

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA BO'LIMI

«HISOBLASH USULLARI» KAFEDRASI

KARIMOV ELYOR

**IKKINCHI TARTIBLI ODDIY
DIFFERENSIAL
TENGLAMALARNI CHEKLI
ELEMENTLAR USULI BILAN
YECHISH**

«5480100 – Amaliy matematika va informatika» ta'lim yo'nalishi
bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ish ko'rildi va himoya qilishga ruxsat berildi.

Fakultet dekani :

prof. A.Soleev

Kafedra mudiri :

dots. A.Abdirashidov

Ilmiy rahbar :

dots. Sh.S.Mamatov

Samarqand - 2013

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
1-§ Chekli elementlar usuli haqida boshlang'ich tushunchalar	6
2-§ Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini Galiorkin usulida yechish	15
3-§ Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish	19
4-§ Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Shturm-Liuvil chegaraviy masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish.....	28
XULOSA.....	42
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	43

KIRISH

Masalaning qo'yilishi. Oxirgi vaqtlarda variasion usullardan biri hisoblanadigan chekli elementlar usuli keng qo'llanilmoqda. Usulning mohiyati shundaki, qaralayotgan jism chekli sondagi elementlarga (yassi masalada uchburchaklarga, fazoda tetraedrlarga) ajratiladi. Har bir element ichida shakl funksiyalari beriladi va bu funksiyalar tugunlardagi (elementlar tutashgan nuqtalar) ko'chishlar orqali elementning ichidagi ko'chishlarni aniqlash imkonini beradi.

Chekli elementlar usulining g'oyasi shundan iboratki, ixtiyoriy uzluksiz kattalikni (temperatura, bosim, ko'chish) chekli sondagi sohalarda aniqlangan bo'lakli-uzluksiz funksiyalar yordamida quriladigan diskret model yordamida akslantirishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishida oddiy differensial tenglamalarni chekli elementlar usulida yechishni tadqiq qilish, masalaning matematik modelini tuzish; Pascal tizimida dasturiy ta'minotini yaratish; tanlangan masalaning yechilish jarayonini namoyish qiladigan dasturiy vosita yaratish qaratiladi.

Mavzuning dolzarbligi. Fizik hodisalarining sifat ko'rsatkichlarini tahlil qilishda muhandis yoki fizik qaralayotgan sohada o'rinli bo'lgan differensial tenglamalar sistemasini kiritadi, unga boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qo'yadi, ya'ni masalaning matematik modelini tuzadi. Bu holda matematik model to'liq (yopiq) bo'ladi va amaliyotda qo'llash uchun biror sohada berilgan sonli qiymatlardan bog'liq yechimini topish yetarli bo'ladi. Ko'pchilik hollarda qaralayotgan soha kesma yoki tekislikdan iborat bo'lmasdan murakkab shaklda bo'ladi (masalan samolyot, suv osti kemasi yon sirtlari). Bunday hollarda chekli elementlar usulini qo'llash yaxshi sonli natijalarga olib keldishi mumkin. Bitiruv ishida qaralayotgan masalalarning dolzarbligir ham ana shundadir.

Ishning maqsadi. Ushbu bitiruv malakaviy ishning maqsadi matematik fizika, mexanikaning ayrim amaliy masalalarida qaraladigan jarayonlarni

kompyuter yordamida modellashtirishni o'rganish, sonli hisoblalar bajarish, dasturiy ta'minotni yaratish va hisoblash tajribalari asosida tadqiq etishdan iborat. Aniq masalalar sifatida birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar, Shturm – Liuvil chegaraviy masalasi tenglamasini sonli yecchish masalasi olingan. Qo'yilgan masalani hal etish uchun quyidagi ishlarni hal etish zarur:

fizik jarayonlarni matematik modellashtirish asoslarini o'rganish;

- masalaning matematik tavsifini berish;
- Chekli elementlar usulida differensial tenglamalarni sonli echish masalasining matematik modelini tuzish;
- masalani echishning algoritmini tuzish;
- dasturiy mahsulotni loyihalashtirish, sozlash va sinovdan o'tkazish;
- hisoblash tajribalari o'tkazish va uning natijalarini tahlil qilish.

Yaratilayotgan dasturiy mahsulotni matematika, fizika va mexanika sohasidagi ilmiy tadqiqotlarda va o'quv jarayonida amaliy masalalarni echishda foydalanish nazarda tutiladi.

Ishning vazifasi. Yaratiladigan hisob metodikasi va dasturning vazifasi fizika, matematika va mexanika sohasidagi mutaxassislar va o'rganuvchilarga birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni chekli elementlar usulini tadbiiq etgan holda shu singari masalalarni kompyuter yordamida tadqiq etishda hisoblash tajribalarini o'tkazish imkoniyatini yaratishda yordam berishdan iborat.

Ilmiy-tadqiqot usullari. Bitiruv malakaviy ishining maqsad va vazifalarini bajarish maqsadida “Differensial tenglamalar”, “Hisoblash matematikasi”, “Dasturlashtirish texnologiyalari”, “Matematik modellashtirish” fanlarining tadqiqot usullaridan foydalanildi.

Mavzuning ilmiy va amaliy ahamiyati. Mazkur ishdagi ma'lumotlar fizik, matematik va mexanik xarakterdagi masalalarni tadqiq etishda talabalarga? mutaxassislar foydalanish uchun qo'shimcha ma'lumot va

ishlanma sifatida xizmat qilishi mumkin. Ma'lumotlarni ifodalashda aniq amaliy masala keltirilgan, Pascal paketida dasturlashni to'liq o'z ichiga olgan shuning uchun undan foydali amaliy vosita sifatida ishlatish mumkin. Bunda dastur to'liq holda keltirilgan, ular soddalashtirilgan holatda qo'llangan.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, 4 ta paragraf, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Kirish qismida masalaning dolzarbligi, masalaning qo'yilishi, ishning ilmiy va amaliy ahamiyati, ilmiy-tadqiqot metodlari hamda ishning tuzilishi va qisqacha mazmuni bayon qilingan. 1-paragrafda chekli elementlar haqida boshlang'ich tushunchalar keltirilgan, 2-paragrafda birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini Galiorkin usulida yechish 3-paragrafda Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish, 4 paragrafda ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Shturm – Liuvil chegaraviy masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish o'rganilgan, aniq amaliy masalalar yechilgan, xulosa qismida bitiruv ishining asosiy natijalari va uning amaliy tadbirlari bayon qilingan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni (annotatsiyasi). Mazkur bitiruv malakaviy ishda fizik jarayonlarni matematik modellashtirish asoslari o'rganilgan, masalaning matematik tavsifi berilgan, Birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni chekli elementlar usulida yechish masalalarining matematik modeli ishlab chiqilgan, masalani echish uchun sonli usutsh qo'llash o'rganilgan, masalani echishning algoritmi tuzilgan, dasturiy mahsulot loyihalashtirilgan, sozlangan va sinovdan o'tkazilgan, aniq masala uchun hisoblash tajribalari o'tkazilgan va uning natijalari tahlil qilingan.

1-§. Chekli elementlar usuli haqida boshlang'ich tushunchalar

Ta'rixiy ma'lumotlar. Fan va texnikada doimo murakkab geometrik shaklga va noregulyar fizik tuzilmaga ega tizimlar hisobi muammosiga to'qnash kelinadi. Zamonaviy kompyuterlar bunday hisoblarni taqribiy sonli usullar yordamida bajarish imkonini beradi. Ana shunday usullardan biri chekli elementlar usulidir. O'tgan asrning oxirgi yillariga kelib bu usul qo'llanilishi jihatidan yetakchi o'rinni egalladi va u o'zining keng tadbiqini topdi.

Chekli elementlar usuliga o'xshash sxema dastlab matematik olim R.Kurantning ishlarida qaralgan [7, 8, 17]. Fizik ma'nosini qo'llab va uni «Chekli elementlar usuli» deb nomlab yozilgan dastlabki ish muhandislarga tegishli [7, 17]. Keyinchalik bu usul va uning har xil modifikatsiyalariga bag'ishlab juda ko'plab maqolalar va kitoblar chop etildi. Bular haqida adabiyotlar ro'yxatini, masalan, [12, 14, 16, 17] dan olish mumkin. Chekli elementlar usuli katta universal kompyuterlarda dasturlar paketi sifatida keng qo'llanilib kelinmoqda [1-6, 21].

Quyida chekli elementlar usulining mazmuni, asosiy ustunliklari va ba'zi kamchiliklariga to'xtalamiz [10, 11, 20].

Chekli elementlar usulining g'oyasi: vaznli tafovutlar usulida sodda sinov va vazn funksiyalardan foydalanish, ammo S sohaning alohida qism sohalarida (chekli elementlarida), masalani yechish aniqligiga katta sondagi chekli elementlardan foydalanib erishish, bunda chekli elementlar sodda shaklda va ularda integrallarni hisoblash qiyinlik tug'dirmasligi lozim.

Vaznli tafovutlar usulidan chekli elementlar usuliga o'tishning matematik apparati global funksiyalar deb ataluvchi maxsus sinov funksiyalaridan foydalanishga asoslangan. Bu funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

- approksimatsiya tugunlarida funksiyalarning qiymati birga teng;
- approksimatsiya tugunlarini o'z ichiga olgan chekli elementlardagina noldan farqli, butun sohaning qolgan barcha nuqtalarda esa nolga teng.

Masalani yechishning bosqichlari [12, 14, 15, 18, 19]:

- *Chekli elementlarni tanlash.*

Bir o'lchovli masalada bu to'g'ri chiziq kesmasi. Ikki o'lchovli masalada bu uchburchakli (simpleks) element, to'g'ri to'rtburchakli element, umumiy holda ixtiyoriy shakl bo'lib, ular yordamida tadqiqot sohasi kesishmaydigan qism sohalarga ajratiladi, bunda element qancha murakkab bo'lsa integrallarni hisoblashda katta qiyinchiliklar bilan to'qnashiladi. Shuning uchun eng ko'p qo'llaniladiganlari uchburchakli elementlar va tomonlari koordinat o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli elementlar. Uch o'lchovli sohalar uchun esa – tetraedr va parallelepiped.

- *Sohani chekli elementlarga ajratish.*

Chekli ayirmali usuldan farqli ravishda bo'linishlarni noteks olish va fazoviy o'zgaruvchilar gradiyentini aprior hisobga olgan holda bajarish, ya'ni fazoviy o'zgaruvchilar tez o'zgarishi kutiladigan sohalarda to'rlar zich va aksincha. Sohani chekli elementlarga avtomatik bo'lishning har xil uslublari mavjud, chunki bu bosqichni qo'lda bajarish mashaqqatli va ko'pincha xatoliklarga olib keladi.

- *Maxsus funksiyalarni tanlash.*

Masalani yechishning talab qilingan va hisoblash sistemasining imkoniyatlaridan kelib chiqib, chiziqli, kvadratik yoki yuqoriroq darajada maxsus funksiyalar tanlanadi, bunda approksimatsiya tugunlari soni eng kami bilan approksimatsiyalovchi funksiyalar tartibidan bir birlikka katta bo'lishi lozim.

- *Koffisentlar matritsasini (masalan, qurilish mexani-kasi masalasida bikrlilik matrisasi) va yuklanishlar vektorini tuzish.*

Bu bosqichda bitti chekli elementlar doirasida vazinli tafovutlar usuli qo'llaniladi.

- *Ansamblashtirish yoki global bikrlilik matrisasini va yuklanishlar vektorini tuzish.*

- *Chegaraviy shartlarni hisobga olish.*
- *Chekli algebraik tenglamalar sistemasini yechish.*

Bunda koeffitsientlar matritsasining xususiyatlari e'tiborga olinishi mumkin, chunki bu matritsa lenta shaklida bo'ladi.

