

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Mexanika – matematika fakulteti

«Hisoblash usullari» kafedrası

Ilyasov Jasur Rahimqulovich

**NOCHIZIQLI TENGLAMALARNI MAPLE VA MATHCAD
MATEMATIK PAKETLARI YORDAMIDA TAQRIBIY YECHISH**

«5480100 – Amaliy matematika va informatika» ta‘lim yo‘nalishi
bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ilmiy rahbar _____ dots. A.Abdirashidov
2013 y. «___» _____

Bitiruv malakaviy ish «Hisoblash usullari» kafedrasida bajarildi, kafedraning
2013 yil «__» _____dagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya
etildi (____ -son bayonnoma).

Kafedra mudiri _____ dots. A.Abdirashidov

Bitiruv malakaviy ish YaDAKning 2013 yil «__» _____dagi majlisida
himoya qilindi va ____ ball bilan baholandi (____ -son bayonnoma).

YaDAK raisi: _____

A‘zolari: _____

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1. ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR, ULARNI YECHISHNING GEOMETRIK TALQINI.....	7
1.1. Dastlabki tushunchalar.....	7
1.2. Masalani yechish bosqichlari. Tenglamani yechishning geometrik talqini.....	8
1.3. Tenglamani yechishning taqribiy (iteratsion) usullari va iteratsion jarayon tushunchalari.....	10
2. TENGLAMANING ILDIZLARINI AJRATISH.....	13
3. NOCHIZIQLI TENGLAMANING ODDIY ILDIZLARINI TOPISH USULLARI.....	22
3.1. Skanirlash usuli.....	22
3.2. Kesmani teng ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli).....	23
3.3. Proporsional bo'laklar usuli (vatarlar usuli).....	28
3.4. Nyuton usuli (urinmalar usuli).....	29
3.5. Vatarlar va urinmalar usullarining aralash varianti.....	31
3.6. Oddiy iteratsiya usuli.....	32
3.7. Kesuvchilar usuli (chiziqli interpoliyatsiya qoidasi).....	36
3.8. Steffensen (Eytken-Steffensen) usuli.....	36
4. QIZIQARLI AMALIY MASALALARNI MATEMATIK PA- KETLAR YORDAMIDA YECHISH.....	40
4.1. Nochiziqli tenglamalarni Maple dasturi yordamida yechish.....	40
4.2. Nochiziqli tenglamalarni Mathcad dasturi yordamida yechish.....	47
XULOSA.....	51
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	53
ILOVALAR.....	55

KIRISH

Prezidentimiz I.A.Karimovning [1] asarida "...korxonalarni modernizatsiya qilish, texnik va texnologik qayta jihozlashni yanada jadallashtirish, zamonaviy, moslashuvchan texnologiyalarni keng joriy etish" inqirozga qarshi choralardan biri sifatida ko'rsatilgan. Prezidentimiz I.A.Karimovning «Vatanimizning kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori, avvalambor farzandlarimizning o'nib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak» degan oqilona gaplariga amal qilmog'imiz lozim. Bu vazifalarni zamonaviy kompyuter texnologiyalarining tadbqiqsiz bajarish mumkin emas. Ilmiy asoslangan rejalar tuzish, ularni amaliyotga joriy etish eng ilg'or axborot- kommunikatsiya texnologiyalardan foydalanishni taqozo etadi [2,3]. Prezidentimizning 2002 yil 31 mayda qabul qilingan "Kompyuterlashtirishni yanada rivojlantirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini joriy etish" to'g'risidagi farmonida kompyuter texnologiyalaridan foydalanishning samaradorligini oshirish yo'nalishlari belgilab berilgan [4,5].

Mavzuning dolzarbligi. Kompyuterning qo'llanilish sohalaridan biri matematik, mexanik va fizik jarayonlarni va ob'ektlarning matematik modellarini hisoblash usullari va kompyuterlarning dasturiy vositalari yordamida tadqiq etish bo'lib qolmoqda. Hisoblash matematikasi usullari va kompyuterlarning zamonaviy imkoniyatlari birgalikda bunday jarayonlar va ob'yektlarning shu paytgacha nomalum xususiyatlarini ochishga va, shu asnoda, texnologik jarayonlarni takomillashtirishga xizmat qilmoqda. Ushbu bitiruv malakaviy ishning mavzusi ham hisoblash matematikasi va kompyuterning ilmiy tadqiqot ishlarda qo'llanilishiga bog'liq bo'lib, ilmiy va amaliy jihatdan dolzarbdir.

Hozirgi kunda fan-texnika rivojlanib borgan sari matematika va kompyuterning o'rnini ortib bormoqda. Shu jumladan matematikadan fizika, mexanika, biologiya, kimyo va astronomiya hamda iqtisodiy masalalarni yechishda, bu jarayonlarni tahlil etishda va boshqa ko'p sohalarda foydalaniladi.

Bu sohalardagi jarayonlar matematik modelining bir qismi nochiziqli tenglamalarga olib kelinadi.

Ushbu ishda nochiziqli tenglamalarni Maple va Mathcad dasturlari yordamida analitik va taqribiy yechish masalasi qaraladi. Quyida masalaning qo'yilishi va uni yechishning ketma-ket algoritmi keltirilgan. Nochiziqli tenglamalarni yechish uchun zarur bo'lgan hisoblash usullari tavsiflanadi.

Masalaning qo'yilishi. Quyida ana shunga erishish uchun avvalo nochiziqli tenglama, ularning yechimlarini analitik usulda topish, qay hollarda matematik paketlardan qanday foydalanish mumkinligi haqida so'z yuritish. Nochiziqli tenglamalardan iborat bo'lgan bir qator fizik-mexanik jarayonlar modellari nochiziqli tenglamalarini taqribiy yechish masalasi qaralib, taqribiy hisob usullari bo'yicha aniq amaliy masalalar yechish.

Ishning maqsadi va vazifalari. Ushbu bitiruv malakaviy ishini yozishda nochiziqli tenglamalarni analitik va sonli yechish usullari yordamida Maple va Mathcad matematik paketidan foydalanib, yechish, aniq amaliy masalalarda bu jarayonni ko'rsatish, masalani yechishning algoritmi va dasturini yaratish ko'zda tutilgan.

Muammoning ishlab chiqilish darajasi. Bitiruv malakaviy ishida nochiziqli tenglamalardan iborat bo'lgan fizika-mexanikaning bir qator amaliy masalalarini taqribiy yechish masalasi qaralib, taqribiy hisob usullari bo'yicha aniq amaliy masalalar yechish. Tadqiqotlar aniq misollarda bajarildi, ular uchun zarur algoritmlar va dasturlar tuzildi.

Ishning ilmiy yangiligi. Nochiziqli tenglamalarni matematik paketlardan foydalanib yechishda bu bo'limlarda qo'llaniladigan (ba'zaviy) metodlarni bilish zarur. Ular hisoblash matematikasining asosiy bo'limlarida qo'llaniladigan elementar almashtirishlar va hisoblashlarning buyruqlaridan (operatorlaridan) foydalanish imkonini beradi.

Amalda ixtiyoriy matematik paket yordamida amalga oshirish mumkin bo'lgan "elementar" hisoblashlar va almashtirishlar zanjiri murakkab masalalarni ham yechish imkonini beradi.

Tadqiqot predmeti. Maple va Mathcad dasturiy paketi hisoblash matematikasining maxsus bo'limlaridagi ko'pgina masalalarning yechimlarini topishga imkon beradi. Maple va Mathcad muhitida ishlash texnologiyasi bilan [7, 11, 13, 19] larda tanishish mumkin. Bundan tashqari, Internet saytlar [21 - 25] bizga yanada kengroq tushunchalarni egallash va to'laroq ma'lumotlar olish imkonini beradi. Ushbu bitiruv malakaviy ishida Maple va Mathcad matematik paketning nochiziqli tenglamalarning ba'zi turlarini yechish uchun qo'llash uslubi keltirilgan.

Tadqiqot obykti. Nochiziqli tenglamalar bitiruv malakaviy ishining tadqiqot obyektidir. Nochiziqli tenglamalarni taqribiy yechish usullari yetarlicha mufassal [6, 8 - 10, 12, 14 - 18, 20] adabiyotlarda keltirilgan.

Ishning ilmiy ahamiyati. Bu bitiruv malakaviy ishida nochiziqli tenglamalarni Maple va Matchad matematik paket yordamida analitik va taqribiy yechish usullari ko'rsatilgan.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan «Hisoblash matematikasi» va «Hisoblash usullari» fanlaridan bo'ladigan amaliy mashg'ulotlarda, seminar mashg'ulotlarida, nochiziqli tenglamalarni sonli yechish bilan bog'liq tanlov fanlari mashg'ulotlarida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi Kirish qismi, Asosiy qism, Xulosa, Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va Ilovalardan iborat bo'lib, jami 60 betdan iborat. Asosiy qism 4 ta bobdan iborat bo'lib, 1-bobda masalaning qo'yilishi, nochiziqli tenglamalar tushunchasi, masalani yechish bosqichlari, tenglamani yechishning geometrik talqini va iteratsion jarayonlar tushunchalari berilgan va bularning qo'llanilishi misollarda ko'rsatilgan. 2-bob nochiziqli tenglama ildizlarini ajratish muammolari bayon qilingan, misollarda tushuntirilgan. 3-bobda nochiziqli tenglama oddiy ildizlarini topishning har xil taqribiy usullari keltirilgan, misollar orqali asoslangan. 4-bobda esa nochiziqli tenglamalarni Maple va Mathcad paketi yordamida sonli yechish usullari dasturlar bilan ko'rsatilgan, bir qator amaliy masalalar sonli yechilgan. Xulosa qismida bitiruv ishining asosiy natijalari va uning amaliy tadbirlari bayon qilingan. Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati 20 ta adabiyotdan iborat, foydalanilgan Internet saytlar ko'rsatilgan. Ilova-

larda esa taqribiy hisob usullari algoritmlarining blok-sxemalari va dasturlar matnari keltirilgan.

Annotatsiya. Bu ishda nochiziqli tenglamalarni Maple va Mathcad matematik paketi yordamida analitik va taqribiy yechish hisob ketma-ketligi keltirilgan. nochiziqli tenglamalar tadbiqlarining, masalan, fizik-mexanik jarayonlar masalalarida qo'llanilishi ko'rsatilgan. Nochiziqli tenglamalardan iborat bo'lgan bir qator amaliy masalalarni sonli yechish masalasi qaraladi. Nochiziqli tenglamalarni yechishning bir qator taqribiy hisob usullar (oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli, vatarlar usuli, urinmalar usuli, iteratsiyalar usuli, Steffensen usuli va boshqa usullar)dan iborat. Shu usullardan foydalanib bir qator aniq amaliy masalalar yechilgan, hisob algoritmi va blok-sxemasi tuzilgan, shunga ko'ra Maple va Mathcad matematik paketida dastur ishlab chiqilgan. Olingan natijalar analitik yechimlar bilan taqqoslangan, natijalarni ko'rinishida grafiklardan foydalanilgan, tegishli xulosalar chiqarilgan.

1. ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR, ULARNI YECHISHNING GEOMETRIK TALQINI

Har xil ob'yektlarni modellar yordamida tadqiq qilishning ko'pgina masalalari nohiziqli tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Xususan, elektron, radioelektron va hisoblash texnikasi qurilmalarini tadqiq qilishda, tebranishlar nazariyasi, suyuqlik va gaz mexanikasi, ximiya-texnologiya va boshqa sohalar masalalari modellar yordamida yechishda ana shunday masala yuzaga keladi.

1.1. Dastlabki tushunchalar

Ushbu

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

nohiziqli tenglamaning ildizini (ildizlarini) topish talab etiladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lsa, u holda (1.1) tenglama n -darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya'ni

$$f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1.2)$$

bunda $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ - berilgan $P_n(x)$ ko'phadning koeffitsiyentlari.

Darajasi to'rtidan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalar uchun uning ildizlarini koeffitsiyentlari orqali ifodalovchi aniq formula mavjud emas. Algebraik tenglama ildizlari sonini ko'p-hadning darajasiga qarab, ularning xarakterini esa shu ko'phad koeffitsiyentlarining ishorasiga qarab aniqlash mumkin. Ko'phadning, ya'ni (1.2) algebraik tenglamaning ildizlarini ajratish masalasi yaxshi o'rganilgan va ancha osondir, bunda a_i ($i=0,1,\dots,n$) koeffitsiyentlar ham haqiqiy va ham kompleks sonlardan iborat bo'lishi mumkin. Faqat shuni ta'kidlaymizki, bunda (1.2) ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish, Goner sxemasi, o'rniga qo'yish orqali akslantirish (masalan, $x=cy$, $x=y\pm a$, $x=1/y$ kabi almashtirishlar), Bernulli usuli va boshqa usullar bu algebraik tenglamaning ildizlarini ajratish masalasini soddalashtiradi. Shun-

ing uchun n -darajali algebraik tenglama, ya'ni $P_n(x)$ ko'phadning ildizlari haqida kengroq tushunchalar alohida o'rganish magsadga muvofiq.

Algebraik bo'lmagan har qanday tenglama *transendent tenglama* (*transendent funksiyalar*: ko'rsatgichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va boshqa funksiyalarni o'z ichiga olgan tenglama) deb ataladi. Masalan,

$$\sin(2x) \frac{2,1x+1}{0,3x+1} - 0,4x^2 = 0, \quad 2^{0,1x} - 6 \lg(44-x) + 5,5 \sin(x) = 0.$$

Kamdan kam hollardagina transendent tenglamalar ildizlarining aniq qiymatini topish mumkin. Transendent tenglamalar birorta ham haqiqiy ildizga ega bo'lmisligi, chekli yoki cheksiz sondagi ildizlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, yuqorida keltirilgan misollardan birinchi tenglama 7 ta, ikkinchisi esa 5 ta haqiqiy ildizga ega (buni mustaqil aniqlang, masalan, Maple dasturi yordamida uning grafigini chizing).

Shularga ko'ra tenglamaning taqribiy ildizlarini topish usullari va ularning aniqlik darajasi muhim ahamiyatga ega.

Shunday qilib, algebraik va transendent tenglamalar ikki turga bo'linadi: *chiziqli* (*bitta yechimli*) va *nochiziqli* (*bir yoki bir nechta yechimli*) tenglamalarga bo'linadi. Nochiziqli tenglamalar esa: algebraik (yechimlari n ta) va transendent (yechimlari soni noma'lum) tenglamalarga bo'linadi.

1.2. Masalani yechish bosqichlari. Tenglamani yechishning geometrik talqini

Masalani yechish bosqichlari: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechish usullari ikki turga bo'linadi: to'g'ri (yoki analitik) va taqribiy (iteratsion) usullar. Analitik usulda tenglamaning barcha yechimlari chekli sondagi operatsiyalarda (yoki formulalar) orqali aniqlanadi. Masalan, shu usulga misol qilib ushbu $ax^2+bx+c = 0$ – kvadrat tenglamaning yechimini topishni keltirish mumkin. Bu kvadrat tenglamaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechish bir necha bosqichga bo'linadi.

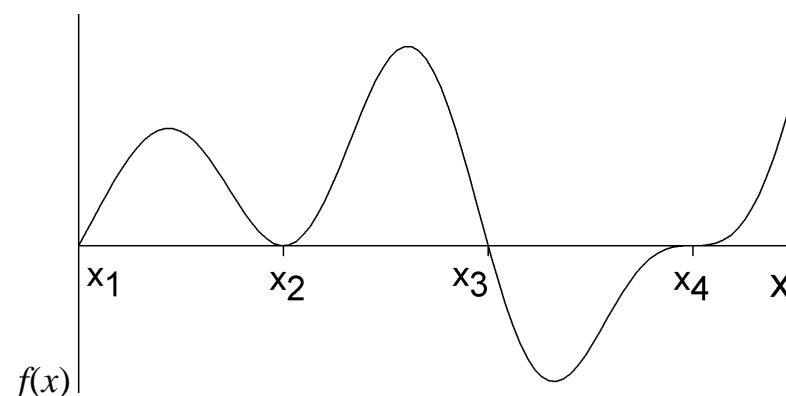
- ildizlarning mavzudligini, sonini, xarakterini va ularning joylashishini tekshirish;
- ildizlarni ajratish;
- ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish, ya'ni tengla-maning yagona ildizi mavjud bo'lgan yetarlicha kichik $[a,b]$ kesmani aniqlash (dastlabki yaqinlashuvchi ildiz);
- ildizlarning barchasini yoki ularning bir qismini talab qilingan aniqlikda topish.

Dastlabki uchta bosqichda analitik yoki grafik usuldan (ba'zida tadqiqot obyekti yoki hodisaning fizik ma'nosidan) foydalanish mumkin. Bunda quyidagi holatlar kuzatiladi: ildiz yagona; cheksiz ko'p yechimlar; ildiz yo'q; bir nechta yechimlar mavjud bo'lib, ulardan ba'zilari haqiqiy, ba'zilari esa mavhum; ildizlar karrali; ildizlar bir biriga juda yaqin va dastlabki yaqinlashishni topish murakkab.

