

1-МАВЗУ	ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ (МАЪРУЗА 18-СОАТ, АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ 18-СОАТ, МУСТАҚИЛ ИШ 7-СОАТ)
----------------	--

1-Машғулот

1.1 “Матрица тушунчаси. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари. n-тартибли детерминант ҳақида тушунча” маъруза машғулотини олиб бориш технологияси

Талабалар сони: 80-90 та		Вақти: 2-соат	
Машғулот шакли		Кириш-кўргазмалар тематик маъруза	
Маъруза режаси		1. Матрица тушунчаси 2. Детерминант тушунчаси 3. Детерминантни ҳисоблаш усуллари 4. Детерминантнинг хоссалари 5. Юқори тартибли детерминантлар	
Ўқув машғулотининг мақсади Матрица ва детерминант тушунчаси ҳамда уларнинг хоссаларини ўргатиш.			
Педагогик вазифа: * Детерминант тушунчаси ҳақида маълумот берилади. * Детерминантнинг хоссалари келтирилади. * Детерминантни ҳисоблаш усуллари ўргатилади. *Юқори тартибли детерминантлар ва уларни ҳисоблаш усуллари берилади.		Ўқув фаолиятининг натижаси: * Детерминант тушунчаси ҳақида маълумотга эга бўлади. * Детерминантнинг хоссалари ва уларни ҳисоблаш усуллари берилади. * Юқори тартибли детерминантларни турли усуллар билан ҳисоблай олади.	
Ўқитишнинг усули		Маъруза ва савол-жавоб усули	
Ўқитишнинг шакли		Жамоа билан ишлаш	
Ўқитишнинг воситаси		Тахта, бўр, таркатма материал, проектор.	
Ўқитишнинг шартлари		Маъруза ўқиш учун керакли бўлган техник воситалар билан таъминланган аудитория	

1.2. Маърузанинг технологик харитаси

Иш тартиби	Фаолиятнинг мазмуни	
	Ўқитувчи	Талаба
1-босқич Кириш 5 минут	Маърузанинг мақсади ва кутилаётган натижа эълон қилинади	Талабалар эшитади ва ёзиб олади
2-босқич Асосий материал 65 минут	Аудиториядаги ўқитиш воситалари ёрдамида маъруза савол- жавоб усулида олиб борилади	Талабалар эшитади ва ёзиб олади
3-босқич Яқунлаш 10 минут	Ўтилган мавзу бўйича олинган кўникмалар эълон қилинади. Талабаларга мавзу бўйича саволлар берилади	Талабалар ёзиб олади ва жавоб беради.

1-Машғулот.

Матрица тушунчаси. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари. n -тартибли детерминант ҳақида тушунча.

Детерминантларни ўрганишдан олдин матрица тушунчаси устида тўхталиб ўтамыз.

1. Матрица тушунчаси.

Матрица деб, сонларнинг тўғри бурчакли жадвалига айтилади.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Белгилашлар: A - матрица; a_{ij} - матрица элементлари; i - берилган элемент жойлашган сатр рақами; j - унга мос устун рақами; m - матрицадаги сатрлар сони; n - ундаги устунлар сони.

Агар $m = n$ бўлса матрица квадрат матрица деб аталади. n - сони матрицанинг тартиби дейилади.

Бир хил ўлчамга эга бўлган матрицаларнинг мос элементлари ўзаро тенг бўлса, бундай матрицалар ўзаро тенг матрицалар деб аталади.

Агар матрицанинг барча элементлари ноллардан иборат бўлса, бундай матрица нолли матрица деб аталади.

Агар квадрат матрицанинг асосий диагоналидаги барча элементлари 1, қолганлари 0 бўлса, бундай матрица бирлик матрица деб аталади.

Энди матрица тушунчасидан фойдаланиб детерминантларга таъриф берамиз.

2. Детерминантлар.

Иккинчи тартибли детерминант деб, иккинчи тартибли квадрат матрица элементлари ёрдамида аниқланувчи қуйидаги сонга айтилади.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Детерминантнинг бош диагоналида жойлашган элементлар кўпайтмасидан, ёрдамчи диагоналда жойлашган элементлар кўпайтмаси айирилади.