Chekli elementlar usulining o'ziga xos ustunliklari:

1) Chekli elementlar usuli izlanayotgan funktsiyaning tugun qiymatlariga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasini tuzishning qulay sxemasini qurish imkonini beradi. Sodda polinomial funktsiyalar yordamida yechimni taqribiy approk-simatsiyalash va barcha zaruriy operatsiyalar alohida tanlangan elementlarda bajariladi. Keyin esa elementlarni birlashtirish amalga oshirilib, talab qilingan algebraik tenglamalar sistemasiga kelinadi. Alohida elementdan ularning to'la majmuasiga o'tishning bunday algoritmi ayniqsa geometrik va fizik murakkablikka ega tizimlar uchun juda qulay.

2) Chekli elementlar usuli yordamida olingan har bir alohida algebraik tenglama barcha tugunlar noma'lumlariga nisbatan ularning bir qisminigina o'z ichiga oladi. Boshqacha qilib aytganda, algebraik tenglamalar sistemasining ko'pgina koeffitsientlari nolga teng, bu sistemani yechishni osonlashtiradi.

3) Masalaning funksional tenglamalarni qanoatlanti-ruvchi funktsiyalar orqali ifodalanuvchi yechimi kontinual yechim deb ataladi. Bulardan farqli ravishda, diskret masalalarning yechimi ularga mos algebraik tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi chekli sondagi parametrlar orqali aniq aniqlanadi. Xuddi boshqa sonli usullar kabi chekli elementlar usuli ham kontinual masalani diskret masalaga taqribiy almashtiriladi. Chekli elementlar usulida bu almashtirishning barcha proseduralari sodda fizik ma'noga ega. Bu esa masalani yechishning butun jarayoni o'zini to'lasincha namoyon qilishiga, mumkin bo'lgan ko'plab xatolardan qochishga va olingan natijalarni to'g'ri baholashga imkon beradi.

4) Kontinual masaladan tashqari chekli elementlar sxemasi diskret masalalarni to'g'ridan to'g'ri yechishda element-larni birlashtirishga va

algebraik tenglamalarni tuzishga ham qo'llaniladi. Bu esa usulning qo'llanilish sohasini kengaytiradi.

Chekli elementlar usulining o'ziga xos kamchiliklari:

Har qanday sonli usul kabi, chekli elementlar usulining ham o'ziga xos kamchiliklari mavjud:

1) chekli elementlardan iborat to'rlarni samarali qurib olish masalasi juda muhim ahamiyatga ega, bunga erishish uchun esa qurilmaning tuzilishini va unda kutiladigan o'zgarishlarni oldindan ko'zda tuta bilish lozim;

2) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining noma'lumlari soni juda katta bo'lganda uni yechish murakkablashadi;

Diskretlashtirish usullari. Qo'yilgan masalani sonli yechish asosan uni diskretlashtirish usullariga asoslangan. Bunga ko'ra uzluksiz matematik model chekli sondagi erkinlik darajasiga ega diskret modelga ko'chiriladi.

Fazoviy diskretlashtirish usullari:

- chekli elementlar usuli;
- chegaraviy elementlar usuli;
- chekli ayirmalar usuli;
- chekli hajmlar usuli;
- spektral usullar;
- erkin to'rlar usuli.

Bu usullar ichida eng ko'p va samarali qo'llanilib kelinayotgani bu chekli elementlar usulidir.

Chekli elementli tahlil jarayoni. Bu jarayonni ikki qadamli deb qarash mumkin: matematik talqin; fizik talqin.

Bularni sxemalarda tushuntiramiz (1.1-1.2-rasmlar).

Chekli elementlar usulining asosiy qadamlari – bu ideallashtirish, diskretlashtirish va yechish (1.3-rasm).

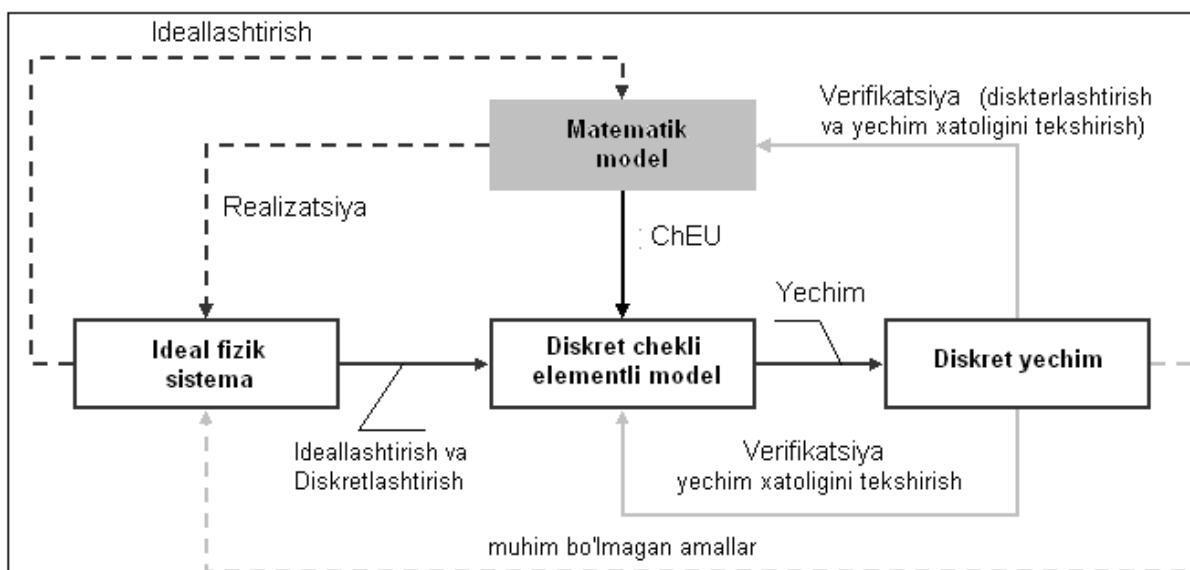
Ideallashtirish – bu fizik sistemadan matematik modelga o'tish jarayoni. Masalan, deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasida tekis plastinka

shaklidagi muhandislik qurilmasi – bu real fizik sistema, shu plastinkaning kuchlanishini tahlil qilish uchun yetarlicha nazariy bilimga ega bo'lgan muhandis quyidagi matematik modellardan foydalanishi mumkin:

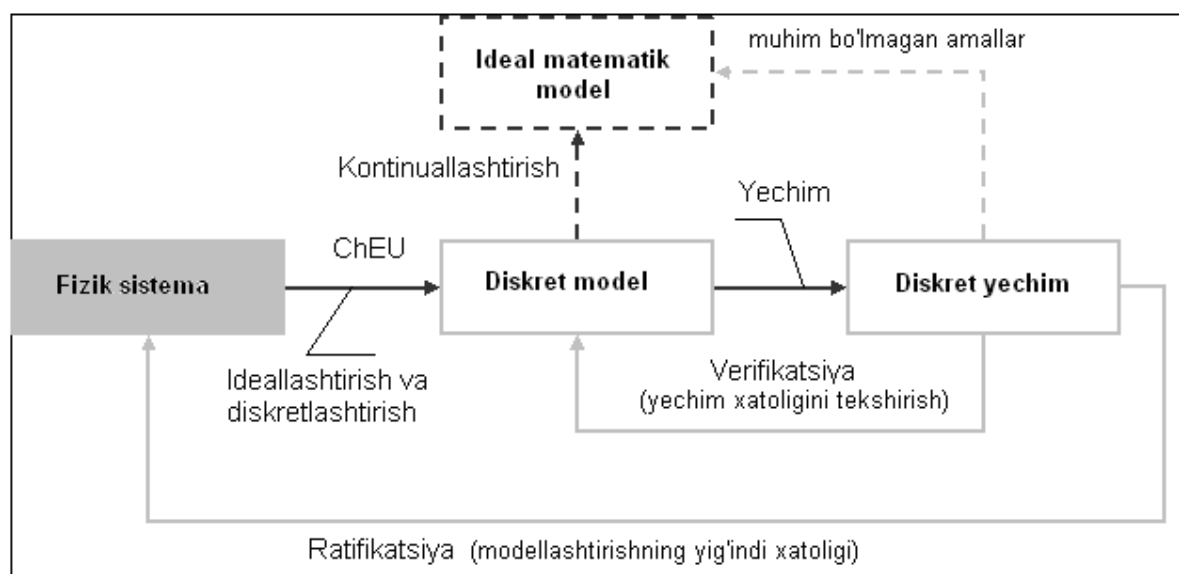
Matematik modellarga misollar:

- juda yupqa plastinkaning membrana egilishi nazariyasiga asoslangan modeli;
- yupqa plastinkaning Kirxgoff-Lyav klassik nazariyasiga asoslangan modeli;
- yetarlicha qalin plastinkaning Midlin-Reyssner nazariyasiga asoslangan modeli;
- juda qalin plastinkaning uch o'lchovli elastiklik nazariyasiga asoslangan model.

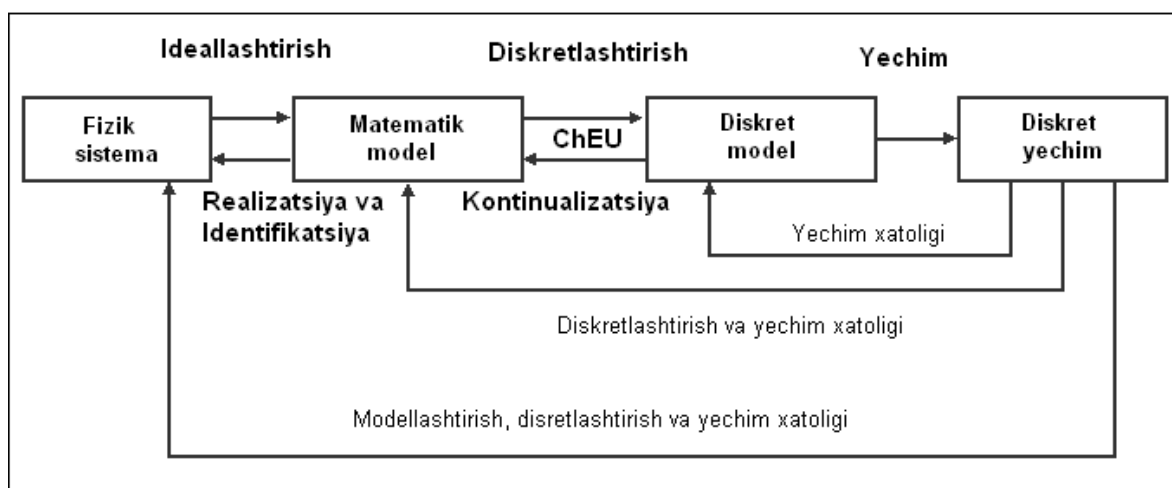
Diskretlashtirish – sonli modellashtirishni amaliyotga qo'llash mumkin bo'lishi uchun fizik sistemaning matematik modeli juda sodda bo'lishi shart emas, bunda eng asosiy maqsad vaqt va fazo bo'yicha berilgan xusisiy hosilali tenglamalar bilan ifodalangan modelning cheksiz erkinlik darajasiga ega bo'lishi va buni chekli songa keltirish. Bunday model diskret model deyiladi (1.4-rasm). Demak diskretlashtirish fazo va vaqt koordinatalari bo'yicha amalga oshiriladi. Analitik yechimni hamma vaqt ham olin no'lmaydi.



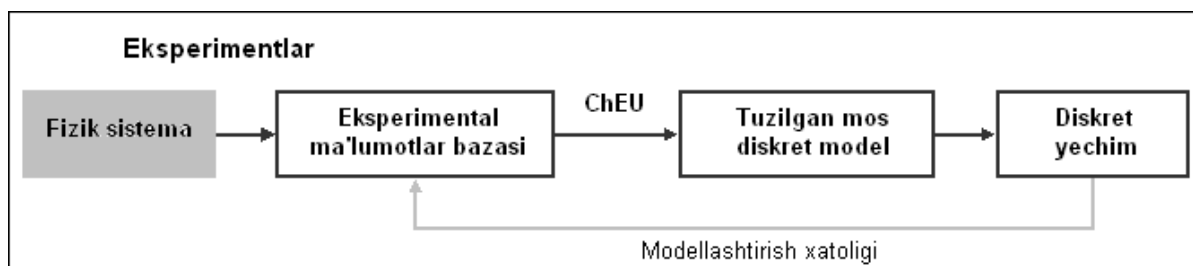
1.1-rasm. Chekli elementlar usulining matematik konsepsiyasi.



