иккита тенг $[a, c_0]$, $[c_0, b]$ кесмаларга бўлиб, уларнинг четларида $f(x)$ функциянинг ишораларини текшираемиз. Қайси кесманинг четки нуқталарида $f(x)$ ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, ҳқс илдиз ўша кесмада бўлади. У ёки бу кесмада шундай бўлиши аниқ, чунки илдиз $[a, b]$ кесмада ётади. Илдиз ётмаган $[a, c_0]$ ёки $[c_0, b]$ кесмани ташлаб юбориб, қолган кесмани яна иккига бўламиз. Масалан $f(a) \cdot f(c_0) < 0$ бўлса, $c_1 = (a + c_0)/2$ деб олиб, $f(c_1)$ ни ҳисоблаймиз. Яна $[a, c_1]$, $[c_1, c_0]$ кесмаларда $f(x)$ нинг ишоралари текширилади ва ҳоказо. Шундай қилиб, ҳар бир итерациядан сўнг кесма узунлиги икки баравар қисқариб боради.

Бу жараёни то кесма узунлиги ε дан кичик бўлмагунча давом эттирилади. Бунда ε - ечим аниқлиги. Охирги кесманинг ўртаси тақрибий ечим сифатида қабул қилинади.

Юқорида қайд қилинган ижобий ҳислатлари билан бирга дихотомия - кесмани иккига бўлиш усулининг камчилиги - секин яқинлашишини ҳам айтиб ўтиш лозим. Шунинг учун бу усул кетма-кет яқинлашишларнинг юқори тезлиги талаб қилинмаган ҳолларда ишлатилади.



ММ

Чизиқсиз тенглама ечимининг мавжудлигини аниқлашда оралиқни каттароқ қилиб танланса, қандай «салбий оқибатлар»га олиб келади.

Назорат саволлари

1. Қандай тенгламаларни чизиқсиз тенгламалар деб аталади?
2. Чизиқсиз тенглама илдизи ётган оралиқни қандай ажратилади?
3. Чизиқсиз тенглама илдизининг мавжудлик шартини кўрсатинг.
4. Чизиқсиз тенгламани тақрибий ҳисоблаш усуларини санаб беринг.
5. Оралиқни тенг иккига бўлиш усулининг афзаллиги ва камчилиги нимада?

4-маъруза: Уринмалар ва ватарлар усули

Ўқув модули бирликлари:

1. Дастлабки яқинлашиш;
2. Уринмалар усулининг ишчи формуласи;
3. Ватарлар усулининг ишчи формуласи;
4. Бирлашган усулнинг моҳияти.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

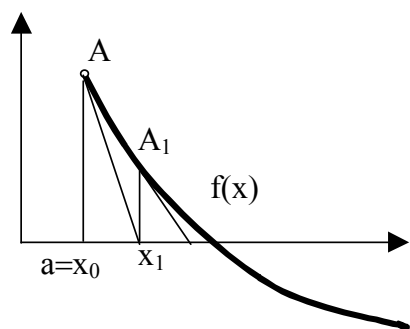
Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Уринмалар усулининг афзаллиги;
2. Уринмалар усули учун дастлабки яқинлашишни аниқлаш;
3. Уринмалар усулининг асосий ишчи формуласини келтириб чиқариш;

4. Ватарлар усулининг уринмалар усулидан фарқи;
 5. Уринмалар ва ватарлар усулини қандай қилиб биргаликда ишлатилиши
- ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Уринмалар усули

Оралиқни тенг иккига бўлиш усулидаги амаллар сонининг кўплиги уринмалар усулида деярли учрамайди. Агар дастлабки яқинлашиш тўғри танланса, тақрибий ечим жуда тез топилади. Усулнинг моҳияти қуйидагича:



$f(x)=0$ тенглама $[a,b]$ оралиқда битта тақрибий илдишга эга деб фараз қилайлик. Дастлабки яқинлашиш сифатида a ёки b нуқталардан бирини олишимиз мумкин ва шу нуқтадан уринма ўтказамиз. Айтайлик уринма A нуқтадан ўтсин. Уринманинг x ўқи билан кесишган нуқтаси x_1 га мос нуқтани A_1 деб олиб, энди A_1 нуқтадан уринма ўтказамиз, ва ҳоказо. Уринманинг x ўқи билан кесишган нуқталари

тақрибий илдиш x га етарли аниқликкача яқинлашгунча жараён давом этади.

Демак, x_0 ни тўғри танлаш жуда муҳимдир. Шунинг учун дастлабки яқинлашиш x_0 ни танлаш масаласига алоҳида эътибор берамиз.

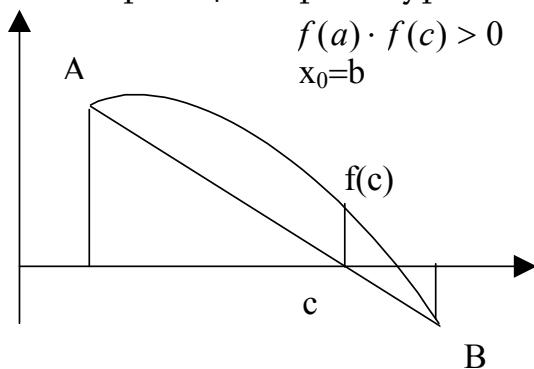
Бунинг учун $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталардан ўтувчи ватарни ох ўқи билан кесишиш нуқтаси c нинг қийматини тўғри чизик тенгламасидан аниқлаймиз.

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \quad (5.3)$$

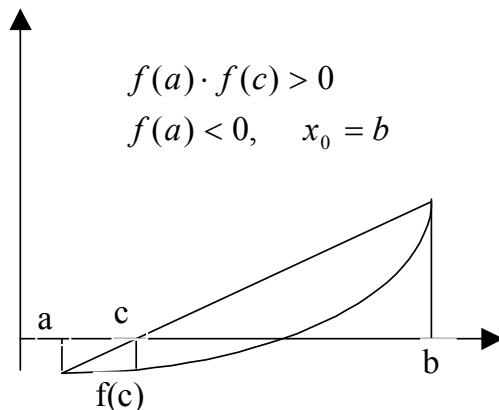
Ватарнинг Ох ўқи билан кесишиш нуқтаси c_0 да ҳқ c_0 , уқ0 бўлади.

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

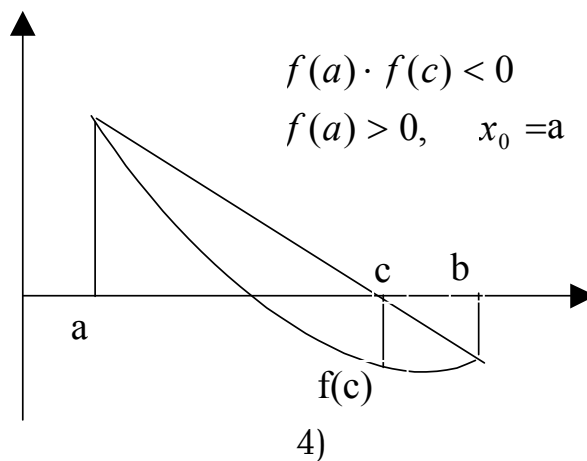
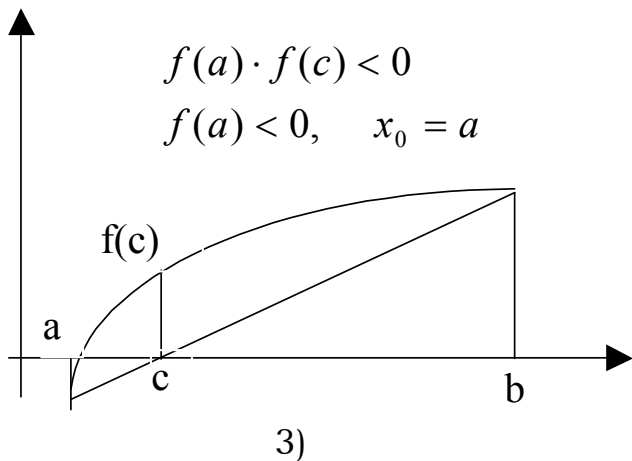
c маълум бўлгач, $f(c)$ нинг қийматини ҳисоблаш мумкин. Бўлиши мумкин бўлган барча ҳолларни кўриб чиқайлик:



1)



2)



- 1) $f(a) > 0$ ва $f(a)f(c) > 0$, бўлса $x_0 = b$
- 2) $f(a) < 0$ ва $f(a)f(c) > 0$, бўлса $x_0 = b$
- 3) $f(a) < 0$ ва $f(a)f(c) < 0$, бўлса $x_0 = a$
- 4) $f(a) > 0$ ва $f(a)f(c) < 0$, бўлса $x_0 = a$

Шартларни умумлаштириб олиб, $f(a)f(c)$ кўпайтманинг ишораси мусбат-манфийлигига қараб, а ёки в қийматлардан бирини x_0 сифатида олиш мумкин. Энди уринма тенгламаси $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ дан уринма x ўқи билан кесишгани учун уқ0 деб оламиз.

$$x - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0) \text{ бундан } x_n = x_{n-1} - f(x_0)/f'(x_0);$$

Хосил бўлган ишчи формула уринмалар усулининг асосий ишчи формуласи бўлиб, ҳисоблашлар $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ шарти бажарилгунча давом эттирилади.

Ватарлар усулининг моҳияти қуйидагича: бу усулда ҳам илдиз ётган $[a, b]$ кесма аниқ деб ҳисоблаймиз. Илдизга яқинлашувчи $c_0, \dots, c_n, \dots$ кетма-кетликни $f(x)$ функциянинг ватарларини Ох ўқи билан кесишиш нуқталари ташкил қилади.

Шунинг учун (5.3) тенгламадан

$$c_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) \quad (5.4)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу нуқтада $f(c_0)$ ни ҳисоблаймиз. Расмда кўрсатилган ҳол учун $f(c_0) < 0$. Демак, ечим $[a, c_0]$ кесмада бўлади. Иккини ватарни А ва В₁ нуқталардан ўтказамиз. У Ох ўқини c_1 нуқтада кесиб ўтади. Бу жараёни давом эттириб керакли аниқликдаги ечим топилади. Демак (5.4) формула ватарлар усулининг асосий ишчи формуласи экан.

Ньютон (уринмалар) усули

Бу усулда биринчи навбатда X_0 -дастлабки яқинлашишни танлаб олинади, яъни тақрибий илдиз ётган $[a, b]$ кесма учларидан бирини X_0 сифатида олиш мумкин.

Бирлашган усул

Айрим ҳолларда (5.1) тенгламанинг илдизини тезроқ топиш учун ватарлар ва уринмалар усуллари биргаликда ишлатилади.

Бу бирлашган усулни тушуниш учун 7- ва 8-расмларда кўрсатилган ҳолларни яна бир бор қараймиз. Мисол учун 7-расмда тасвирланган $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ ҳол ўринли бўлсин. Бошқа ҳоллар ҳам худди шундай таҳлил қилиниши мумкин. А ва В нуқталардан ватар ўтказиб, унинг Ох ўқи билан кесишган c_0 нуқтасини топамиз. Бу нуқта ватарлар усулида келтириб чиқарилган (5.4) формула билан топилади. Изланаётган ечим (a, c_0) кесмада бўлади. Энди А нуқтадан уринма ўтказамиз ва унинг Ох ўқи билан кесишган нуқтаси b_0 ни топамиз. (5.6) формулага биноан:

$$b_0 = a - f(a)/f'(a).$$

Шундай қилиб, ечим ётган $[a, b]$ кесма $[b_0, c_0]$ кесмагача қисқартирилди. Худди шу йўсинда ўнг тарафдан ватарлар усули ва чап тарафдан уринмалар усули билан яқинлашиб ҳқс нинг тақрибий қиймати топилади.

Ечимнинг қайси тарафидан қайси усул билан яқинлашиш кераклигини уринмалар усулидаги $f'(x)f''(x) > 0$ шартнинг бажарилишига кўра аниқлаймиз. Агар бу шарт $[a, b]$ кесманинг ёки бу кесмани ўз ичига олувчи ихтиёрий кесманинг чап ёки ўнг четларида бажарилса, шу тарафдан уринмалар усули, қолган тарафдан эса ватарлар усули ишлатилади.



МВ *Уринмалар усулининг ишчи формуласида учрайдиган $f'(x)$ функцияни дастурга қандай киритасиз?*

Назорат саволлари

1. Ватарлар усулига мос ишчи формулани кўрсатинг.
2. Уринмалар усулининг бошқа усуллардан қандай афзаллик томони бор?
3. Уринмалар усулида дастлабки яқинлашиш қандай топилади?
4. Уринмалар усулига мос ишчи формулани қандай ҳосил қилинади?

5-маъруза: Оддий кетма-кетлик (итерация) усули

Ўқув модули бирликлари:

1. Оддий кетма-кетлик усулининг моҳияти;
2. Усулнинг яқинлашиш шартлари;
3. Геометрик маъноси.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирганларидан сўнг:

1. Оддий кетма-кетлик усулида дастлабки яқинлашишни қандай танлаш;
2. Усулда яқинлашиш жараёнининг қандай содир бўлиши;
3. Яқинлашувчи ва узоқлашувчи жараёнларнинг геометрик маъноси ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Бу усулда кетма-кет яқинлашишлар $f(x)=0$ тенглама

$$x=\varphi(x) \quad (1)$$

кўринишга келтириб тузилади.

$[a, b]$ кесмада ихтиёрий x_0 ечимнинг бошланғич яқинлашишини аниқлаймиз. Буни (1) тенгламанинг ўнг тарафига қўйиб, чап тарафда ечимнинг биринчи яқинлашишини топамиз:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Топилган яқинлашишни кетма-кет (1) нинг ўнг тарафига қўйиб бориб, чап тарафда янги яқинлашишлари топамиз:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n=0,1,2,\dots \quad (2)$$

Агар $x_0, x_1, \dots$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у (1) тенгламанинг ечими бўлади.

Итерация жараёни $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ шарт бажарилгунча давом эттирилади.

Итерация усулининг яқинлашиш масаласига тўхтаб ўтамиз.

Юритиладиган мулоҳазалар 9-расмда ўз тасвирини топган. (1)

тенгламанинг ечими $u(x)$ ва $u(\varphi(x))$ функциялар графикларининг кесишган нуқтасининг абсциссасига тенг. Расмларда у $x=c$ нуқтага мос келади.