1-мисол. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$

Учинчи тартибли детерминант деб, учинчи тартибли квадрат матрица элементлари ёрдамида қуйидагича аниқланувчи сонга айтилади.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1)$$

Бу формулани эслаб қолиш учун учбурчаклар қондасидан фойдаланиш мумкин. У қуйидагилардан иборат:

Қўпайтмаси детерминантга «+» белгиси билан кирувчи элементлар қуйидагича жойлашади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Бош диагоналга симметрик бўлган иккта учбурчак ҳосил қилинади. Қўпайтмаси детерминантга «-» белгиси билан кирувчи элементлар ҳам, худди шу каби, ёрдамчи диагоналга нисбатан жойлашади.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2-мисол. Детерминантни ҳисобланг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ечиш. 3- тартибли детерминантни унинг қондасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

$$\Delta = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = \\ = 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

3. Детерминантнинг асосий хоссалари.

Детерминантнинг хоссаларини учинчи тартибли детерминант учун келтирамыз.

1. Детерминантда мос сатрларни мос устунлар билан алмаштирилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хоссани исботлаш учун юқоридаги детерминантларга (1) формулани татбиқ этиш ва олинган ифодаларнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш етарлидир.

2. Детерминантнинг сатр(ёки устун) элементлари бирор $k \neq 0$ сонга қўпайтирилса, детерминантнинг қиймати шу сонга қўпайтирилади, яъни

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\text{Исботи: } \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Демак, бирор сатр (ёки устун) элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин экан.

3. Нолли сатр (ёки устун) га эга бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Бу хоссани исботлаш учун иккинчи хоссада $k=0$ деб олиш kifоядир.

4. Иккита бир хил сатр (ёки устун) га эга бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Бу хоссани исботлаш учун детерминантга (1) формулани татбиқ этиш етарлидир.

5. Иккита сатр (ёки устун) и ўзаро пропорционал бўлган детерминант нолга тенг

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Агар иккита параллел сатрнинг ҳадлари пропорционал бўлса, у ҳолда 2) хоссага асосан, бу сатр элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин натижада иккита параллел бир хил сатр қолади, бу эса 4) хоссага асосан нолга тенг.

6. Детерминантда иккита сатр (ёки устун) и ўзаро алмаштирилса, унинг қиймати (-1) га кўпайтирилади.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хосса 1) хосса каби исботланади.

7. Агар детерминантнинг бирор сатр (ёки устун) ининг ҳар бир элементи иккита қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант икки детерминант йиғиндисидан иборат бўлади.

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хосса детерминантларга (1) формулани қўллаш орқали текширилади.

8. Детерминантнинг бирор сатр (ёки устун) элементларини бирор $k \neq 0$ сонга кўпайтириб, иккинчи сатр (ёки устун) нинг мос элементларига қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хоссани тенгликнинг чап томонига 7) ва 5) хоссаларни қўллаб текшириш мумкин.

4. Детерминатни сатр ёки устун бўйича ёйиш.

Детерминантнинг бирор элементининг **минори** деб, шу элемент турган сатр ва устунни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади ва M_{ij} билан белгиланади.

3- мисол.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{учун } a_{21} = -5, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

Детерминантнинг a_{ji} элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб шундай минорга айтиладики, агар $i + j$ жуфт бўлса, у минорнинг ўзига тенг, $i + j$ тоқ бўлса, минорга қарама-қарши бўлган сонга тенг, яъни $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Шу билан бирга қуйидаги тасдиқ ўринлидир: Детерминатнинг қиймати унинг ихтиёрий сатр ёки устун элементларининг уларга мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ij}, \quad \text{бу ерда } i=1,2,3.$$

Шундай қилиб, детерминатни ҳисоблаш учун бирор устун ёки сатр элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топиб, уларни детерминантнинг мос элементларига кўпайтмасининг йиғиндисини ҳисоблаш етарлидир.

4-мисол.

2 мисолдаги детерминатни сатрга ёйиш ёрдамида ҳисоблаймиз. Қулайлик учун 2- сатрни танлаймиз, чунки $a_{22} = 0$ бўлганлигидан $a_{22} \cdot A_{22} = 0$.

Шундай қилиб,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2; \dots A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

У ҳолда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

5. Юқори тартибли детерминантлар.

n - тартибли квадрат матрицани, яъни n - та сатр ва n - та устундан иборат бўлган қуйидаги жадвални қараймиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг n - тартибли детерминанти деб бундай белгиланадиган сонга айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Учинчи тартибли детерминантнинг барча хоссалари n - тартибли детерминант учун ҳам ўринлидир.