1.2-rasm. Chekli elementlar usulining fizik konsepsiyasi.



1.3-rasm. Sonli modellashtirishning asosiy qadamlari: ideallashtirish; diskretlashtirish; yechish.



1.4-rasm. Diskret modelni aniqlashtirish jarayoni.

Shartsiz (oshkor) modellastirish - bu buror tayyor universal matematik modelgan foydalanish.

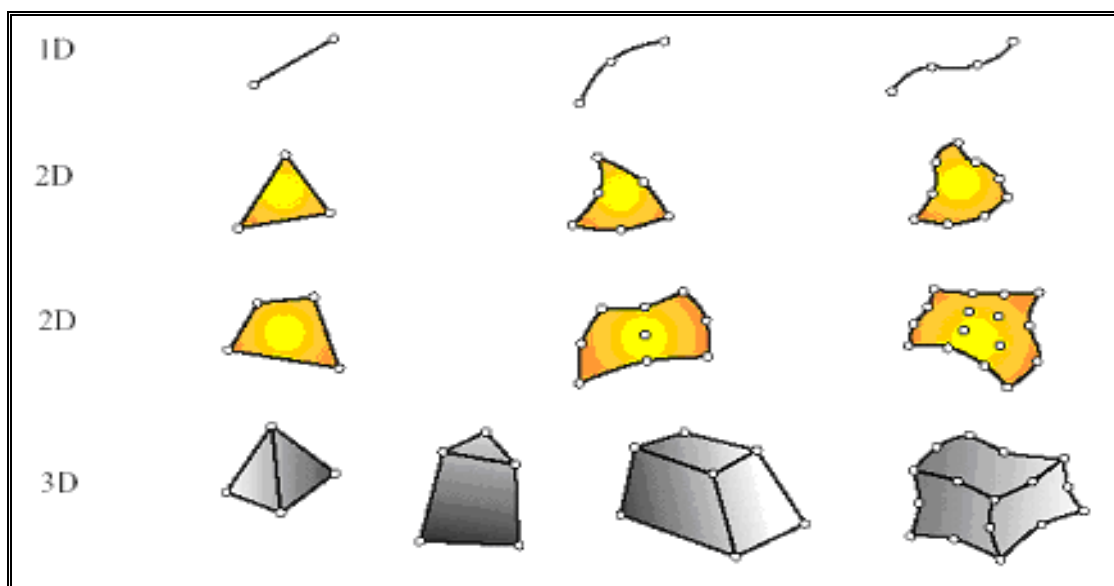
Oshkormas modellastirish - bunda matematik modelni qurishga juda muhim holat deb yangidan qaraladi, maxsus chekli elementli algoritmi va dasturlarga murojaat qilinadi.

Chekli elementlarning ajralmas xossalari (atributlari)

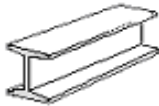
Chekli elementlarning asosiy turlari va ularning ajralmas xossalari (atributlari) deb ataluvchi xossalarini qaraylik (1.5-rasm), bular ularning xos o'lchamlari, tugun nuqtalari, elementning geometriyasi, erkinlik darajasi.

Chekli elementlar klassifikatsiyasi

Sodda konstruktiv elementlar. Sodda tuzilmaviy elementlarga misol qolib mexanikadan siljishga ishlaydigan sterjen, balka, quvur, to'sin, panellatni olish mumkin (1.6-rasm). Bu elementlar tarixan dastlabki paytlardan qo'llanilib kelinmoqda. Ularni tavsiflovchi asosiy tenglamalar materiallar qarshiligi, elastiklik nazariyasi, qurilish mexanikasi fanlari nazariyalarida chiqarilgan.

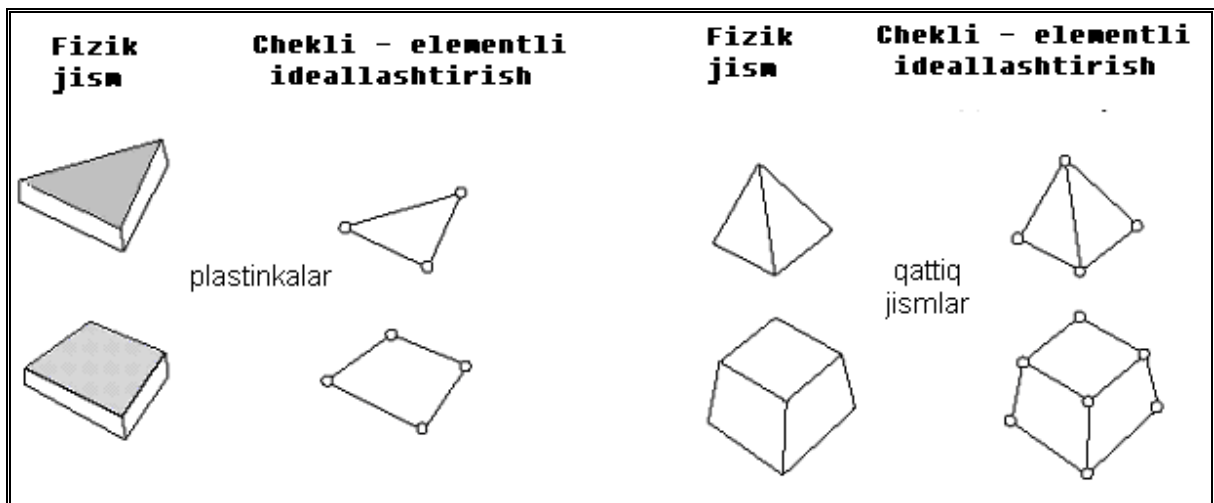


1.5-rasm. Bir, ikki va uch o'lchovli masalalar uchun chekli elementlarning asosiy turlari.

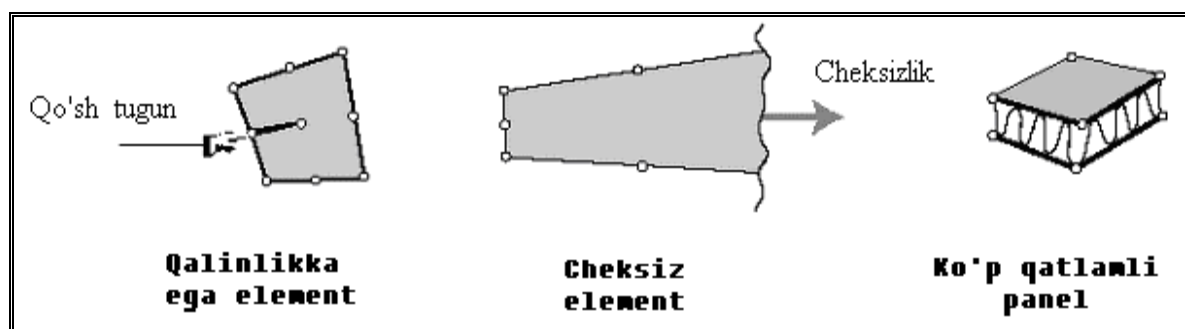
Fizik qirilma (tuzilma)ning komponentalari	Matematik modelning nomi	Chekli elementli diskterlashtirish
	sterjen	
	balka	
	quvur	
	o'rtacha qalinlikdagi to'sin	
	panel	

1.6-rasm. Sodda tuzilmaviy elementlar.

- **Kontinual chekli elementlar.** Kontinual chekli elementlar tutash muhit (kontinuum)ning chekli hajmi yoki yuzasini ifodalaydi. Masalan, kontinual elementlarga plastinka, Masalan, o'qqa nisbatan simmetrik elementlar, uch o'lchovli qattiq jisimli elementlar bularga misol bo'la oladi (1.7-rasm). Ularni tavsiflovchi asosiy tenglamalar tutash muhit mexanikasining umumiy munosabatlarida, xususan, elastiklik nazariyasida, chiqarilgan.
- **Maxsus chekli elementlar.** Maxsus chekli elementlar ham konstruktiv va ham kontinual chekli elementlar xossalariga ega. Ular ham tutash muhit mexanikasining asosiy tenglamalaridan chiqariladi, ammo ular yechilayotgan masalaning fizik xususiyatlaridan bog'liq ba'zi xususiyatlari o'z ichiga oladi. Masalan, yemirilish mexanikasida yoriqli element; ko'p qatlamli panel; chekli va cheksiz elementlar; tutash va jarimali elementlar; absolyut qattiq jisimli elementlar va hokazo (1.8-rasm).



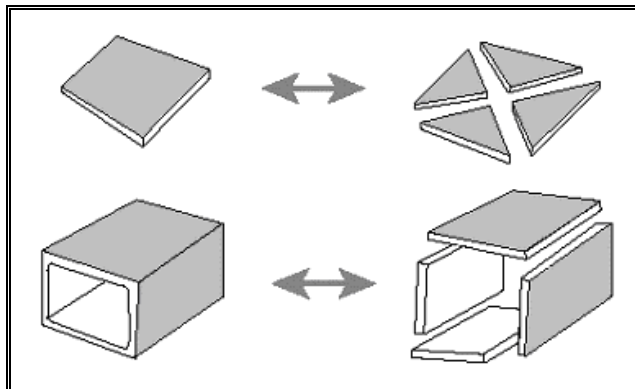
1.7-rasm. Kontinual chekli elementlar.



1.8-rasm. Maxsus chekli elementlar.

- **Makroelementlar.** Makroelementlar chekli elementlarning ancha murakkab ko'rinishidir. Ular soddaroq konstruktiv elementlarni terishdan hosil qilinadi. Odatda, makroelementga kiruvchi bunday chekli elementlar soni uncha katta bo'lmaydi (1.9-rasm).
- **Qism tuzilmalar.** Qism tuzilmalar tuzilmaviy xususiyatlar yoki funksiyalar bilan ifodalangan makroelementlardan tashkil topadi. Odatda, ular to'la qurilmani funksional komponentalarga bo'lishdan kelib chiqadi. Masalan, samolyetning qanoti va fuzelyaji; osma ko'prikning ravog'i va arqonlari. Shuni ta'kidlash lozimki, hamma vaqt ham to'la urilma, qism

tuzilma va makroelementlar tushunchalari orasida farq bo'lavermaydi. Shuning uchun superelement tushunchasi barcha turdagi makroelementlar va qism tuzilmalarning umumlashgan nomi sifatida sodda konstruktiv elementlar kombinatsiyasini ifodalashda qo'llaniladi.



1.9-rasm. Makroelementlar.

2-§. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini Galyorkin usuli bilan yechish

Faraz qilaylik ushbu

$$Au = f \quad (1)$$

tenglamani yechish talab etilsin, bunda A - chiziqli operator zich H - biror Gilbert fazosidagi D - to'plamda aniqlangan. Uning yechimi quyidagi xossalarga ega. $\{\varphi_j\}$ - ba'zis funksiyalar ketma ketligi tanlanadi:

- 1) $\varphi_j \in D, j = \overline{1, n};$
- 2) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ funksiyalar ixtiyoriy n lar uchun chiziqli bog'lanmagan;
- 3) bazis funksiyalar sistemasi H da to'la.

(1) tenglamaning taqribiy yechimi bazis funksiyalarning chiziqli kombinasiyasi ko'rinishida quriladi:

$$u^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x); \quad (2)$$

bunda a_j ($j = \overline{1, n}$) o'zgarmas koeffitsiyentlar.

a_j koeffitsiyentlar $R = Au^{(n)} - f$ tafovut ifodasi H da barcha $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ funksiyalar uchun ortogonal bo'lishlik shartidan aniqlanadi.