Итерация усулининг умумий алгоритмига биноан $x=x_0$ дастлабки яқинлашишни танлаб оламиз. Биринчи яқинлашиш

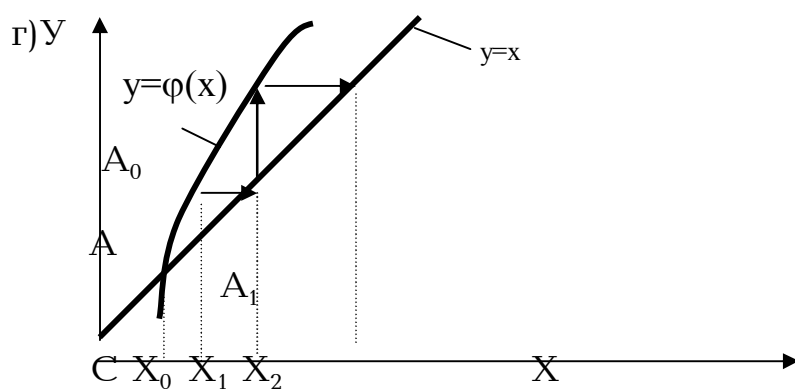
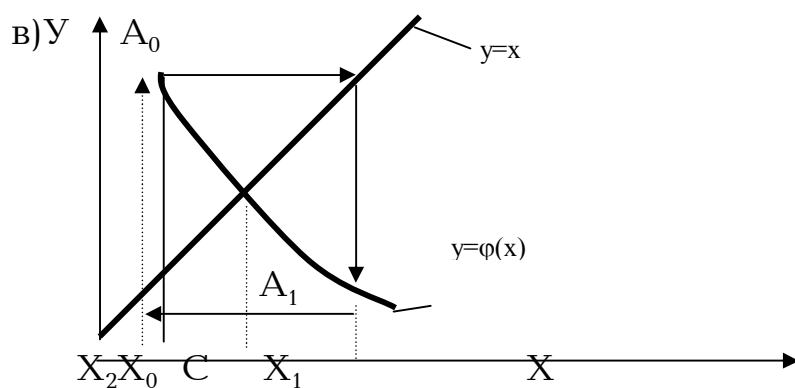
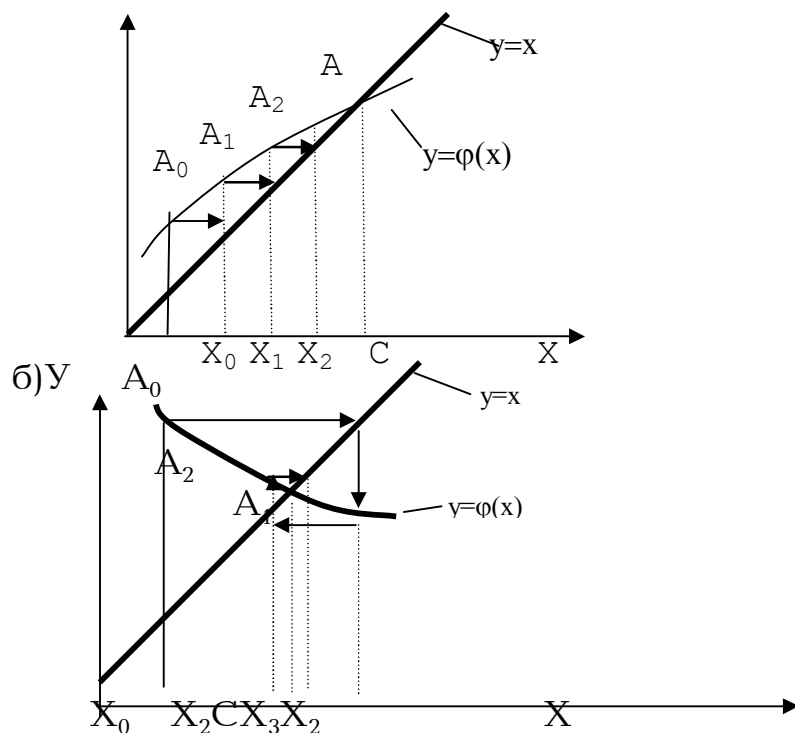
$x_1 = \varphi(x_0)$ бўлади. Бу геометрик нуқтаи назардан $x\varphi$ нуқтага мос келувчи $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ нуқтадан Ox ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, унинг $u(x)$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссасини топиш демакдир. Бу нуқтада $\varphi(x_1)$ ни ҳисоблаймиз. Бунинг натижасида $A_0(x_1, \varphi(x_1))$ нуқта топилади. Бу нуқтадан яна Ox ўқига параллел тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасининг абсциссаси, яъни $x_2 = \varphi(x_1)$ ни топамиз ва ҳ. к. 40-а расмдан кўриниб турибдики, $A_0, A_1, \dots$ нуқталар $A(c, \varphi(c))$ нуқтага яқинлашиб боради ва ўз навбатида $x_0, x_1, \dots$ кетма-кетлик $x=c$ лимитга интилади. Демак, $0 < \varphi'(x) < 1$ бўлганда итерация жараёни яқинлашар экан.

Энди $-1 < \varphi'(x) < 0$ бўлган ҳолни қараймиз (40-б-расм). Кетма-кет яқинлашишлар расмда стрелкалар ёрдамида яққол кўрсатилган. Бунда, фақат, олдинги ҳолдан фарқли равишда $x_0, x_1, \dots$ яқинлашишлар $x=c$ ечимнинг ҳар хил тарафида ётади. Бу ҳолда ҳам яқинлашувчи итерация жараёнига эга бўлдик.

Қолган $\varphi'(x) < -1, \varphi'(x) > 1$ (40-в, г расмлар) ҳолларда итерация жараёни узоқлашувчи бўлади, $\varphi'(x) < -1$ бўлганда яқинлашишлар $x=c$ ечимнинг иккала тарафида узоқлашиб боради. $\varphi'(x) > 1$ бўлганда эса улар ечимнинг бир тарафида узоқлашади.

Бу мулоҳазаларни яқунлаб қуйидаги хулосага келамиз: итерация усули қаралаётган соҳада $|\varphi'(x)| < 1$ бўлганда яқинлашади ва $|\varphi'(x)| \geq 1$ бўлганда узоқлашади.

а)



40 - расм

Яна (5.2) тенгламани қараймиз. Уни (5.7) га асосан
 $x=0.5+\exp(-0,5x)$ (5.9)
 кўринишдан ёзиб оламиз.

Итерация усулининг яқинлашиш шартини $[1;1,5]$ кесмада текшириб
 кўрамиз. Тенгламанинг ўнг тарафи - $\varphi(x)=0,5+\exp(-0,5x)$ функция

$\varphi(1) \approx 1,106$ дан $\varphi(1,5) \approx 0,972$ гача монотон камайиб боради. Унинг $\varphi'(x) = -0,5 \exp(-0,5x)$ ҳосиласи ҳам монотон функция бўлиб, $\varphi'(1) = -0,303$ дан $\varphi'(1,5) \approx -0,236$ гача ўсади. Демак, қаралаётган $[1; 1,5]$ кесмада $|\varphi'(x)| < 1$ шарт бажарилади. Шу сабабли (5.9) тенглама учун итерация усули яқинлашади. Ечимнинг дастлабки яқинлашиши сифатида $x_0 = 1,5$ ни олиб итерациялар тузамиз:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,5 + \exp(-0,5 \cdot 0,5) \approx 0,9724 \\x_2 &= 0,5 + \exp(-0,5 \cdot 0,9724) \approx 1,115 \\x_3 &= 0,5 + \exp(-0,5 \cdot 1,115) \approx 1,073, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Итерацияларни давом эттириб 11-қадамда $\varepsilon = 10^{-6}$ аниқликда $x = 1,082128$ тақрибий ечимини топамиз. $-1 < \varphi'(x) < 0$ бўлганлиги учун кетма-кет яқинлашишлар ечимнинг иккала тарафидан бўлади. Юқорида келтирилган яқинлашишларга қараб бунга ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.



Қайси усулни танлаганда чизиқсиз тенламанинг ечими аниқроқ мос чиқади?

Назорат саволлари

1. Кетма-кет яқинлашиш усулининг ўзига хос хусусияти нимада?
2. Усулнинг асосий моҳияти қандай?
3. Усулнинг яқинлашиш шарти қайси?
4. Усулга мос ишчи формулани қандай ҳосил қилинади?

6-маъруза: Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули.

Ўқув модули бирликлари:

1. Чизиқли алгебраик тенгламаларни системаси (ЧАТС) нинг умумий кўриниши.
2. ЧАТС ни ечиш усуллари.
3. Гаусс усулининг умумий кўриниши.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. ЧАТС нинг турли хил кўринишлари
2. ЧАТС ни ечишнинг тугри ва итерацион усуллари
3. Детерминант ҳисобининг система ечимининг мавжудлигига боғлиқлиги
4. Гаусс усулининг ишчи алгоритми, тугри ва тескари йўлнинг моҳияти
5. Усулнинг афзалликлари ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Чизиқли алгебранинг сонли усулларида чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш, матрицанинг тескарисини топиш, детерминантлар ҳисоблаш каби сонли усуллар киради.

Ушбу n -тартибли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системаси берилган бўлсин:

[illegible]

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Матрицаларни бир-бирига кўпайтириш хоссасидан фойдаланиб, (2.6) белгилашларни ҳисобга олган ҳолда (2.5) системани матрица кўринишда ёзамиз:

$$AX=B. \quad (2.7)$$

А матрица турли кўринишларда бўлиши мумкин. Агар фақат $a_{ii}(i=1,n)$ элементлар нолдан фарқли бўлиб, бошқа элементларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлса, А матрица **диагонал матрица** дейилади, $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,n)$ бўлса, А **симметрик матрица** дейилади.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ -симметрич матрица;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
 -диагонал матрица.

24

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – юқори учбурчак матрица; диагональ ва ундан юқорида турган

элементлар нолдан фарқли, қолган элементлар эса нолга тенг;

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} - \text{уч диагоналли матрица; диагональ ва унга параллел бўлган}$$

иккита қўшни йўналиш бўйича элементлар нолдан фарқли, бошқа элементлар нолга тенг.

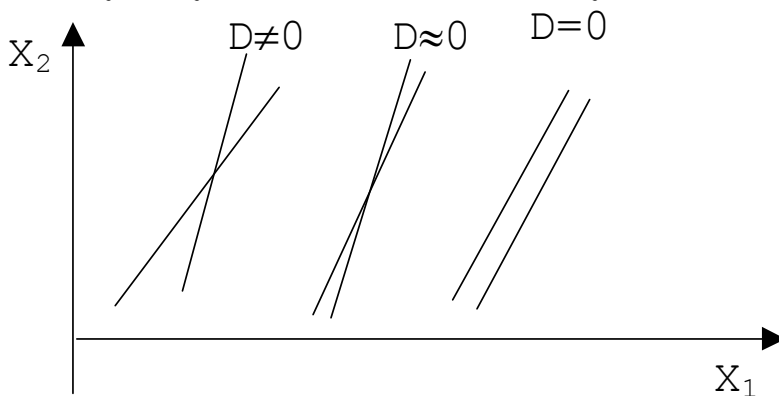
Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш деб (2.5) ёки (2.7) системалардан $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ номаълумларни топишга айтилади. Топилган $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ қийматлар (2.5) ёки (2.7) системаларга қўйилганда тенгламаларни айниятга айлантирса, улар системанинг **ечими** дейилади.

Системанинг ягона ечими мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти А матрица детерминантининг нолдан фарқли бўлишидир, яъни

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.8)$$

Агар Dq0 бўлса, системалар махсус системалар дейилади ва уларнинг ечими ёки мавжуд эмас, ёки чексиз кўп бўлади (бундай системаларни айниган системалар деб аталади).

Таъкидланган ҳолларни иккинчи тартибли системалар мисолида геометрик тасвирлаш мумкин. Бунда системанинг ҳар бир тенгламаси текисликда тўғри чизиқларни ифодалайди. Тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасининг координаталари системанинг ечимидир. Дқ0 бўлганда тўғри чизиқлар ёки ўстма-ўст тушади ёки параллел бўлади(4-расм).



4-расм

$D \approx 0$ бўлган ҳол алоҳида эътиборга моликдир. Тўғри чизиқлар бу ҳолда деярли параллел бўлади ва кесишиш нуқтасини топишда нотурғунликка эга бўламиз, яъни (2.5) система коэффициентларининг озгина ўзгариши (айниқса озод ҳадларнинг) кесишиш нуқтасининг у

ёки бу тарафга силжиб кетишига олиб келади. Бундай системаларга ёмон шартланган системалар дейилади. Лекин $D \approx 0$ эканлигидан ҳамма вақт ҳам системанинг ёмон шартланганлиги чиқавермайди, яъни $D \approx 0$ бўлиши системанинг шартланганлигининг зарурий шартидир. Етарли шарт эса бошқачадир. У қуйидаги A матрица шартланганлиги ўлчами деб аталувчи

$$v(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (2.9)$$

қиймат билан аниқланади, бу ерда A^{-1} тескари матрица. Бу параметрнинг қиймати билан (2.5) система ечимининг озод ҳадларга нисбатан турғунлиги ҳам аниқланади. Шартланганлик ўлчами $v(A)$ қанча катта бўлса, (2.5) система шунча ёмон шартланган бўлади, аксинча (2.9) бўйича топилган қийматлар қанчалик кичик бўлса, система шунча яхши шартланган бўлади. (2.9) да тўғри A ва тескари A^{-1} матрицаларнинг нормаси [1]да келтирилган формулалар билан аниқланиши мумкин. Лекин ҳамма нормаларда $v(A) \geq 1$ бўлади. Одатда $v(A) = 10^3 \% 10^4$ бўлса, система ёмон шартланган дейилади. (2.9) формуладан шартланганлик ўлчамининг тескари A^{-1} матрица нормасига бевосита боғлиқ эканлиги кўриниб турибди. Тескари матрица элементлари қанчалик катта бўлса, шартланганлик ўлчами ҳам шунча катта бўлади.

Умуман $D \neq 0$ бўлганда ҳам (2.5) система ёмон шартланган бўлиши мумкин, ва аксинча, $D \approx 0$ бўлганда система яхши шартланган бўлган ҳоллар учрайди.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари иккита гуруҳга бўлинади: тўғри (аниқ) ва итерацион (тақрибий) усуллар.

Тўғри усуллар ёрдамида системанинг ечими чекли сондаги аниқ арифметик амаллар бажариш орқали ҳисобланади. Бу усуллар кенг синфдаги системаларни ечиш имкониятига эга. Лекин, шу билан бирга, улар айрим камчиликлардан ҳам ҳоли эмас. Масалан, улар ЭХМда ишлатилганда ҳотира қурилмасида система коэффицентлари ва озод ҳадларнинг барчаси сақланиши керак. Система коэффицентлари матрицаси A нинг элементлари сийрак бўлса, яъни 0 га тенг элементлари ҳам бўлса, уларни хотира қурилмасига ёзиш кўп жойни эгаллайди. Бундан ташқари, усуллар асосида ётувчи алгоритмлар аниқ бўлишига қарамасдан ечим маълум даражада тақрибий топилади. Чунки яхлитлаш хатоликлари кетма-кет бажарилувчи ҳисоблаш босқичларида доимо жамланиб боради. Айниқса юқори тартибли ва ёмон шартланган системалар учун бу бутунлай яроқсиз ечим олинишига сабаб бўлиши мумкин. Шунинг учун тўғри усуллар яхши шартланган, паст тартибли, элементлари сийрак бўлмаган матрицали системаларни ечишда ишлатилади.

Итерацион усуллар - бу кетма-кет яқинлашиш усуллариidir. Бу усуллар тўғри усулларга нисбатан мураккаброқ. Лекин кўп ҳолларда итерацион усулларни ишлатиш маъқулроқдир. Чунки бу усулларни ишлатганда ЭХМ хотира қурилмасида система матрицасининг барча элементларини сақлашга ҳожат йўқ. Ундан ташқари хатоликлар ҳам

итерацион усулларда жамланиб бормайди. Ҳар бир итерация қадамида ҳисоб-китоб гўё янгидан бошлангандек давом этиб кетаверади. Лекин итерацион усулларни ҳамма вақт ҳам ишлатавериш мумкин эмас. Бунинг учун маълум шартлар бажарилиши керак. Акс ҳолда итерация жараёни узоқлашувчи бўлиб, етарли аниқликдаги ечимни олиш имконияти бўлмайди. Бу шартлар қуйироқда, итерацион усуллар берилган параграфда келтирилган.

Тўғри усулларга Крамер, Гаусс, бош элементлар, квадрат илдизлар ва бошқа усуллар киради. Итерацион усулларга эса оддий итерация, Зейдель, релаксация ва бошқа усуллар киради.



Сизга бирорта ЧАТС берилган бўлса, уни ечиш учун қайси усулни танлаган бўлар эдингиз?