Амалиётда юқори тартибли детерминантларни сатр ёки устун бўйича ёйишдан фойдаланиб ҳисобланади. Устун ёки сатр бўйича ёйиш натижасида детерминантнинг тартиби пасайтирилади ва натижада уни учинчи тартибли детерминантга олиб келиш мумкин.

5-Мисол .

4- тартибли детерминантни ҳисоблансин.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ечиш. Детерминантни шундай алмаштирамизки, натижада бир устун ёки сатрда тўртта элементдан учтаси нолга айлансин. Бунинг учун 8-хоссадан фойдаланамиз. Агар детерминантда ± 1 га тенг элемент бўлса, бу хоссани қўллаш жуда ўринли бўлади. Шундай элемент сифатида $a_{13} = 1$ элементни танлаймиз ва унинг ёрдамида 3-чи устуннинг қолган барча элементларини нолга айлантирамиз.

Шу мақсадда:

- а) 2- сатр элементларига уларга мос 1- сатр элементларини қўшамиз;
- б) 1- сатр элементларини 2 га кўпайтириб 3- сатр элементларидан айирамиз.
- в) 4- сатр элементларидан 1- сатр элементларини айирамиз.

Натижада қуйидаги детерминантни ҳосил қиламиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ҳосил қилинган детерминантни 3-чи устун бўйича ёямиз.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг 2-чи сатр элементларини 2-га кўпайтириб, 1-чи сатр элементларидан айирамиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Бу детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб натижани ҳосил қиламиз:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Саволлар

1. II-чи ва III-чи тартибли детерменантлар деб нимага айтилади
2. III-чи тартибли детерменантларнинг минори қандай аниқланади?
3. Алгебраик тўлдирувчининг таърифини айтинг?
4. Юқори тартибли детерменантларни ҳисоблаш усулларини кўрсатинг?

Тестлар

1. 3-чи тартибли детерменант ҳисоблансин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A: 0; B: 2; C: -1; D: 1; E: 3.

2. Детерменантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$$

A: $2a^2(x+a)$; B: $a^2(x-a)$; C: $2x(a-x)$; D: x^2a ; E: $x(2a+x)$.

3. Детерменантнинг M_{21} минори ҳисоблансин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

A: 4; B: 3; C: -3; D: 7; E: 0.

4. 4-чи тартибли детерменант ҳисоблансин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

A. -51 B. -49 C. 37 D. -16 E. 63

Машқлар.

1. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг.

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

2. Тенгламани ечинг.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2- Машғулот

Детерминантлар назариясини чизикли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун қўллаш. Крамер қондаси. Матрицалар, матрицалар устида амаллар. Тескари матрица. Чизикли алгебраик тенгламалар системасини матрицалар орқали ечиш.

1. Крамер қондаси.

Детерминантлар ёрдамида уч номаълумли учта чизикли тенгламалар системасини ечиш усулини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(1) система коэффициентларидан тузилган Δ детерминантни (1) системанинг асосий детерминанти деб атаймиз. $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ детерминантлар Δ детерминантдан мос равишда ундаги биринчи, иккинчи ва учинчи устунларни b_1, b_2, b_3 оғоз ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (1) система ечимини аниқлайдиган ушбу формулаларнинг тўғрилигини исботлаш қийин эмас.

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \quad (2)$$

(2) формула уч номаълумли учта чизикли тенгламалар системасини ечишнинг **Крамер қондаси** ёки **Крамер усули** деб аталади.

1-мисол. Тенгламалар системасини Крамер усулида ечинг:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Ечиш. Асосий детерминантни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

демак, тенгламалар тизими ягона ечимга эга. $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ — ларни топамиз.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

Бундан $x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4$, $x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2$.

Детерминантларни ўрганишдан олдин матрица тушунчаси устида тўхталиб, матрицага таъриф бериб ўтган эдик. Энди матрицалар устида амалларни кўриб чиқамиз.

2. Матрицалар устида чизиқли амаллар.

Матрицаларни қўшиш. Бир хил $m \times n$ ўлчамли A ва B матрицаларнинг йиғиндиси деб, худди шундай ўлчамли C матрицага айтиладики, бу матрицанинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементларининг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \overline{m}, \quad j = 1, \overline{n}$$

2-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{матрицаларнинг} \quad \text{йиғиндисини}$$

топинг.