Shunday qilib, a_j larga nisbatan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\sum_{j=1}^n (A\varphi_j, \varphi_k)_H a_j = (f, \varphi_k), \quad (k = \overline{1, n}), \quad (3)$$

bu yerda skalyar ko'paytma quyidagi munosabatdan topiladi:

$$(A\varphi_j, \varphi_k)_H = \int_D A\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx$$

(3) sistema yechilgandan keyin (1) masalaning taqribiy yechimi (2) formuladan topiladi. Bu usul avvalo XX asrning boshida Sankt-Peterburgda mashhur mexanik olim I.G.Bubnov keyinchalik esa 1915 yilda rus olimi B.G.Galyorkin tomonidan taklif etilgan va bu usul uning nomi bilan ataladi.

Galyorkin usulining murakkab muammolaridan biri bazis funksiyalarni tanlashdir. Galyorkin usuning ko'plab tadbirlarida bazis funksiyalar sifatida quyi tartibli ko'phadlar qo'llaniladi.

1-Masala: Ushbu $0 \leq x \leq 1$ sohada

$$y(0) = 1 \quad (4)$$

chegaraviy shart bilan birga berilgan

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (5)$$

differensial tenglama uchun Koshi masalasini Galyorkin usuli bilan yeching.

Yechish: Masalaning taqribiy yechimini quyidagi yig'indi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$y^{(n)}(x) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j x^j, \quad (6)$$

bu yerda birinchi qo'shiluvchi (4) chegaraviy shartining qanoatlantirishi uchun kiritilgan. Bazis funksiyalarni $\{\varphi_j\} = \{1, x, x^2, \dots, x^4\} \in L_2[0;1]$ funksiyalar sistemasidan tanlab olamiz, bu yerda $L_2[0;1] - [0;1]$ kesmada kvadrati bilan yig'indisi olinadigan funksiyalar fazosi.

(6) funksiyani (4) tenglamaga qo'yib, bunda skalyar ko'paytmani nolga tenglashtirib, quyidagi tafovutni olamiz:

$$(R, x^{k-1}) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n a_j (jx^{j-1} - x^j) x^{k-1} dx - \int_0^1 x^{k-1} dx = 0. \quad (k = \overline{1, n})$$

Natijada a_j ($j = \overline{1, n}$) noma'lum ko'effitsiyentlarga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz;

$$MA = B \quad (7)$$

Bu yerda M va B matrisaning ko'effitsiyentlari quyidagicha:

$$m_{k,j} = \int_0^1 (jx^{k+j-2} - x^{k+j-1}) dx = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}; \quad b_k = \int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, M - to'la to'ldirilgan matrisa.

Masalani $n = 3$ da yechamiz. Ko'effitsiyetlar vektori

$$A^T = \{1.0141; 0.4225; 0.2817\},$$

ularni tanlangan yechim (6) ga qo'ysak, quyidagi taqribiy yechimni hosil qilamiz;

$$y^{(3)}(x) = 1 + 1.0141x + 0.4225x^2 + 0.2817x^3$$

(4)-(5) – chegaraviy masala ushbu $y(x) = e^x$ – aniq yechimga ega. Olingan taqribiy yechimni aniq yechim bilan $x_j = 0.2j$ ($j = \overline{0.5}$) oltita nuqtalarda taqqoslaymiz. Natijalar quyidagi 1- jadvalda keltirilgan.

1- jadval. (4)-(5) chegaraviy masalani (Koshi masalasini) Galyorkin usuli bilan yechishda aniq va taqribiy yechimlarni taqqoslash.

x	φ	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y^{(3)}(x)$	1	1,2220	1,4913	1,8214	2,2259	2,7183
$y^{(4)}(x)$	1	1,2214	1,4919	1,8221	1,2255	2,7183
$y(x)$	1	1,2214	1,4918	1,8221	1,2251	2,7183

1-jadvalda keltirilgan ma'lumotlardan foydalanib, L_2 diskret xatolikni hisoblaymiz:

$$\delta^{(3)} = \left[\sum_{j=1}^6 (y(x) - y^{(3)}(x))^2 \right]^{1/2} = 0.0013.$$

(6) da qo'shiluvchilar sonini $n=4$ gacha ko'paytirsak va (7) sistemani yechsak, u holda

$$A^T = \{0.9990; 0.5095; 0.1399; 0.0699\},$$

ya'ni (4)-(5) Koshi masalasining taqribiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

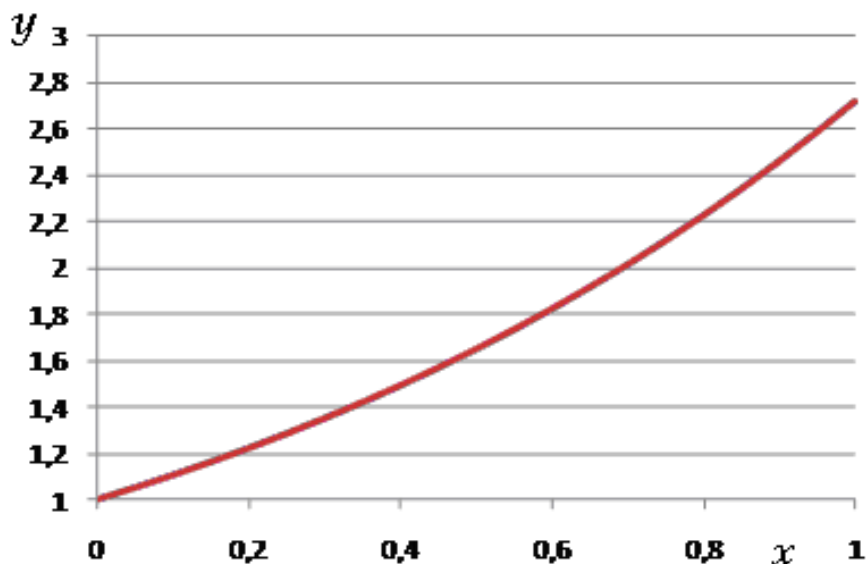
$$y^{(4)}(x) = 1 + 0.9990x + 0.5095x^2 + 0.1399x^3 + 0.0699x^4.$$

Bu funksiyaning $[0;1]$ kesma alohida nuqtalaridagi qiymatlari 1-jad-valda keltirilgan. Bundagi xatolikni hisoblasak,

$$\delta^{(4)} = \left[\sum_{j=1}^6 (y(x_j) - y^{(4)}(x_j))^2 \right]^{1/2} = 0.00005.$$

Buni quyidagi taqqoslash grafigida ham ko'rish mumkin (1-rasm):

Hisob natijalari shuni ko'rsatadiki, izlanayotgan funksiyaning taqribiy ifodasida qo'shiluvchilar soni n ni oshirsak, xatolik juda tez kamayar ekan.



1-rasm. Koshi masalasining taqribiy va aniq yechimlarini taqqoslash grafigi.

2-§. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish

Faraz qilaylik, $[a, b]$ kesmada ushbu

$$y(a) = c \quad (8)$$

chegaraviy shart bilan ushbu berilgan

$$F(x, y, y') = 0 \quad (9)$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini yechish talab etilsin.

Bu masalani yechish uchun Galyorkin usulini qo'llaymiz. Avvalgi mavzudagi masaladan farqli ravishda bazis funksiyalarni $\{N_j\}$ deb belgilangan sistemaga kiruvchi bo'lakli-chiziqli funksiyalar ko'rinishda tanlaymiz. Buning

uchun $[a, b]$ kesmani tugunlar deb ataluvchi $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan bo'laklarga (chekli elementlarga) ajratamiz va quyidagilarni kiritamiz:

$$\begin{aligned}
 N_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & \text{agar } 0 \leq \tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}_1 \\ 0, & \text{agar } \tilde{\alpha} \geq \tilde{\alpha}_1 \end{cases} \\
 N_i(x) &= \begin{cases} 0, & \text{agar } x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{agar } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{agar } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{agar } x \geq x_{i+1} \end{cases} \\
 N_n(x) &= \begin{cases} 0, & \text{agar } x < x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & \text{agar } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$N_i(x), (i = \overline{0, n})$ funksiyalar chiziqli bog'lanmagan va $L_2[a, b]$ da to'la funksiyalar sistemasini tashkil etadi.

$N_i(x)$ funksiyalarning grafigi 2-rasmda tasvirlangan.

(8)-(9) masalaning yechimini quyidagicha ifodalaymiz:

$$y(x) = \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x), x \in [a, b],$$

bu yerda α_i noma'lum koeffitsiyentlar, $\tilde{y}(x)$ funksiyaning $x = x_j, (j = \overline{0, n})$ chekli elementlar to'plamidagi qiymatlarini topamiz.

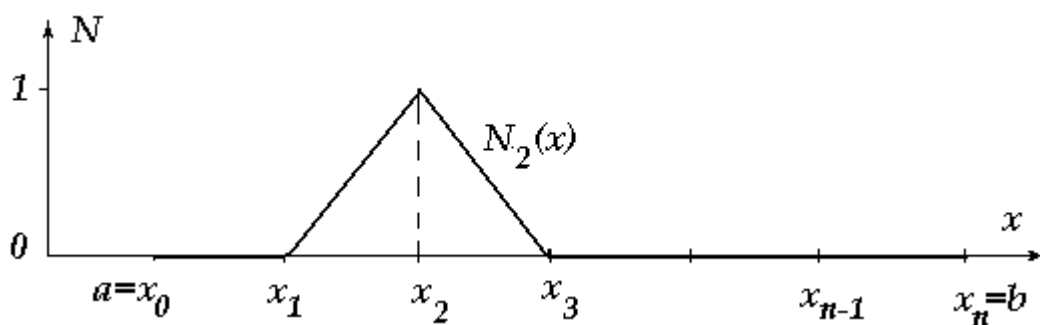
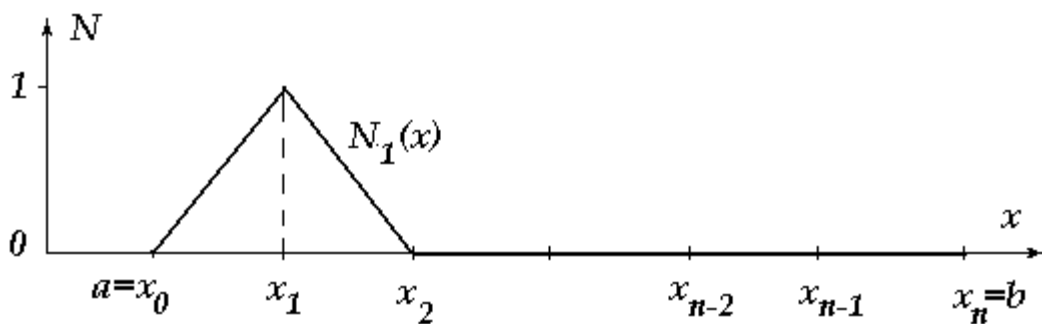
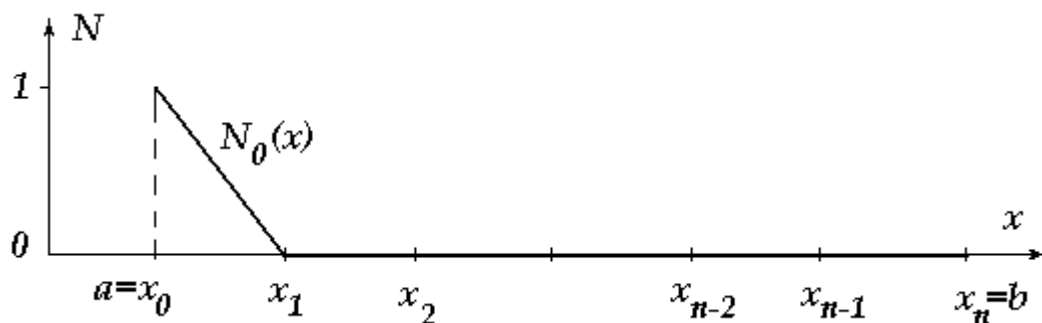
$x = x_j$ nuqtalarda $N_j(x)$ funksiya qatnashgan qo'shiluvchilargina noldan farqli ekanligidan quyidagini hosil qilamiz:

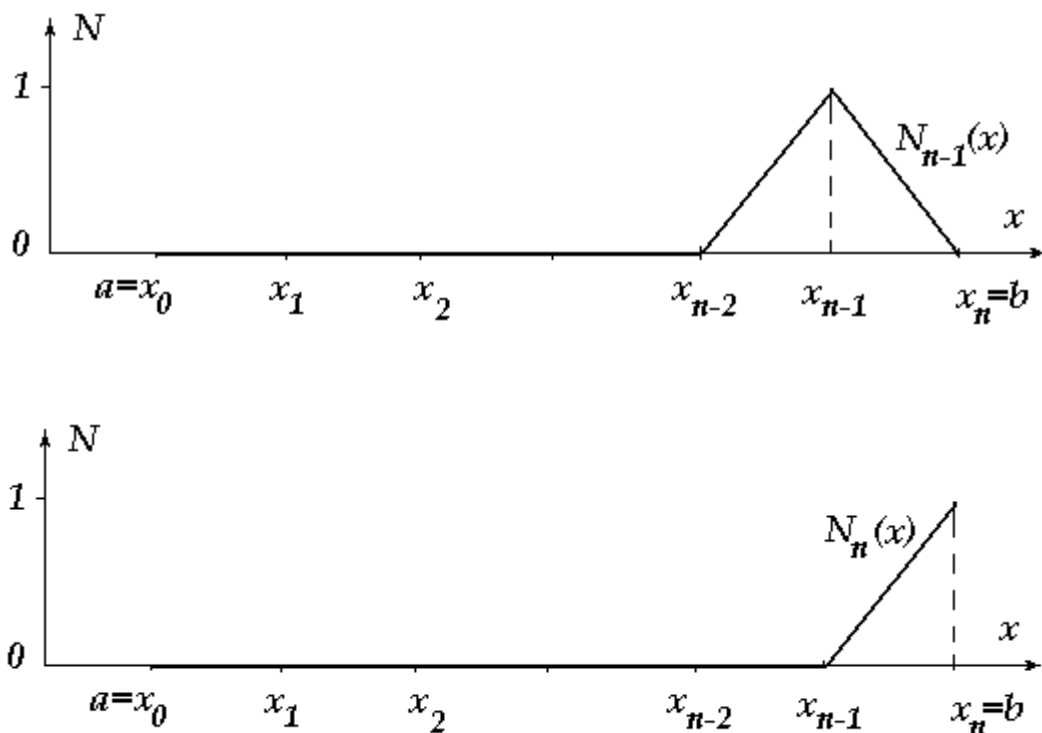
$$\tilde{y}(x_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i N_i(x_j) = \alpha_j N_j(x_j), \quad (j = \overline{0, n}). \quad (11)$$

Bundan tashqari, (10) ga ko'ra $N_j(x)$ - bazis funksiyalarining j – nomerdagi qiymati 1 ga teng, ya'ni $N_j(x_j)=1$. Shuning uchun (11) dan $\tilde{y}(x_j)=\tilde{y}_j=\alpha_j$, ya'ni α_j noma'lum koeffitsiyentlar chekli elementlarning mos tugunlarida $y(x)$ funksiyaning qiymatlariga mos keladi.

U holda $y(x)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\tilde{y}(x)=\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i N_i(x), \quad x \in [a;b] \quad (12)$$





2-rasm. $N_i(x)$ bazis funksiyalarning grafiklari.

Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) elementda faqatgina ikkita $N_{k-1}(x)$ va $N_k(x)$ bazis funksiyalar noldan farqli bo'lganligi uchun $\tilde{y}(x)$ funksiyani har bir alohida elementda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_{k-1} N_{k-1}(x) + \tilde{y}_k N_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \quad (13)$$

Bu yerdan xususiyl holda $\tilde{y}(a) = \tilde{y}_0 N_0(a) + \tilde{y}_1 N_1(a)$ ekanligi, ammo $N_0(a) = 1$, $N_1(a) = 0$ ekanligidan $\tilde{y}(a) = \tilde{y}_0 = c$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $y(x)$ ning (12) ko'rinishdagi taqribiy ifodasi chegaraviy shartining aniq bajarilishini ta'minlaydi va qo'shimcha had kiritish talab qilinmaydi.

Tafovutni aniqlash uchun (12) funksiyani (8) tenglamaga qo'yamiz va ushbu

$$R(x) = F(\tilde{y}', \tilde{y}, x)$$

tenglikni hosil qilamiz, bunda

$$\tilde{y}'(x) = \frac{d\tilde{y}}{dy} = \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \frac{dN_i(x)}{dx}, \quad x \in [a, b] \quad (14)$$

bu yerda (10) ga ko'ra bazis funksiyalarning ko'paytmasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} \frac{dN_0(x)}{dx} &= \begin{cases} -\frac{1}{x_1 - x_0}, & \text{agar } x_0 \leq x < x_1 \\ 0, & \text{agar } x \geq x_1 \end{cases} \\ \frac{dN_i(x)}{dx} &= \begin{cases} 0, & \text{agar } x < x_{i-1} \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & \text{agar } x_{i-1} \leq x < x_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i}, & \text{agar } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{agar } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \frac{dN_n(x)}{dx} &= \begin{cases} 0, & \text{agar } x < x_{n-1} \\ \frac{1}{x_n - x_{n-1}}, & \text{agar } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Galyorkin usuliga ko'ra, $(R(x), N_k(x))$ ($k = \overline{0, n}$) skalyar ko'paytmani nolga tenglashtirib, (8) tenglamaning chiziqli ekanligidan $\tilde{y}_i$ ($i = \overline{0, n}$) larga nisbatan quyidagi chizikli algebraik tenglamalar sistemasiga kelimiz:

$$(R(x), N_k(x)) = \int_a^b R(x) N_k(x) dx = 0, \quad (k = \overline{0, n}).$$

Bunda $\tilde{y}_0$ ma'lum ekanligidan bu sistemaning birinchi tenglamasini qaramasligiz, qolgan tenglamalarga esa $\tilde{y}_0 = C$ ni qo'yishimiz mumkin.

Bu tenglamalar sistemasini soddalashtirishimiz mumkin. (3) ga ko'ra $N_k(x)$ ($k = \overline{1, n-1}$) ba'zis funksiyalar x_k tugunni o'z ichiga olgan ikkita qo'shni momentlardagina, $N_n(x)$ funksiya esa $[x_{n-1}, x_n]$ elementda noldan farqli

bo'lgani uchun $[a,b]$ kesma bo'ylab integrallashni ko'rsatilgan elementlar bo'yicha integrallashga almashtirish mumkin. U holda tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} R(x)N_k(x)dx = 0, & (k = \overline{1, n-1}) \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} R(x)N_n(x)dx = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, (13) ga ko'ra bu chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlar matrisasi lentali strukturaga ega.

(16) sistemani yechib, $x = x_i$ ($i = \overline{1, n}$) tugunlarda approksimasiyalovchi $\tilde{y}(x)$ funksiyaning qiymatlari topiladi. Keyin esa (12) munosabatdan foydalanib, $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasida izlanayotgan $y(x)$ funksiyaning taqribiy qiymatini topish mumkin.

(8)-(9) masalani yechishning bunday usuli chekli elementlar usuli deb ataladi.

2-masala. Quyidagi differensifl tenglama uchun Koshi masalasini chekli elementlar usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - y = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Yechish: $[a,b]$ kesmani $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1$ nuqtalar orqali n ta uzunligi bir xil $\Delta x = 1/n$ ga teng chekli elementlarga bo'lamiz. Masalaning taqribiy yechimini

$$y(x) = \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i N_i(x)$$

ko'rinishida izlaymiz, bunda $N_i(x)$ ba'zis funksiyalar bo'lib, (10)

munosabatlar bilan beriladi. Chegaraviy shartga ko'ra $\tilde{y}_0 = 1$. Tafovut

$$R(x) = \frac{d\tilde{y}(x)}{dx} - \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right),$$

bu yerda $\frac{dN_i}{dx}$ hosilalar (15) munosabatlardan topiladi. Skalyar ko'paytmani

nolga tenglashtiramiz:

$$(R(x), N_k(x)) = \int_0^1 \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right) N_k(x) dx = 0, \quad (k = \overline{1, n})$$

Shuni ta'kidlaymizki, $(R(x), N_k(x)) = 0$ tenglama qaralmaydi, chunki $\tilde{y}_0 = 1$ ma'lum.

Bulardan keyin $N_k(x)$ ($k = \overline{1, n-1}$) ba'zis funksiyalarning $[x_{k-1}, x_k]$ va $[x_k, x_{k+1}]$ qo'shni elementlardagina, $N_n(x)$ funksiyaning esa faqat $[x_{n-1}, x_n]$ elementda 0 dan farqli ekanligidan yuqoridagi chiziqli tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{cases} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right) N_k(x) dx = 0, & k = \overline{1, n-1} \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right) N_n(x) dx = 0, \end{cases}$$

(13) ga ko'ra har bir elementda $\tilde{y}(x)$ funksiya va uning hosilasi bilan ifodalanuvchi yig'indida faqat ikkita qo'shiluvchi saqlanib qoladi. Tenglama uchun bu holat hamda ulardagi integrlash va yig'indi olish tartibini almashtirish mumkinligi sistemani quyidagicha yozish imkoniyatini beradi.

$$\begin{cases} \sum_{i=k-1}^{k+1} \tilde{y}_i \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right) N_k(x) dx = 0, & k = \overline{1, n-1} \\ \sum_{i=n-1}^n \tilde{y}_i \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{dN_i(x)}{dx} - N_i(x) \right) N_n(x) dx = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} \bar{y}_{k-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{dN_{k-1}(x)}{dx} - N_{k-1}(x) \right) N_k(x) dx + \bar{y}_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{dN_k(x)}{dx} - N_k(x) \right) N_k(x) dx + \\ + \bar{y}_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{dN_{k+1}(x)}{dx} - N_{k+1}(x) \right) N_k(x) dx, & (k = \overline{1, n-1}) \\ \bar{y}_{n-1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{dN_{n-1}(x)}{dx} - N_{n-1}(x) \right) N_n(x) dx + \bar{y}_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{dN_n(x)}{dx} - N_n(x) \right) N_n(x) dx = 0 \end{cases}$$

(10) va (15) ifodalarni tenglamalar sistemasining chap tarafiga qo'yib va integrallashni bajarib quyidagilarni olamiz:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \bar{y}_1 + \left(\frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \right) \bar{y}_2 = \left(\frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \right) \bar{y}_0, \\ \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_{k-1}}{2\Delta x} - \left(\frac{1}{6} \bar{y}_{k+1} + \frac{2}{3} \bar{y}_k + \frac{1}{6} \tilde{y}_{k+1} \right) = 0, & (k = \overline{2, n-1}), \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{6} \right) \tilde{y}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{3} \right) \tilde{y}_n = 0 \end{cases}$$

Shuni ta'kidlaymizki bu chiziqli tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari matrisasi uning dioganali ko'rinishida, shuning uchun uni sonli yechishda progonka usulidan foydalanish mumkin.