Гаусс усули бизга таниш бўлган номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулининг умумий схемасидан иборатдир. Мулоҳазаларни асоссиз мураккаблаштирмаслик учун ушбу тўрт номаълумли тўртта тенгламалар системасини кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \quad (2.9)$$

Биринчи тенгламада $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Агар бу шарт бажарилмаса, биринчи тенглама сифатида бошқа, x_1 олдидаги коэффиценти 0 га тенг бўлмаган тенгламани олишимиз мумкин. Бир вақтнинг ўзида барча $a_{ij} (i=1,4)$ коэффицентлар 0 - га тенг бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли $a_{11} \neq 0$ шarti ҳамма вақт бажарилувчи шартдир. (2.9) тенгламалар системасида биринчи тенгламани a_{11} коэффицентга бўлиб,

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \quad (2.10)$$

бу ерда

$$b_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \quad j \geq 1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Охирги (2.10) тенгламадан фойдаланиб (2.9) системадан x_1 номаълумни йўқотиш (чиқариш) мумкин. Бунинг учун (2.10) тенгламани a_{21} га кўпайтириб (2.9) системанинг иккинчи тенгламасидан, a_{31} га кўпайтириб учинчи тенгламасидан ва ниҳоят a_{41} га кўпайтириб тўртинчи тенгламасидан айириш кифоя. Бу амалларни бажариш натижасида

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \quad (2.11)$$

система эга бўламиз. Бунда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i, j \geq 2)$$

Энди (2.11) системанинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)} \neq 0$ коэффицентга бўламиз:

$$x_2 = b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, j > 2. \quad (2.12)$$

Юқоридаги сингари бу ерда ҳам $a_{22}^{(1)} \neq 0$ шартни ҳамма вақт таъминлашимиз мумкинлигини кўрсатиш қийин эмас.

Учинчи тартибли (2.11) системада худди x_1 номаълум йўқотилгани каби, x_2 номаълумни йўқотамиз:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \quad (2.13)$$

Бу ерда $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{j2}^{(1)}b_{3j}^{(1)}$ ($i, j \geq 3$) коэффициентлар (2.12) тенгламани $a_{32}^{(1)}, a_{42}^{(1)}$ ларга кўпайтириб, (2.11) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларидан мос равишда айришдан ҳосил бўлади.

Энди (2.13) системанинг биринчи тенгламасини $a_{33}^{(2)} \neq 0$ коэффициентга бўламиз:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}, j > 3. \quad (2.14)$$

Охирги тенгламадан фойдаланиб (2.13) системадан x_3 номаълумни йўқотамиз:

$$\begin{aligned} a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)}, \\ a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)}b_{3j}^{(2)} (i, j \geq 4) \end{aligned} \quad (2.15)$$

x_4 номаълум (2.15) тенгламадан осонгина топилади:

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}^{(3)}. \quad (2.16)$$

Қолган номаълумлар эса (2.14), (2.12) ва (2.10) тенгламалардан топилади:

$$\begin{aligned} x_3 &= b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \\ x_2 &= b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3 - b_{24}^{(1)}x_4, \\ x_1 &= b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 \end{aligned}$$

$a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, a_{44}^{(3)}$ коэффициентлар (2.9) системанинг етакчи элементлари дейилади. Юқоридаги шартларга биноан уларнинг барчаси нолдан фарқли бўлади.

Шундай қилиб, Гаусс усулининг асосий ғояси берилган (2.9) системадан коэффициентлари учбурчак матрицани ташкил қилувчи (2.10), (2.12), (2.14) ва (2.16) тенгламалардан иборат тенг кучли тенгламалар системасини ҳосил қилишдир. Мазкур усулнинг ҳисоблаш алгоритми икки босқичдан иборат. Биринчи босқич тўғри юриш деб аталиб (2.10), (2.12), (2.14) ва (2.16) тенгламалардаги барча b_{ij} ($j > 1$) ва $b_{ij}^{(k)}$ ($i=2,3,4; j>2, k=1,2,3$) коэффициентларни ҳисоблашдан иборат. Иккинчи босқич эса тескари юриш деб аталиб, унда барча номаълумларнинг қийматлари (яъни ечимлар) индекснинг камайиб бориш тартибида топилади.

Юқорида келтирилган алгоритм бўйича ихтиерий n -тартибли системаларни ечиш мумкин. Бунда алгоритмнинг умумий схемаси ҳеч қандай ўзгаришсиз қолаверади.

Биз юқорида тенгламалар бўлинувчи a_{ij} коэффициентлар нолдан фарқли бўлиши шартини қўйиб, бунинг натижасида етакчи элементларни ҳамма вақт нолдан фарқли қилиб танлаш имконияти мавжудлигини таъкидлаган эдик. Бунга тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб эришиш ҳам мумкинлиги эслатиб ўтилган эди. Нолдан фарқли коэффициентлар бир нечта бўлганда буни бир неча йўл билан амалга ошириш мумкин. Масалан (2.9) кўринишдаги тўртинчи тартибли системада $a_{11}=0$, $a_{i1} \neq 0$, $i=2,3,4$ бўлсин. Биринчи тенгламанинг ўрнини иккинчи, учинчи ва тўртинчи тенгламаларнинг хоҳлаган бири билан алмаштириб $a_{11} \neq 0$ шартга эришамиз. Кўриниб турибдики, бундай имкониятлар ягона эмас.

Улардан фойдаланиб, нафақат етакчи элементларни нолдан фарқли қилиб танлаш, балки яхлитлаш хатоликларини ҳам сезиларли даражада камайитишга эришишимиз мумкин.



*Чизиқли тенгламалар системасини ҳар доим ҳам ечиш мумкин
мс деб ҳисоблайсизми?*

Назорат саволлари

1. Чизиқли алгебрик тенгламалар системасига тегишли назарий маълумотларни айтиб беринг.
2. ЧАТСнинг кўринишига қараб қандай турлари ажратилади.
3. ЧАТСни тақрибий ҳисоблаш усуллари қайсилар?
4. Гаусс усулининг моҳияти нимадан иборат?
5. Усулнинг афзаллиги нимада?
6. Гаусс усули ёрдамида яна қандай ҳисоблашларни бажариш мумкин.

7-маъруза: Берилган матрицага тескари матрицани топиш ва чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечиш.

Ўқув модули бирликлари:

1. Тескари матрица тушунчаси
2. Тескари матрицани Гаусс усули ёрдамида топиш
3. Чизиксиз тенгламалар системаси

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирганларидан сўнг:

1. Берилган квадрат матрицага тескари матрицани топиш бирлик матрица
2. Гаусс усули ёрдамида тескари матрицани ҳисоблашнинг ишчи алгоритми
3. Чизиксиз тенгламалар системасининг умумий кўриниши
4. Итерация, кетма-кет яқинлашиш усулининг моҳияти

5. Итерация жараёнинг якинлашиш шартлари ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Бизга қуйидаги n тартибли, квадрат матрица берилган бўлсин,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица мавжуд бўлиб, $A = A^{-1}E$ шарт бажарилса (бу ерда E -бирлик матрица), у ҳолда A^{-1} матрица A матрицага тескари матрица дейилади.

$$\text{бу ерда } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Олий алгебра курсида биз тескари матрицани системанинг сатр ва устунлари устида турли арифметик амаллар бажариш ёрдамида топишни ўрганганмиз. Лекин бу жуда кўп қўлда ҳисоблашларни бажаришга олиб келади. Гаусс усулини қисм дастур сифатида қараб уни бир неча марта қўллаш ёрдамида тескари матрицани осонгина топиш мумкин.

Агар A матрицани ҳар бир устунини вектор деб олиб, қуйидаги кўпайтмалар тузсак,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

кўринишга келади.

Маълумки, ЧАТС(чизиқли алгебраик тенгламалар ситемаси)ни векторга кўпайтирсак, вектор ҳосил бўлади, уни система ҳолида ёзсак, 1-тенгликдан

[illegible]

ҳосил бўлади.

$\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_{n1}$ лар номулум коэффициентлар бўлиб, уларни Гаусс усули ёрдамида ечиб, топамиз. Демак, юқоридаги n та ифодага Гаусс усулини n марта қўллаймиз. Хар сафар топилган ечимларни 1 та

Чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечишда чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда ишлатилган Зейдель усулидан ҳам фойдаланиш мумкин.

Зейдел усулининг моҳиятини тушунтиринг. Кетма-кет яқинлашиш усулидан фарқини кўрсатинг.

$$\begin{aligned} X_1^{(k+1)} &= \varphi_1(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}), \\ X_2^{(k+1)} &= \varphi_2(X_1^{(k+1)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}), \end{aligned}$$

$$x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}), k=0, 1, \dots$$

Т е о р е м а. Иккинчи тартибли (5.12) системанинг ягона ечими $\{a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$ тўғри тўртбурчакда жойлашган бўлсин. У ҳолда агар бу тўғри тўртбурчакда қуйидаги

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right| &\leq p_1; \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right| \leq q_1; & \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right| &\leq p_2; \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right| \leq q_2; \\ p_1 + p_2 &\leq M < 1, q_1 + q_2 &\leq N < 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

тенгсизликлар бажарилса, итерация жараёни яқинлашади ва нолинчи яқинлашиш сифатида тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий нуқтасини олиш мумкин.

Итерацион жараённинг яқинлашиш шартини тушунтириб беринг.

Назорат саволлари

1. Берилган матрицага тескари матрица қачон мавжуд бўлади?
2. Тескари матрицани Гаусс усули ёрдамида қандай топилади?
3. Тескари матрицани ҳисоблашнинг яна қандай усуллари бор?
4. Чизиқсиз тенгламалар системаси қандай кўринишда бўлади?
5. Чизиқсиз тенгламалар системасини ечишнинг қандай усулларини биласиз?
6. Кетма-кет яқинлашиш усулининг моҳиятини тушунтириб беринг.

8-маъруза: Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг тўғри
тўртбурчаклар усули

Ўқув модули бирликлари:

- ## 1. Аниқ интегралнинг геометрик маъноси

2. Аниқ интегралнинг тақрибий ҳисоблаш усуллари
3. Тўғри тўртбурчаклар усулининг ишчи формуллари

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

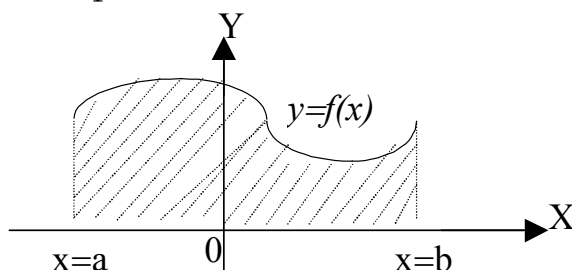
1. Аниқ интегралнинг эгри чизикли трапеция юзи билан боғлиқлиги
2. Ньютон-Лейбниц усули
3. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш зарурияти ва тақрибий ҳисоблаш усуллари
4. Тўғри тўртбурчаклар усулининг моҳияти, ишчи алгоритми, чап ва ўнг тўғри тўртбурчаклар формуллари ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Маълумки, берилган функциянинг ҳосиласини топиш амали дифференциаллаш деб аталиб, унинг учун бошланғич функцияни топишдан иборат тескари амал интеграллаш деб аталади (латинча-*integrare*-тиклаш деган маънони билдиради). Амалда кўпгина функцияларнинг бошланғич функцияларини формулалар билан ҳисоблаш имкони ҳамма вақт ҳам бўлавермайди. Шунинг учун бу функцияларнинг аниқ интегралларини баъзан тақрибий усуллар билан ҳисоблаш зарурияти туғилади.

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш эгри чизикли трапециянинг юзи ҳақидаги масаланинг геометрик ечими билан узвий боғлиқдир. Қуйидан ох ўқдаги a, b кесма билан, юқоридан мусбат қиймат қабул қиладиган $u f(x)$ узлуксиз функциянинг графиги билан, ён томонлардан $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизикларнинг кесмалари билан чегараланган фигурани эгри чизикли трапеция дейилади. a, b кесмани эса эгри чизикли трапециянинг асослари дейилади. Эгри чизикли трапециянинг юзини

$$S \approx \int_a^b f(x) dx,$$

бунда $F(x)$ -берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси. Юқорида таъкидланганидек бошланғич функцияни интеграллаш қоидалари ва формулалар ёрдамида ҳисоблаш имкони бўлмаганда уни интеграл йиғиндилар ёрдамида тақрибан ҳисобланади.



Аниқ интегрални ҳисоблаш учун интеграл ости функциясининг бошланғич функциясини топиш ва Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиш зарур:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Аниқ интегрални геометрик маъноси юқоридаги штрихланган соҳанинг юзасини топиш демакдир.

Одатда интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топиш математик жиҳатдан анча қийинчилик туғдиради, айрим функциялар учун эса бошланғич функцияни топишнинг мутлақо иложи йўқ. Шунинг учун, керак бўлган аниқликда аниқ интегралларни ҳисоблаш алгоритмларининг ишлаб чиқилиши ва дастурларининг яратилиши актуал масалалардан ҳисобланади.

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун амалда қуйидаги усуллардан кенг фойдаланилади:

1. Чап ва ўнг тўғри тўртбурчаклар;
2. Трапеция;
3. Параболалар (Симпсон).

Тўғри тўртбурчаклар усули

Интеграл тарихан эгри чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзини, хусусан эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш муносабати билан келиб чиққан. Трапециянинг асоси бўлган $[a;b]$ кесмани $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ нуқталар билан n та кесмаларга бўламиз. У ҳолда бўлиниш оралиғи узунлиги $h=(b-a)/n$ формула билан ифодаланади. x_0 қа десак, $x_i=x_{i-1}+h$ нуқталарни белгилаб оламиз, бунда $i=1,2,3,\dots,n$. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ нуқталардан чегаравий эгри чизиқ билан кесишгунга қадар вертикал параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва кесишиш нуқталарининг ординаталарини қуйидагича $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_i), \dots$ каби белгилаймиз. Ҳар бир оралиқдаги ординатаси узунлиги $y(x_i)$ га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзаларини топамиз.

$$S_i = h \cdot y(x_i)$$

n та тўғри тўртбурчакнинг юзини қўшамиз:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + \dots + y(x_n))$$

Юзаларни ҳисоблашда $k=1,2,\dots,n$ деб олсак, вертикал тўғри чизиқларга нисбатан ўнг томондаги тўғри тўртбурчаклар олингани учун ўнг тўғри тўртбурчаклар усулининг формуласи келиб чиқади:

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+n \cdot h)] = h \cdot \sum_{k=1}^n f(a+kh)$$

яъни $k=1,2,\dots,n$ деб олсак, вертикал тўғри чизиқларга нисбатан чап томондаги тўғри тўртбурчаклар олингани учун чап тўғри тўртбурчаклар усулининг формуласи келиб чиқади.

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a+h) + \dots + f(a+(i-1)h)] = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh);$$



МС Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш усулининг аниқлиги усулнинг турига боғлиқми?

Назорат саволлари

1. Аниқ интегралнинг геометрик маъноси қандай?
2. Аниқ интегрални нима учун тақрибий ҳисобланади?
3. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш усуллари қайсилар?
4. Тўғри тўртбурчаклар усулига мос ишчи формулаларни қандай ҳосил қилинади ?

9-маъруза: Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг трапеция ва Симпсон (параболалар) усули

Ўқув модули бирликлари:

1. Трапеция усулининг моҳияти
2. Усулнинг ишчи формуласи
3. Симпсон усулининг моҳияти
4. Симпсон усулининг ишчи формуласи

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Трапеция усулининг моҳияти
2. Трапеция усулига тегишли асосий ишчи формулани қандай ҳосил қилиниши
3. Симпсон усулининг моҳияти
4. Усулга мос ишчи формуланинг қандай ҳосил қилиниши
5. Тақрибий ҳисобдаги хатоликни камайтириш йўллари ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Трапеция усули

Бу усулда ҳам тўғри тўртбурчаклар усулидаги каби $[a, b]$ кесмани $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз. Ҳар бир тугун нуқталар орасидаги масофа $h = (b-a)/n$;

$[a, b]$ кесмани бўлувчи нуқталардан чегаравий эгри чизиқ билан кесишгунга қадар перпендикуляр ўтказамиз. Эгри чизиқ мос нуқталарининг ординаталарининг $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$;

Перпендикулярларнинг $y = f(x)$ чизиқ билан кесишган қўшни нуқталарини ватарлар билан бирлаштирамиз ва ҳосил қилинган ҳар бир тўғри чизиқли трапецияларнинг юзини топамиз:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; \quad \dots \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$

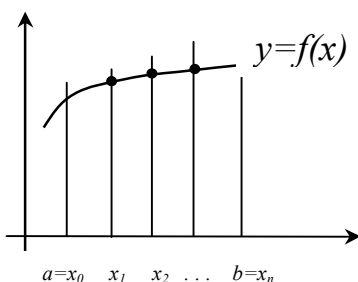
Барча n та трапеция юзини қўшамиз

$$S = h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2} \right]$$

Демак. Эгри чизиқли трапециянинг юзи тақрибан қуйидагига тенг

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

ёки $y_0 = f(a), y_n = f(b), x_i - \text{қақша}$ десак, трапеция усулининг формуласи



$$S = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right]$$

бўлади.