Oxirgi bosqichda esa biror taqribiy (iteratsion) usuldan foydalaniladi, bunda dastlabki tenglamaning ildizini topish juda murakkab bo'lgan holda bu tenglama uning ildiziga teng yoki unga juda ham yaqin joylashgan ildizli sodda tenglamaga ham almashtirilishi (masalan, transendent tenglamani algebraik tenglamaga almashtirish) mumkin.

Tenglamani yechishning geometrik talqini. Tenglama-ning ildizlari har xil bo'lishi mumkin. Geometrik nuqtai nazardan bu \bar{x} ildiz $y = f(x)$ funksiya grafigining Ox absissa o'qi bilan kesishish nuqtasini bildiradi. Agar birinchi tartibli hosila $f'(\bar{x}) \neq 0$ bo'lsa, u holda \bar{x} – *oddiy ildiz*, aks holda esa u *karrali ildiz* deb ataladi.

Agar barcha $k < m$ va $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$ uchun $f^{(k)}(\bar{x}) = 0$ bo'lsa, u holda m – butun son \bar{x} ildizning *karrasi* deb ataladi. 1.1–rasmda x_1 va x_3 – odiy ildiz, x_2 – eng kamida ikki karrali ildiz, x_4 – eng kamida uch karrali ildiz.



1.1–rasm. Algebraik tenglama ildizlarining sxematik tasviri.

Boshqacharoq qilib aytganda, agar $f(x)$ funksiyani \bar{x} ildizi atrofida $f(x) = (x-\bar{x})^p g(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $g(x)$ – chegaralangan funksiya ($g(\bar{x}) \neq 0$) uchun p – natural son ildizning karrasi deb ataladi. Toq p larda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da ishorasini almashtiradi, ya'ni $f(a)f(b) < 0$, juft p larda esa yo'q.

1.3. Tenglamani yechishning taqribiy (iteratsion) usullari va iteratsion jarayon tushunchalari

Tenglamani yechish uchun qo'llaniladigan taqribiy (iteratsion) usullar quyidagilar: kesmani ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli); proporsional bo'laklar usuli (vatarlar usuli); urinmalar usuli (Nyuton usuli); oddiy iteratsiya usuli; kesuvchi chiziqlar usuli; kombinatsiyali usul (bir necha usulning uyg'un birikmasidan tuzilgan usul); kesimlar usuli (chiziqli interpolatsiya qoidasi); Steffensen usuli (Eytken-Steffensen usuli); va hokazo.

Dastlabki $f(x) = 0$ tenglamani $\varphi(x) = x + g(x) \cdot f(x)$ almash-tirish orqali unga ekvivalent bo'lgan ushbu $x = \varphi(x)$ tenglama-ga keltiramiz, bunda $g(x)$ – ishorasini o'zgartirmaydigan ixtiyoriy uzluksiz funksiya.

Iteratsion usullarda yechimning dastlabki x_0 – ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirib boriladi. Natijada yechimning $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ ketma-

ketligi hosil qilinadi. Tenglamani yechishning iteratsion usuliga ko'ra uning ildiziga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0$ tenglikning bajarilishidan chiqariladi.

Agar bunda x_{n+1} ni hisoblash uchun undan oldin hisoblangan bitta x_n yaqinlashishdan foydalanilsa, ya'ni $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$, u holda bu usul *bir nuqtali (bir qadamli)* yoki *oddiy iteratsiya usuli*, aks holda esa, ya'ni oldin hisoblangan bir nechta yaqinlashishdan $x_{n+1} = \varphi_n(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$ kabi foydalanilsa, u holda bu usul *ko'p nuqtali (ko'p qadamli) iteratsiya usuli* deb ataladi. Agar bunda φ_n funksiya n dan bog'liq bo'lmasa, *jarayon statsionar*, aks holda esa *nostatsionar* deb ataladi. Masalan, oddiy iteratsiya usuli statsionar va bir qadamli usul bo'lib, birinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi, Nyuton usuli esa statsionar va bir qadamli bo'lib, ikkinchi tartibli iteratsion jarayonni ifodalaydi.

Agarda bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ bo'lganda aniq \bar{x} yechimga bir tomonlama (chapdan yoki o'ngdan yaqinlashsa – bir tomonlama usul) yoki ikki tomonlama (har ikkala tarafidan yaqinlashsa – ikki tomonlama usul) intilsa, *iteratsiya jarayoni yaqinlashadi* deyiladi.

Faraz qilaylik, ε - ildizni topish talab qilinayotgan absolyut aniqlik bo'lsin. Hisoblash jarayonining ikki tomonlama yaqinlashishida $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ shart yoki bir tomonlama yaqinlashishida $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ va $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ shartlar (hisoblash jarayonini tugallash kriteriyasi) bajarilgunga qadar davom ettiriladi. Shuni ta'kidlaymizki, bir tomonlama usullar qo'llanilayotganda ko'proq nisbiy aniqlikdan foydalaniladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi qo'llanilayotgan taqribiy usullarning samaradorligini taqqoslashda muhim ahamiyatga ega. Iteratsion usul m -tartibga (yoki m – yaqinlashish tezligiga) ega deyiladi, agar m eng katta musbat son bo'lib, uning uchun shunday $q > 0$ – chekli musbat son mavjud bo'lsaki, u

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q |x_n - \bar{x}|^m$$

shartni qanoatlantirsa. $x_n - \bar{x}$ miqdor *iteratsiyaning bajarilayotgan qadamidagi absolyut xatosi*, q o'zgarmas son *asimptotik xatoning konstantasi* deb ataladi. Bu q o'zgarmas son $f(x)$ funksiyaning $x = \bar{x}$ nuqtadagi hosilasi orqali baholanadi.

Agar $m=1$ va $q \in (0;1)$ bo'lsa, u holda qo'llanilayotgan usul *chiziqli yaqinlashish tezligiga* ega deyiladi (ba'zida bu holdagi usul maxraji q ga teng bo'lgan geometrik progressiya tezligi bilan yaqinlashadi deyiladi).

Agar baholash

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q_{n+1} |x_n - \bar{x}|^m, \quad n \rightarrow \infty \text{ da } q_n \rightarrow 0$$

kabi bo'lsa, u holda bu usul *o'ta chiziqli yaqinlashish tezligiga* ega deyiladi. O'ta chiziqli tezlik haqida $1 < m < 2$ bo'lganda ham gap borishi mumkin.

Agar $m=2$ bo'lsa, u holda *yaqinlashish tezligi kvadratik* deb ataladi (bunday holda q ga cheklash qo'yilmaydi). $m > 2$ qiymatlarda unga mos usullar *yuqori tartibli iteratsion usullar* deb ataladi. Bunda m qancha katta bo'lsa usulning yaqinlashishini bajaruvchi shart shuncha qat'iylashib boradi.

Hisoblashlarda q konstantaga nisbatan yaqinlashish tezligi m ning ahamiyati kattaroq.

Agar ikkala usulda ham m bir bo'lsa, u holda q kichik bo'lgani tezroq yaqinlashadi.

Dastlabki hollarda chiziqli yaqinlashunchi usul ($q=0$ bo'lganda) kattaroq qiymatli kvadratik yaqinlashuvchi usulga nisbatan tezroq yaqinlashadi. m ning kattaroq qiymati tezroq yaqinlashishni ta'minlasada, q ning kichik qiymatida chiziqli tezlik ma'qul. Ammo q konstanta 1 ga yaqin bo'lsa, u holda chiziqli tezlikning yaqinlashishi juda sustlashadi.

2. TENGLAMANING ILDIZLARINI AJRATISH

Tenglama ildizlarini ajratish – bu ildizlarning mavjudligini va sonini aniqlash hamda ularning har biri yotgan yetarlicha kichik $[a,b]$ kesmani topishdan iborat.

Birinchi qadamda ildizlarning soni va turi aniqlanadi, ularning sonlar o'qida taqsimlanishini baholanadi. Keyin esa ana shu ildizlar yotgan interval yoki ularning taqribiy qiymatlari topiladi.

Ildizlarni ajratish uchun ko'pincha quyidagi teoremlardan foydalaniladi.

1-teorema (Boltsman–Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning chetlarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda bu kesmaning ichida $f(x) = 0$ tenglama hech bo'lmaganda bitta ildizga ega. Agar (a,b) intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo'lib, u o'z ishorasini almashtirmasa, u holda bu ildiz yagona.

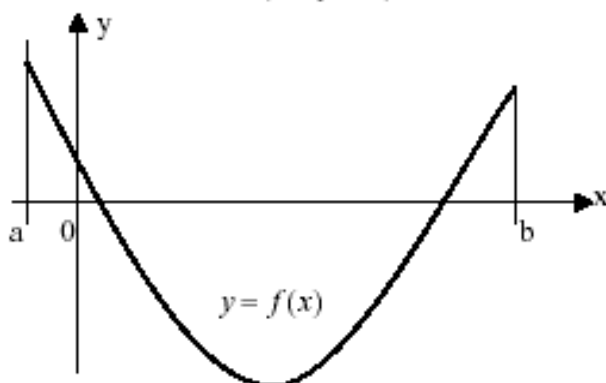
2-teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda analitik funksiya bo'lsin. Agar $[a, b]$ oraliqning chetki nuqtalarida $f(x)$ har xil ishorali qiymatlarini qabul qilsa, u vaqtda (1) tenglamaning a va b nuqtalar orasida yotadigan ildizlarning soni toqdir. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning chetki nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda (1.1) tenglamaning ildizlari yoki $[a, b]$ oraliqda yotmaydi yoki ularning soni juftdir (karraliligini hisobga olgan holda). Transendent tenglamalar ildizlarining soni ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Chiziqli bo'lmagan tenglamalar uchun ildizlarni ajratishning umumiy usuli yo'q. Buning uchun ma'lum bir qadam bilan o'zgaruvchi x larda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini hisoblab ko'rish mumkin. Agar yonma-yon ikkita a va b nuqtalarda $f(x)$ funksiya har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, ya'ni masalan, $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ bo'lsa yoki $f(a) \cdot f(b) = 0$ shart bajarilsa, u holda $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun uning shu kesmada hech bo'lmaganda bitta ildizi mavjud bo'ladi.

Diqqat qiling, $f(a) \cdot f(b) < 0$ tengsizlik bajarilmagani bilan $[a,b]$ kesmada bir nechta ildizlar yotishi mumkin (2.1-rasm).

Muhandislik hisoblarida asosan haqiqiy ildizlarni topish talab etiladi. Haqiqiy ildizlarni ajratish masalasi umumiy holda ikki usul bilan yechiladi: *analitik va grafik usullar*.

Tenglama ildizlarini ajratish grafik usulda ($f(x)$ funk-siyaning grafigini qurish orqali) yoki oralarida ildizlar yotgan ekstremumlarni analitik yo'l bilan qurish orqali bajariladi.



2.1-rasm. Tenglamaning kesmada bir nechta ildizlar yotishi mumkin bo'lgan hol.

Tenglama haqiqiy ildizlarini baholashning **grafik usuli** yuqori aniqlik talab qilinmaydigan texnik hisoblarda juda ham keng qo'llaniladi. Bu usul ikki uslubda amalga oshiriladi:

- $y = f(x)$ funksiyaning grafigi quriladi va uning absissa o'qi bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi – bu $f(x) = 0$ tenglama ildizlarining taqribiy qiymati.
- $f(x) = 0$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ ko'rinishga keltiriladi (bu yerda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ – elementar funksiyalar), keyin esa bu funksiyalar grafiglari kesishish nuqtalarining absissalari aniqlanadi.

Tenglamaning barcha ildizlarini **analitik usul** bilan ajratishda $f(x)$ funksiyaning barcha kritik (uzilish, ekstremum, burilish va hokazo) nuqtalari, ya'ni $f'(x)=0$ bo'lgan yoki $f'(\bar{x})$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar topiladi. Buni sonli usullar bilan, soddaroq hollarda esa analitik yo'l bilan bajarish mumkin. Buning uchun f'

$f(x) = 0$ tenglama x ga nisbatan yechiladi. Bundan tashqari bu funksiyaning hosilasi biror sababga ko'ra mavjud bo'lmagan barcha nuqtalar topiladi (masalan funksiya ifodasining maxraji nolga teng, logarifm ostida nol paydo bo'ladi va hokazo). Ana shu nuqtalar (kritik nuqtalar) yoki ularga juda yaqin bo'lgan nuqталarda $f(x)$ funksiyaning ishorasi, ya'ni $\text{sign}f(x)$ tekshiriladi. Shundan keyin kritik nuqtalar (sonlar o'qining chetki $-\infty$ va ∞ nuqtalari ham) atrofida funksiyaning ishorasi aniqlanadi, bu qatordan jadval tuziladi. Bu qatorda funksiyaning $f(x_i)$ qiymatlari ishorasi almashtirishlari soni ildizlar sonini bildiradi, chetlarida $\text{sign} f(x)$ har xil bo'lgan va o'zida ildizlarni lokallashtirgan intervallar aniqlanadi. Ildiz yotgan intervalni qisqartirish maqsadida ekstremum nuqtalardan tashqari shunday qo'shimcha nuqtalar kiritiladiki (masalan, kesmaning chegaralaridan biri ∞ bo'lganda), natijada ildiz lokallashtiriladi.

Agar $f(z) = 0$ tenglamaning kompleks ildizlarini topish talab etilsa, u holda $z = x + iy$ almashtirish olinib, bu tenglama $f_1(x,y) + i f_2(x,y) = 0$ ko'rinishga keltiriladi, bu yerdan esa ikkita $f_1(x,y) = 0$ va $f_2(x,y) = 0$ tenglamalar sistemasi yechilib, shu egri chiziqlarning kesishish nuqtalari topiladi. Topilgan kesishish nuqtalarning mos absissa va ordinatalari $f(z)=0$ tenglama ildizlarining mos haqiqiy va mavhum qismlarini ifodalaydi.

Nochiziqli tenglama ildizlarini ajratishning quyidagi analitik usullari mavjud:

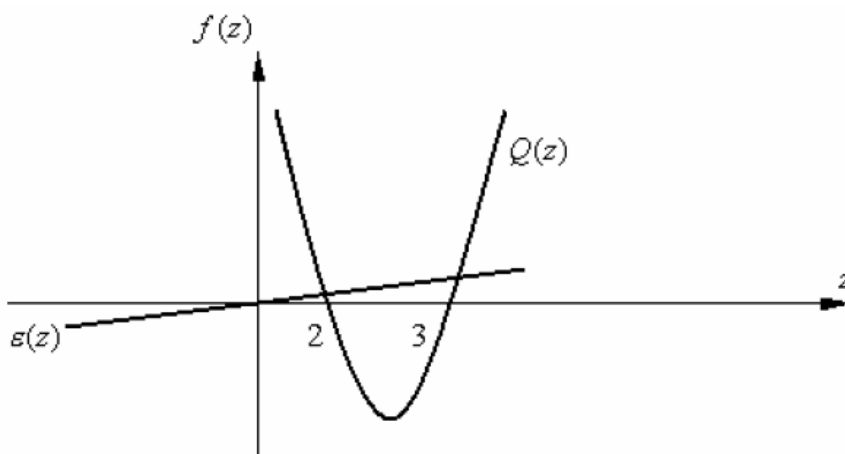
Bosh usul – bu tenglamaga kirgan funksiyalarning xossalari bilish usuli. Masalan, $(x^2-3x+5)/(2+x^2)=0$ tenglamaning maxrajini qarab o'tirishga hojat yo'q, chunki u hech qachon nolga aylanmaydi.

Kichik parametr usuli. Faraz qilaylik, $f(z) = 0$ ni quyidagicha $f(z) = Q(z) + \varepsilon(z) = 0$ ifodalash mumkin bo'lsin, bunda $\varepsilon(z) \ll Q(z)$ va $Q(z)$ ning ildizlari ma'lum. U holda $f(z)$ ning ildizlari $Q(z)$ ning ildizlari yaqinida yotadi. Masalan, $0,001x^3 + x^2 - 5x+6 = 0$ tenglamaning ildizlari $\varepsilon(z) = 0,001x^3$ va $Q(z) = x^2 - 5x+6$ belgilashlarga ko'ra $x = 2$ va $x = 3$ dan bir oz qo'zg'algan bo'ladi (2.2-rasm).

Tenglamaning haqiqiy ildizlarini ShEHM lar yordamida ajratish. Bu algoritim haqiqiy ildiz atrofida funksiya ishorasining o'zgarishini tekshirishga

asoslangan. Haqiqatdan ham, agar ildiz haqiqiy bo'lsa, u holda funksiya grafigi absissa o'qini kesib o'tadi va bunda funksiya o'zining ishorasini qarama-qarshisiga almashtiradi.

Funksiyaning aniqlanish sohasida berilgan kesmada noxiziqli tenglamaning ildizlarini ajratish algoritmi va uning sxemasini qaraylik (ilova, 1-rasm). Bu algoritm berilgan $[a,b]$ kesmadagi barcha haqiqiy ildizlarning taqribiy qiymatlarini topish imkonini beradi.



