

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI
NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

UDK:01 UM FT PP

Normurodova Xurshida

“Ko’p o’lchovli nochizig’iy to’lqin tenglamalar”

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Mutaxassislik: 5A 440101

Ilmiy rahbar:

prof. S.Imomkulov

Navoiy-2012

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI
NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

UDK:01 UM FT PP

Magistratura bo'limi
“Umumiy fizika” kafadrasi
Nurmurodova Xurshida Gadoyevna

“Ko'p o'lchovli nochizig'iy to'lqin tenglamalar” mavzusidagi
Magistirlilik dissertatsiyasi

DAKda himoya qilishga ruzsat
berilgan.

Magistratura bo'limi boshlig'i
f.f.n. B.Sh.Ashurov
Kafedra mudiri

Ilmiy rahbar prof.S.A.Imomkulov

f-m.f.n..A.M. Karimov

Navoiy-2012

MUNDARIJA

KIRISH.....	
1-§. Bir o`lchovli kristall panjaradagi tebranishlar.....	
2- §. Bir o`lchovli kristall panjaradagi uzluksiz to`lqin tenglamasi.....	
3- §. Kristall panjarada tarqiluvchi to`lqinlar.....	
4- §. To`lqinlarning fazoviy va guruh tezligi.....	
5- §. TO`LQIN TARQALISH USULI.....	
6- §. O`ZGARUVCHANLARNI AJRATISH USULI.....	
7-§. Ixtiyoriy tebranishni bo`ylanma to`lqin superpozitsiyasi shaklida tasvirlash.....	
8 - §. Bir jinsli bo`lmagan tenglama.....	
9- §. Birinchi umumiy chegaraviy masala.....	
10- §. Uch o`lchamli to`lqin tenglamasi.....	
Foydalanilgan adabiyotlar.....	

Kirish

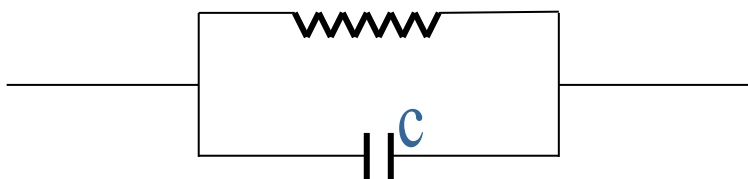
Mavzuning dolzarbligi. 1. Nochiziqli dinamika fani keng ma'noda nochizli sistemalarda sodir bo'luvchi tebranish (yoki tebranma) hamda to'lqinli jarayonlarni o'rganishdan iborat.

$$\dots \frac{\dot{}}{n-1} \sim \frac{\dot{}}{n} \sim \frac{\dot{}}{n+1} \dots$$

Agar sistemadagi harakatni ta'riflovchi dinamik tenglamalar (harakat tenglamasi) chiziqli bo'lsa, bunday sistemalar chiziqli fizikaviy sistemalar deyiladi.

Biror prujina vakuumda turgan bo'lsa. Guk qonuni prujinaning nisbiy o'zgarishi juda kichik bo'lganda o'rinli.