МВ Агар аниқ интегрални ҳисоблаш натижасида манфий қийматли натижа чиқса, қандай йўл тутасиз?

Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг барча усулларида n бўлинишлар сонини орттириш туфайли хатолик миқдорини камайтириш мумкин, чунки бўлинишлар натижасида ҳосил бўлган юза қанчалик кичик бўлса, формула орқали топаётган фигуранинг юзи эгри чизиқли трапециянинг юзига шунчалик яқин бўлади.

Симпсон (параболалар) усули

Аниқ интегрални Симпсон усулида ҳисоблаш, ораликни бўлиш (бўлинишлар сони жуфт бўлиши керак) натижасида ҳосил қилинган юзаларни юқоридан парабодалар билан чегараланган деб фараз қилинади ва бундай юзани ҳисоблаш аниқ интегрални бошланғич функциясини топиш ҳисобига амалга оширилади.



МС Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашда керакли усулни танлаш интеграл ости функциясига боғлиқми?

$[a, b]$ кесма узунлигини h қ $(b-a)/2n$ бўлган $2n$ та жуфт бўлакка $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ нуқталар орқали ажратамиз.

$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ кесмалар ҳосил бўлади. $x_0=a, x_{2n}=b$ бўлади. Бу кесмаларнинг ўрталари мос равишда $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ нуқталар бўлади. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

интеграл йиғиндига ажратамиз.

Ҳар бир $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i=0$ дан $n-1$ гача) кесмаларда $(x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}), (x_{2i+2}, y_{2i+2})$ нуқталар орқали ҳамма вақт парабола ўтказиш мумкин, шу билан бирга бундай парабола $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ кесмада фақат битта бўлади. Ёрдамчи парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзи тақрибан берилган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (Ax^2 + Bx + C)dx$$

Параболага тегишли ҳар учта нуқта учун юқоридаги тенгламани ёзамиз:

$$\begin{cases} ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\ ax_{2i+1}^2 + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\ ax_{2i+2}^2 + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2} \end{cases}$$

Ҳосил бўлган a, b, c номаълумли учта тенгламалар системасини ечиб, a, b, c ларнинг қийматини интеграл ифодага қўйиб, ҳисоблаймиз. Ҳар бир

кесмалар учун уларнинг қийматини қўшиб, параболалар усулига мос формулани ҳосил қиламиз.

Усулнинг ишчи формуласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n f(a + (2i-1)h) + 4 \cdot \sum_{k=1}^n f(a + 2ih) \right];$$

бу ерда $h=(b-a)/2n$.



МТ Аниқ интегралнинг барча амалий тадбиқларини санаб беринг.

Назорат саволлари

1. Трапеция усулига мос ишчи формулани ҳосил қилиш учун юзага тегишли қайси формуладан фойдаланилган?
2. Симпсон усулида нима учун бўлинишлар сонини жуфт сонда бўлиши талаб қилинади?
3. Симпсон усулига мос ишчи формулани ҳосил қилишда керак бўладиган тенгламалар системасини қандай йўл билан ечган маъқул?
4. Аниқ интегрални ҳисоблашда тақрибий ҳисобнинг аниқлигини ошириш учун нима қилиш керак?

10-маъруза: Энг кичик квадратлар усули.

Ўқув модули бирликлари:

1. Интерполяция тушунчаси
2. Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Функцияни интерполяциялаш масаласининг амалий тадбиқлари
2. Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти асосий ишчи формулаларини қандай ҳосил қилиниши ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Амалий масалаларда учрайдиган масалаларнинг кўриниши кўпинча мураккаб бўлиб, уларнинг аналитик ифодасини топиш мумкин эмас. Бундай ҳолларда берилган мураккаб функцияни ўрганиш қулайроқ бўлган соддароқ функция бўлган алмаштириш мақсадга мувофиқдир.

Интерполяция деганда эркин ўзгарувчи миқдор билан функциянинг дискрет нуқталаридаги мос қийматлари орасида муносабати маълум бўлган ҳолда функционал боғланишнинг тақрибий ёки аниқ аналитик ифодасини тузиш тушунилади.

Кўпинча турмушда кузатишлар ва тажрибалар орқали эмпирик формулаларни келтириб чиқариш мумкин.

Масалан, ҳароратнинг кўтарилиши ёки аксинча пасайишини, симоб устунининг кўтарилиши ёки пасайишига қараб билиш мумкин. Демак, ҳарорат билан симоб устини ўртасидаги чизиқли боғланиш борлигини тажриба орқали билиш мумкин.

Бундай масалаларни ечишда энг кичик квадратлар усулидан фойдаланамиз.

Энг кичик квадратлар усули биринчи марта 1874 йилда Гаусс томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, айрим адабиётларда бу усул Гаусс усули деб аталади.

Энди энг кичик квадратлар усулининг моҳияти билан танишиб чиқимиз.

Айтайлик, x эркин ўзгарувчининг n та қиймати берилган бўлсин. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ унга мос функция қийматлари $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ бўлсин.

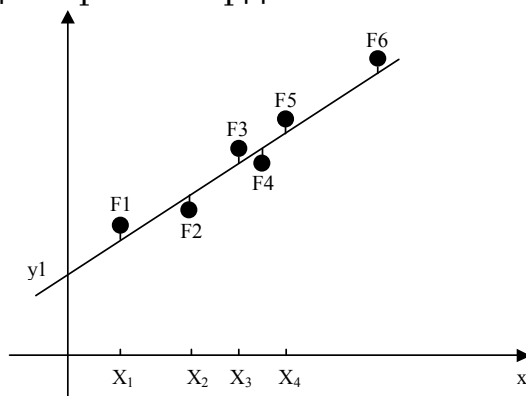
Демак, функция жадвал кўринишда берилган.

X	X_1	X_2	$\dots$	X_n
Y	Y_1	Y_2	$\dots$	Y_n

$F_1(X_1, Y_1)$

$F_2(X_2, Y_2)$

Бу қийматларга мос нуқталарни координата текислигида тасвирлайлик.



Демак, биз ана шу тажриба нуқталардан жуда кам фарқ қиладиган уқажҚb функцияни кўришимиз керак.

Математик модел чизиқли бўлади.

Чизмада ясалган тўғри чизиқ билан бир нуқта орасидаги масофалар айирмасининг квадратларининг йиғиндисининг хатолари минимум бўлсин:

$$Z(a; b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad \min z = ?$$

Ушбу шарт бажарилиши учун, ноъмалум коэффицентлардан олинган хусусий хосилалар нолга тенг бўлиши керак, яъни $\frac{\partial z}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial b} = 0$;

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = 0$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n x_i y_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n = n \text{ деб олиб}$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (1)$$

(1) системани а ва в га нисбатан олиб, номаълум коэффициентларни топамиз, ва натижада чизиқли $уқахҚв$ функцияни ифодасини ҳосил қиламиз. Энди ҳар қандай аргументнинг қийматида функциянинг қийматини ҳисоблаш мумкин бўлади.



мс *Функцияларни интерполяциялаш масаласидан қандай амалий жараёнларда фойдаланилади?*



мс *Нима учун айнан «Энг кичик квадратлар» усули дейилади?*

Назорат саволлари

1. Функцияларни интерполяциялаш қандай амалга оширилади?
2. Энг кичик квадратлар усулининг асосий моҳияти?
3. Энг кичик квадратлар усулида ҳосил қилинган тенгламалар системасини қайси усулда ечган маъқул?

11-маъруза: Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари

Ўқув модули бирликлари:

1. Дифференциал тенгламаларнинг турли синфлари
2. Дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари
3. Эйлер усули .Усулнинг геометрик маъноси
4. Рунге-Кутте усулининг ишчи формуллари

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Оддий ва хусусий ҳосилли дифференциал тенгламаларнинг хусусиятлари
2. Дифференциал тенгламаларнинг ечими тушунчаси
3. Умумий ва хусусий ечим, қўшимча шартлар
4. Аниқ ва тақрибий ҳисоблаш усуллари
5. Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи
6. Усулнинг геометрик маъноси
7. Рунге-Кутта усулининг моҳияти, усулнинг афзаллиги ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Маълумки, кўпинча амалий масалаларни ечишда, дастлаб унинг математик модели физик, механик, кимёвий ва бошқа қонуниятлар асосида тузилади. Математик модел асосан алгебраик, дифференциал, интеграл ва бошқа тенгламалардан иборат бўлади. *Оддий дифференциал* тенгламалар эса жуда кўп муҳандислик масалаларини ечишда учрайди. Демак, дифференциал тенгламаларнинг маълум шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топиш катта аҳамиятга эга.



МС *Қандай амалий масалаларнинг математик modellari биринчи тартибли дифференциал тенгламалари орқали ифодаланади?*

Дифференциал тенгламалар иккита асосий синфга бўлинади: *оддий дифференциал* тенгламалар ва *хусусий ҳосилали дифференциал* тенгламалар.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга кейинроқ батафсил тўхталамиз.

Оддий дифференциал тенгламаларда фақат бир ўзгарувчига боғлиқ функция ва унинг ҳосилалари қатнашади, яъни

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

(1) тенгламада қатнашувчи ҳосилаларнинг энг юқори тартиби дифференциал тенгламаларнинг *тартиби* дейилади. Агар тенглама изланувчи функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, унга *чизиқли дифференциал* тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, уни айниятга айлантирувчи x ва n та $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ўзгармасларга боғлиқ ихтиёрий функцияга айтилади. Масалан (1) тенгламанинг умумий ечими $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ кўринишдаги функциялардан иборат. Агар $c_1, c_2, \dots, c_n$ ўзгармасларга муайян қийматлар берилса, умумий ечимдан хусусий ечим ҳосил қилинади. Хусусий ечимни топиш учун $c_1, c_2, \dots, c_n$ ўзгармасларнинг мос қийматларини аниқлаш лозим. Бунинг учун эса ечимни қаноатлантирувчи қўшимча шартларга эга бўлишимиз керак. Агар дифференциал тенглама n -тартибли бўлса, ягона хусусий ечимни топиш учун худди шунча қўшимча шартлар керак. Хусусан, 1 -тартибли тенглама ($F(x, y, y') = 0$) нинг умумий ечими $y = \varphi(x, c)$ даги c ўзгармасни топиш учун 1 та қўшимча шартнинг берилиши кифоя.

Қўшимча шартлар берилишига кўра дифференциал тенгламалар учун 2 хил масала қўйилади:

1) *Коши масаласи*

2) *Чегаравий масала.*

Агар қўшимча шартлар битта $x = x_0$ нуқтада берилса, дифференциал тенгламани ечиш учун қўйилган масала *Коши масаласи* дейилади. Коши масаласидаги қўшимча шартлар *бошланғич шартлар*, $x = x_0$ нуқта эса *бошланғич нуқта* деб аталади. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг чизма, аналитик, тақрибий ва сонли ечиш усуллари мавжуд.

Аналитик усулларда дифференциал тенгламанинг ечимлари аниқ формулалар орқали аниқланади.

Тақрибий усулларда дифференциал тенглама ва қўшимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонроқ масалага келтирилади.

Сонли усулларда эса ечим аналитик шаклда эмас, балки сонлар жадвали кўринишида олинади. Албатта бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Натижада сонли усуллар воситасида олинган ечим ҳам тақрибий бўлади.

Умуман олганда, оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини аналитик усул ёрдамида топиш имкони жуда кам бўлганлиги учун, амалда кўпинча уларни сонли усуллар ёрдамида тақрибий ҳисобланади.

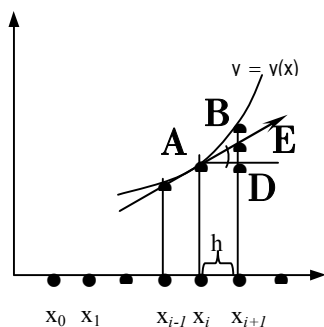
Қуйида шундай усуллардан Эйлер ва Рунге-Кутта усулларини кўриб чиқамиз.

Эйлер усули

Бизга қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенглама (Коши масаласи)ни

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

$[a, b]$ оралиқдаги $y_0 = y(x_0)$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.



Коши масаласини Эйлер усули ёрдамида ечиш учун, дастлаб дифференциал тенгламанинг ечими қидириладиган $[a, b]$ кесмани $x_1, x_2, \dots, x_n$ тугун нуқталар билан бўлакларга бўламиз. Тугун нуқталарнинг координаталари $x_{i+1} = a + (i+1)h$ ($i = 0, n-1$) формула орқали аниқланади. Ҳар бир тугунда $y(x_i)$ ечимнинг қийматларини чекли айирмалар ёрдамида тақрибий y_i

қийматлар билан алмаштирилади.

Маълумки, $y = f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқта атрофидаги Тейлор қаторига ёйилмасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 \cdot y''(x_i) + \dots$$

Ушбу чексиз қаторнинг бошидаги иккита ҳад билан чегараланиб, биринчи тартибли ҳосила қатнашган ҳадни аниқлаш натижасида қуйидаги чекли айирмали формулани ҳосил қиламиз:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \quad (3)$$

Ушбу алмаштиришнинг геометрик маъноси қуйидагича:

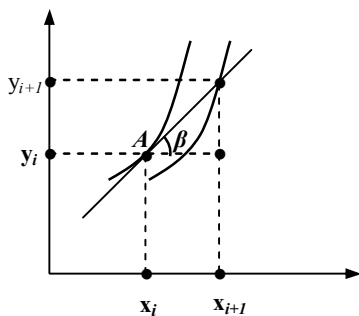
Ҳосиланинг геометрик маъносига кўра

$$y'(x_i) = \operatorname{tg} \beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

(3) дан

$$y'(x_i) \approx \frac{\overbrace{y_{i+1} - y_i}^{BD}}{h} = \frac{BD}{h} = \frac{ED}{h} + \frac{BE}{h} = y'(x_i) + \frac{BE}{h}$$

Демак, чекли айирмалар формуласи ҳосиланинг асл қийматидан BE/h га фарқ қилади, яъни BE қанча кичик бўлса, чекли айирма y' ҳосилага шунча яқин бўлади. Расмдан $h \rightarrow 0$ да $BE \rightarrow 0$ эканини кўриш мумкин. (2) ва (3) дан $y'_i = f(x_i, y_i)$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:



$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (4)$$

Ҳосил қилинган (4) формула Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи бўлиб, унинг ёрдамида тугун нуқталарга мос бўлган дифференциал тенгламанинг y_i хусусий ечимларини топиш мумкин. Юқоридаги формуладан кўриниб турибдики, y_{i+1} ечимни топиш учун y_i ечимнигина билиш кифоя. Демак, Эйлер усули бир қадамли усуллар жумласига киради.

Эйлер усулининг *геометрик маъноси* қуйидагича:

А нуқта $x = x_i$ нуқтага мос келувчи ечим бўлсин. Бу нуқтадан интеграл чизиққа ўтказилган уринма x_{i+1} нуқтада бошқа интеграл чизигида y_{i+1} ечимни аниқлайди.

Уринманинг оғмалиги $\beta \cdot y'_i = f(x_i, y_i)$ ҳосила билан аниқланади. Демак, Эйлер усулидаги йўл қўйилган асосий хатолик ечимни бир интеграл чизигидан бошқасига ўтказиб юбориши билан характерланади.

Рунге-Кутта усули.