2.2.-rasm. Tenglama ildizlarini ajratishning kichik parametlar usulini ifodalovchi misol grafigi.

Bu algoritmda ozgina o'zgartirish kiritish yo'li bilan undan maksimal yoki minimal ildizlar taqribiy qiymatlarini aniqlash uchun ham foydalanish mumkin. Ikkita ildizdan «sakrab o'tib ketmaslik» uchun noma'lumning Δx orttirmasini uncha katta olmaslik kerak. Bu usulning kamchiligi shundaki, undan fodalanganida ko'p mashina vaqti sarflanadi.

Shunday qilib, $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlarini ajratish jarayonida quyidagi holatlar kuzatiladi:

- $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida grafigi chizilib, uning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtalari topiladi. Bu nuqtalarga mos keluvchi \bar{x} lar taqribiy yechim deb qabul qilinadi;
- $f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi va uning absissa o'qi bilan kesishish nuqtalari yotgan taqribiy oraliq aniqlanadi;

- ba'zi hollarda $f(x) = 0$ tenglamani $f_1(x) = f_2(x)$ ko'rinish-dagi ekvivalent tenglamaga keltirish maqsadga muvofiq, chunki bunday holda $y = f(x)$ funksiyaning grafigidan ko'ra $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizish osonroq. Bunday holda $f(x) = 0$ tenglamaning ildizini $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtasi absissasi ifodalaydi.
- Taqribiy ildiz yotgan $[a,b]$ kesmaning haqiqatda to'g'ri olinganligini analitik yo'l bilan tekshirib ko'rish mumkin. Buning uchun yana ildizning mavjudlik sharti $f(a)f(b) < 0$ dan foydalanamiz. Agar bu shart bajarilsa, u holda $[a,b]$ oraliq to'g'ri tanlangan bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda, ildizlarni aniqlashtirishni uchta yo'nalishga guruhlashtirish mumkin:

- $f(x_i)=0$ tenglamaning yechimi bo'lishi mumkin bo'lgan barcha x_i argumentlarni saralash yo'li bilan izlash;
- $f(x)$ funksiyaning ildizlarini topishni unga yaqin bo'lgan soddaroq funksiya (chiziqli, parabolik) ildizlarini topishning iteratsion proseduralariga almash-tirish;
- $f(x)=0$ tenglamani ushbu $x = \varphi(x)$ formulaga keltirish va iteratsion yo'l bilan tenglikning o'ng va chap taraflari tengligini ta'minlashga intilish.

Bularga ko'ra, masalan, skanirlash va biseksiya usullari birinchi yo'nalishga, vatarlar va urinmalar usullari ikkinchi yo'nalishga va oddiy iteratsiya usuli esa uchinchi yo'nalishga kiradi.

1–misol. $x^3 + 2x - 1 = 0$ tenglamaning ildizlarini ajrating.

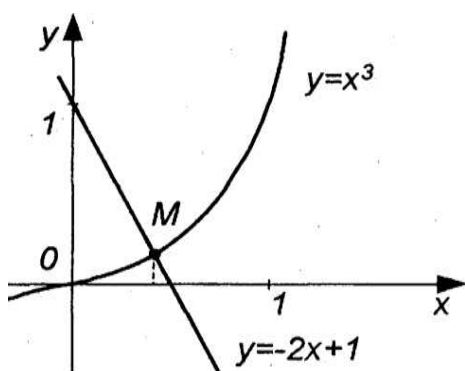
Yechish. 1–uslub. Berilgan misolda $f(x) = x^3 + 2x - 1$ va $f'(x) = 3x^2 + 2$ bo'lib, bu $f(x)$ funksiya uchun barcha x larda $f'(x) > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda o'suvchi bo'ladi. Berilgan tenglamaning ildizi yotgan chekli $[a,b]$ kesmani topaylik. Tanlash usuli bilan $f(x)$ funksiya kesmaning oxirgi nuqtalarida har xil ishorali qiymatlar qabul qiladigan $[a,b]$ kesmani topamiz. Buning uchun argumentning bir necha qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz, masa-

lan, $f(-1) = -4 < 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 > 0$. Boltsman–Koshi teoremasiga ko’ra berilgan tenglamaning ildizi $[0;1]$ kesmada yotibdi va u yagona, chunki $f'(x)$ hosila $(0;1)$ intervalda musbat va o’z ishorasini saqlaydi.

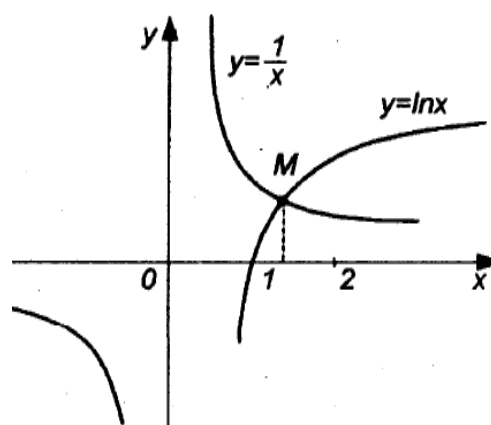
2–uslub. Berilgan tenglamaning ildizini grafik usulda ham ajratish mumkin. Buning uchun tenglamani $x^3 = -2x+1$, ya’ni $f_1(x) = f_2(x)$ ko’rinishda ifodalaymiz. Endi $y = x^3$ va $y = -2x+1$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklar absissasi $(0,1)$ oraliqda bo’lgan M nuqtada kesishadi (2.3-rasm).

2–misol. $x \cdot \ln x - 1 = 0$ tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajrating.

Yechish. Berilgan tenglamani $\ln x = 1/x$ ko’rinishda yozib olib, $y = \ln x$ va $y = 1/x$ elementar funsiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu funksiyalarning grafiklari absissasi $(1;2)$ oraliqqa tegishli yagona M nuqtada kesishishadi. Shunga ko’ra, berilgan tenglamaning yagona ildizi $(1;2)$ oraliqda yotadi (2.4-rasm).



2.3-rasm. $x^3 + 2x - 1 = 0$ tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish.



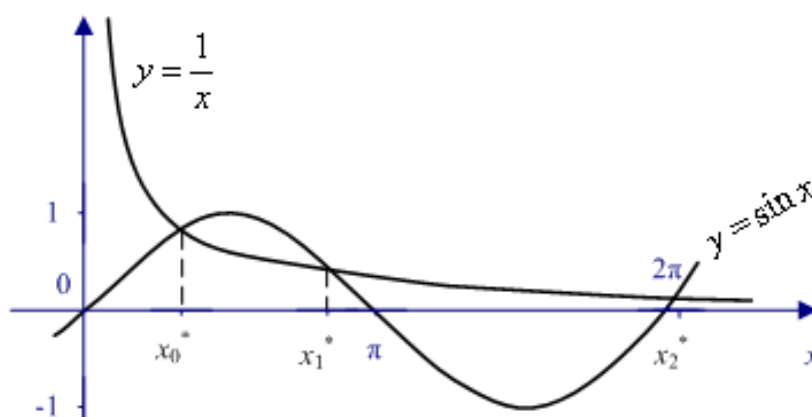
2.4-rasm. $x \cdot \ln x - 1 = 0$ tenglamaning ildizini grafik usulda ajratish.

3-misol. Ushbu

$$x \cdot \sin x = 1 \text{ yoki } f(x) = x \cdot \sin x - 1 = 0$$

tenglamaning ildizlarini toping.

Yechish. $f(x)$ funksiyani $\sin x = 1/x$ ko’rinishda ifodalab, uning ildizlarini grafik usulda aniqlaylik (2.5-rasm).



2.5-rasm. Cheksiz ko'p ildizga ega tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajratish.

Tenglamaning ildizlari Oy o'qqa nisbatan simmetrik, shuning uchun uning faqat musbat ildizlarini qarashimiz yetarli. x_1^*, x_2^*, \dots larning qiymatlarini yetarlicha aniqlikda hisoblashimiz mumkin, ammo $n \rightarrow \infty$ da x_n^* ning qiymatini aniqlab bo'lmaydi. Shunga qaramasdan grafikdan ko'rinadiki, $n \gg 1$ da x_n^* ildizlar $n\pi$ ga yaqin. Bu olingan qiymatlarni tenglama ildizlarining $(x_1^*)^0, (x_2^*)^0, \dots$ boshlang'ich yaqinlashishlari qiymatlari deb qabul qilib, ildizlarni biror taqribiy usul yordamida aniqlashtirishimiz mumkin.

4-misol. Ushbu

$$x^3 - 4x + 2 = 0$$

tenglamaning ildizlarini ajrating.

Yechish. Avvalo bu tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x(x^2 - 4) + 2 = 0 \quad \text{yoki} \quad x = -2/(x^2 - 4).$$

Bunga ko'ra quyidagi ikkita funksiyaning grafigini chizamiz (2.6-rasm):

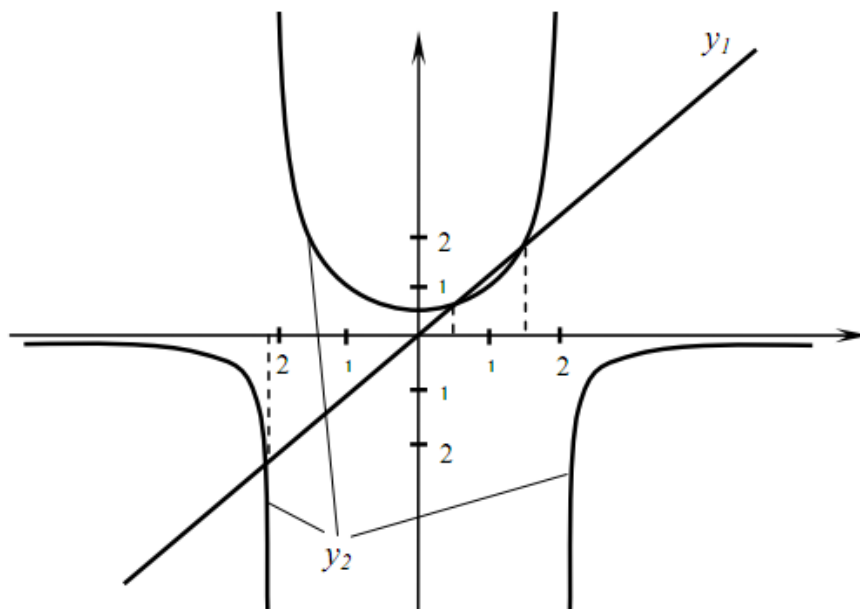
$$y_1 = x \quad \text{va} \quad y_2 = -2/(x^2 - 4).$$

Bu funsiyalar grafiglarining kesishish nuqtalari absissalari ildizlarning taqribiy qiymatini beradi:

$$x_1 \approx 0,5; \quad x_2 \approx 1,6; \quad x_3 \approx -2,2.$$

Shunday qilib, berilgan tenglama uchta haqiqiy ildizga ega ekan, ularning qiymatlari esa tanlangan taqribiy usulga ko'ra aniqlashtiriladi. Bu aniqlashtirishlar amalga oshiriladigan kesmalar quyidagilar:

$$x_1 \in [-2,0; -2,5] ; x_2 \in [1,2; 1,8] ; x_3 \in [0; 0,8].$$



2.6-rasm. Bir nechta ildizga ega tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajratish.

5-misol. $5^x - 6x - 3 = 0$ tenglamaning ildizlarini analitik yo'l bilan ajrating.

Yechish. Bu yerda $f(x) = 5^x - 6x - 3 = 0$ kabi belgilash kiritamiz. Hosilasini topamiz: $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 - 6$. Hosilaning ildizlarini topamiz:

$$5^x \cdot \ln 5 - 6 = 0; \quad 5^x = 6/\ln 5; \quad x \cdot \lg 5 = \lg 6 - \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0,7782 - 0,2065}{0,6990} = \frac{0,5717}{0,6990} \approx 0,82.$$

$f(x)$ funksiya ishoralari jadvalini x ning qiymatini: *a)* funksiyaning kritik qiymatlariga (hosila ildizlariga) yoki ularga yaqin qiymatlarga; *b)* chegaraviy qiymatlariga (noma'lumning aniqlanish sohasi qiymatlaridan kelib chiqib) teng deb tuzamiz:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	+	-	+

Jadvaldan ko'rinadiki, funksiya ishorasining ikki marta o'zgarishi kuzatilmoqda, shunga ko'ra berilgan tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega. Ildizlarni ajratish operatsiyasini yakunlash uchun ildizlarni o'z ichiga olgan va uzunligi 1 dan katta bo'lmagan oraliqni aniqlashimiz lozim. Buning uchun $f(x)$ funksiya ishoralarining yangi jadvalini tuzamiz:

x	-1	0	1	2
sign $f(x)$	+	-	-	+

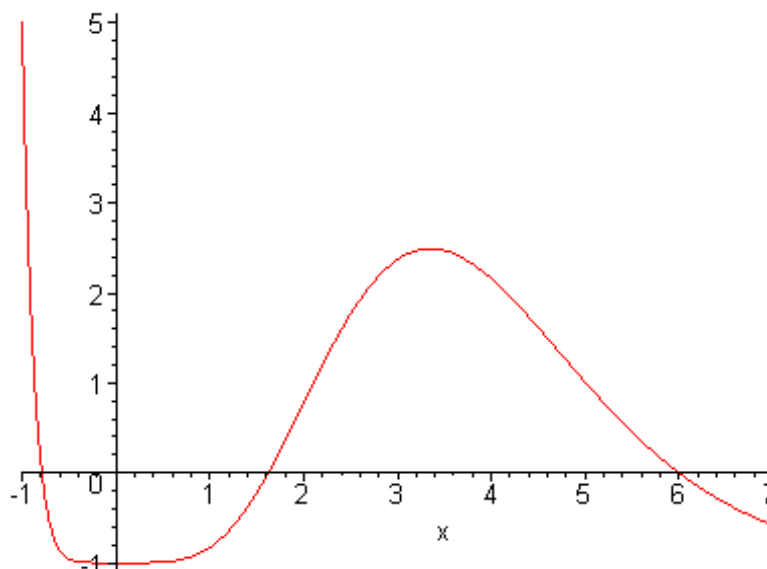
Shunday qilib, haqiqiy ildizlar yotgan oraliqlar:

$$x_1 \in [-1; 0]; \quad x_2 \in [1; 2].$$

6-misol. $x^6 = 6^x$ tenglamaning ildizlarini Maple matematik paket yordamida ajrating.

Yechish. Bu tenglamani $f(x) = x^6/6^x - 1 = 0$ ko'rinishda yozib, $f(x)$ ning grafi-gini $[-1;7]$ kesma uchun Maple matematik paket yordamida chizamiz (2.7-rasm):

> with(plot): plot(x^6/6^x-1,x=-1..7);



2.7-rasm. Rasmdan ko'rinadiki, berilgan tenglama quyidagi uchta haqiqiy ildizga ega va ular ko'rsatilgan oraliqlarga tegishli: $x_1 = -0,789877 \in [-1;0]$; $x_2 = 1,62424 \in [1;2]$; $x_3 = 6 \in [6,5;7,5]$. Bu ildizlarni taqribiy hisoblashni quyidagi usullardan biri orqali topish mumkin.

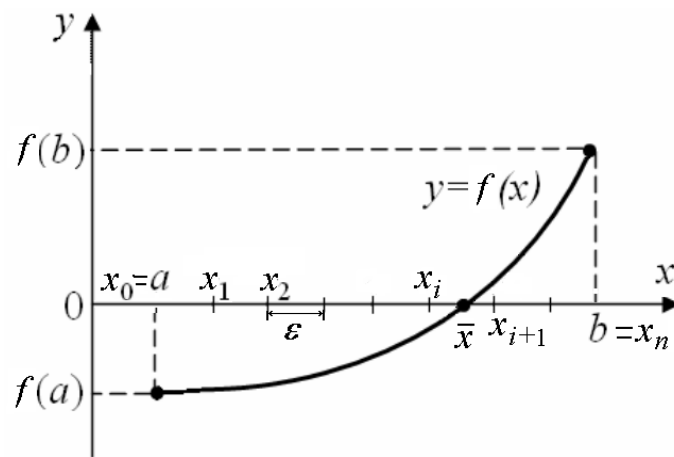
3. NOCHIZIQLI TENGLAMANING ODDIY ILDIZLARINI TOPISH USULLARI

Quyida $f(x) = 0$ tenglamaning faqat oddiy ildizlarini topish masalasi qaraladi. Buning uchun masala umumiy holda quyidagi shartlar bilan qo'yiladi.

Masalaning qo'yilishi. Chekli $[a, b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz, ikki marta differensiyalanuvchan, ya'ni birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari shu kesmada mavjud va unda bu hosilalari o'z ishorasini saqlaydigan (birinchi hosilasi nolga aylanmaydigan), $f(x)$ funksiya uchun $f(x) = 0$ tenglama $[a, b]$ kesmada yagona yechimga ega bo'lsin va bu yechimni berilgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda taqribiy hisob usullari yordamida topish talab qilinadi.

