Сплайн яқинлаштириш.Сплайн интерполяциялаш.

Режа:

1. Кириш.
2. Кубик сплайн қуриш.
3. Кубик сплайн билан интерполяциялаш жараёнининг яқинлашиши.

1. Кириш.

Функцияни интерполяцион кўпхад ёрдамида яқинлаштириш, кўпҳад юқори тартибли бўлганда ҳисоблаш хатоликларининг йиғилиб бориши натижасида ёмон яқинлашади. Шунинг учун $[a,b]$ оралиқни кичик оралиқларга ажратиб ҳар бирида яқинлаштирувчи кўпҳад кўриш анча яхши натижа бериши аниқланди. ҳар бир бўлакда кўпҳаддан иборат ва маълум тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функция сплайн деб айтилади. Сплайн якинлаштириш кўпхад билан яқилаштиришдан афзаллиги шундан иборатки у:

биринчидан: функцияга яқинлашади,

иккинчидан: ҳисоблаш жарёни турғундир.

2. Кубик сплайнни қуриш.

Фараз қиламиз $[a,b]$ да аниқланган $f(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

тўрни аниқлаб, $f_i = f(x_i),\ i = 0,1,...,N$ каби белгилаймиз. $f(x)$ функцияга ва $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ тугун нуқталарга мос $S(x)$ сплайн деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи функцияга айтилади:

1) ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ сегментда $i = 1,2,\ldots,N$,$S(x)$ функция учинчи даражали кўпхад;

2) $S(x)$ функция ва унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари $[a,b]$ да узлуксиз;

3) $S(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,\ldots,N$.

Охирги шарт интерполяциялаш шартлари деб айтилади, сплайн эса интерполяциялайдиган сплайн деб айтилади. Юқорида қайд этилган сплайн мавжуд ва ягоналигини исбот қиламиз. қуйида келтириладиган исбот сплайнни қуриш усулини ҳам аниқлайди.

ҳар бир $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\ldots,N$ кесмада , $S(x) = S_i(x)$ -ни

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \qquad (1)$$

кўринишда қидирамиз.

Бу ердаги $a_i, b_i, c_i, d_i -$коэффициентлар аниқланиши лозим бўлган номаълум коэффициентлар маъносини аниқлаймиз.

$$S_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S_i''(x)=c_i+d_i(x-x_i), \quad S'''(x)=d_i \cdot$$

тенгликларга эгамиз, шунинг учун

$$a_i=S_i(x_i), \quad b_i=S_i'(x_i), \quad c_i=S_i''(x_i), \quad d_i=S_i'''(x_i)$$

$$S(x_i)=f(x_i) \qquad i=1,2,\ldots,N$$

интерполяция шартларидан

$$a_i=S_i(x_i), i=1,2,\ldots,N$$

ларни ҳосил қиламиз. $a_0=f(x_0)$ деб аниқлаймиз. $S(x)$ нинг узлуксизлик шартидан

$$S_i(x_i)=S_{i+1}(x_i), i=1,2,..., N-1.$$

Бундан, $S(x)$ ифодасини инобатга олиб $i=1,2,\ldots,N-1$ учун

$$a_i=a_{i+1}+b_{i+1}(x_i-x_{i+1})+\tfrac{c_{i+1}}{2}(x_i-x_{i+1})^2+\tfrac{d_{i+1}}{6}(x_i-x_{i+1})^3$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

$$h_i=x_i-x_{i-1}$$

деб белгилаб, бу тенгламаларни

$$h_ib_i-\tfrac{h_i^2}{2}c_i+\tfrac{h_i^3}{6}d_i=f_i-f_{i-1}, i=1,2,\ldots,N \tag{2}$$

кўринишларда ёзиб оламиз.