Masalani $n = 5$ da ya'ni $[0;1]$ kesmani 5 ta elementga bo'lsak va $\Delta x = 0.2$ deb olib quyidagi taqribiy yechimga ega bo'lamiz:

$$\tilde{y}(x) = N_0(x) + 1.2488N_1(x) + 1.4897N_2(x) + 1.8552N_3(x) + \\ + 2.2441N_4(x) - 2.7620N_5(x),$$

bu yerda sonli koefitsiyentlar $\Delta x_i = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0$ tugunlardagi $y(x)$ funksiyaning qiymatlarini ifodalaydi. $L_2[0;1]$ diskret xatolikni hisoblab (avvalgi mavzuga qarang), ushbu

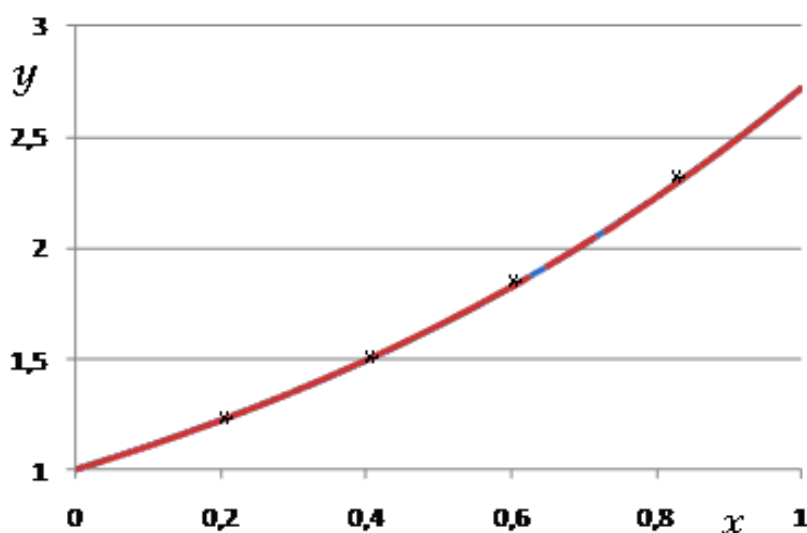
$$\delta^{(6)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^6 (y(x_i) - \tilde{y}(x_i))^2 \right)} = 0.065$$

qiymatga ega bo'lamiz

Yuqorida keltirilgan hisoblashlarni $[0;1]$ kesmani $x_i = 0.1i$ ($i = \overline{0,10}$) nuqtalar bilan o'rta chekli elementlarga bo'lgan holda qaytarsak, quyidagi taqribiy yechimga kelamiz:

$$\tilde{y}(x) = N_0(x) + 1.0987N_1(x) + 1.2205N_2(x) + 1.3428N_3(x) + 1.4899N_4(x) + \\ + 1.6409N_5(x) + 1.8190N_6(x) + 2.0049N_7(x) + 2.2210N_8(x) + 2.4495N_9(x) + \\ + 2.7120N_{10}(x),$$

Taqqoslash natijalari 3-rasmda tasvirlangan.



3-rasm. Aniq (yulduzchali chiziq) va taqribiy (uzliksiz chiziq) yechimlarning taqqoslangan grafiklari.

Xatolik esa

$$\delta^{(11)} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{11} (y(x_i) - \tilde{y}(x_i))^2\right)} = 0.020$$

Har ikkala variant natijalarining taqqoslash shuni ko'rsatadiki, chekli elementlar sonining o'sishi bilan xatolik kamayar ekan. Ammo, shuni ta'kidlash lozimki, Galyrkin usulini ko'phadlar ko'rinishidagi ba'zis funksiyalar bilan qo'llash bunga qaraganda aniqroq natija beradi.

3-§. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Shturm – Luivill chegaraviy masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish

Faraz qilaylik, $[a,b]$ kesmada

$$y(a) = c, \quad y(b) = d \quad (1)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ushbu

$$-[p(x)y']' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

Shturm – Liuvil tenglamasini yechiminimg topish talab etilsin, bu yerda $p(x), q(x), f(x)$ oldindan ma'lum va yetarli silliq funksiyalar; c, d - o'zgarmaslar.

(2) tenglamaning biirinchi hadini differensiallab unu quyidagichja yozish mumkin:

$$-p(x)\frac{d^2y}{dx^2} - p'(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

Chekli elementlar usuli qoidasiga ko'ra $[a,b]$ kesamani

$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \quad (i = \overline{0, n})$ nuqtalar (tugunlar) orqali berilgan n soniga teng

chekli elementlarga bo'lamiz va (1) va (2) masalanitaqribiy yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz.

$$y(x) \approx \bar{y}(x) = \sum_{i=0}^n y_i N_i(x), \quad x \in [a, b] \quad (4)$$

bu yerda $N_i(x)$ – bazis funksiyalar (3) munosabatlar bilan beriladi;

$\bar{y}_i$ ($i = \overline{0, n}$) bu $\bar{y}(x)$ funksiyani x_i tugunlarda apraksimatsiyalovchi funksiyaning nomalum qiymatlari.

Chegaraviy tugunlarda mos qiymatlarni berish bilan $x = a$ va $x = b$ da chegaraviy shartlarni to'g'ridan – to'g'ri qanoatlantirish mumkin ammo $y(x)$ funksiyaning chegaraviy qiymatlarni dastlab berilmasdan Galyorkin usuli tenglamasini tuzish juda qulay. Shunday qilib, bu bosqichda barcha $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ – qiymatlar nomalumlar deb qaraladi.

Shuni ham takidlaymizki, $N_i(x)$, ($i = \overline{1, n-1}$) funksiyalar faqatgina qo'shni ikkita $[x_{i-1}, x_i]$ va $[x_i, x_{i+1}]$ elementlardagina noldan farqli u holda har bir elementda $\bar{y}(x)$ -funksiyani shu elementda noldan farqli bo'lgan ikkita bazis funksiyalarning tanlanmasini hisobga oluvchi ikkita qo'shiluvchilar ko'rinishida yozish mumkin:

$$\tilde{y}(x) \approx \tilde{y}_{i-1}(x) + \tilde{y}_i(x) N_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i,] \quad (5)$$

Tafovutni quyidagicha aniqlaymiz:

$$R(x) = -p(x) \frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} + p'(x) \frac{d \tilde{y}}{dx} + q(x) \tilde{y} - f(x)$$

Bu tafovutning $N_k(x)$ ($k = \overline{0, n}$) - bazis funksiyalarga skalyar ko'paytmalarni quyidagicha yozamiz:

$$(R, N_k) = \int_a^b R(x) N_k(x) dx = - \int_a^b \frac{d^2 \tilde{y}(x)}{dx^2} p(x) N_k(x) dx - \int_a^b \frac{d \tilde{y}(x)}{dx} p'(x) N_k(x) dx + \int_a^b \tilde{y}(x) q(x) N_k(x) dx - \int_a^b f(x) N_k(x) dx \quad (6)$$

Shuni takidlash lozimki, $N_i(x)$ - funksiyalarni chiziqliligidan bu funksiyalardan olingan ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng.

(6) ifodaning o'ng tarafini birinchi intervalda belgilab integrallasak, integral ostidagi ifodaga kirgan hosila tartibini kamaytirish mumkin

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d^2 \tilde{y}(x)}{dx^2} p(x) N_k(x) dx &= \frac{d\tilde{y}}{dx}(b) p(b) N_k(b) - \frac{d\tilde{y}}{dx}(a) p(a) N_k(a) - \\ &- \int_a^b \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx - \int_a^b \frac{d\tilde{y}}{dx} p'(x) N_k(x) dx, \quad (k = \overline{0, n}) \end{aligned} \quad (7)$$

Oxirgi munosabatda $k = \overline{1, n-1}$ da

$$\begin{aligned} N_k(a) &= N_k(b) = 0; & N_0(b) &= N_0(a) = 0; \\ N_\eta(a) &= N_\eta(b) = 1 \end{aligned}$$

ya'ni o'z ichiga integrallarni olmagan qo'shiluvchilar $k=0$ va $k=\eta$ da saqlanib qoladi.

(6) va (7) ga qaytib, skalyar ko'paytmalarni nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasiga kelimiz:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{dx}(a) p(a) + \int_a^b \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_0}{dx} p(x) dx + \int_a^b \tilde{y} N_0 q(x) dx = \int_a^b N_0 f(x) dx, \\ \int_a^b \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx + \int_a^b \tilde{y} N_k q(x) dx = \int_a^b N_k f(x) dx, \quad (k = \overline{1, n-1}) \\ - \frac{d\tilde{y}}{dx}(b) p(b) + \int_a^b \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_\eta}{dx} p(x) dx + \int_a^b \tilde{y} N_\eta q(x) dx = \int_a^b N_\eta f(x) dx \end{cases}$$

Shuni etiborga olish kerakki, $N_k(x)$ ($k=1,...,n-1$) funksiyalar faqat ikkita qo'shni $[x_{k-1}, x_k]$ va $[x_k, x_{k+1}]$ elementlarda $N_0(x)$ va $N_\eta(x)$ funksiyalar esa mos ravishda birinchi va oxirgi elementlarda noldan farqli butun $[a;b]$ kesma bo'ylab integralshni ko'rsatilgan element bo'yicha integrallash bilan almashtirish mumkin. U holda sistema quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{dx}(a)p(a) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_0}{dx} p(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} \tilde{y} N_0 q(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} N_0 f(x)dx, \\ \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x)dx + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \tilde{y} N_k q(x)dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k f(x)dx \\ - \frac{d\tilde{y}}{dx}(b)p(b) + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{d\tilde{y}}{dx} \frac{dN_\eta}{dx} p(x)dx + \int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} \tilde{y} N_\eta q(x)dx &= \int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} N_\eta f(x)dx. \end{aligned}$$

Bu sistemaning tenglamalarga $\tilde{y}(x)$ ni qo'yib (3.5) munosabatni etiborga olsak,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{dx}(a)p(a) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\tilde{y}_0 \frac{dN_0}{dx} + \tilde{y}_1 \frac{dN_1}{dx} \right) \frac{dN_0}{dx} p(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} (\tilde{y}_0 N_0 + \tilde{y}_1 N_1) N_0 q(x)dx = \int_a^b N_0 f(x)dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\tilde{y}_{k-1} \frac{dN_{k-1}}{dx} + \tilde{y}_k \frac{dN_k}{dx} \right) \frac{dN_k}{dx} p(x)dx &+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\tilde{y}_k \frac{dN_k}{dx} + \tilde{y}_{k+1} \frac{dN_{k+1}}{dx} \right) \frac{dN_k}{dx} p(x) + \\ + \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\tilde{y}_{k-1} N_{k-1} + \tilde{y}_k N_k) N_k q(x)dx &+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\tilde{y}_k N_k + \tilde{y}_{k+1} N_{k+1}) N_k q(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k f(x)dx, \quad k = \overline{0, n-1} \\ - \frac{d\tilde{y}}{dx}(b)p(b) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\tilde{y}_{k-1} \frac{dN_{k-1}}{dx} + \tilde{y}_k \frac{dN_k}{dx} \right) \frac{dN_k}{dx} p(x)dx &+ \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} (\tilde{y}_{\eta-1} N_{\eta-1} + \tilde{y}_\eta N_\eta) N_\eta q(x)dx = \\ &= \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+1}} N_\eta f(x)dx. \end{aligned}$$

Bu yerda yig'indidan olingan integralni integrallar yig'indisiga almashtirsak va $\tilde{y}_k$ ($k=0,1,...,n$) - o'zgarmaslarni integral ishorasi ostidan chiqarsak, $\tilde{y}_k$ larga nisbatan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
& \frac{d\tilde{y}}{dx}(a)p(a) + \tilde{y}_0 \left[\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dN_0}{dx} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} N_0 q(x) dx \right] + \tilde{y}_0 \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_0}{dx} p(x) dx \right] + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} y_0 N_0 q(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} N_0 f(x) dx, \\
& \tilde{y}_{k-1} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dN_{k-1}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} N_{k-1} N_k q(x) dx \right] + \tilde{y}_k \left[\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left(\frac{dN_k}{dx} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k q(x) dx \right] + \\
& + \tilde{y}_{k-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dN_{k+1}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} N_{k+1} N_k q(x) dx \right] = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k f(x) dx, \quad (k=1,2,\dots,n-1) \\
& \cdot \\
& - \frac{d\tilde{y}}{dx}(b)p(b) + \tilde{y}_{\eta-1} \left[\int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} \frac{dN_{\eta-1}}{dx} \frac{dN_\eta}{dx} p(x) dx + \int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} N_{\eta-1} N_\eta q(x) dx \right] + \tilde{y}_\eta \left[\int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} \left(\frac{dN_\eta}{dx} \right)^2 p(x) dx + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} N_\eta^2 q(x) dx \right] = \int_{x_{\eta-1}}^{x_\eta} N_\eta f(x) dx \quad (8)
\end{aligned}$$