Бир қадамли ошкор усулларнинг бошқа бир неча хиллари ҳам мажуд бўлиб, уларнинг ичида амалда энг кўп ишдлатиладигани Рунге-Кутта усули ҳисобланади. Усул шартига кўра ҳар бир янги x_{i+1} тугун нуқтадаги y_{i+1} ечимни топиш учун $f(x, y)$ функцияни 4 марта ҳар хил аргументлар учун ҳисоблаш керак. Бу жиҳатдан Рунге-Кутта усули ҳисоблаш учун нисбатан кўп вақт талаб қилади. Лекин Эйлер усулидан кўра аниқлиги юқори бўлганлиги учун, ундан амалда кенг фойдаланилади. Усулнинг ишчи формуласи қуйидагича ёзилади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0, 1, \dots$$

бу ерда $k_0 = f(x_i, y_i)$;

$$k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0\right);$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Демак, формулалардан кўриниб турибдики, Эйлер усули биринчи тартибли Рунге-Кутта усулига мос келади.



МТ

Эйлер усулининг геометрик маъносини тушунтириб беринг.

Назорат саволлари

1. Қандай тенгламаларни дифференциал тенгламалар деб атаймиз?
2. Оддий дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?
3. Умумий ечим нима?
4. Хусусий ечим нима?
5. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш зарурияти қаердан келиб чиқади?
6. Дифференциал тенгламалар ни тақрибий ечишнинг қандай усуллари биласиз?
7. Эйлер усулининг ишчи алгоритми?
8. Эйлер усулининг қандай камчилиги ва афзаллиги бор?
9. Рунге-Кутта усулининг ишчи алгоритми?
10. Рунге-Кутта усулининг қандай камчилиги ва афзаллиги бор?

12-маъруза: Чегаравий масалаларни ечишнинг чекли-айирмалар усули.

Ўқув модули бирликлари:

1. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама
2. Чегаравий масаланинг қўйилиши
3. Чегаравий масалани ечиш усуллари
4. Чекли-айирмалар усулининг ишчи алгоритми

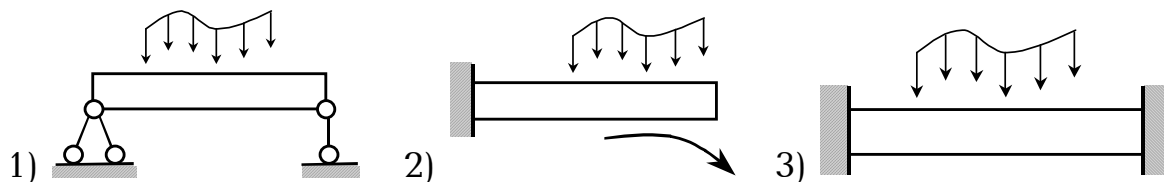
Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи амалий жараёнлар
2. Чегаравий масаланинг қўйилиши
3. Чегаравий масалани ечишнинг аналитик, сонли-тақрибий ва тақрибий-аналитик усуллари
4. Чекли-айирмали формулалар
5. Уч диагоналли тенгламалар системаси
6. Ҳайдаш усулига мос тўғри ва тескари йўлнинг моҳияти ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Бугунги кунда иншоотлар қуриш лойиҳаларининг муттасил мураккаблашиб бориши, янги конструктив ечимларнинг лойиҳалардан ўрин олиши, сейсмик актив жойларда бинолар мустаҳкамлигига қўйиладиган талабларнинг ортиши лойиҳа кўрсаткичларини чуқур асослаш заруриятини келтириб чиқаради. Бундай қурилиш масалалари билан бир қаторда сув таъминоти ва канализация, иссиқлик таъминоти, коммунал хўжалиги ва бошқа бир қатор муаммоларни ҳал қилиш учун тегишли амалий масалаларни ечиш керак бўлади.

Юқоридаги турли соҳаларга тегишли масалаларни ечишда асосан қуйидаги конструкциялардан фойдаланилади.



Аниқроқ қилиб айтадиган бўлсак:

1) Икки четидан шарнирли маҳкамланган, эластик тўсиннинг юқоридан берилувчи куч таъсирида эгилиши

(бунда четки a, b нуқталар учун $u(a)=0, u(b)=0$ шартлар қўйилади.)

2) Бир учидан маҳкамланган эластик тўсиннинг ташқаридан берилувчи куч таъсирида эгилиши (бунда эса четки a, b нуқталар учун $u(a)=0, u'(b)=0$ шартлар қўйилади.)

3) Икки учи маҳкамланган тўсиннинг юқоридан берилувчи куч таъсирида эгилиши (бунда $u(a)=0, u(b)=0$ шартлар қўйилади.)

Бу конструкцияларнинг эгилиш ва сиқилиш ҳолатларига чидамлилигини текшириш ва улардан амалий иншоотларни қуришда фойдаланиш учун уларнинг математик моделларини қуриш лозим бўлади. Мазкур масалаларнинг математик модели кўпроқ қуйидаги кўринишдаги иккинчи тартибли, ўзгарувчан коэффицентли оддий дифференциал тенгламалар орқали ифодаланади, яъни:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ечимларига a, b — ораликнинг четки a ва b нуқталарида

$$\begin{aligned} m_0 y(a) + m_1 y'(a) &= m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) &= g_2 \end{aligned} \quad (2)$$

чегаравий шартлар берилган бўлсин, (1) тенглама ва (2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функция дифференциал тенгламанинг хусусий ечими дейилади.

(1) да берилган $p(x), q(x), f(x)$ коэффицент функцияларнинг $[a, b]$ ораликда узлуксизлиги талаб қилинади. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ чегаравий шарт белгилари бўлган ўзгармас сонлар ҳисобланади.

Бу ўзгармасларга турли қийматлар берилиши орқали зарур бўлган чегаравий шартни ҳосил қилишимиз мумкин.

Қўйилган чегаравий масаланинг турғун ечимини олиш учун бу ўзгармаслар қуйидаги шартларни қаноатлантириши лозим:

$$|m_0| + |m_1| \neq 0; \quad |g_0| + |g_1| \neq 0$$

Айрим пайтларда ечилиши лозим бўлган масалаларнинг математик моделлари тўртинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар орқали ҳам ифодаланиши мумкин.

Амалда кўпинча тўртинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг қуйидаги кўриниши учрайди:

$$y^{(4)}(x) = k \cdot f(x)$$

бу ерда k қиймати аниқ берилувчи коэффицент ҳисобланади. Бу дифференциал тенглама учун қуйидаги белгилашларни киритиб, уни

иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига келтириш мумкин.

$y(x)$ номаълум функцияни $y_1(x)$ функция орқали белгилаб олиб, қуйидаги алмаштиришлар қиламиз, яъни:

$$\begin{cases} y_1''(x) = y_2(x) \\ y_2''(x) = f(x) \end{cases}$$

Шундай қилиб, тўртинчи тартибли дифференциал тенламанинг ўрнига иккита иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Шунинг учун биз асосан иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топишни ўрганамиз.

Аввал таъкидлаб ўтганимиздек, иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларда хусусий ечимни ажратиб олиш учун иккита қўшимча шарт, яъни чегаравий шартлар берилган бўлиши лозим. Бундан буён қулайлик учун иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечиш масаласини чегаравий масала деб юритамиз.

Чегаравий масалаларни ечиш усулларини қуйидаги гуруҳларга бўлиш мумкин:

1. аналитик усуллар
2. сонли-тақрибий усуллар
3. тақрибий-аналитик усуллар.

1. Аналитик усуллар билан олий математика курсида танишганмиз. Унда чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг хусусий ечими ва мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборатдир. Чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг умумий ечимини топиш учун эса унинг хусусий ечимлари фундаментал системасини топиш керак бўлади. Хусусий ечимларни дифференциал тенгламаларга мос характеристик тенгламалар ёрдамида топилади. Юқоридаги барча бажариладиган амаллар дифференциал тенгламанинг кўриниши жуда содда бўлгандагина бирор бир натижа бериши мумкин.

Демак, аналитик усуллар билан барча иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечиш имкони деярли йўқ.

2. Сонли-тақрибий усуллар.

Сонли-тақрибий усулларда ечим сонлар ёки сонлар жадвали кўринишида олинади.

Албатта, бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Сонли усулларнинг имкониятлари бошқа тақрибий усулларга қараганда анча кенгдир. Сонли усуллар икки гуруҳга бўлинади:

- 1) Чегаравий масалаларни Коши масаласига келтирувчи усуллар;
- 2) Чекли айирмалар усули.

Сонли усуллар ичида энг кўп ишлатиладигани чекли айирмали усуллардир.

3. Тақрибий-аналитик усуллар.

Бу усулда дифференциал тенглама ва қўшимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонроқ масалага келтирилади. Тақрибий-аналитик усулларга Галёркин усули, энг кичик квадратлар усули, коллокация усули, Ритц ва бошқалар киради. Амалда энг кўп ишлатиладиган амаллардан бири бу Галёркин усулидир.

Чекли айирмалар усули

Демак, бизга қуйидаги

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

иккинчи тартибли, ўзгарувчан коэффицентли оддий дифференциал тенгламанинг $x \in [a, b]$ оралиқнинг четки нуқталарида қўйилган

$$\begin{cases} m_0 y(a) + m_1 y'(a) = m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) = g_2 \end{cases} \quad (2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Бу ерда $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ лар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз функциялар синфига киради. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ - ўзгармаслар, яъни чегаравий шарт белгилари.

Юқоридаги масалани сонли-тақрибий усул ҳисобланмиш чекли айирмалар усули билан ечиш учун ечим қидириладиган $[a, b]$ оралиқда қуйидаги тўрни киритамиз, яъни оралиқни координаталари $x_i = a + h$ формула билан аниқланувчи тугун нуқталар билан бўлакларга бўламиз, бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$, n - тугун нуқталар сони.

x_i нуқталар учун юқоридаги (1) тенглама ўринли бўлгани учун, уни шу нуқталарда ёзиб оламиз:

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = f(x_i)$$

Қулайлик учун, бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y''_i + p_i y'_i + q_i y_i = f_i \quad (3)$$

Маълумки, изланувчи функциянинг x_i нуқта атрофидаги Тейлор қаторига ёйилмасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots \quad (4)$$

ёки

$$y_{i-1} = y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots \quad (4\Box)$$

(4) ва (4') қатордаги икки ва ундан юқори тартибли ҳосилалар қатнашган ҳадларни ташлаб юборсак, изланувчи функциянинг x_i нуқтадаги ҳосилалари учун қуйидаги тақрибий ҳисоблаш формулалари ҳосил бўлади.

$$(4) \text{ формуладан } y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (5)$$

$$(4\Box) \text{ формуладан } y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (6)$$

формулалар келиб чиқади.

Ҳосил бўлган система $y_0, y_1, \dots, y_n$ лардан иборат $(n+1)$ та номаълумли, $(n-1)$ та тенгламадан иборат уч диагоналли чизиқли тенгламалар системасидан иборат.

Уч диагоналли бўлишига сабаб, системадаги ҳар бир тенгламада фақат 3 тадан номаълум қатнашган ҳадлар мавжуд бўлиб, системада уларнинг жойлашган ўрни асосий диагональ, уни пасти ва юқорисидаги диагоналлarga мос келади

Маълумки, тенгламалар системасининг ягона ечимини аниқлаш учун тенгламалар ва номаълумлар сони тенг бўлиши керак. Шунинг учун иккита тенгламани чегаравий шарт ҳисобига тўлдириб оламиз. x_0 ва x_n оралиқнинг четки нуқталари учун (2) шартларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 y'_0 = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 y'_n = g_2 \end{cases}$$

y'_0, y'_n -ларни мос равишда (5) ва (6) чекли айирмалар формулалар билан алмаштирамиз, яъни $y(x)$ ни $x = x_0$ ёки $x = a$ нуқтадаги ҳосиласи учун ўнг чекли айирма формуласини, $x = x_n$ ёки $x = b$ нуқтадаги ҳосиласи учун чап чекли айирма формуласини қўямиз:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = g_2 \end{cases}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларни h га кўпайтириб, ўхшаш ҳадларни йиғамиз.

$$\begin{cases} (hm_0 - m_1)y_0 + m_1 y_1 = hm_2 \\ (hg_0 + g_1)y_n - g_1 y_{n-1} = hg_2 \end{cases} \quad (12)$$

Қуйидагича белгилашларни киритиб ,

$$\begin{array}{ll} A_0 = hm_0 - m_1 & B_0 = m_1 \\ C_0 = hm_2 & A_n = hg_0 + g_1 \\ B_n = -g_1 & C_n = hg_2 \end{array}$$

Ҳосил қилинган тенгламаларни (10) тенгламалар системасига “улаймиз” ва натижада $(n+1)$ та номаълумли, $(n+1)$ та тенгламадан иборат $y_0, y_1, \dots, y_n$ номаълумларга нисбатан ёзилган қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0 \\ A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \\ A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \end{cases} \quad (13)$$

Маълумки, қидирилаётган тақрибий ечимнинг аниқлик даражасини ошириш учун $[a, b]$ оралиқда киритилган $x_i = a + ih$ тўрнинг h қадамини кичрайтириш лозим. Бу миқдорни кичрайтириш учун эса ўз навбатида тугун нуқталар x_i нинг сонини кескин ошишига олиб келади. Шундай қилиб, қўйилган масалани зарур аниқликда ечиш учун ҳосил қилинган (13) системанинг тартиби минг, айрим ҳолларда эса ўн мингдан ҳам ортиқ бўлиши мумкин.

Юқорида эслатганимиздек, системанинг ҳар бир тенгламасида фақат учтадангина номаълум қатнашган ҳадлар мавжуд. Қолган номаълумларнинг коэффицентлари 0 га тенг. Агарда биз бундай системани анъанавий усуллар(Гаусс, Крамер, тескари матрица каби) ёрдамида ечмоқчи бўлсак, ноллар устида маъносиз бўлган хажмдаги амалларни бажаришимизга тўғри келади.

Шунинг учун, бундай махсус системаларни ечишнинг махсус усуллари ишлаб чиқилган. Бу усулларнинг энг соддаси, дастурлашга қулайи, хатолар йиғилмасини ҳосил қилмайдигани “ҳайдаш” усули ҳисобланади.

Қуйида “Хайдаш ” усулининг қисқача моҳияти билан танишиб чиқамиз.

Махсус, диагоналли системаларни ечишга мўлжалланган “Хайдаш” усули икки босқичдан иборат:

- номаълум коэффицентларни аниқлаш (тўғри босқичи)
- системанинг ечимларини аниқлаш (тескари) босқичи.

1-босқичда (13) системанинг номаълум ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз:

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (14)$$

бу ерда α_{i+1} ва β_{i+1} номаълум ҳайдаш коэффицентлари.

Номаълум $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ коэффицентларни топиш учун (14)

тенгликни $x = x_i$ ва $x = x_{i-1}$ нуқталардаги кўринишини (13) формуладаги иккинчи тенгламага кетма-кет қўйиб,

$$A_i y_{i+1} - B_i(\alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}) + C_i(\alpha_i(\alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i) = D_i$$

ёки

$$(A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1})y_{i+1} + (-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i) = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу чизиқли ифода айнан 0 га тенг бўлиши учун, барча коэффицентлар 0 бўлиши кераклигини ҳисобга олиб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1} &= 0 \\ -B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i &= 0 \end{aligned}$$

Ҳосил қилинган тенгликлардан $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ номаълум коэффицентларни топиш унчалик қийин эмас.

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{C_i\beta_i - D_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \quad i = \overline{1, n-1} \quad (15)$$

Мазкур рекуррент формуладаги барча α_{i+1} ва β_{i+1} ларни аниқлаш учун ёки бошқача айтганда рекуррент формулани “юриши” учун даствлабки α_i ва β_i қийматларни топишимиз керак. Бу қийматларни топишимиз учун $x = a$ нуқтадаги чегаравий шартдан ҳосил қилинган (13) формуладаги биринчи тенгламадан фойдаланмиз.