3.1. Skanirlash usuli

Berilgan $f(x) = 0$ tenglamaning $[a, b]$ kesmadagi ildizi ajratilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesma berilgan yetarlicha kichik ε uzunlikdagi kesmalarga bo'linadi va hosil bo'lgan kesmalarning oxirlarida $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari hisoblanadi. Bu qiymatlarni tahlil qilish bilan qaysi oraliqda funksiya o'z ishorasini almashtirayotganligini (yoki qiymati aniq nolga teng ekanligini (bu juda kamdan kam holda kuzatiladi)) aniqlash mumkin (3.1-rasm). $f(x) = 0$ tenglamaning yechimi sifatida tanlangan kesmaning chegaralaridagi xoxlagan x_i – chap yoki x_{i+1} – o'ng uchi nuqtasini, yanada aniqroq bo'lishi uchun esa, kesmaning o'rtasidagi $\bar{x} = (x_i + x_{i+1})/2$ nuqtani olish mumkin. Bu bilan biz talab qilingan ε aniqlikdagi yechimga erishgan bo'lamiz. Amaliyotda bu usul qo'llanilganda ko'pincha $[a, b]$ kesma 2ε yoki $\varepsilon/2$ uzunlikdagi kesmalarga bo'linishi ham mumkin, bu asosiy natijaga deyarli ta'sir qilmaydi.



3.1-rasm. Skanirlash usulining sxematik tasviri.

Usulning samaradorligini oshirish maqsadida aniqlashtirishni bir necha bosqichda bajarish ham mumkin. Dastlabki bosqichda $[a, b]$ kesma ε ning kattaroq qiymatlarida bo'laklarga bo'linadi, ya'ni qo'pol yechim topiladi. Keyingi bosqichda esa shu topilgan oxirgi kesma bo'lagi yana bo'laklarga bo'linadi va yanada aniqroq yechimga erishiladi. Bu jarayon bir necha marotaba takrorlanishi ham mumkin. Bu bilan kamroq qadamlar bilan berilgan xatolikdagi yechimga erishish mumkin.

Bu usul juda ham sodda bo'lganligi uchun uning tahliliga va tadbqiqiga oid misollarga to'xtalib o'tirmaymiz.

3.2. Kesmani teng ikkiga bo'lish usuli (dixotomiya usuli)

Bu usul $f(x)$ funksiya haqida ma'lumotlar juda ham kam bo'lganda foydalanishga qulay. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda nolga aylanishini aniqladik, bunda ildizdan chaproqda $f(x) < 0$ va o'ngroqda esa $f(x) > 0$. Bunday holda izlanayotgan ildizni topish murakkab bo'lmaydi. Kesmani teng ikkiga bo'lamiz va hosil bo'lgan x_i nuqtada funksiyaning ishoraini qaraymiz. Agar $f(x_i) > 0$ bo'lsa, yuqori chegarani $b = x_i$ deb, aksincha esa quyi chegarani $a = x_i$ deb siljitamiz va hokazo (3.2-rasm).

Bularni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

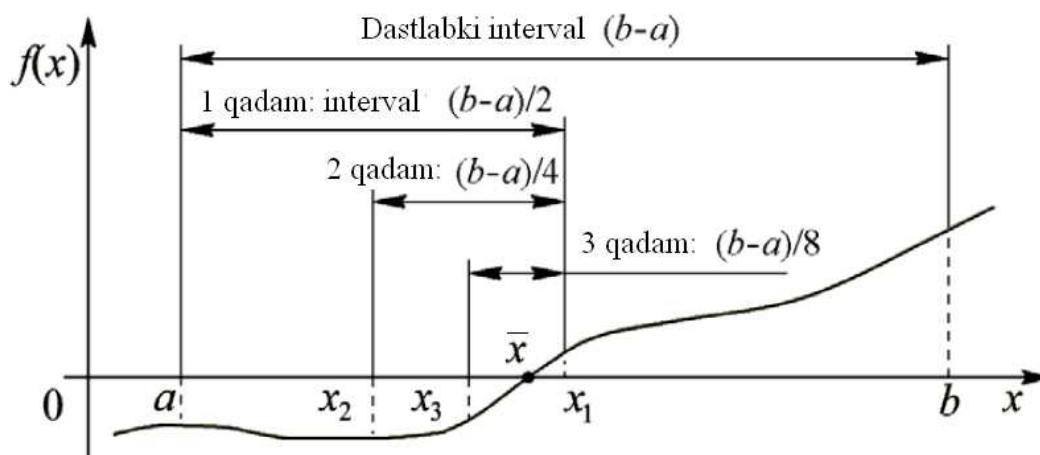
Faraz qilaylik, $f(a)f(b) < 0$. $a_0 = a$ va $b_0 = b$ deb belgilash kiritamiz. U holda ketma–ket yaqinlashish quyidagicha:

$$x_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n), \quad n=1, 2, \dots;$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_{n+1}], & \text{agar } f(a_n)f(x_{n+1}) < 0, \\ [x_{n+1}, b_n], & \text{agar } f(x_{n+1})f(b_n) < 0. \end{cases}$$

Bu jarayon $f(x_{n+1}) = 0$ bo'lganda to'xtatiladi va $\bar{x} = x_{n+1}$ deb qabul qilinadi.

Bu usul *kesmani teng ikkiga bo'lish usuli*, *dixotomiya usuli* (grekchadan $\delta\iota\chi\alpha$ – ikki qismga $\tau\omicron\mu\eta$ – kesish), *biseksiyalar usuli* yoki *vilka usuli* deb ataladi.



3.2–rasm. Kesmani ikkiga bo'lish usulining sxematik tasviri.

Agar tenglamaning qolgan ildizlarini ham aniqlash zarurati tug'ilsa, u holda $g(x) = f(x)/(x - \bar{x})$ tenglikdan ketma-ket foydalanib, har safar topilgan \bar{x} ildiz chiqarib tashlanadi (endi $g(x) = 0$ va $f(x) = 0$ tenglamalarning \bar{x} (bu nuqta $g(x)$ funksiya uchun qutb, $f(x)$ funksiya uchun esa ildiz) dan boshqa barcha ildizlari mos keladi).

Talab qilingan aniqlikdagi yechimga erishish uchun avvalo $g(x)$ funksiyaning ildizi qo'pol holda bo'lsa ham topiladi, keyin esa bu ildiz $f(x)$ funksiya dan foydalanib aniqlashtiriladi.

Bu usulning yaqinlashish tartibi 1 ga teng, ya'ni bu usul chiziqli yaqinlashish tezligiga ega, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik maxraji $1/2$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya tezligi bilan ildizga yaqinlashadi.

Bu usul uchun hisob tugashining kriteriyasi ushbu

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

shartning bajarilishidan iborat, bunda ε – berilgan absolyut aniqlik. Bu yerdan kelib chiqadiki, berilgan ε aniqlik bilan ildizni hisoblash uchun zarur bo'lgan N – itersiyalar soni qiyidagi tengsizlikdan aniqlanadi:

$$\frac{b-a}{2^N} \leq \varepsilon \quad \text{yoki} \quad N \geq \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} \quad \text{yoki} \quad N \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Usulning qulayliklari:

- $f(x)$ funksiya haqida ma'lumotlar kam bo'lganda ham undan foydalanish juda qulay;
- kesmani ikkiga bo'lish algoritmi juda sekin, ammo barcha noqulayliklardan holi.

Usulning kamchiliklari:

- ko'p hollarda funksiyaning holati juda murakkab bo'lib, bu chetki nuqtalarida funksiyaning ishorasi har xil bo'lgan $[a,b]$ oraliqni oldindan aniqlashga qiyinchilik tug'diradi;
- yaqinlashish juda sekin;
- uni tenglama karrali (jufr karrali) va kompleks ildizlarga ega bo'lganda qo'llab bo'lmaydi;
- sodda bo'lmagan ildiz, masalan, ildiz funksiyaning ekstremum nuqtasi bilan mos kelganda (2.2-rasmda x_2 nuqta), bu usulni qo'llab bo'lmaydi, chunki bu holda ildiz atrofida funksiya o'z ishorasini almashtirmaydi.
- agar tenglama $[a,b]$ oraliqda bir nechta ildizga ega bo'lsa, u holda hisoblash jarayonida shu ildizlardan qaysi biri topilishi noma'lum.
- uni bir nechta tenglamalar sistemasiga qo'llab bo'lmaydi.

Usulning algoritmi:

1. $f(a)$ va $f(b)$ ni hisoblang;
2. $c = (a + b)/2$ deb $f(c)$ ni hisoblang;
3. agar $\text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a))$ bo'lsa $a = c$ deb, aks holda esa $b=c$ deb almashtirish oling (bunda sign ishora funksiyasi);
4. agar $b - a > \varepsilon$ bo'lsa, u holda qadam 2 ga o'ting, aks holda hisob jarayonini to'xtating (chunki biz talab qilingan ε – absolyut aniqlikka erishdik). Oxirgi kesma uchlaridan xoxlagan bittasi yoki ular yig'indisining yarmini berilgan $f(x)=0$ tenglamaning yechimi deb qabul qilishimiz mumkin.

Ilova 2-rasmda kesmani teng ikkiga bo'lish (dixotomiya) usulining blok-sxemasi tasvirlangan.

1-misol. Ushbu $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ tenglamaning ildizlarini analitik yo'l bilan ajratining va uning ildizlaridan birini $\varepsilon = 0,01$ aniqlik bilan kesmani teng ikkiga bo'lish usulidan foydalanib toping.

Yechish. $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ belgilash kiritsak, u holda $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$. Hosilaning ildizlarini (kritik nuqtalarni) topamiz:

$$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0; \quad 4x \cdot (x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0; \quad (x^2 - 1) \cdot (4x - 3) = 0;$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3/4.$$

$f(x)$ funksiya ishoralarining jadvalini tuzamiz:

x	$-\infty$	-1	$3/4$	1	$+\infty$
sign $f(x)$	+	-	-	-	+

Jadvaldan ko'rinadiki, berilgan tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega: $x_1 \in (-\infty; -1]$; $x_2 \in [1; +\infty)$. Ildizlar yotgan oraliqlarni kichraytiramiz:

x	-2	-1	1	2
sign $f(x)$	+	-	-	+

Natijada: $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [1; 2]$. Tenglamaning, masalan $x_1 \in [-2; -1]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon = 0,01$ aniqlikda topaylik. Barcha hisoblashlar natijalarini jadval ko'rinishida ifodalash juda qulay:

n	a_n^-	b_n^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_n)$
0	-2,00	-1,00	-1,50	-3,5625
1	-2,00	-1,50	-1,75	0,3633
2	-1,75	-1,50	-1,63	-1,8140
3	-1,75	-1,63	-1,69	-0,7981
4	-1,75	-1,69	-1,72	-0,2363
5	-1,75	-1,72	-1,73	-0,0406
6	-1,75	-1,73	-1,74	0,1592
7	-1,74	-1,73		

Javob: $x_1 \approx -1,73$.

Ikkinchi ildizni ham xuddi shunday topish mumkin.

2-misol. Kesmani teng ikkiga bo'lish usulidan foydalanib, $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ tenglamaning $[-3; -2]$ kesmadagi ildizini $\varepsilon = 0,1$ aniqlik bilan hisoblang.

Yechish. Yuqorida keltirilgan algoritga asoslanib, tenglamani yechish jarayonini quyidagi hisob jadvali ko'rinishida yozamiz:

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$(b_n - a_n)/2$
0	-3	-2	-3	1	-2,5	0,125	0,5
1	-3	-2,5	-3	0,125	-2,75	-1,11	0,25
2	-2,75	-2,5	-1,11	0,125	-2,625	-0,42	0,125
3	-2,625	-2,5	-0,42	0,125	-2,5625	-0,129	0,0625

Jadvalga ko'ra ildiz $\bar{x} = -2,5625 \pm 0,0625$ yoki natijani yaxlitlasak, u holda $\bar{x} = -2,6 \pm 0,1$.

3.3. Proporsional bo'laklar usuli (vatarlar usuli)

Usulning mazmuni.

Quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz:

- $f(x)$ funksiya o'zining $f'(\bar{x})$ va $f''(\bar{x})$ hosilalari bilan $[a, b]$ kesmada uzluksiz;
- funksiyaning $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari kesmaning oxirgi nuqtalarida har xil ishorali, ya'ni $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- har ikkala $f'(\bar{x})$ va $f''(\bar{x})$ hosilalar $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida o'z ishorasini saqlab qoladi;

Berilgan $[a, b]$ kesma $f(x)$ funksiya hosilasining o'z ishorasini saqlashi bu shu funksiya monotonligining yetarli sharti.

Bularga asosan 3.3-rasmda tasvirlangan quyidagi to'rtta holat bo'ladi:

a) Agar $[a, b]$ kesmada $f(a) \cdot f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (3.1)$$

bunda $x_0 = b$.

b) Agar $[a, b]$ kesmada $f(b) \cdot f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda

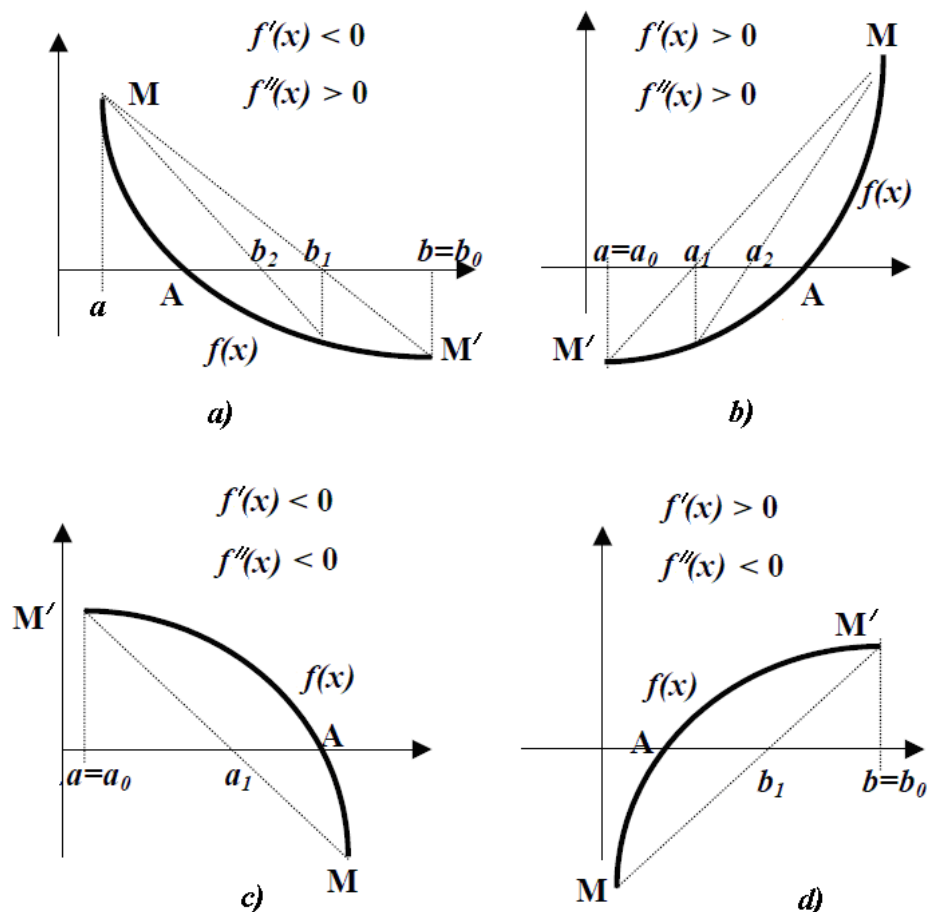
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad (3.2)$$

bunda $x_0 = a$.

б) Agar $[a, b]$ kesmada $f(a) \cdot f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda

$$x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (3.3)$$

bunda $x_0 = b$.



3.3-rasm. Proporsional bo'laklar usuli (vatarlar usuli)ning har xil hollari uchun sxemalar.

Ilova 3-rasmda vatarlar usulining blok-sxemasi tasvirlangan.

3.4. Nyuton usuli (urinmalar usuli)

Usulning mazmuni. Quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz:

- $f(x)$ funksiya o'zining $f'(\bar{x})$ hosilasi bilan $[a, b]$ kesmada uzluksiz;
- funksiyaning $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari kesmaning oxirgi nuqtalarida har xil ishorali, ya'ni $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- $f'(\bar{x})$ hosila $[a, b]$ kesmaning barcha nuqtalarida o'z ishorasini saqlab qoladi;

Berilgan $[a, b]$ kesma $f(x)$ funksiya hosilasining o'z ishorasini saqlashi bu shu funksiya monotonligining yetarli sharti.