Ечиш. Берилган матрицаларнинг бир хил жойда турган элементларини қўшиб, $C = A + B$ матрица элементларини ҳисоблаймиз.

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 - 1 = 1; \quad c_{12} = -3 + 4 = 1; \quad c_{13} = 1 + 0 = 1; \quad c_{14} = 1 - 1 = 0;$$

$$c_{21} = 0 + 2 = 2; \quad c_{22} = 4 - 2 = 2; \quad c_{23} = -2 + 5 = 3; \quad c_{24} = 8 + 7 = 15.$$

$$\text{Шундай қилиб, } C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Матрицани сонга кўпайтириш. Матрицани сонга кўпайтириш деб, ўлчами берилган матрица ўлчамига тенг бўлган, ҳар бир элементи берилган матрица элементини берилган сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган матрицага айтилади.

3-мисол.

Агар $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ бўлса, $5A - 2B$ матрицани топинг.

Ечиш.

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 5A - 2B &= \begin{pmatrix} 10 - 8 & -15 - 6 & 5 - 4 \\ -5 + 6 & 0 - 2 & -10 + 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Шундай қилиб, } 5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Матрицаларни кўпайтириш.

Ўлчами $m \times p$ бўлган A матрица ва ўлчами $p \times n$ бўлган B матрицаларнинг кўпайтмаси деб, ўлчами $m \times n$ бўлган шундай C матрицага

айтиладики, унинг ҳар бир элементи C_{ij} қуйидаги формула билан аниқланади:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n.$$

Шундай қилиб, c_{ij} элемент A матрицанинг i - сатрини B матрицанинг унга мос j - устунига кўпайтмасининг йиғиндисидан иборат экан.

Матрицаларни кўпайтириш амали коммутатив эмас, яъни $AB \neq BA$. Ҳақиқатдан ҳам, AB кўпайтма мавжуд бўлса, ўлчамлари тўғри келмаслиги сабабли BA кўпайтма умуман мавжуд бўлмаслиги мумкин. Агар AB ва BA лар мавжуд бўлса ҳам, уларнинг ўлчамлари ҳар қил бўлиши мумкин.

Бир қил ўлчамли квадрат матрицалар учун AB ва BA кўпайтмалар мавжуд ва улар бир қил ўлчамга эга бўлади, аммо умуман олганда мос элементлари тенг бўлмайди.

4-мисол.

Қуйидаги матрицаларни бир-бирига кўпайтириш мумкинми ёки йўқми? Шунни аниқланг. Агар кўпайтма мавжуд бўлса, уни ҳисобланг.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. A ва B матрицаларнинг ўлчамларини таққослаймиз. $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Бундан $n = l$, $m \neq k$, шунинг учун $AB[3 \times 2]$ мавжуд, кўпайтма BA эса мавжуд эмас.

AB кўпайтма элементларини топамиз:

$$(ab)_{11} = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21; (ab)_{12} = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24; (ab)_{21} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6; (ab)_{22} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8; (ab)_{31} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2; (ab)_{32} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2.$$

$$\text{Шундай қилиб, } AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA \text{ эса мавжуд эмас.}$$

$$\mathbf{5-мисол. Агар } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

бўлса, AB ва BA ни топинг.

Ечиш. матрицаларни кўпайтириш мумкинми ёки йўқлигини билиш учун уларнинг ўлчамларини аниқлаймиз.

$A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Бундан $n = l = 4$, $m = k = 2$, шунинг учун AB ва BA матрицалар мавжуд, ҳамда $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.

$C = AB$ матрицанинг элементларини ҳисоблаш учун A матрицанинг сатр элементларини унга мос булган B матрицанинг устун элементларига кўпайтирилади.

$$c_{11} = 2 \cdot 3 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(A нинг биринчи сатр элементларининг B нинг биринчи устун элементларига купайтмасининг йиғиндиси; ҳисобланаётган элементнинг биринчи индекси A матрицанинг сатрини, иккинчи индекси эса B матрица устунини билдиради).

$$\begin{aligned}c_{12} &= 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5; \\c_{21} &= -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9; \\c_{22} &= -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

$D = BA$ матрица элементларини ҳисоблаётганда B нинг сатр элементлари A нинг устун элементларига кўпайтирилади.

$$\begin{aligned}d_{11} &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0; & d_{12} &= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4; & d_{13} &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1; \\d_{14} &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2; & d_{21} &= -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2; & d_{22} &= -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2; \\d_{23} &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1; & d_{24} &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0; & d_{31} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1; \\d_{32} &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1; & d_{33} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0; & d_{34} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1; \\d_{41} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8; & d_{42} &= 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; & d_{43} &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2; \\d_{44} &= 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4.\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Тескари матрица.