$A_0y_0 + B_0y_1 = C_0$ тенгламани ҳар иккала томонини A_0 га бўлиб, y_0 ни топамиз:

$$y_0 = -\frac{B_0}{A_0} y_1 + \frac{C_0}{A_0};$$

Келтириб чиқарилган формулани (14) формуланинг $i=0$ даги қийматида ҳосил қилинган $y_0 = \alpha_i y_i + \beta_i$ билан солиштириш натижасида

$$\alpha_i = -\frac{B_0}{A_0}; \quad \beta_i = \frac{C_0}{A_0} \text{ эканлиги келиб чиқади.}$$

Эслатиб ўтамиз, A_0, B_0, C_0 ларнинг қиймати олдинроқ аниқланган эди.

α_i, β_i лар маълум бўлгач, барча кейинги α_i, β_i лар (15) рекуррент формуладан топилади. Бу жараён “ҳайдаш” усулининг тўғри босқичини ташкил этади.

2-босқичда α_i, β_i номаълум коэффициентларнинг барча қийматлари топилгач (14) рекуррент формула ёрдамида қидирилаётган ечим y_i ларни топиш мумкин, бу ерда ҳам рекуррент формуланинг ишлаши учун дастлабки қиймат сифатида y_n ни аниқлаш лозим. Бу ишни бажариш учун $x=b$ нуқтадаги чегаравий шартдан ҳосил қилинган (13) системанинг учинчи тенгламаси

$$A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n$$

ва (14) формуланинг $i=n-1$ нуқтадаги кўринишидан $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$ фойдаланамиз, яъни уларни система деб қараб, бу системадан y_n ни аниқлаймиз.

$$y_n = \frac{C_n - B_n \beta_n}{A_n + B_n \alpha_n}$$

Қидирилаётган y_n ҳисоблангач, $y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}$ рекуррент формуласи ёрдамида ($i=n-1, 0$) барча қолган ечимлар топилади.

Бу жараён i га нисбатан тескари тартибда бўлгани учун, уни ҳайдашнинг тескари босқичи деб атаймиз.



МС

Нима учун «ҳайдаш» усули деб номланади?

Демак, олдимизга қўйилган масалани, яъни берилган масалани ўзгарувчан коэффициентли, иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламани чекли айирмалар формулалар ёрдамида сонли-тақрибий усулда ечиш учун ишчи алгоритм ҳосил қилдик.



ММ

Чекли айирмалар усулида ҳосил қилинган тенгламалар системасини нима учун айнан «ҳайдаш усули»да ечиш мақсадга мувофиқ дейилади. Тушунтириб беринг.

Назорат саволлари

1. Иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?

2. Иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламалар учун қандай қўшимча шартлар қўйилади?
3. Чегаравий масалаларнинг ечиш усуллари қандай гуруҳларга бўлиш мумкин?
4. Аналитик усулларга қандай усуллар киради?
5. Сонли-тақрибий усулларга қандай усуллар киради?
6. Сонли-тақрибий усулларнинг ўзига хос хусусиятларини айтинг?
7. Чекли-айирмалар усулининг асосий моҳияти нимадан иборат?

13-март: Чегаравий масалаларни ечишнинг Галёркин усули.

Ўқув модули бирликлари:

1. Ўзаро ортогонал функцияларни танлаш;
2. Тафовут функцияси;
3. Галёркин усулининг моҳияти.

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Тақрибий аналитик усулларнинг ўзига хос хусусиятлари;
 2. Галёркин усулининг асосий моҳияти;
 3. Ўзаро ортогонал функцияларни танлаш;
 4. Тафовут функцияни минималлаштириш шarti.
- ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Юқорида таъкидлаб ўтганимиздек. Галёркин усули тақрибий-аналитик усуллар гуруҳига киради. Мазкур усуллар гуруҳи таркибига кирувчи барча усулларда берилган дифференциал тенгламанинг ечими тақрибий аниқланган формулалар ёрдамида топилади ва албатта, ечим ҳам аналитик кўринишда ифодаланади. Айниқса, кўпгина физика ва механика масалаларининг ечимини аналитик кўринишда қидириш лозимлиги, тақрибий аналитик усулларни ўрганишга катта эҳтиёж туғдиради.

Деярли барча тақрибий-аналитик усулларнинг алгоритмлари бири-бирига ўхшаш бўлгани учун қуйида Галёркин усулини ўрганиш билан чекланамиз.

Бизга яна аввалги мавзудаги каби, қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин, яъни:

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x) \quad (1)$$

тенглама ва

$$\begin{cases} m_0 y(a) + m_1 y'(a) = m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) = g_2 \end{cases} \quad (2)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимни топиш керак.

Олий математика курсидан маълумки, ихтиёрий узлуксиз функцияни чексиз қатор кўринишида ифодалаш мумкин.

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

Галёркин усулида ушбу қатордаги n та чекли ҳад билан чегараланиб, чегаравий масаланинг ечимини қуйидаги қўринишда қидириш таклиф этилади.

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (3)$$

Бу ерда шуни эслатиб ўтиш лозимки, усулнинг йўл қўйилган ягона ва асосий хатолиги чексиз ҳадли қаторни чекли ҳадли қаторга алмаштиришдан иборатдир. Қатордаги ҳадлар сонини қанча кўп олсак, шунчалик олинган натижалар ишончли ва аниқ ечимга яқин бўлади. Лекин, иккинчи томондан, қатордан кўпроқ ҳад олишга интилиш қўлда бажариладиган амаллар сонини кескин орттириб юборади. Бу эса йўл қўйилиши мумкин бўлган хатолик эҳтимолини кескин орттиради. Шунинг учун амалдаги ҳисоб ишларида $n \leq 10$ шартдан келиб чиқилади.

Энди эътиборимизни яна ечимни қидиришга қаратсак, формуладаги $c_1, c_2, \dots, c_n$ -лар қийматлари номаълум бўлган ўзгармаслар ҳисобланади.

$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ лар эса ҳисоб ишларини бажарувчи томонидан танлаб олинган $[a, b]$ кесмада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи, чизиқли боғлиқ бўлмаган функциялар ҳисобланади, яъни улар базис системасини ташкил қилиб, ўзаро ортогоналлик шартини қаноатлантириши керак. Функцияларни ортогоналлик шарти қуйидагича аниқланади.

$$\int_a^b u_n(x) \cdot u_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{агар } n \neq m \\ \lambda & \text{агар } n = m \end{cases} \text{ бўлса}$$

бу ерда λ -ортогоналлик коэффициент.

Базис функцияларни танлашда қуйидаги шартларни ҳисобга олсак, (3) формула билан аниқланувчи масаланинг ечими $c_1, c_2, \dots, c_n$ ўзгармасларнинг ихтиёрий танланган ҳадида ҳам чегаравий масаланинг (2) чегаравий шартларини қаноатлантиради.

Базис функцияларни танлаш қуйидагича амалга оширилади.

Аввал қуйидаги операторларни муомалага киритайлик:

$$L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x),$$

$$L_a[y(x)] = m_0 y(x) + m_1 y'(x)$$

$$L_b[y(x)] = g_0 y(x) + g_1 y'(x)$$

- 1) $u_0(x)$ функция - берилган чегаравий шартни қаноатлантирувчи функция бўлиши лозим, яъни:

$$\begin{cases} m_0 u_0(a) + m_1 u_0'(a) = m_2 \\ g_0 u_0(b) + g_1 u_0'(b) = g_2 \end{cases}$$

ёки бошқача қилиб айтганда

$$\begin{cases} L_a[u_0(a)] = m_2 \\ L_b[u_0(b)] = g_2 \end{cases}.$$

- 2) $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ функциялари эса берилган чегаравий шартнинг 1-жинсли ҳолатини қаноатлантирувчи функциялар бўлиши лозим,

яъни:

$$\begin{cases} m_0 u_i(a) + m_1 u_i'(a) = 0 \\ g_0 u_i(b) + g_1 u_i'(b) = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} L_a[u_i(a)] = 0 \\ L_b[u_i(b)] = 0 \end{cases}$$

Базис функцияларни танлаш йўллари қуйидаги мисолда кўриб чиқайлик:

Берилган чегаравий масаланинг чегаравий шартлари қуйидагича берилган бўлсин:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$u_0(x)$ ни шундай танлаймизки, $u_0(0) = 1$, $u_0(1) = 0$, яъни берилган чегаравий шартни қаноатлантириши керак.

$$u_0(x) = 1 - x$$

Худди шунга ўхшаш, бошқа базис функциялар $u_k(x)$ лар эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантириш ва чизиқли боғлиқсиз бўлиши керак.

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1(x) = x(1-x)$$

$$\begin{cases} u_2(0) = 0 \\ u_2(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2(x) = x^2(1-x)$$



МТ Чегаравий шартлар $y(0)=1$ ва $y(\pi/2)=-1$ бўлган ҳол учун базис функцияларни мустақил танланг.

Юқорида соддалик учун $n=2$ деб ҳисобланди. Биз $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ базис функцияларни танлашни ўргандик, энди чегаравий масаланинг ечими фақат c_1 ва c_2 номаълум коэффицентларга боғлиқ бўлиб қолди. c_1 ва c_2 ўзгармасларни эса Галёркин таклиф этган усул билан аниқлашни ташкил қиламиз. Бунинг учун, дастлаб (3) тенгламани (1) дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидаги тафовут функциясини ҳосил қиламиз:

$$R(x, c_1, c_2) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^n c_k \cdot L[u_k(x)] - f(x) \quad (4)$$

Бу функция чегаравий масала ечимининг аниқ ечимдан фарқини характерловчи миқдор бўлиб, у c_1, c_2 ўзгармасларга чизиқли боғлиқдир. Агар тафовут функцияси айнан 0 га тенг бўлса, тақрибий ечим масаланинг ечими билан устма-уст тушади, лекин тафовутни ҳамма вақт ҳам 0 га айлантириб бўлавермайди. c_1 ва c_2 номаълум коэффицентларни тафовут функцияни $\min$ га эриш-тириш шартидан аниқлаймиз, яъни $\min\{R(x, c_1, c_2)\}$.

Тафовут функцияни минималлаштириш шarti Галёркин усулида қуйидагича ифодаланади.

$$\begin{cases} \int_a^b R(x, c_1, c_2) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x, c_1, c_2) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Яъни тафовут функцияни $u_i(x)$, $(i = \overline{1, n})$ базис функцияларга ортогоналлик шартидан фойдаланамиз.

(4) формуладаги R тафовут функциясини (5) системага қўямиз.

$$\begin{cases} \int_a^b (L[u_0] + c_1 \cdot L[u_1] + c_2 \cdot L[u_2] - f(x)) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b (L[u_0] + c_1 \cdot L[u_1] + c_2 \cdot L[u_2] - f(x)) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \int_a^b L[u_0] \cdot u_1(x) \cdot dx + c_1 \cdot \int_a^b L[u_1] \cdot u_1(x) \cdot dx + c_2 \cdot \int_a^b L[u_2] \cdot u_1(x) \cdot dx - \\ - \int_a^b f(x) \cdot u_1(x) \cdot dx = 0 \\ \int_a^b L[u_0] \cdot u_2(x) \cdot dx + c_1 \cdot \int_a^b L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx + c_2 \cdot \int_a^b L[u_2] \cdot u_2(x) \cdot dx - \\ - \int_a^b f(x) \cdot u_2(x) \cdot dx = 0 \end{cases} \quad (6)$$

(6) система учун қуйидагича белгилашлар киритсак

$$m_{11} = \int_a^b L[u_1] \cdot u_1(x) \cdot dx; \quad m_{12} = \int_a^b L[u_2] \cdot u_1(x) \cdot dx;$$

$$m_{21} = \int_a^b L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx; \quad m_{22} = \int_a^b L[u_2] \cdot u_2(x) \cdot dx;$$

$$b_1 = \int_a^b (f(x) - L[u_0]) \cdot u_1(x) \cdot dx$$

$$b_2 = \int_a^b (f(x) - L[u_0]) \cdot u_2(x) \cdot dx$$

Натижада:

$$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = b_1 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \quad (7)$$

c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Системанинг коэффициентларини эса (m_{ij}) интегралларни ҳисоблаш ёрдамида топилади. c_1, c_2 номаълумларни ЧАТСни ечишнинг бирор усули ёрдамида (одатда Гаусс усулидан

фойдаланилади) топамиз. c_1, c_2 ларни топгач, $y_n(x)$ тақрибий аналитик ечимни

$$y(x) = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)$$

кўринишида ёза оламиз.



МТ $n=3$ бўлган ҳол учун тафовут функциясини ва унга мос тенгламалар системасини ҳосил қилинг.

Юқорида кўриб, ўрганиб чиқилган назарий амалларни қуйидаги чегаравий масала устида бажаришни ташкил қилайлик,

Чегаравий масаланинг дифференциал тенгламаси қуйидагича кўринишда берилган бўлсин:

$$y'' - 2y' + x^3 \cdot y = 12x^2 - 8x^3 + x^7$$

Дифференциал тенгламанинг ечимига қўйилган чегаравий шартларга эса

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

Юқорида таъкидлаганимиздек, Галёркин усули билан ишлашдан олдин берилган масаланинг чегаравий шартларни қаноатлантирадиган базис функцияларни танлаб олишимиз лозим:

1) $u_0(x)$ ни берилган чегаравий шарт, яъни $u_0(0) = 0$ ва $u_0(1) = 1$ шартни қаноатлантирадиган қилиб, қуйидагича танлаб оламиз: $u_0(x) = x$.

2) $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ларни эса берилган чегаравий шартга мос бир жинсли шартларни, яъни $u_1(0) = 0$, $u_1(1) = 0$ ва $u_2(0) = 0$, $u_2(1) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ва ўзаро чизиқли боғлиқсиз қилиб, қуйидагича танлаб оламиз:

$$u_1(x) = x(x-1) = x^2 - x;$$

$$u_2(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2.$$

Ишчи формулаларда фойдаланиладиган қуйидаги операторларни ҳисоблашни ташкил қилайлик.

$$\begin{aligned} L[u_1] &\equiv 2 - 2(2x-1) + x^3(x^2-x) = 2 - 4x + 2 + x^5 - x^4 = \\ &= x^5 - x^4 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[u_2] &\equiv 6x - 2 - 2(3x^2 - 2x) + x^3(x^3 - x^2) = \\ &= 6x - 2 - 6x^2 + 4x + x^6 - x^5 = x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2; \end{aligned}$$

$$L[u_0] \equiv x'' - 2x' + x^3x = 0 - 2 + x^4 = x^2 - 2$$

Энди қуйидаги тенгламалар системасининг коэффициентлари ва озод ҳадларини ҳисоблашни ташкил этайлик.

$$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = b_1 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \quad (7 \square)$$

$$m_{11} = \int_0^1 L[u_1] \cdot u_1(x) dx = \int_0^1 (x^5 - x^4 - 4x + 4) \cdot (x^2 - x) dx;$$

$$m_{12} = \int_0^1 L[u_2] \cdot u_1(x) dx = \int_0^1 (x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2) \cdot (x^2 - x) dx;$$

$$m_{21} = \int_0^1 L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx = \int_0^1 (x^5 - x^4 - 4x + 4) \cdot (x^3 - x^2) \cdot dx;$$

$$m_{22} = \int_0^1 (x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2) \cdot (x^3 - x^2) \cdot dx; b_1 = \int_0^1 (12x^2 - 8x^3 + x^7 - x^2 + 2) \cdot (x^2 - x) dx;$$

$$b_2 = \int_0^1 (12x^2 - 8x^3 + x^7 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x^2) dx;$$

Барча коэффицентлар маълум бўлгач, (7□) чизикли алгебраик тенгламалар системасини c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан ечишни Гаусс усули билан ташкил қиламиз. Ҳосил қилинган натижаларни, яъни c_1 ва c_2 ларнинг қийматларини $y = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)$ формулага қўйиб, берилган чегаравий масаланинг тақрибий-аналитик ечимини ҳосил қиламиз.



МС Галёркин усулида ечим аналитик кўринишда қидирилади, у ҳолда ечимнинг хатолиги қаердан келиб чиқади?