Биринчи тартибли ҳосиланинг узлуксизлиги

$$S_i'(x_i)=S_{i+1}'(x_i), i=1,2,\ldots,N-1, c_ih_i-\tfrac{d_i}{2}h_i^2=b_i-b_{i-1}, i=2,3,\ldots,N \tag{3}$$

тенгламаларга олиб келади.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг узлуксизлигидан

$$d_ih_i=c_i-c_{i-1}, i=2,3,\ldots,N \tag{4}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. (2)-(4) тенгликларни бирлаштириб

$$b_i, c_i, d_i, i=1,2,\ldots,N$$

номаълумларга нисбатан $3N-2$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Иккита етмайдиган тенгламани ҳосил килиш учун $S(x)$ га у ёки бу чегаравий шартлар қўядилар. Масалан $f''(a)=f''(b)=0$ деб олиш мумкин. Унда $S''(a)=S''(b)=0$ бўлишини талаб қилиш табиийдир. Бундан $S_1''(a)=0, S_N''(x_N)=0$, яъни $c_1-d_1h_1=0, c_N=0$ тенгламалар ҳосил бўлади. $c_1-d_1h_1=0$ шарт $i=1, \quad c_0=0$ бўлганда (4)- билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, кубик сплайннинг коэффициентларини аниқлаш учун қуйидаги ёпиқ системага келамиз:

$$h_id_i=c_i-c_{i-1}, i=1,2,..., N, c_0=c_N=0 \tag{5}$$

$$h_ic_i-\tfrac{h_i^2}{2}d_i=b_i-b_{i-1}, i=2,3,\ldots,N \tag{6}$$

$$h_ib_i-\tfrac{h_i^2}{2}c_i+\tfrac{h_i^3}{6}d_i=f_i-f_{i-1}, i=1,2,\ldots,N \tag{7}$$

Бу системанинг ягона ечимга эга эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. (5)-(7) системадан $b_i, d_i\, i = 1,2,\ldots,N-1$ номаълумларни йўқотиб, фақат c_i - номаълумлар қатнашадиган системани ҳосил қиламиз. Бунинг учун (7)-тенгламалардан икки қўшниларини қараймиз:

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Биринчи тенгламадан иккинчини айириб

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$b_i - b_{i-1}$ айирма учун топилган ифодани (6)- нинг ўнг томонига қўйиб,

$$h_i \cdot c_i - \frac{h_i^2}{2} \cdot d_i = \frac{1}{2} \cdot (h_i \cdot c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 \cdot d_i - h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

ёки

$$h_i \cdot c_i + h_{i--1} \cdot c_{i-1} - \frac{2}{3} \cdot h_i^2 \cdot d_i - \frac{1}{3} h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \tag{8}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(5)- тенгликдан

$$h_i^2 \cdot d_i = h_i(c_i - c_{i-1}),\; h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

тенгликларни ҳосил қилиб, буларни (8)- га қўйсак

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_{i-1} + h_i \cdot c_i = 6 \cdot \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right)$$

тенглик ҳосил бўлади. c_i коэффициентларни аниқлаш учун

$$h_i \cdot c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \cdot c_i + h_{i+1} \cdot c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), i = 1,2,\ldots,N-1$$

$c_0 = c_N = 0$ тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу система матрицасининг диагонал элементлари бошқа элементларга нисбатан анча катта бўлганлиги учун унинг ечими мавжуд ва ягонадир. Бу система уч диагоналли бўлганлиги учун прогонка усули ,билан ечиш мумкин. Бу ҳолда прогонка методи турғундир. Аниқланган c_i бўйича b_i ва d_i коэффициентларни ошкор формулалар кўринишида ёзиш мумкин

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2} \cdot c_i - \frac{h_i^2}{6} \cdot d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, i = 1,2,\ldots, N \tag{10}$$

Шундай қилиб, (1) - (3) ва $S''(a) = S''(b) = 0$ чегаравий шартлар билан аниқланадиган ягона сплайн мавжудлиги кўрсатилди.

Бошқа чегаравий шартлар билан ҳам масалани қараш мумкин эканлигини таъкидлаймиз.

<u>3. Кубик сплайн билан интерполяцилаш жараёнининг яқинлашиши.</u>

Бу ерда кубик интерполяцион сплайнларнинг тугун нукталар сони N чексизга интилганда интерполяцияланувчи функцияга интилишини кўрсатамиз.