Агар $\Delta_A = 0$ бўлса A квадрат матрица хос матрица, $\Delta_A \neq 0$ бўлса, хосмас матрица дейилади.

Агар $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ каби бўлса, A^{-1} квадрат матрица, ўшандай тартибли A квадрат матрицага тескари матрица дейилади. Берилган матрицага тескари матрица мавжуд бўлиши учун, берилган матрицанинг хосмас бўлиши зарур ва етарлидир. Тескари матрица қуйидаги формуладан топилади:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix} \quad (3)$$

6-мисол.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Биринчи устун бўйича ёйиб A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз.

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Демак, A матрицага тескари матрица мавжуд.

Ечиш. Системанинг матричасини тузамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, демак, тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

A^{-1} матрицани топамиз:

$$A_{11} = -11, A_{21} = -25, A_{31} = 2, A_{12} = 9, A_{22} = -12, A_{32} = 3, A_{13} = -13, A_{23} = -11, A_{33} = 7$$

$$\text{У холда } A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Агар $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ эканлигини эътиборга олсак, берилган тенгламалар

системаси ечими $X = A^{-1}B$ бўлган $AX = B$ матрицавий тенгламага айланади.

Шундай қилиб,

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

яъни $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Саволлар:

1. Матрица деб нимага айтилади?
2. Матрицалар қандай кўпайтирилади?
3. Қандай матрица тескари матрица дейилади?
4. Как вычисляется обратная матрица?

Тестлар:

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ берилган. A^2 топинг .

А. $\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ В. $\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$ С. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

2. A ва B матрицаларнинг кўпайтмаси топилсин $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

А. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ В. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ С. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Д. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Е. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ берилган. A^{-1} топинг.

$$A. \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad B. \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad C. \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D. \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Матрицанинг детерминанти топилсин $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

A. -1; B. 1; C. 2; D. 3; E. -2.

Машқлар.

1. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер ва тескари матрица усулида ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \end{cases}$$

2. Агар $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ бўлса, $2A + 4B$ матрицани топинг.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ бўлса AB ни топинг.

4. 5. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ x - z = 0, \\ y + 2z = 3; \end{cases}$$

A. 1, 1, 1; B. -1, 3, 0; C. 1, 1, -1; D. -1, 1, 1; E. 0, 2, 1.

3- Машғулот

**Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули.
Матрицанинг ранги. Кронекер-Капелли теоремаси.**

1. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули.

Биз амалиётда қўллаш учун қулай бўлган чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг номаълумларни кетма-кет йўқотиш ёки Гаусс усулини кўриб ўтайлик. Бу усулни қўллаганимизда битта тенгламанинг иккала томонини бирор сонга кўпайтириб бошқа тенгламадан айирганимизда ҳосил бўлган система дастлабки системага тенг кучли бўлади. Шундай қилиб дастлабки система ва ҳосил бўлган система бир хил ечимга эга бўлади ёки бир пайтда биргаликда бўлмайди. Биз юқоридаги алмаштиришни бир неча марта бажаришимиз мумкин. Бу алмаштиришни бажарганимизда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин. Бирорта тенгламанинг чап томонидаги коэффицентларнинг барчаси “0” га тенг. Агар бу тенгламанинг ўнг томонидаги озод ҳад “0” га тенг бўлса, бу тенглама номаълумларнинг ҳар қандай қийматида маънога эга. Бу тенгламани ташлаб юбориб дастлабки системага тенг кучли бўлган системага эга бўламиз. Агар тенгламанинг ўнг томони, яъни озод ҳад “0” дан фарқли бўлса, бу тенгламани номаълумларнинг ҳеч қандай қиймати қаноатлантирмайди. У ҳолда ҳосил бўлган тенгламалар системаси ва дастлабки система биргаликда бўлмайди.