Назорат саволлари

1. Тақрибий-аналитик усулларга қандай усуллар киради?
2. Тақрибий-аналитик усулларнинг ўзига хос хусусиятларини айтинг?
3. Галёркин усулининг асосий моҳияти нимадан иборат?
4. Галёркин усулидаги хатолик манбаи нимадан иборат?
5. Галёркин усулининг ишчи алгоритми?
6. Галёркин усулида хатоликни камайтириш имкониятлари борми?
7. Галёркин усулида ортогонал функциялар қандай танланади?

14-маъруза: Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг типлари.

Ўқув модули бирликлари:

1. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар;
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага келтирилувчи амалий жараёнлар;
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши;
3. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани типларга ажратиш;

4. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишнинг аниқ ва тақрибий усуллари
ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Олий математика курсидан маълумки, агар дифференциал тенгламадаги номаълум функция икки ва ундан ортиқ аргументларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламаларни хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар деб аталади. Демак, бундай тенгламаларда функциянинг эрки аргументи бўйича хусусий ҳосилалари қатнашади. Амалда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар жуда кўп физик жараёнларни таҳлил қилишда ишлатилади.

Масалан: Турар жой бинолари ва корхоналар қуришда, кўп қаватли биноларнинг иссиқлик режимини сақлаш мақсадида ечиладиган ғовак тўсиқларнинг иссиқлик ўтказувчанлик масаласи (бунда жисм сиртига ўтказиладиган иссиқлик таъсири вақт бўйича жуда тез ўзгариши ва жисм ҳар хил материаллар аралашмасидан иборат бўлиши мумкин), ингичка торлар, ҳар хил материаллардан ишланган таёқлар ва бошқа хилдаги конструкцияларнинг кўндаланг ва бўйлама тебранишлари жараёнлари, нефть ва газ конларидаги ишлаб чиқаришни ташкиллаштириш ва бошқаришни автоматлаштириш мақсадида қаралаётган қатлам параметрларини аниқлик кўрсаткичини янада яхшилаш, қувурлардаги қовушқоқ суюқликларнинг ностационар ҳаракати жараёнлари. Бу жараёнларнинг барчаси учун яратилган математик моделлар □ хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали ифодаланади. Демак, бундай тенгламаларни ечиш алгоритмларини билиш, уларни ечишни ташкил этувчи амалий дастур таъминотларини яратиш масаласи давримизнинг фоят муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

Оддий дифференциал тенгламалар каби хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳам чексиз кўп ечимларга эга. Улар умумий ечимлар дейилиб, хусусий ечимлар умумий ечимлардан маълум шартлар асосида ажратилади. Бу қўшимча шартлар тенглама қаралаётган соҳанинг одатда чегарасида берилади. Агар қўшимча шартлар соҳа чегарасида берилса, бундай масалага чегаравий масала дейилади. Агар чегаравий шартлар берилмасдан фақат бошланғич шарт берилса, бундай масалага хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун Коши масаласи дейилади. Бунда масала чексиз соҳада қаралади. Масалада ҳам бошланғич, ҳам чегаравий шартлар қатнашса, бундай масалага аралаш масала дейилади.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин(қулайлик учун фақат хусусий ҳолни, яъни иккинчи тартибли ҳосилаларга нисбатан чизиқли тенгламаларнигина қараймиз):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (1)$$

Бунда x, y - эрки ўзгарувчилар, $u(x, y)$ - қидирилаётган функция, индексдаги x, y лар u функциянинг x ва y бўйича ҳосилаларини англатади. a, b, c, d, e, f, g - коэффицентлар умуман x, y ва u га боғлиқ функциялар

бўлиши мумкин. Агар улар ўзгармас сонлардан иборат бўлса, ўзгармас коэффицентли, x ва y га боғлиқ функциялар бўлса ўзгарувчи коэффицентли ва ниҳоят, x, y ва u га боғлиқ функциялар бўлса, квазичизикли дейилади.

(1) тенгламанинг типини $D = b^2 - ac$ дискриминантнинг ишораси билан аниқланади. Агар $D > 0$ бўлса, тенглама гиперболлик типга, $D = 0$ бўлса, тенглама параболик типга, $D < 0$ бўлса, тенглама эллиптик типга тегишли бўлади. Тенгламанинг типини аниқлаш жуда муҳим аҳамиятга эга, чунки бир хил типдаги ҳар хил тенгламалар жуда кўп умумий хусусиятларга эга бўлади. Масалан: бир жинсли ингичка стержен x абцисса бўйича ҳар бир t вақт моментида қуйидаги иссиқлик тарқалувчанлик тенгламасини қаноатлантиради. Энди бу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

тенгламанинг қайси типга тегишли эканини аниқлаш мумкин. $A = -a^2, B = 0, C = 0$ бўлгани учун $D = b^2 - ac = 0$, демак бундай тенгламалар параболик типга тегишли бўлади.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари худди оддий дифференциал тенгламалардаги каби, бир неча гуруҳга бўлинади:

1. Аниқ усуллар;
2. Тақрибий-аналитик усуллар;
3. Сонли-тақрибий усуллар;

Аниқ усуллар билан асосан чизикли, хусусий ҳосилали тенгламалар содда кўринишдаги чегаравий ва бошланғич шартлар билан берилганда яхши натижалар олиш мумкин. Бу гуруҳга ўзгарувчиларни ажратиш тарқалувчи тўлқинлар, манба функциялари, Лаплас алмаштиришлари ва бошқа усуллар киради. Тақрибий-аналитик усуллар билан умумий кўринишдаги тенгламаларни ечиш имконияти деярли йўқ, фақат айрим хусусий ҳоллардагина бирор бир натижа чиқиши мумкин.



*Нима учун хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни **мс** типларга ажратамиз?*

Назорат саволлари

1. Қандай тенгламалар математик-физика тенгламалари деб аталади?
2. Математик-физика тенгламаларини тақрибий ҳисоблаш зарурияти қаердан келиб чиқади?
3. Математик-физика тенгламаларини қандай типларга ажратилади?

15-маъруза: Гиперболик типдаги тенгламалар

Ўқув модули бирликлари:

1. Гиперболик типдаги тенгламалар
2. Гиперболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тўр усули
3. Ошкор ва ошкормас схемалар

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Гиперболик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. Қўшимча шартларнинг қандай берилиши;
3. Тўр соҳа тушунчаси, ички ва тугун нуқталар;
4. Ошкор ва ошкормас схемаларга мос шаблонлар;
5. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкор схемалар ёрдамида ечиш алгоритми;
6. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемалар ёрдамида ечиш алгоритми ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Юқорида таъкидлаб ўтканимиздек, амалда учрайдиган барча жараёнлар ўзларининг хусусиятларини ифодаловчи математик моделларга эгадирлар. Масаланинг моҳиятига қараб, бу моделларни ифодаловчи математик тенгламалар турли кўринишда, жумладан, мураккаб жараёнларнинг математик моделлари математик-физика тенгламалари орқали ифодаланади.

Агар тебранувчан характердаги жараёнлар, аниқроқ қилиб айтадиган бўлсак, турли хил ингичка торлар, ҳар хил матреиаллардан ишланган таёқлар ва бошқа хилдаги конструкцияларнинг кўндаланг ва бўйлама тебранишлари жараёнлари ўрганилаётган бўлса, бундай масалаларнинг математик моделлари гиперболик типдаги тенгламаларга келтирилади. Тебранишлар эса сўниб боровчи ёки аксинча бўлиши мумкин. Хусусий ҳолда гиперболик типдаги тенгламаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2)$$

Бунда $u(x, t)$ - изланувчи функция, t - вақт, x - чизиқли координата, a^2 - ўзгармас коэффициент. (2) - кўринишдаги тенгламалар учун одатда иккита бошланғич ва иккита чегаравий шарт берилади. Қаралаётган соҳа $[a, b]$ кесмадан иборат бўлса, $u(x, t)$ функция қуйидаги бошланғич шартларни:

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = f_2(x)$$

ва қуйидагича чегаравий шартларни:

$$u(a, t) = \varphi_1(t) \quad u(b, t) = \varphi_2(t)$$

қаноатлантириши керак.

Умуман барча тип тенгламалар учун чегаравий шартлар қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин:

- 1) Дирихле масаласи: $u(x, y)|_{\Gamma} = \gamma^{(0)}$
- 2) Нейман масаласи: $\frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \gamma^{(1)}$
- 3) Аралаш масала: $\alpha u(x, y) + \beta \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \gamma^{(2)}$

Бу ерда $u(x, y)$ -изланаётган функция;

$\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ -қийматлари маълум функциялар;

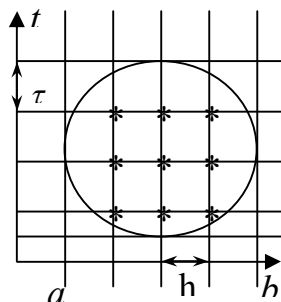
Γ -ечим қидирилаётган соҳа чегараси;

$\vec{n}$ -соҳага ўтказилган нормал бирлик вектор;

α, β -чегаравий шарт белгилари.

(2) кўринишдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш учун сонли усуллар ичида энг кенг тарқалган усул чекли айирмалар усулидан фойдаланамиз. Тенгламада қатнашувчи функция иккита аргументга боғлиқ бўлгани учун, унинг аниқланиш соҳаси текисликда бўлади. Бу соҳани G -деб, унинг чегарасини эса Γ -деб белгилайлик. Чекли айирмалар усулида дастлаб G -соҳа чизиклар ёрдамида бўлакларга бўлинади. Бўлиниш нуқталари тугун, улардан ташкил топган тўпламга эса тўр деб аталади.

G -соҳанинг ичида ётган нуқталар тугун нуқталар, Γ -чегарада ётган нуқталарга чегаравий нуқталар деймиз.



Тўр соҳани қуйидагича ташкил этамиз: $[a, b]$ кесмани $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) тугун нуқталар ёрдамида t -бўйича эса $[0, T]$ оралиқни $t_j = j \cdot \tau$ бўлакларга бўламиз ва текис тўр ҳосил қиламиз.

Бу ерда $h = \frac{b-a}{n}$, $\tau = \frac{T}{m}$ га тенг. Демак, бу ерда h ва τ - x ва t бўйича қадамлардан иборат.

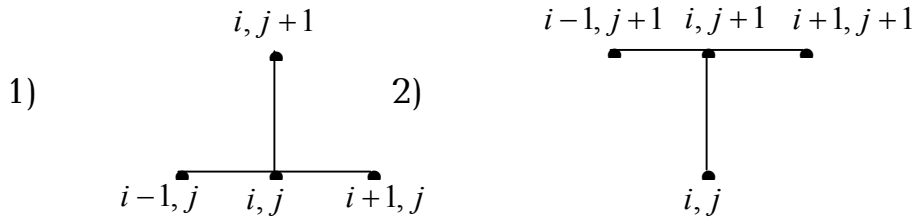
G соҳада ётган (x_i, t_i) тугун нуқталар учун (2) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_i)}{\partial t_j^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} + f(x_i, t_j) \quad (2')$$

Тўр соҳада тўр функцияси деб аталувчи функцияларни қараймиз. Улар G соҳада аниқланган функциялар ўрнида қаралувчи дискрет функциялардан иборат бўлади, яъни оддий дифференциал тенгламалардаги каби хусусий ҳосилали чекли айирмалар билан алмаштирилади. Ҳосилаларни алмаштиришда чекли айирмалардан ишлатилувчи тугун нуқталар мажмуасига шаблон дейилади. Бир хил ҳосилалар учун бир неча хил шаблон асосида чекли айирмалар тузиш мумкин. Шундай қилиб, дифференциал тенглама берилган бошланғич ва чегаравий шартларда чекли айирмали масалага келтирлади.

Биз ҳосил қилган тўр соҳадаги ҳар бир тугун нуқталарда $u(x, t)$ ечимнинг қийматлари $u(x_i, t_j)$ дан иборат бўлади. (2') тенгламани аппроксимация қилиш учун (x_{i-1}, t_j) ; (x_i, t_j) ; (x_{i+1}, t_j) ; (x_i, t_{j+1}) нуқталардан ташкил топган шаблонни ишлатамиз. Бу шаблонда (2') тенгламадаги

хусусий ҳосилаларни қуйидаги схемалар ёрдамида чекли айирмалар билан алмаштирамиз.



1-схемадан кўриниб турибдики, $j+1$ қатламдаги ечим j қатламдаги ечимлар орқали аниқ, ошкор шаклда ифодаланади. Шунинг учун бундай схемаларга ошкор схемалар дейилади. Ошкор схемаларда олдинги қатламдаги хатоликлар йиғиндиси кейинги қатламга ўтганлиги учун, бир неча қатламдан сўнг хатоликлар мажмуаси ҳосил бўлади ва кутилган натижа чиқмаслиги мумкин. Шунинг учун амалда ошкор схемалардан камроқ фойдаланган маъқул.



МС *Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда ошкор схемали алмаштиришлар бажариш хатоликлар йиғиндисини ҳосил қилади, у ҳолда нима учун ошкор схемалардан фойдаланилади?*

2-схемада эса ҳар бир қатламнинг учта нуқтадаги номаълум ечимлари, ўзидан олдинги яъни ҳар бир кейинги қатламдаги ечимларни олдинги қатламдаги 1 та ечим орқали ифодаланади, яъни ҳар бир кейинги қатламдаги ечимларни олдинги қатламдаги ечимлар орқали бевосита бирданига ошкор ҳолда ифодалаб бўлмайди. Бундай схемаларга ошкормас схемалар дейилади. Ошкормас схемада ҳар бир қатламдаги ҳисоблаш хатоликлари бошқа қатламга узатилмайди. Шунинг учун, бундай схемаларда ҳосил бўлган ҳисоблаш формулалари бирмунча мураккаб бўлса ҳам, лекин хатолик кам бўлади. Демак, амалда ошкормас схемалардан фойдаланган маъқулроқ. (2') тенгламадаги $\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t_j^2}$;

$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2}$ ифодалар ўрнига (қуйидаги барча алмаштиришлардан қулайлик учун $u_{i,j}$ каби ёзувлар ўрнида u_i^j ёзувлардан фойдаланамиз)

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t_j^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} \quad \text{ва} \quad \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad \text{чекли айирмали}$$

формулаларни қўйиб, (2') тенгламаларга мос қуйидаги чекли-айирмали тенгламаларни ҳосил қиламиз.

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j) \quad (3)$$

(3) тенгламани u_i^{j+1} га нисбатан ечиб,

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j + \frac{\tau^2 a^2}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \quad (4)$$

ишчи формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда $j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Ҳосил бўлган (4) формула ошкор схема асосида ҳосил қилинган бўлиб, берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини ҳисоблайди. Юқорида таъкидланганидек, ошкор схемаларда ҳосил қилинган тақрибий ечим муайян хатоликлар мажмуасини ўзида сақлайди. Йўл қўйилиши мумкин бўлган хатоликни бирмунча камайтириш мақсадида, ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қандай ечиш мумкинлигини кўриб чиқамиз. Бунинг учун (x_i, t_j) тугун нуқталар учун

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad \text{чекли-айирмали формулани (2') формулага}$$

қўядиган бўлсак,

$$\frac{u_{i(0)}^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f(x_i, t_j) \quad (5)$$

формула ҳосил бўлади.