Интерполяцион сплайн билан $f(x)$ орасидаги фарқ $U(x)=f(x)-S(x)$ функция силлиқлик тартибига ва тугун нуқталарнинг жойлашишига боғлиқ. Соддалик учун нуқталари текис жойлашган тўрлар кетма-кетлигини қараймиз:

$$\omega_h=\{x_i=a+i\cdot h, i=0,1,...,N\},$$

бу ерда

$$h=\frac{b-a}{N}$$

Бу ҳолда (9)- система кўриниши қуйидагича бўлади

$$c_{i-1}+4c_i+c_{i+1}=6f_{\bar{x}x,i}, \quad i=1,2,...N-1, \quad c_0=c_N=0, \tag{11}$$

бунда

$$f_{\bar{x}x,i}=\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}.$$

f(x) функциядан [a,b] оралиқда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин деб талаб қиламиз:

$$f(x)\in C^{(4)}[a,b]$$

Бундан ташқари

$$f''(a)=f''(b)=0$$

чегаравий шартлари бажарилсин, худди шундай шартлар сплайн учун ҳам бажарилишини талаб қиламиз.

$$\|g(x)\|_{C[a,b]}=\max_{a\le x\le b}\cdot|g(x)|, \quad M_4=\|f^{(4)}(x)\|_{C[a,b]}$$

деб белгилаймиз.

Фараз қиламиз $S_h(x)$, f(x) функцияни [a,b] оралиқда ω_h тўрда интерполяциялайдиган сплайн бўлсин. Қуйидаги теоремада f(x) функция ва унинг f'(x) ва f''(x) ҳосилаларининг интерполяция хатолари баҳоси келтирилган.

1-теорема. Агар

$$f(x)\in C^{(4)}[a,b]$$

бўлса,

$$\|f(x)-S_h(x)\|_{C[a,b]}\le M_4\cdot h^4 \tag{12}$$

$$\|f'(x)-S'_h(x)\|_{C[a,b]}\le M_4\cdot h^3 \tag{13}$$

$$\|f''(x)-S''_h(x)\|_{C[a,b]}\le M_4\cdot h^2 \tag{14}$$

баҳолар ўринли бўлади.

Бу тенгсизликлардан , $h\to 0 \quad (N\to\infty) \quad S_h^{(i)}(x)$ ларнинг $f^{(i)}(x)$-ларга i=0,1,2 интилиши келиб чиқади.

Бу теоремани исбот қилиш учун $f''(x_i)-S''_h(x_i)$ хатоликни баҳоловчи леммани келтирамиз.

$$\|\varphi(x)\|_{C(\omega_h)}\le\max_{x_i\in\omega_h}|\varphi(x_i)|$$

деб белгилаймиз.

1-лемма. $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$ учун

$$\left\| f''(x) - S_h''(x) \right\|_{C(\omega_h)} \le \tfrac{3}{4} \cdot M_4 \cdot h^2 . \qquad (15)$$

Исбот. $S_h''(x_i) = c_i$ бўлганлиги учун, бу ерда c_i (11)- системанинг ечими, $z_i = c_i - f''(x_i)$ хатоликнинг баҳосини топиш кифоя. $c_i = z_i - f''_i$ ни (11)-га қўйиб

$$z_{i-1} + 4 \cdot z_i + z_{i+1} = \psi_i , \quad i = 1,2,...,N-1, \quad z_0 = z_N = 0 \qquad (16)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\psi_i = 6 \cdot f_{\bar{x}x,i} - (f''_{i+1} + 4 f''_i + f''_{i-1}) . \qquad (17)$$

(16)- система ечимини ψ_i- ўнг томонлар орқали баҳолаймиз. Бунинг учун (16)- тенгламани $4z_i = -z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i$ кўринишида ёзамиз. Бундан××

$$4|z_i| = |-z_{i-1} - z_{i+1} + \psi_i| \le |z_{i-1}| + |z_{i+1}| + |\psi_i| \le$$
$$\le \max_{x_{i-1}\in\omega_h} |z_{i-1}| + \max_{x_{i+1}\in\omega_h} |z_{i+1}| + \max_{x_i\in\omega_h} |\psi_i| = 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi_i\|_{C(\omega_h)}$$

келиб чиқади.

Бу тенгсизлик барча i -лар учун ўринли бўлганиги учун , у $|z_i|$ максимумга эришадиган $i=i_0$ учун ҳам, яъни $x_i = x_{i_0}$ учун ҳам ўринли бўлади.