Бизга қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин:

[illegible]

Номаълумлар олдидаги коэффициентлар тўғри бурчакли матрицани ҳосил қилади

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Биринчи тенгламадаги биринчи коэффициентни “0” дан фарқли деб фараз қилайлик, акс ҳолда уни биринчи коэффициентини нолдан фарқли бўлган бошқа тенглама билан алмаштирамиз. Биринчи тенгламанинг барча ҳадларини $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ га кўпайтириб иккинчи тенгламадан, $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ га кўпайтириб учинчи тенгламадан ва ҳоказо $\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ га кўпайтириб “ m ”- тенгламадан айирамиз. Бу алмаштиришдан сўнг биринчи тенгламадан ташқари барча тенгламаларда “ x_1 ” номаълум йўқотилади. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз:

(3)

тенгламада $a_{22} \neq 0$ деб фараз қилиб, иккинчи тенглама ёрдамида юқоридаги каби 3-, 4- ва хоказо “ m ”-тенгламаларда “ x_2 ” номаълумни йўқотамиз. Ушбу алмаштиришлардан ёрдамида қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

(4)

Бу алмаштиришлардан сўнг, агар шундай системага келсакки, бу тенгламанинг чап томонидаги барча коэффицентлар “0” га тенг бўлиб, ўнг томони “0” дан фарқли бўлса дастлабки система биргаликда бўлмайди. Агарда алмаштиришлар ёрдамида баъзи тенгламаларнинг чап томонидаги коэффицентлари ва ўнг томонидаги озод ҳад нолга тенг бўлса, бундай тенгламаларни ташлаб юборамиз ва қуйидаги системага эга бўламиз:

(5)

Бу ерда $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{k-1,k-1}^{(k-2)} \neq 0, a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0, k \leq n$ ва ҳосил бўлган (5) система (1) системага эквивалент бўлади. Бу системада $k = n$ бўлса, тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлади ва аниқ дейилади, $k < n$ бўлса аниқмас дейилади.

Агар $k = n$ бўлса (5) система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

(6)

Охирги тенгламадан x_n ни топамиз, уни олдинги тенгламага қўйиб x_{n-1} номаълумни топамиз ва ҳоказо x_1 номаълумни топиб (6) тенгламалар системасининг ечимини ҳосил қиламиз. Дастлабки (1) ва (6) системалар эквивалентлигини ҳисобга олиб (1) системанинг ягона ечимини ҳосил қиламиз.

Демак $k = n$ бўлса тўғри бурчакли (2) матрица учбурчак кўринишга, $k < n$ бўлса трапеция кўринишга эга бўлади. Энди $k < n$ бўлган, яъни тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлган ҳолни кўриб ўтамиз.

Охирги (5) системанинг ечимини топиш учун бу системадаги “эркин” ўзгарувчи $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ларга ихтиёрий қийматлар бериб охирги тенгламадан x_k номаълумни топамиз. Номаълум x_k ва эркин ўзгарувчилар $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ ларнинг қийматларини олдинги тенгламага қўйиб x_{k-1} номаълумни топамиз ва ҳоказо. Трапеция кўринишидаги матрицада пастдан юқорига ҳаракат қилиб (5) системанинг ечимини ҳосил қиламиз ва бу системанинг (1) система билан эквивалентлигини ғисобга олиб дастлабки (1) системанинг ечимига эга бўламиз. Эркин ўзгарувчилар қийматларини чексиз кўп усул билан танлаш мумкинлигини ҳисобга олсак (1) система чексиз кўп ечимга эга ва биргаликда бўлади.

Мисол. Тенгламалар системасини Гаусс усулида ечинг:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламани 5га бўлиб юбориб уни (-2) ва (-3) кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз ва x_1 номаълумни иккинчи ва учинчи тенгламалардан йўқотамиз.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{1}{5} \\ -\frac{14}{5}x_2 + \frac{19}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = \frac{18}{5} \\ \frac{14}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Иккинчи тенгламани $(-\frac{14}{5})$ га бўламиз ва x_2 ни учинчи тенгламадан йўқотамиз.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_2 - \frac{19}{14}x_3 - \frac{2}{7}x_4 = -\frac{9}{7} \\ 4x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан x_3 номаълумни топамиз $x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4$ ва бу ифодани иккинчи ва биринчи тенгламага қўямиз. Демак

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Бу ерда x_4 эркин ўзгарувчи, унга қиймат бериб x_1 , x_2 ва x_3 ларнинг қийматларини топамиз. Бу ҳолда система чексиз кўп ечимга эга.