$$m\ddot{x} = -kx \quad - \quad \text{chiziqli sistema.}$$

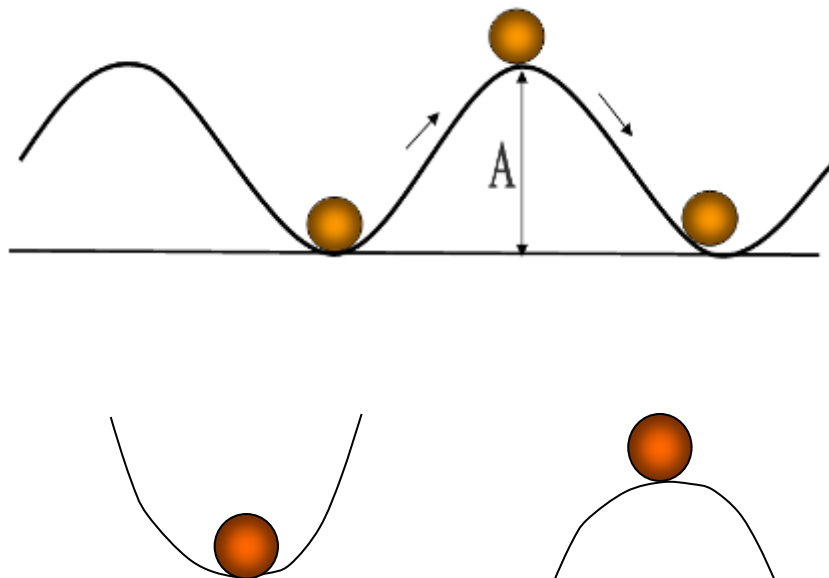


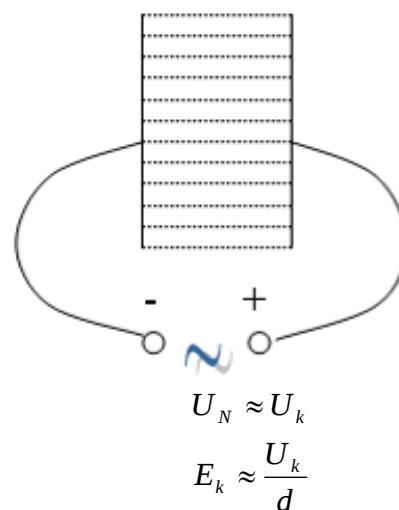
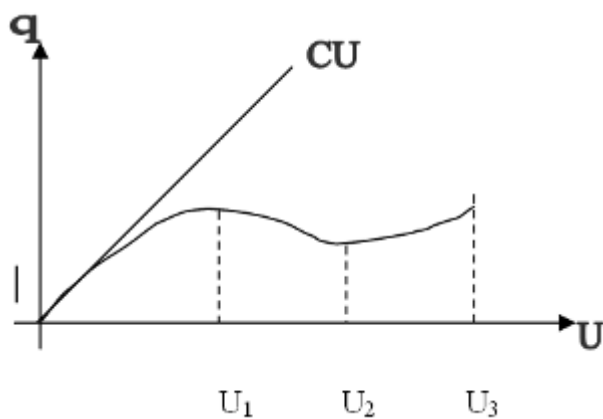
$$U_L = -U_C$$

$$L\dot{q} = -\frac{q}{C}$$

Ko'rinib turibdiki tebranishlarni hosil qiluvchi sabab bu sistemani tavsiflovchi kattaliklarga proporsional (yoki chiziqli bog'liq).

Lekin hayot faqat chiziqli hodisalardangina iborat emas. $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$





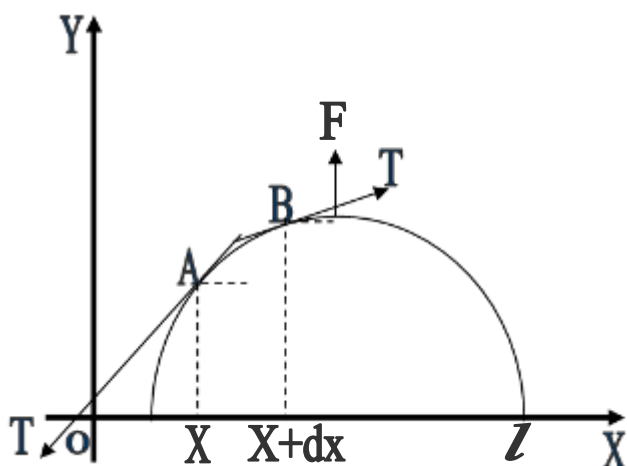
Masalan: zamonaviy telekommunikatsiya (aloqa tizimlari)da keng qo'llaniladigan uzatish tarmoqlari asosan nochizig'iy elementlar (kondensator, g'altak, rezistor)dan tarkib topgan bo'lib, ularning kattaliklari ular orqali o'tayotgan tok yoki uning kuchlanishiga bog'liq bo'ladi.