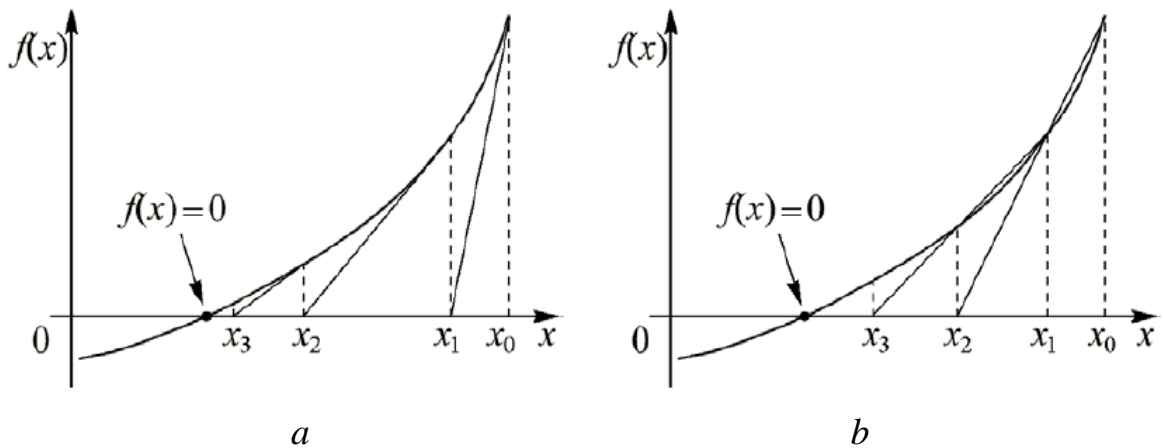
Nyuton usulining umumiy formulasi quyidagicha:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.4)$$

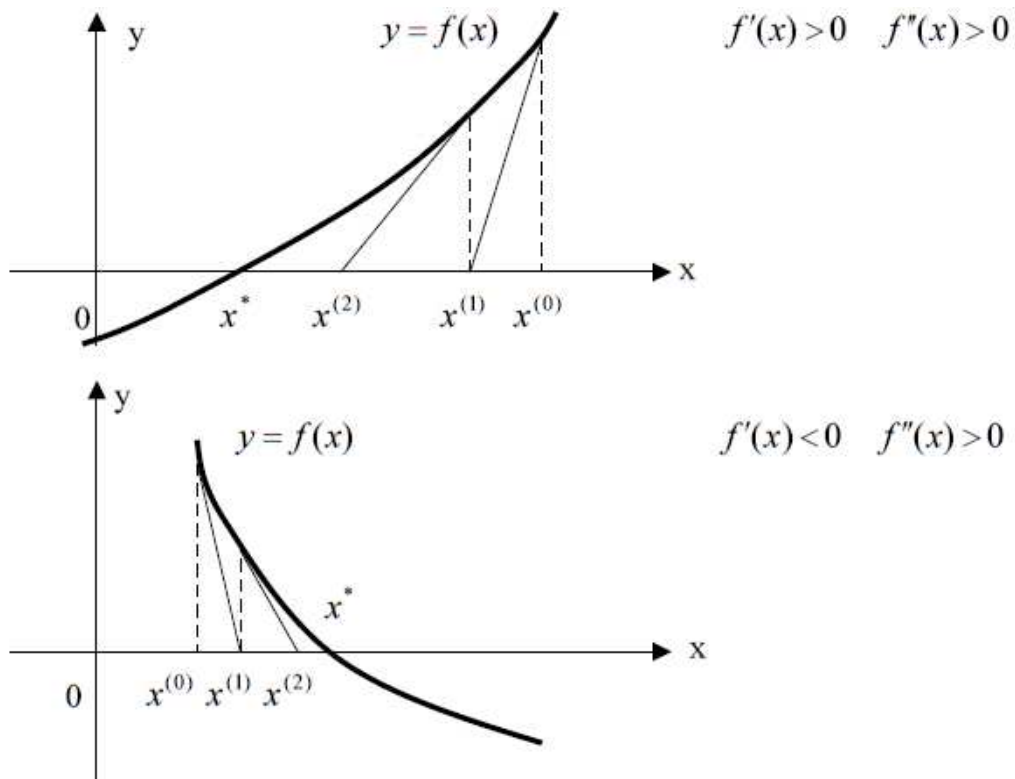
bunda $[a, b]$ kesmada $x_0 = a$, agar $f(a) \cdot f''(x) > 0$ bo'lsa va $x_0 = b$ agar $f(b) \cdot f''(x) > 0$ bo'lsa.

Shakli o'zgartirilgan formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \quad (3.5)$$



3.4-rasm. Nyuton usuli (a) va kesuvchilar usuli (b) sxemasi.



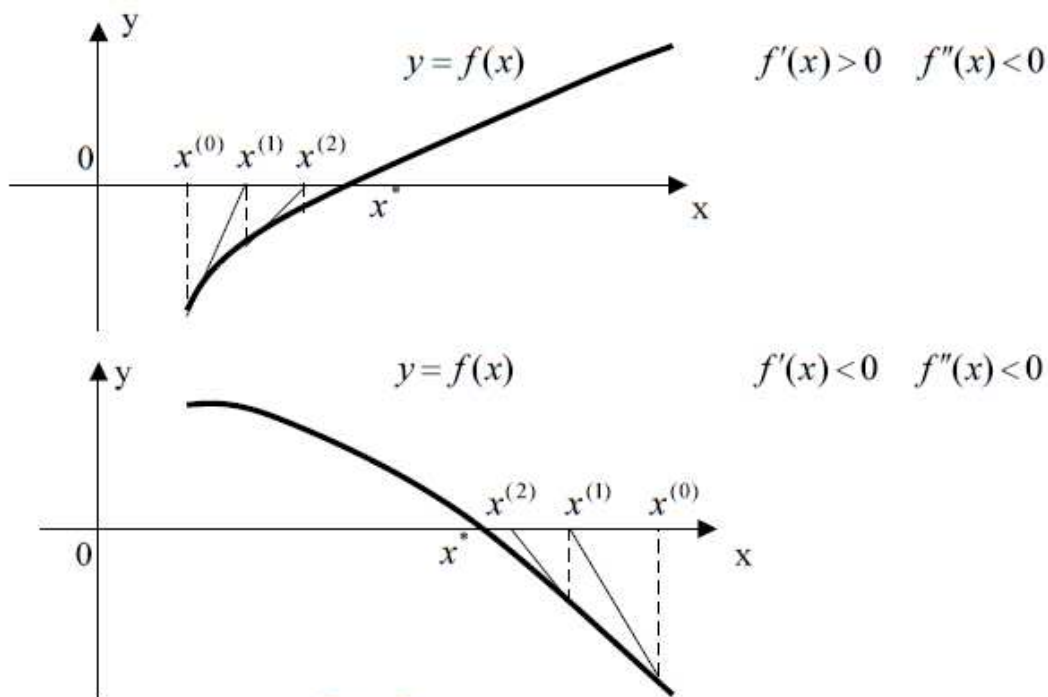


Рис. 5

3.5-rasm. $f(x)$ funksiyaning har xil holatlari uchun Nyuton usulining geometrik interpretatsiyasi.

3.5. Vatarlar va urinmalar usullarining aralash varianti

Usulning mazmuni. Faraz qilaylik, x_{n+1} va \bar{x}_{n+1} – ildizning quyidan va yuqoridan yaqinlashgan qiymatlari bo’lsin.

A) Agar $[a,b]$ kesmada $f(a) \cdot f''(x) > 0$ bo’lsa, u holda

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \\ \bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} (\bar{x}_n - x_n), \end{cases} \quad (3.6)$$

bunda $x_0 = a$; $\bar{x}_0 = b$.

B) Agar $[a,b]$ kesmada $f(b) \cdot f''(x) > 0$ bo’lsa, u holda

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} (\bar{x}_n - x_n); \\ \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}, \end{cases} \quad (3.7)$$

bunda $x_0=a$, $\bar{x}_0 = b$.

3.6. Oddiy iteratsiya usuli

Dastlabki $f(x)=0$ tenglamani $x=\varphi(x)$ ko'rinishga keltirish mumkin, masalan, ushbu

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}, \quad (3.8)$$

formula bilan, bunda k shunday tanlash kerakki, $|k| > Q/2$ bo'lsin, bu yerda $Q = \max_{[a,b]} |f'(x)|$ va k ning ishorasi $[a,b]$ kesmada $f'(x)$ ning ishorasi bilan mos tushishi lozim. Agar $[a,b]$ kesmada $|\varphi'(x)| < 1$ shart (bu yetarli shart) bajarilsa, u holda iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo'ladi, aks holda esa, ya'ni $|\varphi'(x)| > 1$ bo'lsa, u uzoqlashuvchi.

Faraz qilaylik, ildizning boshlang'ich yaqinlashishi $x = x_0$ bo'lsin. Bu qiymatni $x=\varphi(x)$ tenglamaning o'ng tarafiga qo'yib, $x_1 = \varphi(x_0)$ yangi yaqinlashishni hosil qilamiz. Bu jarayonni har safar yangidan takrorlab, ushbu

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

ketma-ket qiymatlarga ega bo'lamiz.

Agar $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz va uning limiti mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi[x_n] = \varphi[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n] = \varphi[\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}]$$

va x_{n+1} ketma-ketlikning $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limiti $x=\varphi(x)$ tenglama-ning va o'z navbatida $f(x)=0$ tenglamaning ham ildizi bo'ladi.

Tanlangan (1.2) iteratsion jarayon *bir qadamli*.

Iteratsiya usuli ba'zan *ketma-ket yaqinlashishlar usuli* deb ham ataladi.

Agar $|\varphi'(x)| < 1$ bajarilganda $\varphi'(x) > 0$ bo'lsa, u holda ildizga yaqinlashish monoton va bir tomonlama, aksincha, ya'ni $\varphi'(x) < 0$ bo'lsa, ikki tomonlama bo'ladi. Ko'rinish turibdiki, $|\varphi'(x)|$ qancha kichik bo'lsa, iteratsion jarayon

shuncha tez yaqinlashadi. Agar bunda $\varphi'(x)=0$ bo'lsa, u holda iteratsion jarayonni maxsus tekshirish talab qilinadi. Agar dastlabki yaqinlashish ildizga juda yaqin olingan bo'lsa, u holda iteratsion jarayon juda tez yaqinlashadi.

Talab qilinayotgan ildizni berilgan ε aniqlikda topish uchun zarur bo'lgan iteratsiyalar soni taxminan ushbu

$$N \geq \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right) / \left(\ln \frac{1}{q} \right)$$

tengsizlikdan aniqlanadi, bunda q o'zgarmas $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ tengsizlikdan olinadi.

Bu (3192) iteratsion jarayonning ildizga yaqinlashishi quyidagi tengsizliklar zanjiri bilan baholanadi:

$$0 < \varphi'(x) < 1 \quad \text{bo'lganda} \quad |x_n - \xi| \leq q/(1-q) |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon;$$

$$-1 < \varphi'(x) < 0 \quad \text{bo'lganda} \quad |x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Bu zanjirning oxirgi qismi ikkita qo'shni x_n va x_{n-1} iteratsiyalarning hisob hatijalari bo'yicha hisobni tugallash kriteriyasini beradi, ya'ni bu iteratsion jarayon

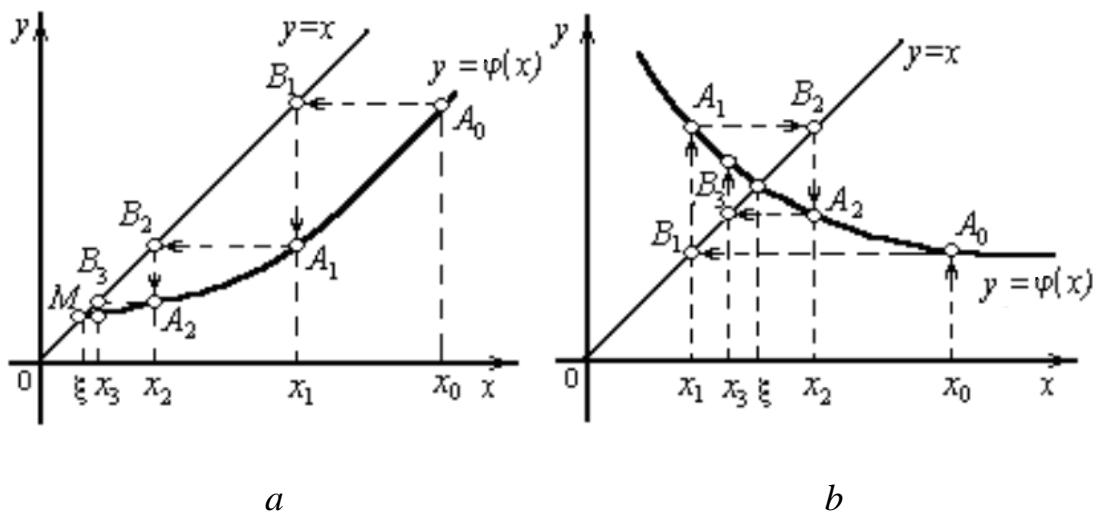
$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon(1-q)/q \quad \text{yoki} \quad |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

shart bajarilgunga qadar davom ettiriladi va $x_{n+1} = \xi$ yoki $x_n = \xi$ yechim deb olinadi.

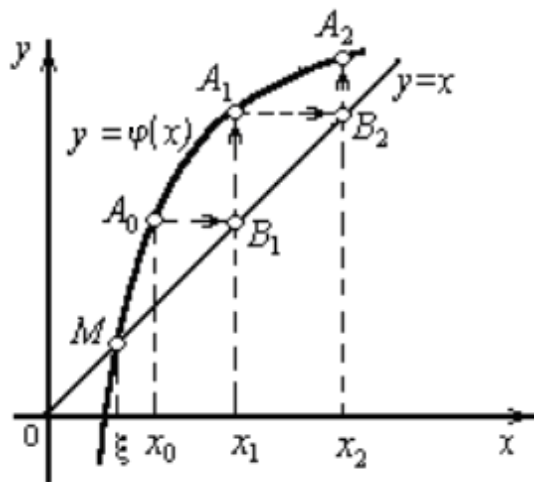
Geometrik nuqtai nazardan $y=x$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar grafiklari kesishgan nuqtasining absissasi $f(x)=0$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, $x=\varphi(x)$ tenglama uchun $|\varphi'(x)| < 1$ shart bajarilsin. Dastlabki $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$ nuqtadan boshlab Ox va Oy o'qlariga parallel $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ ketma-ket sinuq chiziqlarni bo'g'inlari «zinapoya» shaklida qilib quramiz (1,a-rasm), bunda A_0, A_1, A_2, \dots uchlar $y=\varphi(x)$ egri chiziqda, B_1, B_2, B_3, \dots uchlar esa $y=x$ to'g'ri chiziqda yotadi. Ko'rinib turibdiki, bunga mos x_1, x_2, \dots ketma-ket qiymatlar ξ ildizga yaqinlashadi. Bunda boshqa holat ham yuz berishi, ya'ni $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ ketma-ket sinuq chiziqlar «spiral» shaklida bo'lishi ham mumkin (1,b-rasm). Agar $\varphi'(x) > 0$ bo'lsa, u holda yechimga yaqinlashish «zinapoya» shaklida, aksincha,

ya'ni $\varphi'(x) < 0$ bo'lgan-da esa «spiral» shaklida bo'ladi. $|\varphi'(x)| > 1$ shart bajarilganda esa iteratsion uzoqlashuvchi bo'ladi (3.6-rasm).



3.6-rasm. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonlar.



3.7-rasm. Uzoqlashuvchi iteratsion jarayon.

Iteratsion ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi va yechimning yagonaligi haqida-gi teoremani isbotsiz keltiray-lik.

Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va uning barcha qiymatlari uchun $\varphi(x) \in [a,b]$. Agar $x \in (a,b)$ lar uchun shunday q

to'g'ri kasr mavjud bo'lsaki, bunda ushbu $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda:

- 1) boshlang'ich $x_0 \in [a, b]$ ni qanday tanlashdan qat'iy nazar ushbu (3.9) iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo'ladi;
- 2) ushbu $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limitik qiymat $x = \varphi(x)$ tenglamaning $[a, b]$ kesmadagi yagona ildizi bo'ladi.

Iteratsion jarayonning yaqinlashish tezligi ushbu

$$|x_n - \xi| \leq m q^n / (1 - q)$$

tengsizlikdan aniqlanadi, bunda $m = |x_0 - \varphi(x_0)|$.

Shuni ta'kidlaymizki, $\varphi(x)$ funksiyani tanlashda juda ehtiyotkorlik talab qilinadi. Masalan, $f(x) = x^2 - c$ tenglamani $x = x^2 - c + x$ yoki $x = c/x$ yoki $x = 0,5(x + c/x)$ ko'rinishga keltirish mumkin. Shulardan $\varphi(x) = x^2 - c + x$ ko'rinishni tanlasak, $-1 < x < 0$ oraliqidagina $|\varphi'(x)| < 1$ shart bajariladi va iteratsion jarayon $-\sqrt{c}$ ildizga yaqinlashadi. Agar $\varphi(x) = c/x$ desak, u holda $\varphi'(x) = -c/x^2$ va iteratsion jarayon uzoqlashuvchi bo'lib chiqadi.