Endi bu tenglamalar sistemasidan yechimlar qiymatlari berilgan tugunlarga mos bazis funksiyalar bilan berilgan dastlabki tenglamaga Galyorken usulini qo'llash natijasida olingan birinchi va oxirgi qatorlarni o'chiramiz va berilgan $y_0 = \bar{y}_0 = c$ va $y_\eta = \bar{y}_\eta = d$ chegaraviy qiymatlarni qolgan tenglamalarga qo'llaymiz. shunday qilib uch diagonalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
& \tilde{y}_1 \left[\left(\frac{dN_1}{dx} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} N_1^2 q(x) dx \right] + \tilde{y}_2 \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} p(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} N_1 N_2 q(x) dx \right] = \int_{x_1}^{x_2} N_1 f(x) - \\
& - c \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_0}{dx} \frac{dN_1}{dx} p(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} N_0 N_1 q(x) dx \right]. \\
& \tilde{y}_{k-1} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dN_{k-1}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} N_{k-1} N_k q(x) dx \right] + \tilde{y}_k \left[\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left(\frac{dN_k}{dx} \right)^2 p(x) dx + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k^2 q(x) dx \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{y}_{k+1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dN_{k-1}}{dx} \frac{dN_k}{dx} p(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} N_{k+1} N_k q(x) dx \right] = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} N_k f(x) dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2); \\
& \tilde{y}_{\eta-2} \left[\int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta+1}} \frac{dN_{\eta-2}}{dx} \frac{dN_{\eta-1}}{dx} p(x) dx + \int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta+1}} N_{\eta-2} N_{\eta-1} q(x) dx \right] + \tilde{y}_{\eta-1} \left[\int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta}} \left(\frac{dN_{\eta-1}}{dx} \right)^2 p(x) dx + \right. \\
& \left. + \int_{x_{\eta-2}}^{x_{\eta}} N_{\eta-1}^2 q(x) dx \right] = \int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta}} N_{\eta-1} f(x) dx - d \left[\int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta}} \frac{dN_{\eta-1}}{dx} \frac{dN_{\eta}}{dx} p(x) dx + \int_{x_{\eta-1}}^{x_{\eta}} N_{\eta-1} N_{\eta} q(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Bu tenglamalar sistemasini progonka usuli bilan yechish mumkin. Bundan $\tilde{y}(x)$ funksiyani apraksematsiyalovchi barcha tugun qiymatlarni aniqlab, keyin (4) munosabatdan $[a;b]$ qiymatning ixtiyoriy nuqtasida $y(x)$ izlanayotgan funksiyaning taqribiy qiymatini topamiz.

(8) sistemadan o'chirilgan tenglmalardan $x=a$ va $x=b$ qiymatlarda $\frac{dy}{dx}$

hosilaning qiymatini aniqlashda foydalanish mumkin.

Shulardan foydalanib, quyidagi chegaraviy masalalarni chekli elementlar usuli bilan yechamiz va natijalarni taqqoslaymiz.

3- masala. Ushbu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = f = -\sum_{l=1}^L a_l \sin(l - 0.5)\pi x$$

Shturm-Liu vill tenglamasining $x \in [0,1]$ kesmadagi

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(1) = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi aniq yechimi quyidagicha:

$$y = -\sum_{l=1}^L \frac{a_l}{1 - ((l - 0.5)\pi)^2} \sin[(l - 0.5)\pi x] \quad (1)$$

Yechish: Berilgan Shturm-Liuvill tenglamasining yechimini chekli elementlar usuli yordamida topamiz. Buning uchun sinov yechimini chiziqli elementlar asosida quyidagicha izlaymiz:

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^J \bar{y}_j N_j(x) \quad (2)$$

Bu yerda $N_j(x)$ chiziqli apprxsimasiyalovchi funksiya bo'lib, elementlar sistemada $x(\xi)$ koordinata bilan quyidagicha beriladi (3-rasm).

j – element ichida:

$$N_j(\xi) = 0.5(1 + \xi), \quad \xi = \frac{2[x - (x_{j-1} + x_j)/2]}{\Delta x_j}$$

$$N_j(\xi) = 0.5(1 - \xi); \quad \xi = \frac{2[x - (x_{j-1} + x_j)/2]}{\Delta x_j};$$

$j+1$ element ichida

$$N_j(\xi) = 0.5(1 + \xi); \quad \xi = \frac{2[x - (x_j + x_{j+1})/2]}{\Delta x_{j+1}} \quad (3)$$

(2) ifodadan (1) tenglamaga o'tib, yechilayotgan tenglamaning tafovutini quyidagicha yozamiz:

$$R = \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} + \bar{y} - f \quad (4)$$

Galyorkin usuliga ko'ra $(R, N_k) = 0$ – ichki nuqtalar uchun ifodani tuzish hisobiga algebraik tenglamalar tuziladi:

$$\int_0^1 R N_k dx = \int_0^1 \left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} + \bar{y} - f \right) N_k(x) dx, \quad (5)$$

bu yerdan

$$\left(\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2}, N_k \right) + (\bar{y}, N_k) - (f, N_k) = 0, \quad (k = \overline{1, J}) \quad (6)$$

Bu tenglamani birinchi hadini bo'laklab integrallaymiz:

$$\left(\frac{d^2\bar{y}}{dx^2}, N_k\right) = \int_0^1 \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} N_k dx = \left[\frac{d\bar{y}}{dx} N_k\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\bar{y}}{dx} \frac{dN_k}{dx} dx \quad (7)$$

$k=1$ uchun, ya'ni $x=0$ ga yaqin tugunda $N_1(0)=0$ shuning uchun $x=0$ nuqta $\left(\frac{d\bar{y}}{dx}, N_k\right)$ ifodaga ta'sir qilmaydi. $x=1$ da chegaraviy shart $\frac{d\bar{y}}{dx}=0$ bajarilishini talab qiladi.

$k=2, \dots, N-1$ uchun $x=0$ va $x=1$ da $N_k=0$ bo'ladi. Shuning uchun (6) tenglamadan olinadigan barcha tenglamalar uchun (7) ni quyidagicha yozamiz:

$$\left(\frac{d^2\bar{y}}{dx^2}, N_k\right) = \left(\frac{d\bar{y}}{dx}, \frac{dN_k}{dx}\right),$$

yoki

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2\bar{y}}{dx^2}, N_k\right) dx = - \int_0^1 \frac{d\bar{y}}{dx} \frac{dN_k}{dx} dx \quad (8)$$

(7) va (2) ni (5) ga qo'ysak va ba'zi o'rin almashtirishlarni bajarsak,

$$\sum_{j=1}^J \bar{y}_j \left[-\left(\frac{dN_j}{dx}, \frac{dN_k}{dx}\right) + (N_j, N_k) \right] = (f, N_k), \quad (k = \overline{1, J})$$

yoki

$$\sum_{j=1}^J \bar{y}_j \left[\int_0^1 \left(-\frac{dN_j}{dx} \frac{dN_k}{dx} + N_j N_k \right) dx \right] = \int_0^1 N_k f dx, \quad j = \overline{1, J} \quad (9)$$

Bunda integral ostidagi barcha hadlar ma'lum, shunga ko'ra (9) algebraik tenglamalar sistemasini beradi va uni matritsa ko'rinishida quyidagicha yozamiz:

$$B\bar{Y} = G.$$

Bu yerda $b_{m,j}$ - ya'ni B uch dioganalli matritsani elementi quyidagicha formula bilan ifodalanadi:

$$b_{k,j} = -\left(\frac{dN_j}{dx}, \frac{dN_k}{dx}\right) + (N_j, N_k)$$

yoki

$$b_{k,j} = \int_0^1 \left(-\frac{dN_k}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_k N_j \right) dx \quad (10)$$

U holda $\bar{Y}$ vektorning elementi $\bar{Y}_j$, $g_k - G$ vektorning elementi, ya'ni

$$g_k = \int_0^1 N_k f dx = \sum_{i=1}^n f_j \int_0^1 N_k N_j dx \quad (11)$$

Agar $x < x_{k+1}$ va $x > x_{k+1}$ da $N_k = 0$ ekanligini etiborga olsak $b_{k,j}$ ning faqat quyidagi uchta qiymati noldan farqli:

$$\begin{cases} b_{k,k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(-\frac{dN_k}{dx} \frac{dN_{k-1}}{dx} + N_k N_{k-1} \right) dx = \frac{1}{\Delta x_j} + \frac{\Delta x_j}{6} \\ b_{k,k} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left[-\left(\frac{dN_k}{dx} \right)^2 + N_k^2 \right] dx = -\left(\frac{1}{\Delta x_j} + \frac{1}{\Delta x_{j+1}} \right) + \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{3} \\ b_{k,k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(-\frac{dN_k}{dx} \frac{dN_{k+1}}{dx} + N_k N_{k+1} \right) dx = \frac{1}{\Delta x_{j+1}} + \frac{\Delta x_{j+1}}{6} \end{cases}$$

Bu yerda $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ $k = J$ tugun uchun esa $b_{J,J-1} = \frac{1}{\Delta x_j} + \frac{\Delta x_j}{6}$;

$$b_{J,J} = -\frac{1}{\Delta x_j} + \frac{\Delta x_j}{3}; \quad b_{j,j+1} = 0$$

(1) tenglamaning o'ng tarafidagi funksiyani, uning murakkab tuzilishiga qaramasdan, uni xuddi yechimdagi kabi quyidagicha interpolatsiyadan foydalanamiz:

$$f = \sum_{j=1}^J \bar{f}_j N_j(x), \quad (13)$$

Bu yerda $\bar{f}_j$ –berilgan f funksiyaning tugun qiymatlari:

$$\bar{f}_j = \sum_{l=1}^L a_l \sin(l - 0.5)\pi x_j \quad (14)$$

Natijada (9) tenglamaning o'ng tarafi quyidagicha

$$(f, N_k) = \sum_{j=1}^J \bar{f}_j(N_k, N_j)$$

Chiziqli elementlardan foydalanib, ichki hosilalarni hisoblash g_k – uchun quyidagi ifodani beradi:

$1 \leq j \leq J - 1$ – ichki tugun uchun

$$g_k = \frac{\Delta x_j}{6} f_{k-1} + \frac{\Delta x_k + \Delta x_{k-1}}{3} f_k + \frac{\Delta x_{k+1}}{6} f_{k+1} \quad (15)$$

J – element uchun

$$g_J = \frac{\Delta x_N}{6} f_{N-1} + \frac{\Delta x_N}{3} f_N \quad (16)$$

Xususiyl holda $\Delta x_j = \Delta x_{j+1} = \Delta x$ deb olsak, $1 \leq j \leq J - 1$ tugunlar uchun :

$$\frac{\tilde{y}_{j-1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j+1}}{\Delta x^2} + \left[\frac{1}{6} \tilde{y}_{j-1} + \frac{2}{3} \tilde{y}_j + \frac{1}{6} \tilde{y}_{j+1} \right] = \left[\frac{1}{6} f_{j-1} + \frac{2}{3} f_j + \frac{1}{6} f_{j+1} \right] \quad (17)$$

(12) formulalarga ko'ra koeffitsientlar matritsali B uch diagonalli $B\bar{Y} = G$ tenglamalar sistemasini Tomas algoritmi bo'yicha yechish mumkin:

$$\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = -0.5, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = -0.2, \alpha_5 = 0.1;$$

O'rtacha kvadratik xatolik quyidagicha hisoblanadi:

$$\|y - \tilde{y}\|_{rmz} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{(y_j - \bar{y}_j)^2}{J}}$$

Shturm – Liuvilning soddalashtirilgan tenglamasini yechishda o'rtacha kvadratik xatolik 3-jadvalda keltirilgan ($p=1; q=1$).