(5) формула учун керакли алмаштиришларни бажариб,

$$\frac{\tau^2}{h^2} a^2 u_{i+1}^{j+1} - (2 \frac{a^2 \tau^2}{h^2} - 1) u_i^{j+1} + \frac{a^2 \tau^2}{h^2} u_{i-1}^{j+1} = -f_{ij} \tau^2 - 2u_i^j + u_i^{j-1} \quad (6)$$

ва қуйидаги белгилашларни киритиб,

$$A_i = \frac{\tau^2}{h^2} a^2, B_i = \frac{2\tau^2 a^2}{h^2} - 1, C_i = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \quad \text{ва} \quad F_i = -f_{ij} \tau^2 - 2u_i^j + u_i^{j-1};$$

(бу ерда -ҳар бир j нуқта учун $(j=1,2,3,\dots,m-1)$) қуйидаги уч диагоналли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$A_i \cdot u_{i+1}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i-1}^{j+1} = f_i \quad (7) \quad (i=1,2,\dots,n-1)$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системаси j нинг ҳар бир қийматида $n-1$ та тенглама ва $n+1$ та номаълумлардан иборат. Етишмаётган 2 та тенгламани чегаравий шартлардан оламиз. Натижада $n+1$ та номаълумли $n+1$ та тенгламадан иборат уч диагоналли тенгламалар системаси ҳосил бўлади. “Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни ҳайдаш усули билан ечиш” мавзусида таъкидлаб ўтилганидек, юқоридаги кўринишдаги тенгламалар системасини ҳайдаш усули билан ечиш учун номаълум ечимни $u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}$ (8) кўринишда қидирамиз. Бунда $\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i} - C_i \cdot \alpha_i$;

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i - \beta_i - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i} \quad \text{формулалар ёрдамида топилади.} \quad (i=1,2,\dots,n-1).$$

Берилган чегаравий шартлардан биринчисини, яъни $x=a$ нуқтадаги $u(a,t) = \varphi_1(t)$ шартни ва (8) формулани таққослаб, $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \varphi_1(t)$ номаълум коэффицентларнинг бошланғич қийматлари ҳосил қилинади. Натижада, $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ коэффицентлар барчаси кетма-кет ҳисобланади.

Иккинчи чегаравий шартдан, яъни $u(b,t) = \varphi_2(t)$ дан $u_n^j = \varphi_2(t)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Сўнгра,

$$u_i = \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1}^j + \beta_{i+1} \quad (9) \quad (i=n-1,\dots,0)$$

формула ёрдамида қолган барча тенгламанинг қидирилаётган ечимлари, номаълум u_i^j лар ҳисобланади.

Назорат саволлари

1. Ошкор ва ошкормас схемаларнинг асосий моҳияти нимадан иборат?
2. Қандай жараёнлар гиперболик типдаги тенгламалар орқали ифодаланади?
3. Гиперболик типдаги тенгламаларнинг умумий кўриниши қандай?
4. Гиперболик типдаги тенгламалар учун қандай қўшимча шартлар берилади?
5. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак бўладиган ишчи формулалар ҳосил қилинг.
6. Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак бўладиган ишчи формулалар ҳосил қилинг.

16-маъруза: Параболик типдаги тенгламалар.

Ўқув модули бирликлари:

1. Параболик типдаги тенгламалар
2. Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тўр усули
3. Ошкор ва ошкормас схемалар

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг тўр усули, усулнинг моҳияти;
3. Ошкор ва ошкормас схемаларнинг ишчи алгоритми ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Агар текширилаётган жараёнда вақт бўйича ҳаракат ўзгармас бўлса, бундай жараёнларнинг математик модели параболик типдаги тенгламалар орқали ифодаланади. Бундай жараёнларга қувурлардаги қовушқоқ суюқликларнинг ностационар ҳаракати жараёнлари, ғовак тўсиқларнинг иссиқлик ўтказувчанлик масалалари, диффузия жараёни ва бошқалар киради.

Параболик типдаги тенгламаларни хусусий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

бу ерда $u(x, t)$ – изланаётган функция, $f(x, t)$ – масаланинг физик моҳиятидан келиб чиқиб танланувчи манба функция, a^2 – ўзгармас коэффициент.

Демак, юқоридаги барча жараёнларда вақт бўйича ҳаракат тезлиги ўзгармас бўлиб, тезланиш 0 га тенг. (1) тенгламани

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (2)$$

бошланғич шартларни ва $[a,b]$ оралиқнинг четларида

$$u(a,t) = \varphi_1(t) \text{ ва } u(b,t) = \varphi_2(t) \quad (3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш керак. Берилган чегаравий шартлар, биз юқорида келтирган чегаравий шарт турларига кўра, Дирихле масаласига мос келади. Худди гиперболик типдаги каби, параболик типдаги тенгламаларни ҳам тўр усулида ечиш мумкин. Бунинг учун, дастлаб, x ва t ўқлар бўйича тўр киритамиз.

$$x_i = a + i \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n};$$

$$t_j = j \cdot \tau; \quad \tau = \frac{T}{m};$$

бу ерда $n - [a,b]$ оралиқни бўлишлар сони;

$h - x$ нинг ўзгариш қадами;

T – қаралаётган вақт оралиғи;

m – вақт бўлаклари сони;

τ – вақт бўйича ўзгариш қадами.

Тўр соҳасидаги ҳар бир $u(x_i, t_j)$ нуқта (1) тенгламани қаноатлантиргани учун уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t_j} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} + f(x_i, t_j) \quad (4)$$

(4) тенгламадаги $\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t_j}$ ва $\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2}$ хусусий ҳосилалар ўрнига

(қулайлик учун $u(x_i, t_j) = u_i^j$, $f(x_i, t_j) = f_{ij}$ деб белгилаб оламиз) $\frac{\partial u_i^j}{\partial t_j} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$;

$\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_i^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$ чекли айирмали формулаларни қўйиб, қуйидаги

интеграллаш соҳасининг тугун нуқталарида ёзилган

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + f_{ij}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни u_i^{j+1} га нисбатан ечиб,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\tau \cdot a^2}{h^2} [u_{i+1}^j - u_i^j + u_{i-1}^j] + \tau \cdot f_{ij} \quad (5)$$

ишчи формулани ҳосил қиламиз.

(5) формуладан кўриниб турибдики, ҳар бир $j+1$ қатламдаги ечимлар j қатламлар орқали топилади ва демак, у ошкор схемали алмаштириш ҳисобланади. Маълумки, бундай схемали алмаштиришлар натижасида барча олдинги қатламларда йўл қўйилган хатоликлар йиғиндиси ҳосил бўлади. Бунинг натижасида, вақт факторини ошириб бориши билан олинаётган тақрибий ечимларнинг ишончлилиқ даражаси кескин камайиб боради. Шунинг учун топиладиган ечимнинг аниқчилигини ошириш мақсадида ошкормас чекли айирмали схемаларни

ишлатиш мақсадга мувофиқдир. Шунинг учун (4) формуладаги $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_i^2}$ хусусий ҳосила ўрнига $\partial^2 u_i^j \approx \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}$ чекли айирмали формулани қўйиб, $\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \cdot \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_{ij}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Керакли алмаштиришлар бажарсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i-1}^{j+1} - (2 \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} - 1) \cdot u_i^{j+1} + \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i+1}^{j+1} = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j \quad (6)$$

(6) тенгламада

$$A_i = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad B_i = \frac{2 \cdot a^2 \cdot \tau}{h^2} - 1; \quad C_i = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad F_i = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j;$$

белгилар киритиб,

$$A_i \cdot u_{i-1}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i+1}^{j+1} = F_i \quad (7)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Ҳосил бўлган (7)-тенгламалар системаси j нинг ҳар бир қийматида $n-1$ та тенглама ва $n+1$ та номаълумлардан иборат. Етишмаётган 2 та тенгламани чегаравий шартлардан оламиз. Натижада $n+1$ та номаълумли $n+1$ та тенгламадан иборат уч диогоналли тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундай системани “хайдаш” усули билан ечиш мақсадга мувофиқ бўлиб, бу жараён гиперболик тенгламалар учун тўла кўрсатилди. Юқоридаги (7) системани шу тарзда ечиб, барча қидирилаётган ечимлар аниқланади.



МС Математик моделлари параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланувчи жараёнларни санаб беринг.

Назорат саволлари

1. Параболик типдаги тенгламаларни умумий кўринишда қандай ифодаланади?
2. Параболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак бўладиган ишчи формулаларни ҳосил қилинг.
3. Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш учун керак бўладиган ишчи формулаларни ҳосил қилинг.

17-маъруза: Эллиптик типдаги тенгламалар

Ўқув модули бирликлари:

1. Эллиптик типдаги тенгламалар
2. Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишнинг тўр усули

Аниқлаштирилган ўқув мақсадлари.

Талабалар ушбу мавзунини тўла ўзлаштирилганларидан сўнг:

1. Эллиптик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган амалий жараёнлар;
2. Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишнинг тўр усули, усулнинг моҳияти;
3. Зейдел усулининг моҳияти ҳақида маълумотга эга бўладилар.

Маълумки, қаралаётган масалада вақт фактори кучсиз роль ўйнаса, яъни жараённинг математик моделида вақтни ифодаловчи параметрлар қатнашмаса, бундай жараёнларни стационар жараёнлар деб аталади. Стационар жараёнларга қурилиш механикасини зўриқиш ва эгилиш масалаларини киритиш мумкин. Стационар жараёнларнинг математик моделлари эллиптик типдаги қўйидаги тенгламалар орқали ифодаланиши мумкин (икки ўлчовли фазода):

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(1) тенгламани Пуассон тенгламаси ҳам аталади. Тенгламанинг чап томонида турган миқдорни

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Лаплас оператори орқали ифодаланиб, ёзилган қўйидаги ҳоли

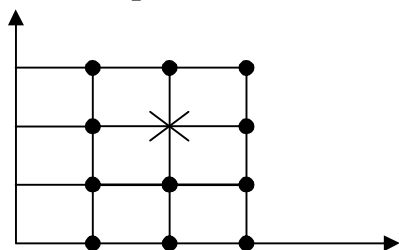
$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{ёки} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

Лаплас тенгламаси деб аталади.

Икки ўлчамли (1) ва (2) тенгламаларни ечимини икки ўлчамли G соҳада аниқланган деб фараз қиламиз. Соҳа чегараси Γ ёпиқ чизик билан чегараланган деб ҳисоблаймиз.

Соддалик учун интеграллаш оралиғини тўғри тўртбурчак деб оламиз.

Юқорида таъкидлаганимиздек Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласи берилган тўртбурчак соҳа учун қўйидагича бўлади:



$$\begin{aligned} u(x,y)_{x=a} &= f_1(y) & u(x,y)_{y=c} &= f_3(x) \\ u(x,y)_{x=b} &= f_2(y) & u(x,y)_{y=d} &= f_4(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Бу ерда $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ лар интеграллаш соҳасининг чегаралардаги

берилган функциялари, дастлаб қаралаётган x ва y тўғри чизиклар бўйича $x_i = a + ih$, $y_i = c + j\tau$ тугун нуқталар ёрдамида тўр киритамиз. Чизмада чегаравий нуқталар «•» белгиси билан ички нуқталар эса «×» белгиси билан белгиланган. Юқорида $h = (b-a)/n$, $\tau = (d-c)/m$ бўлиб n, m – мос равишда ox, oy ўқлар бўйича тугун нуқталар учун қуйидаги тенгламалар ўринли бўлади:

(4) даги иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар ўрнига керакли чекли айирмали формулаларни қўямиз ва қуйидаги :

$$\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = f(x_i, y_j) \quad (4')$$

чекли айирмали тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Соддалик учун (физик маъносига кўра мумкин) $h = \tau$

$$\frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial y_j^2} = f(x_i, y_j) \quad (4)$$

деб олайлик.

У ҳолда (4') тенгламани ечиб,

$$u_i^j = \frac{1}{4}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f(x_i, y_j)) \quad (5)$$

$n-1$ та тенгламадан $n+1$ номаълумдан иборат чизикли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Етишмаган тенгламалар ўрнига (3) чегаравий шартлардан фойдаланамиз.

Тенгламаларнинг кўринишини таҳлил қилиб, уни тақрибий-итерацион усуллар гуруҳига кирувчи Зейдель усули билан ечиш қулай эканлигини кўрамиз.

Зейдель усули ҳақида қисқача назарий маълумотлар.

Зейдель усули 1874 йилда таниқли немис математиги Ф. Зейдель томонидан ишлаб чиқилган бўлиб, уни итерация усулининг такомиллашган кўриниши деб қабул қилиш мумкин. Шунинг учун бу усулни кўпинча итерация усули деб ҳам юритилади.

Усулнинг моҳиятига кўра номаълум u_i^j ечимларни топиш учун

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} [u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - h^2 f_i^j] \quad (10)$$

итерацион формулалардан фойдаланилади. Бунда қавслар ичига ёзилган юқори индекс яқинлашиш номерини билдиради. Яқинлашишлар сони ортиб борганда, яъни k етарлича катта бўлганда, $u_{i,j}^{(k)}$ ечимлар $u_{i,j}$ аниқ ечимларга интилади.

Итерацияларни $\max |u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)}| < \epsilon$, $i=1..n-1$, $j=1..m-1$,

шарти бажарилгунча давом эттириш мумкин. Бунда ϵ ихтиёрий, олдиндан танлаб олинадиган кичик сон- ечим аниқлиги.

Юқоридаги (10) формулани фойдаланишга қулай кўринишда ёзиб олайлик.

$$u_i^j = \frac{1}{4} [u_{i-1}^j + v_{i+1}^j + v_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f_i^j]$$

Бу ерда v_i^j лар усулнинг моҳиятига кўра аввалги яқинлашишдаги қийматларни олади.

Дастлабки яқинлашиш сифатида ихтиёрий сонларни олишимиз мумкин. Масалан, тўрнинг барча тугун нуқталарида $u_{i,j}=0$ дейишимиз мумкин. Шундан сўнг барча яқинлашишлар топилади ва ечимнинг аниқлигини ҳар сафар текшириб турилади.



МТ *Эллиптик типдаги тенгламаларни ечишда ишлатиладиган Зейдель усулининг моҳиятини тушунтириб беринг.*

Назорат саволлари

1. Қандай жараёнлар эллиптик типдаги тенгламалар орқали ифодаланади?
2. Эллиптик типдаги тенгламалар умумий ҳолда қандай кўринишда бўлади?
3. Эллиптик типдаги тенгламалар учун қандай қўшимча шартлар берилади?
4. Эллиптик типдаги тенгламаларни тўр усулида ечишнинг моҳиятини тушунтириб беринг.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

Асосий адабиётлар

1. Н. С. Бахвалов и др. «Численные методы». М.Наука 1987
2. В. П. Демидович и др. «Основы вычислительной математики» М.Наука 1987
3. Березин И. С. и др. «Методы вычислений» М.Наука 1996
4. Бойзоқов А, Қаюмов Ш, «Ҳисоблаш математикаси асослари», Ўқув қўлланма. Тошкент 2000.
5. Исроилов М. «Ҳисоблаш усуллари» Тошкент. Ўзбекистон. 2003.

Қўшимча адабиётлар

6. Б.Х. Хўжаёров «Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари» Тошкент 1995.
7. Сиддиқов А. «Сонли усуллар ва программалаштириш» Ўқув қўлланма. Тошкент 2001.

Интернет саҳифалари

8. www.exponenta.ru
9. www.techno.edu.ru
10. www.toehelp.ru
11. www.math.msu.su

Сўз боши	3
1-маъруза: "Сонли усуллар ва алгоритмлар" фанига кириш	5
2-маъруза. Хатоликлар ва уларни баҳолаш.	9
3-маъруза: Чизиқсиз тенгламаларни сонли-тақрибий ечиш усуллари. Оралиқни тенг иккига бўлиш усули.....	14
4-маъруза: Уринмалар ва ватарлар усули.....	17
5-маъруза: Оддий кетма-кетлик (итерация) усули	20
6-маъруза: Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули.	23
7-маъруза: Берилган матрицага тескари матрицани топиш ва чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечиш.....	29
8-маъруза: Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг тўғри тўртбурчаклар усули	32
9-маъруза: Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашнинг трапеция ва Симпсон (параболалар) усули	35
10-маъруза: Энг кичик квадратлар усули.....	37
11-маъруза: Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари	39
12-маъруза: Чегаравий масалаларни ечишнинг чекли-айирмалар усули..	43
13-маъруза: Чегаравий масалаларни ечишнинг Галёркин усули.....	51
14-маъруза: Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг типлари.	56
15-маъруза: Гиперболик типдаги тенгламалар	59
16-маъруза: Параболик типдаги тенгламалар.....	63
17-маъруза: Эллиптик типдаги тенгламалар	66
Фойдаланилган адабиётлар рўйҳати.....	68