2. Endi tor tebranishi masalasini ko'rib chiqamiz. Daslab biz ikki uchi mahkamlangan tor tebranish jarayonining matematik modelini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik bizga $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda OX o'qi bo'yicha qattiq mahkamlangan og'irligi torning tarangligiga nisbatan e'tiborga olinmaydigan, OX absissa o'qida joylashgan tor berilgan bo'lsin. Tor deganda egishga qarshilik ko'rsatmaydigan, ammo cho'zishga qarshilik ko'rsatuvchi elastik un (ingichka sterjen) ni tushinamiz. Tor shunday qattiq jismki, uning uzunligi boshqa o'lchovlaridan anchagina ortiq. Torga ta'sir qilib turgan $T(x,t)$ taranglik kuchi yetarlicha katta deb faraz qilamiz. Shu sababli torning egilgandagi qarshiligini

tarangligiga nisbatan hisobga olmasa ham bo'ladi. Absissasi x bo'lgan $(\cdot)$ dagi taranglik kuchi, o'sha $(\cdot)$ dagi torning grafigiga urinma yo'nalishida bo'ladi.

Biz tor siljishi (XU) tekislikda yotuvchi va ta'sir kuchi OX o'qiga perpendikulyar bo'lgan ko'ndalang tebranishlarnigina qaraymiz. Bu yerda U



torning muvozanat holatidan siljishini ifodalaydi. $U=U(x,t)$ siljish x va t ning funksiyasidan iborat bo'ladi. Agar biz yetarlicha kichik tebranishni qarasak, u holda $U(x,t)$ va $U'(x,t)$ qiymatlar ham yetarlicha kichik bo'lib (U')ni hisobga olmasak ham bo'ladi.

Tor tebranishining matematik modelini tuzish uchun $U(x,t)$ funksiyaga nisbatan differensial tenglama keltirib chiqaramiz.

Torning cheksiz kichik bo'lagi $(x, x+dx)$ ni qaraylik. Uning boshlang'ich uzunligi dx bo'lib t tdagi uzunligi esa

$$AB = ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx$$

bo'ladi. Demak, kichik tebranishda torning bu bo'lagida cho'zilish bo'lmaydi.

U holda Guk qonuniga binoan taranglik kuchi t tga bog'liq emas, ya'ni

$$T(x,t) = T(x).$$

Torning $(x, x+dx)$ bo'lagiga ta'sir etuvchi kuchlarni OX o'qiga proyeksiyalab, dalamber prinsipiga asosan $T(x+dx)\cos\alpha' - T(x)\cos\alpha = 0$

Tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $\cos\alpha' \approx \cos\alpha \approx 1$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda $T(x+dx) \approx T(x)$ ya'ni T taranglik kuchining x ga bog'liq emasligi ko'rib chiqildi.

Demak, $T(x,t) \equiv T$.

Faraz qilaylik Torning T taranglik kuchidan tashqari yana yo'nalishi OU o'qqa parallel $F(x,t)$ tashqi kuch ta'sir qilsin. Torning $(x, x+dx)$ bo'lagiga ta'sir etuvchi kuchlarni OU o'qiga proyeksiysini topamiz:

$$T \sin \alpha' - T \sin \alpha + F(x,t)dx$$

Bu yerda α va α' mos ravishda tayinlangan t uchun AB egri chiziqlarning $(x, u(x,t))$ va $(x+dx, u(x+dx,t))$ nuqtalariga o'tkazilgan urinmalarini OX o'qi bilan tashkil etadigan burchaklaridir.

Nyutonning α - qonuniga asosan bu kuch o'z navbatida AB tor bo'lagining massasi bilan tezlanish ko'paytmasiga teng bo'lishi lozim. Agar $p(x)$ torning

chiziqli zichligi bo'lsa u holda tor AB bo'lagining massasi ρdx ga teng bo'ladi.

Tezlanish $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ga teng bo'lishi ravshan.

Bundan $T \sin \alpha' - T \sin \alpha + F(x, t)dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, tenglama ko'chiriladi.

$$\text{Endi, ushbu } \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sin \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\partial u}{\partial x} \quad x + dx$$

tengliklardan foydalanib, yuqoridagi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$T \left[\frac{\partial u}{\partial x_{x+dx}} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(x, t)dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

Bu tenglikning chap tomonidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x},$$

Ifodaga chekli orttirmas haqidagi Lagranj tenglamasini qo'llab,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x + dx, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad \text{tenglik topamiz. Bundan foydalanib,}$$

oxirgi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Bu esa tor kichik ko'ndalang tebranishlarining tenglamasidir. Bu yerda $\rho(x) > 0$ va $T = \text{const}$. Yuqoridagi tenglamani ushbu

$$P^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda

$$P^2(x) = \frac{\rho(x)}{T}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{T}.$$