3-jadval

J	h	$\ y - \tilde{y}\ _{rms} \cdot 10^3$
6	0.2	7.830

11	0.1	1.860
21	0.05	0.447
41	0.025	0.109
81	0.0125	0.027

Δx kamayganda xatolikni kamaytirish Δx^2 ga proporsional.

4-masala. Bir o'lchamli statsionar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qaraymiz.

$$\frac{d}{dx}(q_1(x)y'(x)) + q_2(x)y(x) = q_3(x)$$

Chegaraviy masalaning yechimi izlanayotgan $[a, b]$ oraliqni $h = \frac{b-a}{n}$ qadam

bilan n ta $(a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b)$ bo'lakka bo'lamiz.

Izlanayotgan funktsiyani ψ_i funktsiyalar kombinatsiyasi orqali approksimasiya qilamiz:

$$y_n(x) = y_0(=0) + y_1\psi_1 + y_2\psi_2 + \dots + y_{n-1}\psi_{n-1} + y_n(=0).$$

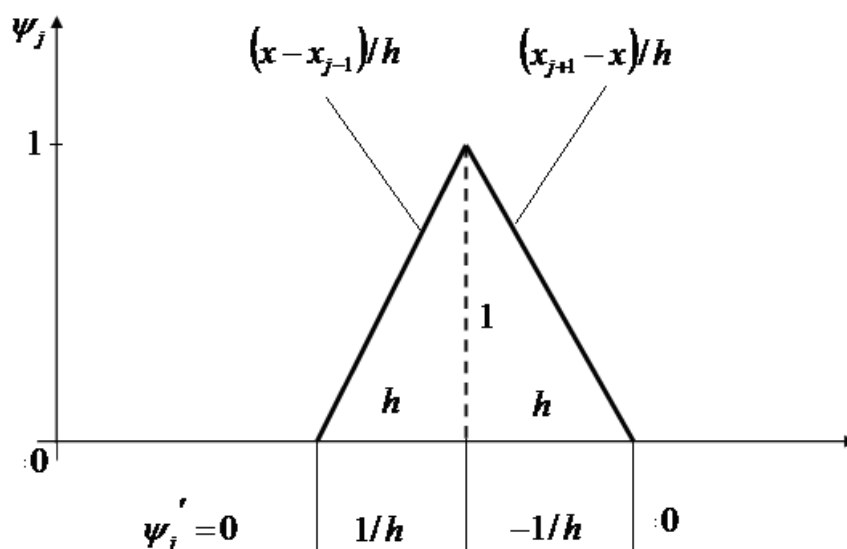
ψ_i funktsiyalar bo'lakli-chiziqli funktsiyalar bo'lib, quyidagi 4-rasmda tasvirlangan.

Bazis funktsiyalari bo'lakli-chiziqli funktsiyalar bo'lganligidan, natija ham bo'lakli-chiziqli funktsiya bo'ladi va uning hosilasi $[x_{j-1}, x_j]$ oraliqda

$$y'_n(x) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h}$$

kabi bo'ladi. Galyorkinning moment tenglamalari esa

$$\int_a^b \left[-\frac{d}{dx}(q_1 y'_n) + q_2 y_n \right] \psi_i(x) dx = \int_a^b q_3(x) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$



4-rasm. Bo'lakli-chiziqli bazis funksiya grafigi.

Ikkinchi darajali hosila qatnashgan qo'shiluvchini bo'laklab integrallasak va unga $y_n(x)$, $\psi_i(x)$ funksiyalarining ifodalarini qo'ysak quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

bu yerda

$$a_i = \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q_1(x) dx + \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q_2(x)(x - x_i)(x - x_{i-1}) dx,$$

$$b_i = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q_1(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q_2(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_2(x)(x_{i+1} - x)^2 dx,$$

$$c_i = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_1(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_2(x)(x - x_i)(x_{i+1} - x) dx,$$

Bu tenglamalar sistemasining matrisasi uchdiagonalli, shu sababli uni yechish uchun progonka usulini qo'llaymiz.

Quyidagi chegaraviy masalani qaraymiz:

$$3\psi'' + \psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(20,5\pi\sqrt{3}) = 20,5\pi\sqrt{3}.$$

Nolli chegaraviy shartlarga o'tish uchun $y = \psi + x$ almashtirish kiritamiz. Bu holda berilgan chegaraviy masala ushbu

$$3y'' + y = -x,$$

tenglama va uning quyidagi

$$y(0)=0, \quad y(20,5\pi\sqrt{3})=0.$$

chegaraviy shartlari ko'rinishiga keladi. Bu chegaraviy masala ushbu

$$\phi(\tilde{o}) = -\tilde{o} + 20,5\pi\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

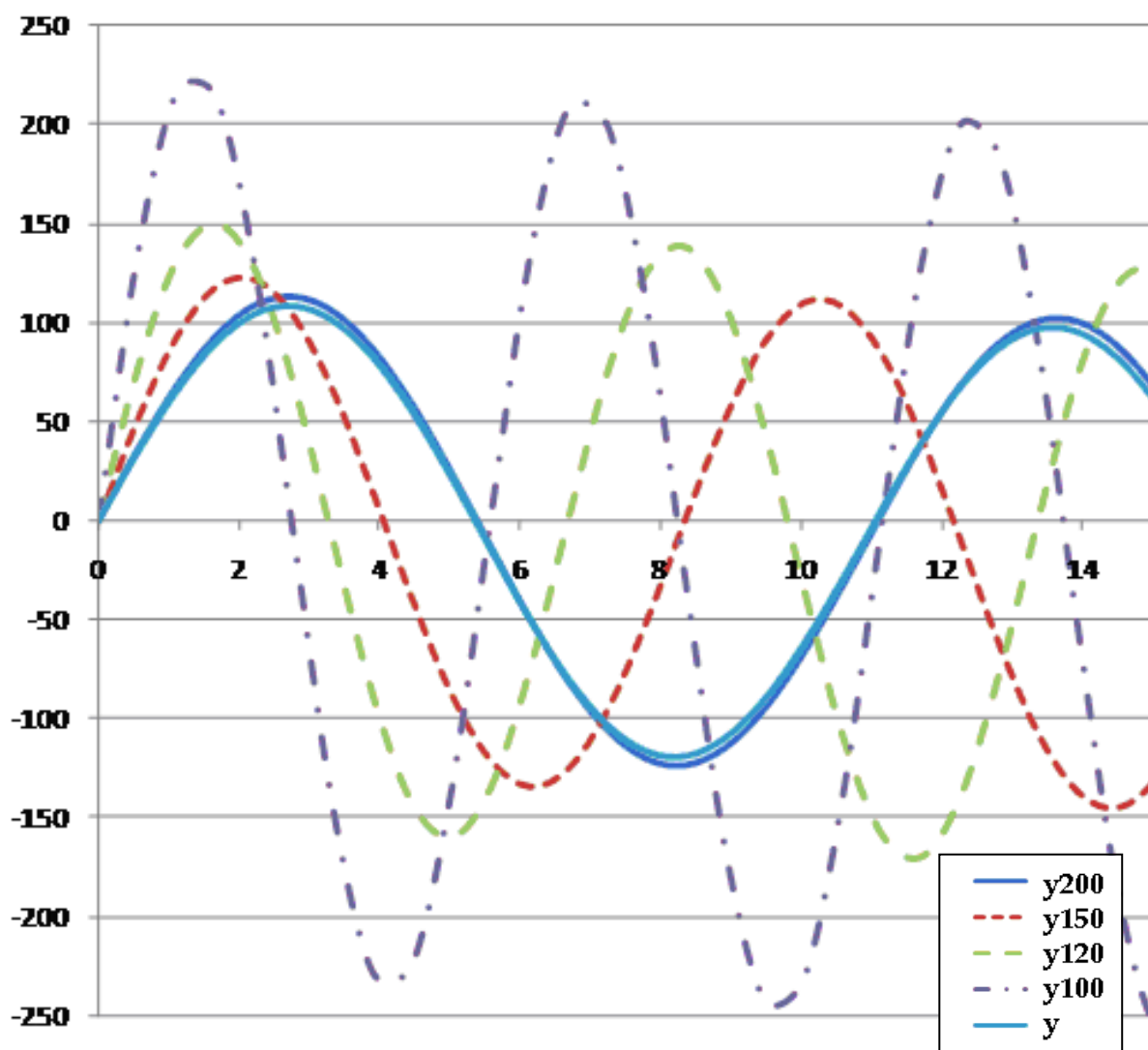
ko'rinishdagi haqiqiy yechimga ega.

Galyorkin moment tenglamalarining koeffitsiyentlari:

$$a_j = -\frac{3}{h} - \frac{h}{6}, \quad b_j = \frac{6}{h} - \frac{2h}{3}, \quad c_j = -\frac{3}{h} - \frac{h}{6}, \quad F_j = x_j h.$$

Progonka usulida h ning har xil qiymatlarida olingan yechim, ya'ni bir o'lchamli statsionar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining aniq va taqribiy yechimlarini taqqoslash quyidagi 5-rasmda tasvirlangan:

Bu taqqoslash shuni ko'rsatadiki, $N=200$ da aniq va taqribiy yechimlar orasida deyarli farq yo'q. Bu tanlangan chekli elementlar usulining aniqlik darajasi qanchalik yuqori ekanligini bildiradi.



5-rasm. Bir o'lchamli statsionar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining aniq va taqribiy yechimlarini taqqoslash grafiklari.

$$\begin{aligned}
 y_{100} : h &= \frac{b-a}{100} ; & y_{120} : h &= \frac{b-a}{120} ; \\
 y_{150} : h &= \frac{b-a}{150} ; & y_{200} : h &= \frac{b-a}{200} .
 \end{aligned}$$

XULOSA

Mazkur bitiruv malakaviy ishini bajarish natijasida quyidagi xulosalarga kelindi:

- oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning chekli elementlar usuli hisobiga oid jarayonlarni kompyuterda modellashtirish va sonli tajribalar asosida tadqiq etish usullari o'rganildi;
- oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalaga olib kelinadigan jarayonlar hisobi masalasining matematik modeli o'rganildi;
- amaliy jarayonlar hisobiga oid asosiy munosabatlar o'rganib chiqildi;
- o'rganilayotgan jarayonlar hisobiga oid chegaraviy masala tuzildi;
- chegaraviy masalani yechishning chekli elementlar usulidagi sonli hisob metodikasi va algoritmi ishlab chiqildi;
- oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning sonli hisob dasturi tuzildi;
- sonli hisob natijalari amaliy tajribalarga mos keldi;
- hisoblashlar jarayonida tuziladigan chiziqli tenglamalar sistemasini progonka usuli bilan yechishga dasturiy vositalar yaratildi.
- oddiy differensial tenglamalarning taqribiy hisobiga oid ishlab chiqilgan sonli hisob metodikasidan har xil hisob masalalarini chekli elementlar usuli yordamida yechishda samarali foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Галлагер Р. МКЭ: Основы /Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 215 с.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976
3. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Зенкевич О.С., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир. – 1986. – 318 с.
5. Зенкевич О.С., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошной среды.–М.:Недра,1974.–238 с.
6. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости / Пер. с. англ. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
7. Куликов Ю.А. Решение плоской задачи теории упругости методом конечных элементов. – Горький. – 1980. – 68 с.
8. Метод конечных элементов: Учебное пособие для вузов / Под. ред. П.М.Варвака. – Киев: Вища школа, Головное изд-ва, 1981.
9. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
- 10.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир. – 1979. – 392 с.