Шунинг учун

$$4\|z\|_{C(\omega_h)} \le 2\|z\|_{C(\omega_h)} + \|\psi\|_{C(\omega_h)}$$

яъни

$$\left\| f''(x) - S_h''(x) \right\|_{C(\omega_h)} \le \tfrac{1}{2} \|\psi\|_{C(\omega_h)} \qquad (18)$$

бажарилади.

Бундан (15)- баҳони ҳосил қилиш учун $\|\psi\|_{C(\omega_h)}$ ни баҳолаш лозим. Бунда $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{N-1})$, φ_i-лар (17)- тенглик ёрдамида аниқланган. ψ_i-ни

$$\psi_i = 6 f_{\ddot{x}x,i} - (f''_{i+1} + 4 f''_i + f''_{i-1}) = 6(f_{\ddot{x}x,i} - f''_i) - (f''_{i+1} - 2 f''_i + f''_{i-1}) =$$
$$= 6(f_{\bar{x}x,i} - f''_i) - h^2 f''_{\bar{x}x,i} \qquad (19)$$

кўринишда ёзамиз ва Тейлор формуласидан фойдаланамиз.

Унда ёёё

$$f_{\bar{x}x,i} = \tfrac{f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}}{h^2} = \tfrac{1}{h^2} f''(x_i) \cdot h^2 + \tfrac{1}{12 h^2} f^{(4)}(\eta_i) \cdot h^4 =$$
$$= f''(x_i) + \tfrac{1}{12} f^{(4)}(\eta_i) \cdot h^2 , \qquad x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1}$$

тенглик ўринли бўлади.

Худди шундай усул билан

$$f''_{\bar{x}x,i} = \tfrac{f''_{i+1} - 2 f''_i + f''_{i-1}}{h^2} = \tfrac{f^{(4)}(\xi_i) + f^{(4)}(\zeta_i)}{2} = f^{(4)}(\eta'_i), \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

(19)- дан

$$\psi_i = 6(f_{\bar{x}x,i} - f_i'') - h^2 \cdot f_{\bar{x}x,i}'' = 6\left[f_i'' + \tfrac{1}{12} f^{(4)}(\eta_i) \cdot h^2 - f_i''\right] -$$
$$- h^2 f^{(4)}(\eta_i') = \tfrac{1}{2} f^{(4)}(\eta_i) h^2 - h^2 f^{(4)}(\eta_i), i = 1,2,..., N-1$$

келиб чиқади. Бундан i=1,2,...,N-1

$$|\psi_i| \le \tfrac{h^2}{2} \left|f^{(4)}(\eta_i)\right| + h^2 \left|f^{(4)}(\eta_i)\right| \le$$
$$\le \tfrac{h^2}{2} \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right| + h^2 \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right| = \tfrac{3}{2} M^4 h^2.$$

бунда $M_4 = \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right|$, келиб чиқади.

(18)- дан

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)4} = \tfrac{3}{4} M_4 \cdot h^2$$

эканлиги маълум бўлади.1- лемма исбот бўлди.

Энди 1-теоремани исбот қилишга ўтамиз. Энг аввал (14)- баҳони кўрсатамиз. $[x_{i-1},x_i]$ i=1,2,...,N кесмани қараймиз. Бу кесмада $f''(x) - S''(x)$га шундай биринчи даражали $P_1(x)$ кўпҳадни қўшиб айирамизки, $S''(x) - P_1(x)$ биринчи даражали кўпхад f''(x) ни x_{i-1} ва x_i нуқталарда интерполяцияласин.

Унда қуйидагига эга бўламиз:

$$\left|f''(x) - S_h''(x) + P_1(x) - P_1(x)\right| \le \left|f''(x) - S_h''(x) + P_1(x)\right| + \left|P_1(x)\right|. \qquad (20)$$

´нг томондаги ҳадларни алоҳида – алоҳида баҳолаймиз. $S''_h(x) - P_1(x)$ биринчи даражали кўпхад f''(x) ни интерполяцияловчи эканлиги учун, интерполяция хатолигини баҳолаш формуласидан :

$$\left|f''(x) - S_h''(x) + P_1(x)\right| \le \tfrac{1}{2} \cdot \max_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} \cdot \left|f^{(4)}(\xi)\right| \cdot |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| \le$$
$$\le \tfrac{1}{2} \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right| \cdot \max_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} \cdot |x - x_{i-1}| \cdot |x - x_i| = \tfrac{1}{4} \cdot M_4 h^2 \qquad (21)$$

$$P_1(x) = \left(f''(x_{i-1}) - S''(x_{i-1})\right) \cdot \tfrac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + \left(f''(x_i) - S''(x_i)\right) \tfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

кўринишда бўлади.