Torga ta'sir qilayotgan tashqi kuch $F(x, t) = 0$ bo'lsa, torning erkin tebranish Tenglamasi

$$P^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

kelib chiqadi. Biz kuzatayotgan torning 2 uchi qattiq mahkamlangan bo'lgani uchun $x=0$ va $x=l$ nuqtalarda chegaraviy shartlar

$$U(x, 0) = \alpha(x), \quad u(\ell, t) = 0 \quad (3)$$

ko`rinishda bo`ladi. Bundan tashqari tor tebranish jarayonini 1 qiymatli ifodalash uchun qo`shimcha  $U$  siljish va  $U_t$  tezlikning boshlang`ich t dagi qiymatlarini berish zarur:

$$u(x, 0) = d(x), \quad U_t(x, 0) = b(x). \quad (4)$$

Endi (2) tenglama yechimini o`zgaruvchilarini ajratish yo`li bilan qidiramiz:

$$U(x, t) = \varphi(x)\Psi(t) \quad (5)$$

Bu tenglikning o`ng tomonini (2) tenglamadagi  $U(x, t)$  funksiyaning o`rniga qo`yib, $P^2(x)\varphi(x)\Psi''(t) = \varphi''(x)\Psi(t)$ tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni

$$\frac{\varphi''(x)}{P^2(x)\varphi(x)} = \frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)} \quad (6)$$

Ko`rinishda yozish mumkin. Bundan  $\frac{\varphi''(x)}{P^2(x)\varphi(x)}$  va  $\frac{\Psi''(t)}{\Psi(t)}$  miqdorlarning 1-si  $t$  ga, 2-si esa  $x$  ga bog`liq emas, ya`ni ular o`zgarmas ekanligi ko`chiriladi. Bu o`zgarmasni $-\lambda$ orqali belgilab olamiz. U holda (6) tenglikdan

$$\varphi''(x) + \lambda P^2(x)\varphi(x) = 0 \quad (7)$$

$$\psi''(t) + \lambda \psi(t) = 0 \quad (8)$$

tenglamalarni topamiz. Shunday qilib (2) tenglama 2 ta tenglamaga ajraldi. Bulardan 1 ni faqat x ga bog`liq, 2-esa faqat  $t$  ga bog`liq funksiyaning o`z ichiga oladi. (8) tenglamani yechish oson:

$$\psi(t) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}t + C_2 \sin \sqrt{\lambda}t. \quad (9)$$

(9) tenglikda qatnashayotgan $\cos \sqrt{\lambda}t$ va $\sin \sqrt{\lambda}t$ funksiyalar davriy funksiyalar

bo`lgani uchun  $\psi(t)$  funksiya ham davriy bo`lib, $\tau_o = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ ($\lambda \neq 0$) son uning davri

bo`ladi. Shuning uchun $\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi}{\tau}$ da tor tebranish chastotasi deyiladi. (7) tenglama

Shturm –Liuvill turidagi tenglama bo`lib, u kanonik ko`rinishda emas. Endi (7)

$$\text{tenglamada o`zgaruvchilarni } y = \int_0^x \rho(\xi) d\xi, \quad v(y) = \sqrt{\rho}\varphi \quad (10)$$

$$\text{ko`rinishda almashtirib, } \frac{d^2 v}{dy^2} + [\lambda - q(y)]v = 0 \quad (11)$$

kanonik ko`rinishdagi Shturm –Liuivill tenglamasiga ega bo`ladi. Bu yerda $\rho(x)$ zichlik, taranglik kuchi bilan Shturm –Liuivill operatorining $q(x)$ potentsial funksiyasi o`rtasidagi bog`lanish

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d^2 \sqrt{\rho}}{dx^2}, \quad p(x) = \frac{\sqrt{\rho(x)}}{T} \quad (12)$$