Oddiy iteratsiya usulining blok-sxemasi 4-rasmda tasvirlangan.

1-misol. Ushbu $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ tenglamaning ildizini oddiy iteratsiya usuli yordamida $\varepsilon = 0,01$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Ushbu $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ tenglama $[1; 2]$ kesmada yagona ildizga ega, chunki $f(1) = -1 < 0$ va $f(2) = 5 > 0$. Agar berilgan tenglamani $x = x^3 - 1$ ko'rinishda yozib olsak, $\varphi(x) = x^3 - 1$ va $\varphi'(x) = 3x^2$. Bunda $x \in [1; 2]$ lar uchun $\varphi'(x) \geq 3$, demak iteratsion jarayon uzoqlashuvchi. Agar berilgan tenglamani $x = \sqrt[3]{x+1}$ deb o'zgartirsak, u holda $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ va $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. Bunda $0 < \varphi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$

tengsizlik barcha $x \in [1; 2]$ lar uchun o'rinli, demak iteratsion jarayon yaqinlashuvchi. Shunga ko'ra $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}$ iteratsion formuladan foydalanib

ildizni topamiz. Topilgan qiymatlar 1,0; 1,260; 1,312; 1,322; 1,3243 ekanligidan izlangan yechim $\varepsilon=0,01$ aniqlik bilan $\xi=1,324$ ga tengligi kelib chiqadi.

2-misol. Ushbu $\sin x - 2x + 0,5 = 0$ tenglamaning $[0;\pi/2]$ kesmadagi ildizini oddiy iteratsiya usuli yordamida $\varepsilon=0,001$ aniqlik bilan toping.

Yechish. Berilgan tenglamani unga teng kuchli bo'lgan $x=0,25 + 0,5\sin x = \varphi(x)$ tenglamaga almashtirib olamiz. Buning uchun $x \in [0;\pi/2]$ qiymatlarda $\varphi'(x)=0,5\cos x$ va $|\varphi'(x)| \leq 0,5 < 1$ o'rinli. Demak $x_n = 0,25 + 0,5\sin x_n$ iteratsion jarayon $x_0 = 0,5$ boshlang'ich qiymat uchun ketma-ket 0,4897; 0,4852; 0,4832; 0,4823; 0,4819; 0,48175; 0,48165; 0,4816 qiymatlarni beradi. Bu yerdan berilgan tenglamaning talab qilingan aniqlikdagi yechimi $x \approx 0,4816$ degan xulosaga kelamiz.

3.7. Kesuvchilar usuli (chiziqli interpolyatsiya qoidasi)

Bu usul Nyuton usulida $f'(x_i)$ hosilani $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ funksiyaga almashtirishdan hosil qilinadi. Natijada quyidagi iteratsion formulaga ega bo'lamiz:

$$|x_i - x_{i-1}| > \varepsilon \text{ lar uchun } x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

Bu usuldan foydalanilganda ikkita dastlabki $x_0 \in [a,b]$ va $x_1 \in [a,b]$ qiymatlarni berish lozim bo'ladi. Bu usul $x_i \neq x_{i-1}$ da $f(x_i) - f(x_{i-1}) \neq 0$ bo'lsagina o'rinli.

3.8. Steffensen (Eytken-Steffensen) usuli

Urinmalar usulining yaqinlashish tezligini oshirish uchun (3.9) ifodadagi $f'(x_n)$ hosilaning approksimatsiyasi o'rniga quyidagi ifodadan foydalalanish lozim:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}. \quad (3.10)$$

Agar (3.9) ni chap ayirmali approksimatsiya desak, u holda (1.14) ni o'ng ayirmali approksimatsiya deb olish mumkin.

(3.10) dan ko'rinadiki, unda hali aniqlanmagan x_{n+1} noma'lum had qatnashmoqda uni hisoblash uchun (3.9) oddiy iteratsiyadan foydalanamiz:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + f(x_n).$$

Natijada biz quyidagi approksimatsiyaga ega bo'lamiz:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}.$$

Bu ifodadan Nyuton usulida foydalanish bilan yangi iteratsion algoritmgaga ega bo'lamiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n). \quad (3.11)$$

Bu iteratsion algoritm sonli usullarda *Steffensen usuli* deb ataladi.

Steffensen usuli kvadratik yaqinlashishga ega, ammo bu yerda qo'shimcha ravishda $f(x_n + f(x_n))$ ifodaning qiymatini hisoblash hisobiga yuqori yaqinlashish tezligiga erishiladi. Bu usul har bir iteratsiyada funksiyaning qiymatini ikki marta hisoblashni talab qiladi, bu jihatdan Steffensen usuli kesuvchilar usuliga qaraganda kamroq samara beradi.

Yuqoridagi (1.15) iteratsion algoritmni Eytken tomoni-dan taklif etilgan chiziqli yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning yaqinlashishini tezlashtirish uslubidan ham olish mumkin.

Buning uchun quyidagi ketma-ketlikni qaraylik:

$$z_n = z + Cq^n. \quad (3.12)$$

Bu ketma-ketlik $|q| < 1$ da z limitga yaqinlashadi. Uncha qiyin bo'lmagan akslantirishlar yordamida z limitik qiymatni $\{z_n\}$ ketma-ketlikning uchta z_{n-1} , z_n va z_{n+1} ketma-ket elementlari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun bizga ko'rinib

turgan $\frac{z_n - z}{z_{n-1} - z} = q$ va $\frac{z_{n+1} - z}{z_n - z} = q$ ikkita tenglikdan ushbu $(z_{n+1} - z)(z_{n-1} - z) = (z_n - z)^2$

tenglikka kelinadi. Bu yerdan esa o'z navbatida z ning quyidagi ifodasi kelib chiqadi:

$$z = \frac{z_{n+1}z_{n-1} - z_n^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}.$$

Bu natijaga asoslanib, $\{z_n\}$ ketma-ketlikni boshqa ketma-ketlikka almashtirishning quyidagi Eytken taklifini qaraylik:

$$\xi_{n+1} = \frac{z_{n+1}z_{n-1} - z_n^2}{z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}}. \quad (3.13)$$

Agar bu almashtirishni (3.12) ko'rinishidagi ixtiyoriy ketma-ketlikka qo'llasak, u holda n ning ixtiyoriy qiymatida $\xi_n = z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashish turi (3.12) nikiga yaqin bo'lsa, u holda (3.13) almashtirish (n ning ixtiyoriy qiymatida uning limitini bermasada) z ga dastlabkisiga nisbatan tezroq yaqinlashuvchi yangi ketma-ketlikni beradi.

Endi oddiy iteratsiya usulida ildizga taqribiy yaqinlashishning tezligini oshirishni tahlil qilaylik. Buning uchun avvalo $x_{n+1} = g(x_n)$ iteratsion formulaning o'ng tarafini Teylor qatoriga yoyaylik, ya'ni

$$g(x_n) = g(x_r + (x_n - x_r)) = x_r + g'(x_r)(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2),$$

Bunga ko'ra

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)(x_n - x_r) + O((x_n - x_r)^2).$$

Shunday qilib, $e_n = x_n - x_r$ kvadrat aniqlik bilan har bir iteratsiya uchun quyidagi taqribiy yenglikni yozish mumkin:

$$x_{n+1} - x_r = g'(x_r)(x_n - x_r).$$

Bu yerdan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni quyidagi formula bilan ifodalash mumkin:

$$x_n \approx x_r + [g'(x_r)]^n (x_0 - x_r)$$

Bu ketma-ketlikning ham yaqinlashishi turi (3.12) ketma-ketlikniki kabi. Demak, oddiy iteratsiyadagi ildizga yaqinlashish ketma-ketligi yaqinlashishni tezashtirish protsedurasini qo'llash uchun mos ekan,

Yaqinlashishni tezashtirish protsedurasini qo'llashda hisoblangan har bir yaxshilovchi qiymatning keyingi hisoblashlarda ham hisobga olinishin

ta'minlash maqsadida uni shu zahoti hisobga kiritish lozim. Bu iteratsiyaning har bir qadamida quyidagicha bajariladi: Faraz qilaylik, hisoblashlar x_n ning qiymatini hisoblashgacha bajarildi; uning yordamida ikkita yordamchi $x_n^{(1)} = g(x_n)$ va $x_n^{(2)} = g(g(x_n))$ qiymatlarni hisoblaymiz. Uchta x , $x_n^{(1)}$ va $x_n^{(2)}$ qiymatlarga (3.13) tezlatgich formulani qo'llaymiz va uning natijasini navbatdagi x_{n+1} yaqinlashish deb qabul qilamiz:

$$x_{n+1} = \frac{x_n g(g(x_n)) - g^2(x_n)}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}. \quad (3.14)$$

Bu tenglik (3.11) Steffensen iteratsion formulasining yozilish shakllaridan biri ekanligi ko'rinib turibdi.

1-misol. (3.14) formulani ushbu

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

tenglamaning ikki karrali ildizini topishga qo'llang.

Yechish. Buning uchun Nyuton iteratsiyasiga mos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

deb olib, (3.14) formula bo'yicha hisoblashlardan

$$\{0,5; 1,87215909; 1,99916211; 1,99999996; 2,00000000\}$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Bu qiymatlarni ξ_n ning yuqoridagi jadvalning to'rtinchi ustunidagi qiymatlari bilan taqqoslab, tezlatgichni ketma-ketlikka emas, balki hatija olingan algoritmgaga kiritish bilan samaradorlik oshganligini ko'rishimiz mumkin.

4. QIZIQARLI AMALIY MASALALARNI MATEMATIK PAKETLAR YORDAMIDA YECHISH

4.1. Nochiziqli tenglamalarni Maple dasturi yordamida yechish

Nochiziqli tenglamalarni yechishning matematik paketlaridan biri Maple ning asosiy funksiyalari quyidagilar:

1) $\text{solve}(\langle \text{tenglama} \rangle, \langle \text{o'zgaruvchi} \rangle)$ – bu nochiziqli tenglamani analitik ko'rinishda yechish uchun qo'llaniladi, masalan:

$\text{solve}(F(x), x)$ – bu $f(x)=0$ tenglamani x o'zgaruvchi bo'yicha yechish;

$\text{solve}(F(x), G(x), x)$ – bu $f(x)=g(x)$ tenglamani x o'zgaruvchi bo'yicha yechish;

2) $\text{fsolve}(\langle \text{tenglama} \rangle, \langle \text{o'zgaruvchi} \rangle, \langle \text{opsiya} \rangle)$ – bu nochiziqli tenglamani haqiqiy sonlar shaklida sonli yechish uchun qo'llaniladi, bunda $\langle \text{opsiya} \rangle$:

complex – ko'phadning bitta yoki barcha kompleks ildizlarini topadi;

folldigits – berilgan Digits funksiyalarining barcha raqamlari uchun hisoblashlarni bajaradi;

maxsols – ko'phadning faqat n ildizlarini hisoblash;

interval – tenglamaning $a..b$ yoki $x=a..b$ intervaldagi ildizlarini topishni ta'minlaydi.

3) bulardan tashqari maxsuslikka ega funksiyalar ham mavjud, bular, masalan,

rsolve – rekkurent tenglamalarni yechish;

isolve – tenglamani butun qiymatli ko'rinishda yechish;

msolve – tenglamani m moduli bo'yicha yechish;

$\text{root}(\langle \text{ro'yxat} \rangle)$ – buning natijasi $[(r_1, m_1), \dots, [r_n, m_n)]$, bu yerda r_i – ko'phadning ildizlari; m_i – shu ildizning karraligi.

1-misol. Quyidagi ko'phadning ildizlarini toping:

$$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$$

Yechish. Bu tenglamani Maple paketi yordamida yechib, uning 4 ta haqiqiy yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz:

```
> solve(2*x^4 - 8*x^3 + 8*x^2 - 1,x);
```

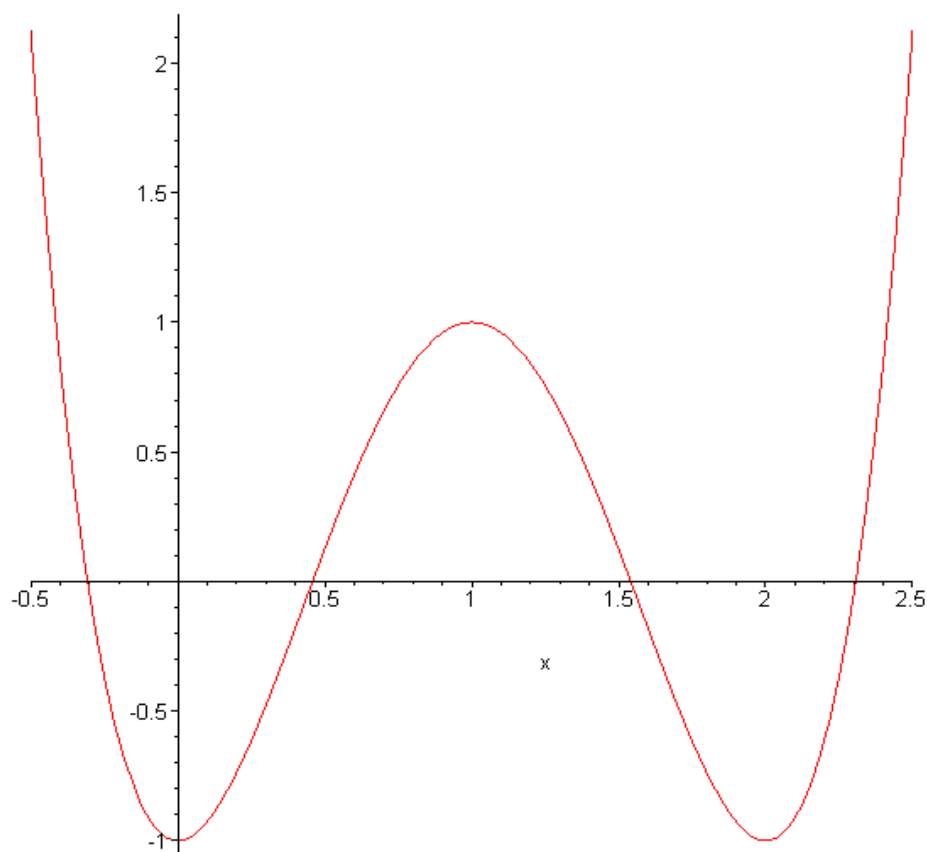
$$1 - \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

```
fsolve(2*x^4 - 8*x^3 + 8*x^2 - 1,x);
```

```
-0.3065629649, 0.4588038999, 1.541196100, 2.306562965
```

Haqiqatan ham bu ildizlarni $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$ funksiyaning grafigini Maple paketida chizish orqali ham ko'rishimiz mumkin

```
> with(plot): plot(2*x^4 - 8*x^3 + 8*x^2 - 1,x=-0.5..2.5);
```



2-misol. Ushbu $0.2x+x+1=0$ noxiziqli tenglamani $x_0=5$ boshlang'ich yaqinlashish bilan $\varepsilon = 0.0001$ aniqlikda Nyuton usuli bilan yechishning Maple bo'yicha oynali dasturi matni quyidagicha:

```
> restart;
```

```
Newton:=proc(f,a::numeric,epsilon::numeric)
```

```
local x,i,x0,x1,Err,r,l,ur;
```

```
if nops(indets(f,symbol))<>1 then ERROR("funksiya uzgaruvchilari soni bit-tadan ortiq");end if;
```

```

x:=op(indets(f,symbol));
r:=rhs(f);
l:=lhs(f):ur:=l-r;
x0:=a;
Err:=1000;
for i while Err>epsilon do
x1:=x0-subst(x=x0,ur)/subst(x=x0,diff(ur,x));
Err:=abs(x1-x0);
x0:=x1;end do;
return(evalf(x1));
end proc;
Newton(0.2*x+x+1=0,5,0.0001);
with(Maplets[Elements]):
maplet := Maplet (Window ( 'title'="Nochiziqli tenglamani Nyuton usuli bi-
lan yechish', [ ["Tenglamani f(x)=0 kabi kiriting: ", TextField['TF1']()],
["Boshlangich yaqinlashishni kiriting: ", TextField['TF2']()], ["Xatolikni ki-
riting: ", TextField['TF3']()], ["Tenglamaning sonli yechi-
mi:"],TextBox['TB1']( not editable, width='40', height='3'), [But-
ton("Hisob",Evaluate('TB1' = 'Newton(TF1, TF2, TF3)'), But-
ton("Tamom",Shutdown(['TF1','TF2','TF3', 'TB1'])))]]):
Maplets[Display](maplet);

```

Hisob natijasi quyidagicha:

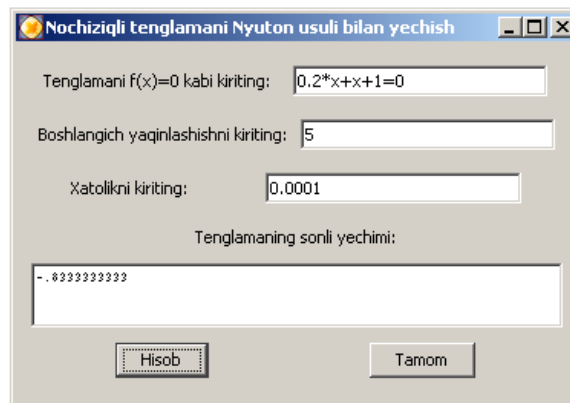
```

Newton = proc(f, a::numeric, ε::numeric)
local x, i, x0, x1, Err, r, l, ur;
if nops(indets(f, symbol)) ≠ 1 then ERROR("функция имеет более одной переменной") end if;
x := op(indets(f, symbol));
r := rhs(f);
l := lhs(f);
ur := l - r;
x0 := a;
Err := 1000;
for i while ε < Err do x1 := x0 - subst(x = x0, ur) / subst(x = x0, diff(ur, x)); Err := abs(x1 - x0); x0 := x1 end do;
return evalf(x1)
end proc

```

-0.8333333333

[>



Demak, hisob natijasi quyidagicha: $x = -0.833333333$

3-misol. Ushbu $x=1+0.25/x$ nochiziqli tenglamani $x_0 = 0,25$ boshlang'ich yaqinlashish bilan $\varepsilon = 0.0001$ aniqlikda iteratsiya usuli bilan yechishning Maple bo'yicha oynali dasturi matni quyidagicha:

> **restart;**

Iteratsiya:=proc(f,a::numeric,epsilon::numeric)

local x,i,x0,x1,Err,r,l,ur;

if nops(indets(f,symbol))<>1 then ERROR("функция funksiya uzgaruvchilari soni bittadan ortiq");end if;

x:=op(indets(f,symbol));

r:=rhs(f);

l:=lhs(f);

ur:=r;

x0:=a;

Err:=1000;

for i while Err>epsilon do

x1:=subs(x=x0,ur);

Err:=abs(x1-x0);

x0:=x1;end do;

return(evalf(x1));

end proc;

```

Iteratsiya(x=1+0.25/x,0.25,0.0001);
with(Maplets[Elements]):
maplet := Maplet (Window ( 'title'="Nochiziqli tenglamani iteratsiya usuli
bilan yechish", [ ["Tenglamani x=fi(x) kabi kiriting: ", TextField['TF1']()],
["Boshlangich yaqinlashishni kiriting: ", TextField['TF2']()], ["Xatolikni ki-
riting: ", TextField['TF3']()], ["Nochiziqli tenglamaning sonli yechi-
mi:"],TextBox['TB1']( not editable, width='40', height='3'), [But-
ton("Hisob",Evaluate('TB1' = 'Iteratsiya(TF1, TF2, TF3)')), But-
ton("Tamom",Shutdown(['TF1','TF2','TF3', 'TB1']))])):
Maplets[Display](maplet);

```

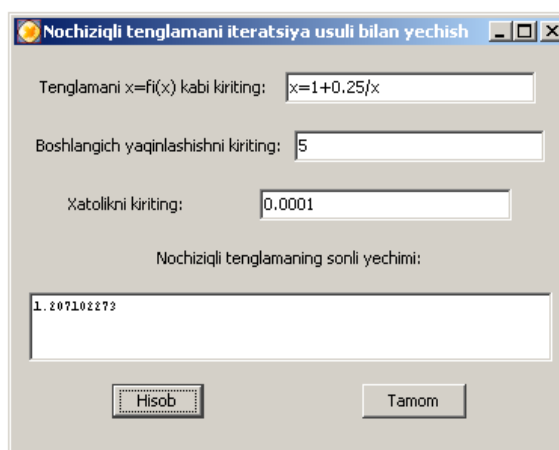
Hisob natijasi quyidagicha:

```

Iteratsiya := proc(f, a::numeric, ε::numeric)
local x, i, x0, x1, Err, r, l, ur;
  if nops(indets(f, symbol)) ≠ 1 then ERROR("функция имеет более одной переменной") end if;
  x := op(indets(f, symbol));
  r := rhs(f);
  l := lhs(f);
  ur := r;
  x0 := a;
  Err := 1000;
  for i while ε < Err do x1 := subs(x = x0, ur); Err := abs(x1 - x0); x0 := x1 end do;
  return evalf(x1)
end proc

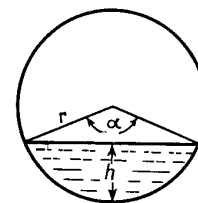
```

1.207119741



Demak, hisob natijasi quyidagicha: $x = 1.207119741$

4-misol. Radiusi r bo'lgan silindrik quvurning yotgan shaklida neft bilan q qismi to'ldirilgan. Quvurdagi neft sathining balandligini $h = r(1 - \cos(\alpha/2))$ formuladan aniqlang, bunda α – markaziy burchak bo'lib, u ushbu



$$\alpha - \sin\alpha - 2\pi q = 0$$

tenglikdan topiladi.

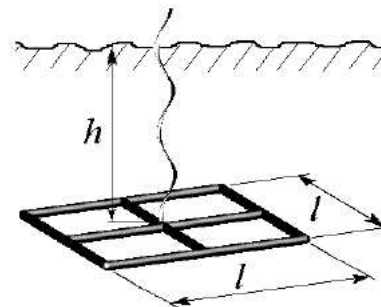
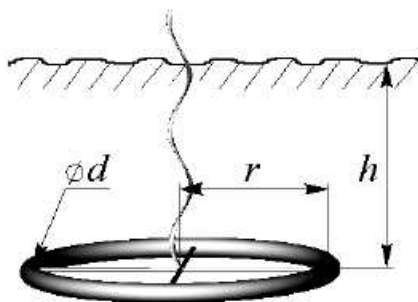
Yechish. Bu tenglamani $q = 0.25$ bo'lgan hol uchun Maple paketi yordamida yechib, $r = 1.2$ m bo'lgan hol uchun h (m) ni toping:

```
> q:=0.25; Pi:=3.14159; alfa:=solve(x-sin(x)-2*Pi*q,x);
alfa:=fsolve(x-sin(x)-2*Pi*q,x); r:=1.2; h:=r*(1-cos(alfa/2));
q := 0.25
alfa := 2.309881460
alfa := 2.309881460
r := 1.2
h := 0.7152326960
```

4-misol. R qarshilikli xalqa (yoki to'g'ri to'rtburchakli to'r) shaklidagi r radiusli (yoki quvurchalarining jami uzunligi $L = 6 \times l$) yerlagich tuproqqa h chuqurlikka o'rnatilgan. $h \gg r$ da uning qarshiligi ushbu

$$a) R = \frac{1}{4\pi^2 r G} \left[\frac{\pi r}{h} + \ln\left(\frac{16r}{d}\right) \right]$$

$$b) R = \frac{\ln\left(\frac{L^2}{2rh}\right) + 4,95}{2\pi L G}$$



formula bilan hisoblanadi, bunda $\pi = 3,14159$, G – tuproqning solishtirma elektr o'tkazuvchanligi, d – xalqa (yoki to'g'ri to'rtburchakli to'r) shaklida tayyorlan-

gan o'tkazgichning diametri. Yerlagichning talab qilingan R qarshiligini ta'minlovchi r – quvurcha radiusini, berilgan h, d, G parametrlar uchun aniqlang.

Yechish. Bu tenglamani $h = 1.2$ m; $l = 1.2$ m; $d = 0.03$ m; $R = 17$ om; $G = 0.02$ $^1/\text{Om}\cdot\text{m}$ bo'lgan hol uchun Maple paketi yordamida r ga nisbatan yechamiz:

```
> h:=1.2; d:=0.03; lm:=1.2; R:=17; L:=6*lm; G:=0.02; pi:=3.14159;
rad11:=solve(R-1/(4*pi^2*r*G)*(pi*r/h+ln(16*r/d)),r);
rad12:=fsolve(R-1/(4*pi^2*r*G)*(pi*r/h+ln(16*r/d)),r);
rad21:=solve(R-(ln(L^2/(2*r*h))+4.95)/(2*pi*L*G),r);
rad22:=fsolve(R-(ln(L^2/(2*r*h))+4.95)/(2*pi*L*G),r);
```

$h := 1.2$

$d := 0.03$

$lm := 1.2$

$R := 17$

$L := 7.2$

$G := 0.02$

$\pi := 3.14159$

$rad11 := 0.001914182673, 0.5207658886$

$rad12 := 0.001914182673$

$rad21 := 0.0006371335151$

$rad22 := 0.0006371335151$

Demak, hisob natijasi quyidagicha:

a) $r = 0.5207658886$ yoki $r = 0.001914182673$;

b) $r = 0.0006371335151$.

4.2. Nochiziqli tenglamalarni Mathcad dasturi yordamida yechish

Nochiziqli tenglamani Mathcad paketi yordamida yechishning uchta dasturi keltirilgan bo'lib, ular modulli dastur ko'rinishida tuzilgan va sarlavhalari quyidagicha:

- FunZero_Sec(a,b,F,ε) - bu biseksiyalar va kesuvchilar usullari algoritmi bo'yicha tenglamani yechish dasturi;
- FunZero_Stff(a,b,F,ε) - bu biseksiyalar va Steffenson usullari algoritmi bo'yicha tenglamani yechish dasturi;
- FunZero_I(a,b,F,ε) - bu teskari parabolik interpolatsiya algoritmi bo'yicha tenglamani yechish dasturi;

Misol. Quyidagi nochiziqli tenglamani Mathcad paketi yordamida sonli yeching:

$$f(x) = e^{-x} - x = 0.$$

Yechish. Nochiziqli tenglamani yechish dasturlariga murojlat va ularning natijalari quyidagicha:

$$\text{FunZero_Sec}(0,1,F,10^{-6})^T = [0.567143 \quad -6.84075 \cdot 10^{-12} \quad 1];$$

$$\text{FunZero_Stff}(0,1,F,10^{-6})^T = [0.567143 \quad 0 \quad 6];$$

$$\text{FunZero_I}(0,1,F,10^{-6})^T = [0.567143 \quad 0 \quad 3];$$

Demak berilgan nochiziqli tenglamaning ildizi $x = 0.567143$ ekan.

Quyida ana shu uchala dasturlarning matnlari keltirilgan:

FunZero_Sec(a, b, F, ε) :=

```

Fa ← F(a)
Fb ← F(b)
I ← 0
while |b - a| > 0.1
  | c ← (a + b) / 2
  | Fc ← F(c)
  | if Fa · Fc < 0
  |   | b ← c
  |   | Fb ← Fc
  | otherwise
  |   | a ← c
  |   | Fa ← Fc
  | I ← I + 1
while |b - a| > ε
  | c ← b - (Fb / (Fb - Fa)) · (b - a)
  | a ← b
  | Fa ← Fb
  | Fb ← F(c)
  | b ← c
  | I ← I + 1
[ b
  Fb
  I ]

```

Nochiziqli tenglamani biseksiya va kesuvchilar usuli bilan yechishning Mathcad dasturi

FunZero_Stff(a, b, F, s) :=

```

| Fa ← F(a)
| Fb ← F(b)
| I ← 0
| while | b - a | > 0.1
|   | c ← 0.5 · (a + b)
|   | Fc ← F(c)
|   | if Fa · Fc < 0
|   |   | b ← c
|   |   | Fb ← Fc
|   | otherwise
|   |   | a ← c
|   |   | Fa ← Fc
|   | I ← I + 1
| a ← c
| Fa ← Fc
| while 1
|   | b ← a -  $\frac{Fa^2}{F(a + Fa) - Fa}$ 
|   | Fb ← F(b)
|   | return  $\begin{bmatrix} b \\ Fb \\ I \end{bmatrix}$  if | b - a | ≤ s
|   | a ← b
|   | Fa ← Fb
|   | I ← I + 1

```

Nochiziqli tenglamani biseksiya va Steffensen usuli bilan yechishning Mathcad dasturi.

FunZero_I(a, b, F, ε) :=

```

x1 ← a
x2 ← b
y1 ← F(x1)
y2 ← F(x2)
x3 ←  $\frac{a + b}{2}$ 
y3 ← F(x3)
I ← 0
while 1
  x4 ←  $\frac{y_2 \cdot y_3 \cdot (y_2 - y_3) \cdot x_1 - y_1 \cdot y_3 \cdot (y_1 - y_3) \cdot x_2}{(y_1 - y_2) \cdot (y_1 - y_3) \cdot (y_2 - y_3)}$ 
  x4 ← x4 +  $\frac{y_1 \cdot y_2 \cdot (y_1 - y_2) \cdot x_3}{(y_1 - y_2) \cdot (y_1 - y_3) \cdot (y_2 - y_3)}$ 
  x1 ← x2
  y1 ← y2
  x2 ← x3
  y2 ← y3
  x3 ← x4
  y3 ← F(x3)
  I ← I + 1
  return  $\begin{bmatrix} x3 \\ y3 \\ I \end{bmatrix}$  if  $|x3 - x2| < \varepsilon$ 

```

Nochiziqli tenglamani teskari parabolik interpolyatsiyalash usuli bilan yechishning
Mathcad dasturi.

XULOSA

Mazkur bitiruv malakaviy ishining muhim natijalari quyidagilar:

- nohiziqli tenglamalarni yechish ancha murakkab va bu masala hisoblash matematikasining mukammal yechilmagan muammosi ekan;
- nohiziqli tenglamalarni yechishning boshlang'ich muammosi – bu nohiziqli tenglama yechimlarining mavjudligi, soni va ular yotgan oraliqni topish muammolari o'rganilgi, bular aniq misollarni yechish orqali izohlandi;
- nohiziqli tenglamaning ajratilgan ildizini topish muammosi bir nechta taqribiy usullarda bayon qilindi, aniq misollar yechimlari bilan izohlandi;
- nohiziqli tenglamaning ildizlarini topishning taqribiy usullari soddadan murakkabga va ularning xususiy hollari bilan o'rganildiki, bu shu mavzuni batafsilroq yoritish imkonini berdi;
- nohiziqli tenglamalarni Maple va Mathcad paketi yordamida yechishning muammolari o'rganildi, uni amalga oshirishning bosqichlari ishlab chiqildi;
- nohiziqli tenglama funksiyasining grafigini Maple Maple va Mathcad paketi yordamida chizish orqali tenglama haqiqiy yechimlari mavjudligi, ularning soni, bu yechimlar yotgan oraliqlarni topish muammolari o'rganildi;
- nohiziqli tenglamalarning analitik yechimini Maple va Mathcad paketi yordamida yechish o'rganildi, hisob algoritmgiga oid tushunchalar bilan tanishildi, amaliy masalalar yechildi;
- nohiziqli tenglamalarni Maple va Mathcad paketi yordamida sonli yechishning algoritmi, dasturi, matematik paketlardan foydalanish bosqichlari bajarildi, har xil amaliy masalalar yechildi;
- qo'yilgan masalani matematik paketlar yordamida samarali yechishga oid tavsiyalar ishlab chiqildi, undan foydalanishning mumkin bo'lgan imkoniyatlari ketma-ket tahlil qilindi;

- olingan sonli yechimlar analitik yechimlar bilan taqqoslandi, hisob jarayonining to'g'ri ekanligi, algoritim va dasturdan samarali foydalanish mumkinligi ko'rsatildi;
- ishlab chiqilgan hisob metodikasi va yaratilgan hisob dasturiy vositasidan har xil nohiziqli tenglamalarga oid amaliy masalalarini yechishda samarali foydalanish mumkin;
- nohiziqli tenglamalarni taqribiy yechish usullaridan Nyuton usuli juda samarali ekan, ammo uning qo'llanilish sohasi juda kam;
- iteratsiyalar usuli ham juda qulay, ammo yaqinlashuvchi funksiyani topish ko'p hollarda mushkulroq;
- oraliqni ikkiga bo'lish usuli juda qulay, ammo uning yaqinlashish tezligi juda sust va karrali ildizlar uchun muannoli;
- iteratsion usullarning takomillashtirilgan har xil variantlari juda samarali, ammo bu boshlang'ich yaqinlashishni yakkahtirilgan ildizga juda yaqin olinganda va yaqinlashish shartlari bajarilgandagini bu usullarning yaqinlashish tezligi keskin oshadi.