Шунинг учун

$$|P_1(x)| \le \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} |P_1(x)| = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} \left\{\left|f''(x_{i-1}) - S_h''(x_{i-1})\right|, \left|f''(x_i) - S_h''(x_i)\right|\right\}.$$

Бундан леммага асосан

$$|P_1(x)| \le \tfrac{3}{4} \cdot M_4 h^2 \qquad (22)$$

баҳо ҳосил бўлади.

(20)- дан (21)- ва (22)- ларга асосан ихтиерий $x \in [x_{i-1},x_i]$ учун

$$\left|f''(x) - S_k''(x)\right| \le M_4 h^2 \qquad (23)$$

ҳосил бўлади. i=1,2,...,N ихтиерий бўлгани учун (14)- баҳо ўринли эканлиги келиб чиқади.

Энди (13)- баҳони ўринли эканлигини кўрсатамиз. $[x_{i-1},x_i]$ кесмада r(x)=f(x)–$S_h(x)$ функцияни қараймиз. $r(x_{i-1})=r(x_i)=0$ бўлгани учун шундай $x_{i-1} < \xi < x_i$ нуқта топиладики r'(ξ) = 0.

Шу сабабли

$$\left|r'(x)\right| = \left|r'(x) - r'(\xi)\right| = \left|r''(\xi)\cdot(x-\xi)\right| \le \left|r''(\xi)\right|\cdot h$$

бўлади. Шундай қилиб

$$\left|f'(x) - S_h'(x)\right| \le \left|f''(\xi) - S_h'(\xi)\right|\cdot h$$

бўлади.

Агар (14)- ни инобатга олсак

$$\left|f'(x) - S_h'(x)\right| \le M_4 \cdot h^3$$

бундан (13)- келиб чиқади.

(12)- баҳони исбот қилиш керак.

$$g(t) = f(t)S_h(x) - K(t-x_{i-1})\cdot(t-x_i) \qquad (24)$$

К доимий сон, x $\in$ [x_{i-1},x_i] , К ни g(x) = 0 шартдан аниқлаймиз, яъни

$$K = \frac{f(x) - S_h(x)}{(x-x_{i-1})(x-x_i)}$$

g(x)=g(x_{i-1})=g(x_i)=0 га эгамиз. Шунинг учун $\xi \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ топиладики

$$g''(x) = 0$$

$$g''(t) = f''(t) - S_h''(t) - 2K$$

бўлгани учун

$$f''(\xi) - S_h''(\xi) = 2K$$

яъни

$$f(x) - S_h(x) = \tfrac{f''(\xi) - S_h''(\xi)}{2}\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)$$

бўлади.

Бундан ва (14)- дан

$$\left|f(x) - S_h(x)\right| \le \tfrac{1}{2}\left\|f''(x) - S_h''(x)\right\|_{C(\omega_h)} \cdot \tfrac{h^2}{4} \le \tfrac{M_4\cdot h^4}{8}$$

баҳо ҳосил бўлади.

Бундан (12)- баҳо келиб чиқади.

Таянч иборалар:

1. Сплайн.
2. Интерполяцион сплайн.
3. Кубик сплайн.
4. Яқинлашиш.

Текшириш учун саволлар:

1. Сплайн нима?
2. Кубик сплайн нима?
3. Интерполяцион сплайн нима?
4. Сплайн қуришни биласизми?
5. Интерполяцион сплайн яқинлашадими?
6. Интерполяцион кубик сплайн яқинлашиш тартиби нимага тенг?

Адабиётлар :

1. А.А. Самарский , А.В. Гулин , «Численные методы» . Ўқ. μўлланма, М . , Наука , 1989.
2. М.И.Исроилов, «ҳисоблаш методлари», Тошкент, Ўқитувчи, 1988 г.