2. Матрицанинг ранги ва уни ҳисоблаш.

Тўғри бурчакли A матрица берилган бўлсин. Бу матрицанинг k та сатр ва k та устунини ажратиб олсак, ҳосил бўлган k - тартибли матрицанинг детерминантга A матрицанинг k - тартибли минори деб аталади. A матрицанинг турли тартибли минорлари орасида нолга тенг бўлганлари ҳам нолдан фарқли бўлганлари ҳам мавжуд бўлиши мумкин.

Таъриф. Агар A матрицанинг k - тартибли минорлари орасида нолдан фарқли си бўлиб, ундан юқори тартибдаги барча минорлари нолга тенг бўлса, бу матрицанинг ранги k га тенг дейилади. $\text{rang} A = k$ каби белгиланади.

Матрицанинг рангини таъриф бўйича топиш анча ноқулай бўлиб, биз қулайроқ бўлган усулни келтирамиз.

Матрица устидаги қуйидаги алмаштиришлар элементар алмаштиришлар деб аталади:

- а) фақат ноллардан иборат сатр ёки устунни ўчириш;
- б) иккита сатрнинг (устуннинг) ўрнини алмаштириш;
- в) ихтиёрий сатр (устун) элементларини бирор сонга кўпайтириб бошқасига қўшиш;
- г) сатр (устун)нинг барча элементларини нолдан фарқли сонга кўпайтириш.

Бир- биридан фақат элементар алмаштиришлар билан фарқланувчи матрицалар ўзаро эквивалент дейилади.

Теорема-1. Эквивалент матрицаларнинг ранги ўзаро тенг бўлади.

Теорема-2. Агар матрицанинг ранги k га тенг бўлса, у ҳолда бу матрицада k та чизикли эркин сатр ёки устун топилади, қолганлари бу сатр ёки устунларларнинг чизикли комбинациясидан иборат, яъни элементар алмаштиришлар ёрдамида бу матрицани k та сатр ёки устун нолдан фарқли, қолганлари нол бўлган кўринишга келтириш мумкин.

Мисол. Ушбу матрицанинг ранги ҳисоблансин

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементар усулидан фойдаланамиз. Биринчи сатр ва биринчи устун кесишган жойда турган "1" дан фойдаланиб 1- устундаги барча элементларни нолга айлантирамиз. Бунинг учун биринчи сатрни (-2) , (-3) ва (-1) га кўпайтириб мос равишда 2-, 3- ва 4- сатрларга қўшамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Иккинчи ва учинчи сатрлар ўрнини алмаштирамиз ва 2- ва 2- устун кесишган жойда турган (-1) ёрдамида иккинчи устундаги ундан пастда турган элементларни нолга айлантирамиз. Бунинг учун иккинчи сатрни (-3) га кўпайтириб учинчи ва тўтинчи сатрларга қўшамиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Учинчи сатрни (-15) га тўртинчи сатрни 16 га кўпайтириб 3- ва 4- сатрларни қўшамиз

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -210 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Демак юқоридаги 1- ва 2- теоремаларга асосан берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

2. Чизиқли тенгламалар системасини текшириш.

Кронекер- Капелли теоремаси.

Юқорида қаралган номаълумлари сони n та, тенгламалари сони m та бўлган (1) системани қарайлик. Унинг коэффицентларидан тузилган (2) матрица ва озод ҳадлар қўшилишидан ҳосил бўлаг кенгайтирилган матрицани қарайлик

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (7)$$

Равшанки $\text{rang} A \leq \text{rang} B$.

Теорема. (Кронекер- Капелли) Юқоридаги (1) чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун бу система матрицаси ва кенгайтирилган матрицалар ранглари тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. (1) система биргаликда ва $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ ва ечимга эга бўлсин, уҳолда қуйидаги тенгликлар тўғри бўлади.

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2n}k_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \dots + a_{mn}k_n = b_m \end{cases} \quad (8)$$

В матрицанинг 1- устунини k_1 га, 2- устунини k_2 га ва ҳоказо n - устунини k_n га кўпайтириб охирги устунидан айирамиз ва (8) ни ҳисобга олиб В га эквивалент матрица ҳосил қиламиз.

$$B \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг охирги устунини ўчириш билан А матрицага келамиз. Бунинг элементар алмаштиришлигини эътиборга олсак:

$$\text{rang} A = \text{rang} B.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$