Shunday qilib, nohiziqli tenglamalarni yechish muammosi qo'yilgan amaliy masala turiga qarab to'g'ri taqribiy usulni va boshlang'ich shartni tanlash, bu usullardan va matematik paketlardan samarali foydalanishdan iborat ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Karimov I. A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. – Toshkent, 2009 yil mart.
2. Karimov I.A. Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch. – Toshkent: «Ma'naviyat», 2008. – 220 b.
3. O'zbekiston Respublikasi «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni. – Toshkent, 1992.
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2002 yil 31 maydagi PF-3080-son «Kompyuterlashtirishni rivojlantirish va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini joriy etish to'g'risida»gi Farmoni. – Toshkent, 2002 yil 31 may.
5. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2002.06.06 dagi 200-sonli qarori. – Toshkent, 2002.
6. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. Ҳисоблаш усулларида амалиёт ва лаборатория машғулоти. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Matlab, Maple (Самоучитель). – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.
8. Бахвалов Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1975.
9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобелков Г. М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 600 с.
10. Воробьева Г.К., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М: Высшая школа, 1990.
11. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple V. Математический пакет для всех. - М.: Мир, 1997.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
13. Дьяконов В.П. Maple 6: учебный курс. - СПб.: Питер, 2001.
14. Исраилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. 1-қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003.
15. Исраилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. 2-қисм. – Тошкент: Ўқитувчи,

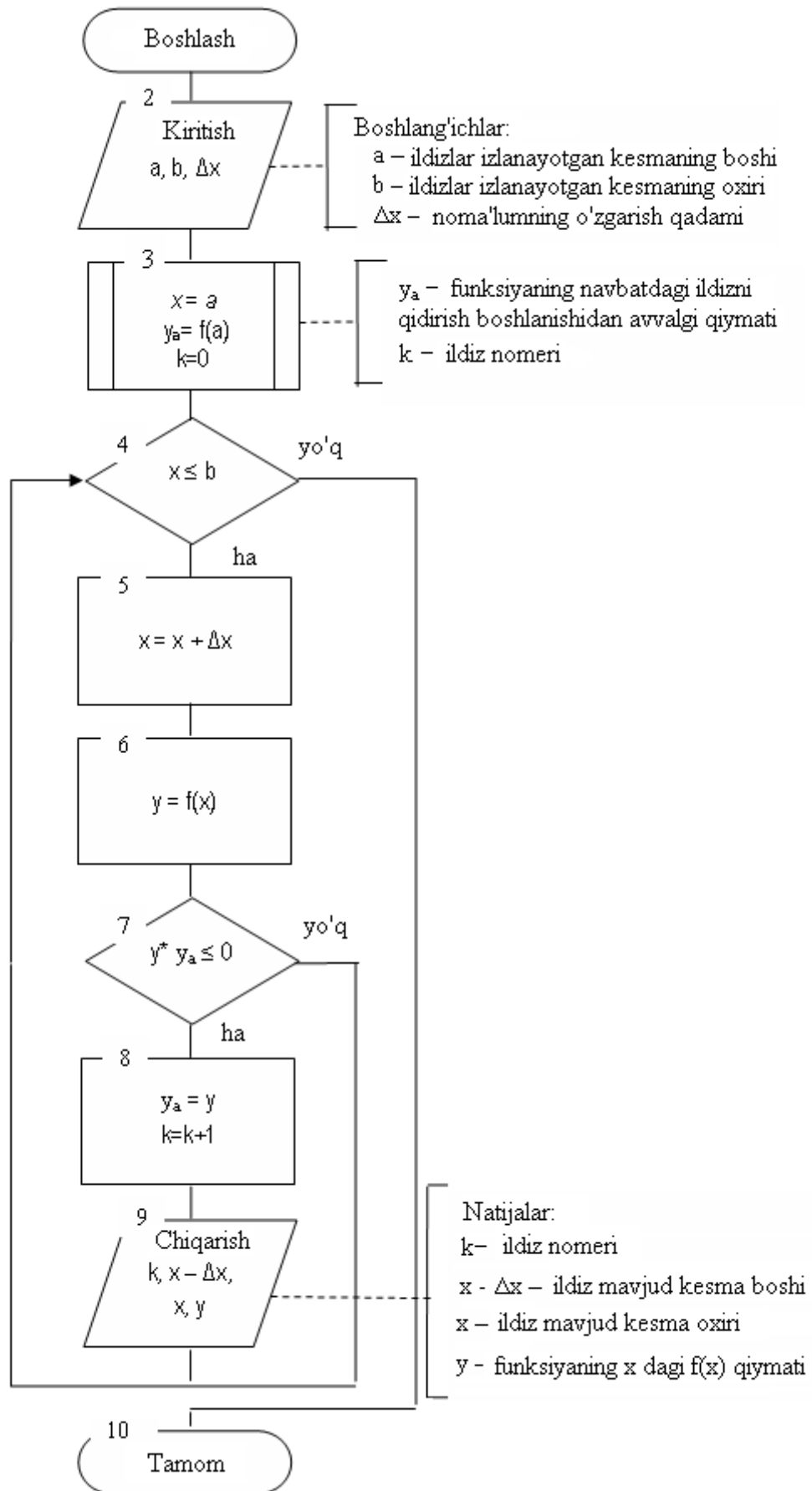
2004.

16. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
17. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 2008. – 368 с.
18. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1976.
19. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. - М.: Филинь, 1998.
20. Сборник задач по методам вычислений. Учебное пособие / Под ред. П.И.Монастырного. – 2-е изд. – Мн.: Университецкое, 2000. – 311 с.

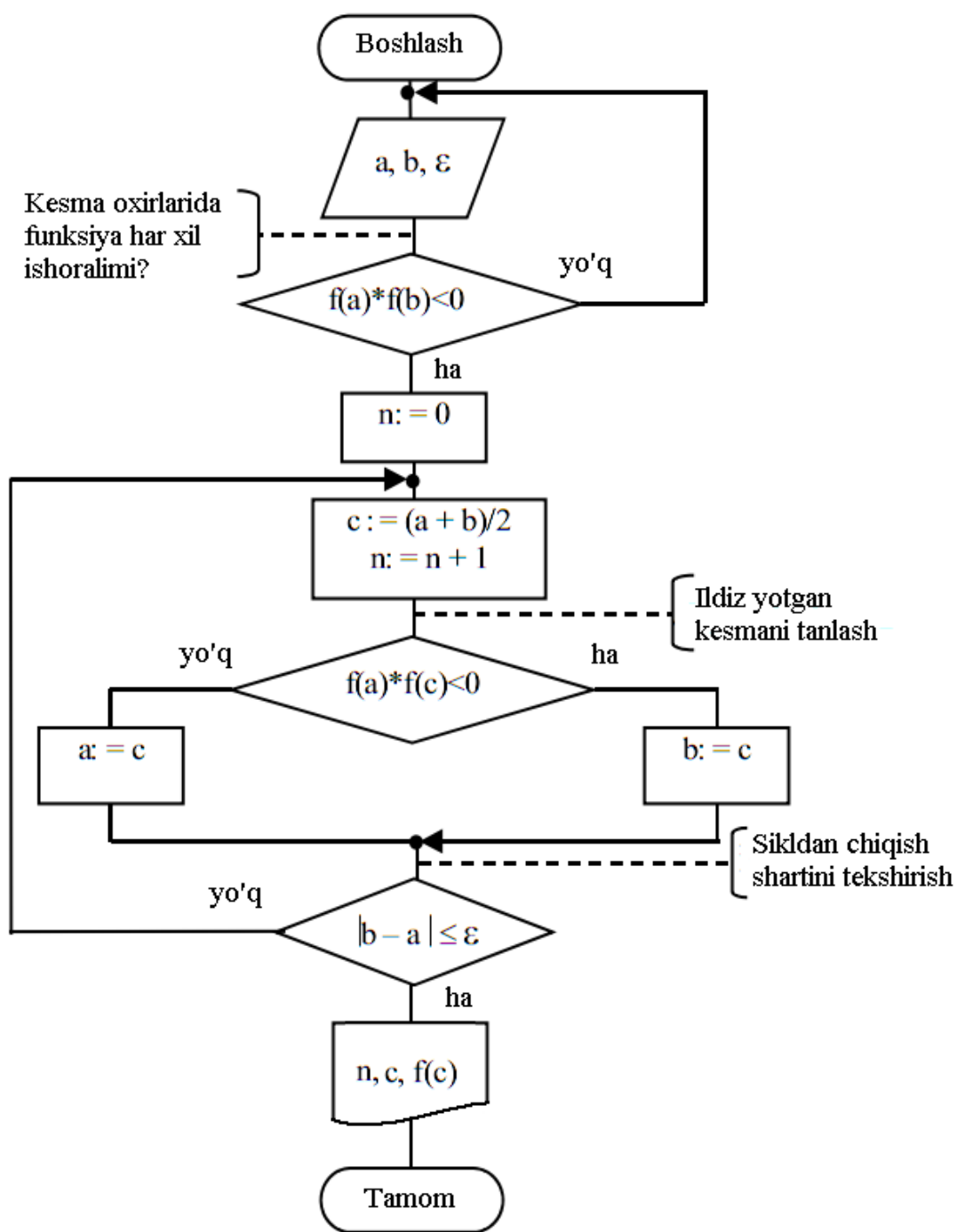
FOYDALANILGAN INTERNET SAYTLAR RO'YXATI

1. www.edu.ru
2. www.edu.uz
3. www.exponenta.ru
4. www.wikipedia.ru
5. www.ziyonet.uz

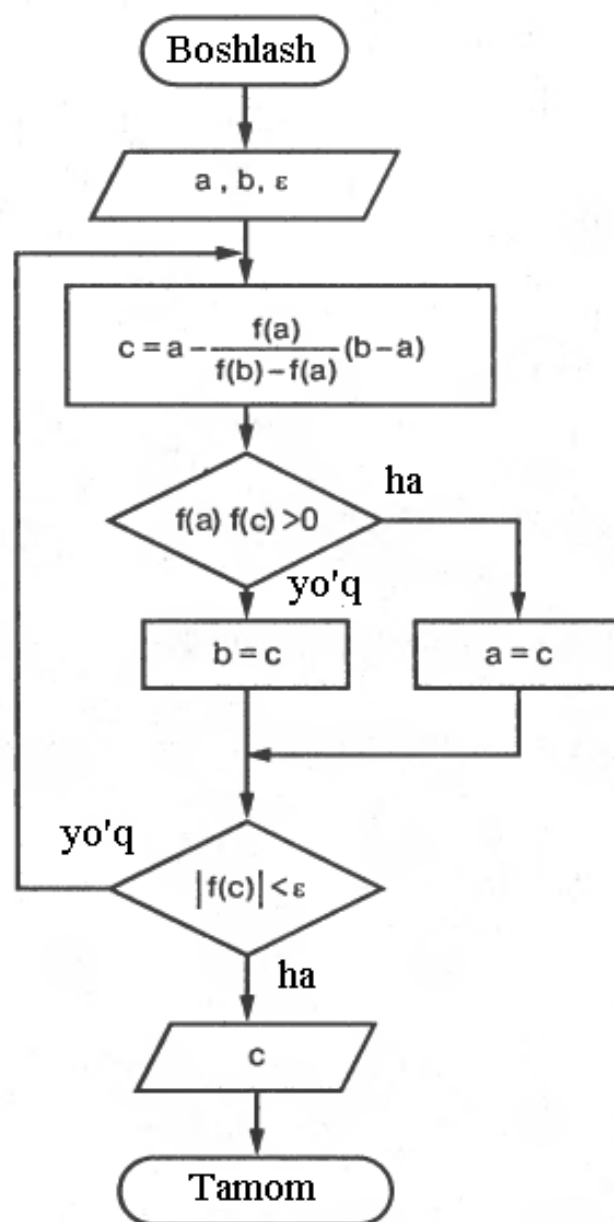
ILOVALAR



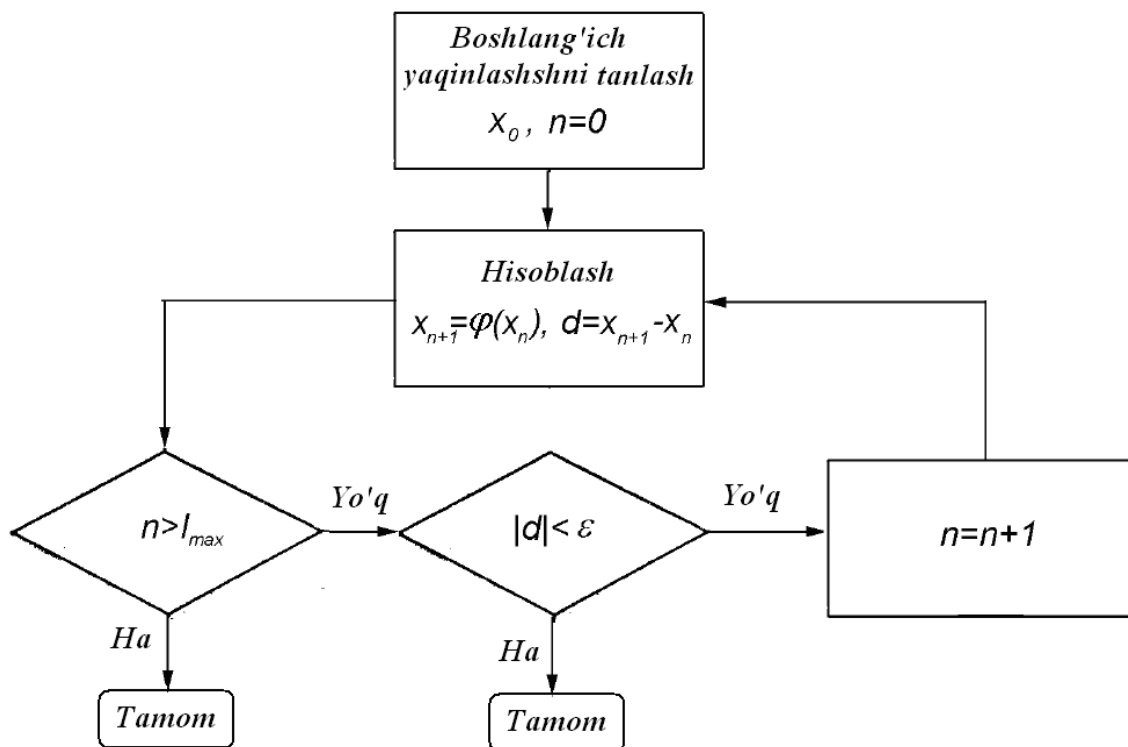
I.1-rasm. Tenglamaning haqiqiy ildizlarini ajratishning blok-sxemasi.



I.2-rasm. Kesmani teng ikkiga bo'lish usulining blok-sxemasi.



I.3.-rasm. Vatarlar usulining blok-sxemasi.



I.4-rasm. Oddiy iteratsiya usulining blok-sxemasi

Nochiziqli tenglamani x_0 boshlang'ich yaqinlashish bilan ε aniqlikda Nyuton usuli bilan yechishning Maple bo'yicha oynali dasturi matni

```
> restart;
Newton:=proc(f,a::numeric,epsilon::numeric)
local x,i,x0,x1,Err,r,l,ur;
if nops(indets(f,symbol))<>1 then ERROR("funksiya uzgaruvchilari soni bit-
tadan ortiq");end if;
x:=op(indets(f,symbol));
r:=rhs(f);
l:=lhs(f):ur:=l-r;
x0:=a;
Err:=1000;
for i while Err>epsilon do
x1:=x0-subst(x=x0,ur)/subst(x=x0,diff(ur,x));
Err:=abs(x1-x0);
x0:=x1;end do;
return(evalf(x1));
end proc;
Newton(0.2*x+x+1=0,5,0.0001);
with(Maplets[Elements]):
maplet := Maplet (Window ( 'title'="Nochiziqli tenglamani Nyuton usuli bi-
lan yechish", [ ["Tenglamani f(x)=0 kabi kiriting: ", TextField['TF1']()],
["Boshlang'ich yaqinlashishni kiriting: ", TextField['TF2']()], ["Xatolikni ki-
riting: ", TextField['TF3']()], ["Tenglamaning sonli yechi-
mi:"],TextBox['TB1']( not editable, width='40', height='3'), [But-
ton("Hisob",Evaluate('TB1' = 'Newton(TF1, TF2, TF3)')), But-
ton("Tamom",Shutdown(['TF1','TF2','TF3', 'TB1'])))]]):
Maplets[Display](maplet);
```

Nochiziqli tenglamani x_0 boshlang'ich yaqinlashish bilan ε aniqlikda iteratsiyalar usuli bilan yechishning Maple bo'yicha oynali dasturi matni

> restart;

Iteratsiya:=proc(f,a::numeric,epsilon::numeric)

local x,i,x0,x1,Err,r,l,ur;

if nops(indets(f,symbol))<>1 then ERROR("funksiya uzgaruvchilari soni bitadan ortiq");end if;

x:=op(indets(f,symbol));

r:=rhs(f);

l:=lhs(f);

ur:=r;

x0:=a;

Err:=1000;

for i while Err>epsilon do

x1:=subs(x=x0,ur);

Err:=abs(x1-x0);

x0:=x1;end do;

return(evalf(x1));

end proc;

Iteratsiya(x=1+0.25/x,0.25,0.0001);

with(Maplets[Elements]):

maplet := Maplet (Window ('title'="Nochiziqli tenglamani iteratsiya usuli bilan yechish", [["Tenglamani $x=fi(x)$ kabi kiriting: ", TextField['TF1']()], ["Boshlangich yaqinlashishni kiriting: ", TextField['TF2']()], ["Xatolikni kiriting: ", TextField['TF3']()], ["Nochiziqli tenglamaning sonli yechimi: ", TextBox['TB1'](not editable, width='40', height='3'), [Button("Hisob",Evaluate('TB1' = 'Iteratsiya(TF1, TF2, TF3)')), Button("Tamom",Shutdown(['TF1','TF2','TF3', 'TB1'])]]))):
Maplets[Display](maplet);