Formula orqali aniqlanadi. (3) chegaraviy shartlardan va (5) hamda (10) tengliklardan foydalanib, $v(0)=0$, $v(e)=0$ tenglikni topamiz. (11), (13) chegaraviy masalaga kanonik ko`rinishdagi Shturm –Liuivill chegaraviy masalasi deyiladi. (11), (13) Shturm –Liuivill operatori to`g`ri masalasi deganda biz, uning cheksiz ko`p $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ xos qiymatlarining mavjudligi va unga mos $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ xos funksiyalarining $L^2(0, \ell)$ fazoda to`laligini ko`rsatishdan iborat deb tushunamiz. Agar torning xossalari, ya`ni  $p(k)$  zichligi va  $T$  taranglik kuchi ma`lum bo`lsa, u holda  $\{\varphi_n, \lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  juftliklar ma`lum bo`ladi va t vaqt uchun torning holatini

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) (C_{1,n} \cos \sqrt{\lambda_n} t + C_{2,n} \sin \sqrt{\lambda_n} t)$$

formula orqali topish mumkin.

3. Kvant fizikasining Shredinger tenglamasi: Quyidagi tenglama

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_p(x, y, z) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

kvant fizikasining asosiy tenglamasi bo`lib, bu tenglamaga Shredinger tenglamasi deyiladi. Bu yerda  $\psi = \psi(x, y, z, t)$  - zarracha harakatini tavsiflovchi funksiya bo`lib, unga to`lqin funksiyasi deyiladi.  $\hbar = 2\pi\hbar$  -Plank doimiysi,  $m$ -zarracha mos soni,  $E_p(x, y, z)$  potentsial energiya. Agar bu tenglamaning quyidagicha ko`rinishdagi

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{\frac{-iEt}{\hbar}},$$

yechimini izlasak, ushbu $-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_p(x, y, z) \psi = E \psi$, tenglamaga

kelamiz. Bu yerda E o`zgarmas bo`lib, u to`liq energiyani bildiradi. Bu tenglama Shredingerning statstionar (t ga bog`liq bo`lmagan) tenglamasi deyiladi.  $E_p(x, y, z)$  va  $\psi(x, y, z)$  funksiyalar faqat  $x$  o`zgaruvchiga bog`liq bo`lsa u holda ushbu

$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_p(x)\psi(x) = E\psi(x),$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama esa,

Shtirm-Liuvill tenglamasida keltirilishi ravshan. Shuning uchun Shtirm-Liuvill tenglamasi ayrim adabiyotlarda Shredinger tenglamasi deb yuritiladi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa qilib aytish mumkinki ushbu magistrlik dissertatsiya ishiga qo'yilgan mavzu zamonaviy dolzarb mavzudir.

Dissertasiyaning maqsadi. Dissertatsiyaning asosiy maqsadi tabiatda uchraydigan har xil to'liqlarni matematik nuqtainazardan o'rganish va ularni bir xil matematik modelga ega ekanliklarini asoslab berish.

Tadqiqot usullari. Dissertsiyada matematik fizika usullaridan foydalanildi.

Chop etilgan maqolalar. Muallif tomonidan jami 3 ta ilmiy-uslubiy maqola e'lon qilingan. Shundan bittasi bevosita dissertatsiya mavzusiga oid.

Dissertasiyaning tuzilishi. Dissertasiya kirish qismi va o'nta paragrafdan iborat. Umumiy betlar soni 60 ta.

1-§. Bir o`lchovli kristall panjaradagi tebranishlar

Kristall panjara deb – eng sodda holda bir – biridan teng uzoqlikda joylashgan o`zaro ta`sirlashuvchi moddiy nuqtalar yoki atomlar majmuasiga aytiladi.

Bundan ham soda qilib aytadigan bo`lsak, bir o`lchovli kristall panjarani o`zaro bog`langan prujinali mayatniklar sistemasi sifatida qarash mumkin.

1 o`lchovli kristall panjaraning sxematik ko`rinishi.

Bu yerda n – kristall panjaradan atomlarning tartib raqami.

Bunda k – kristall panjarani tashkil qiluvchi zarralar orasidagi o`zaro ta`sirni tavsiflovchi effektiv bikrluk koeffitsiyentini bildiradi.

Bunda m – kristall panjaradagi atomlar massalari.

Biz masalani soddalashtirish uchun dastlab bir xil atomlardan tarkib topgan eng soda bir o`lchovli kristall panjarada tarqaluvchi tebranishlarni o`rganamiz.

Agar bu kristall panjaradagi xoxlagan zarrachani tebratadigan bo`lsak, zarralar orasidagi o`zaro ta`sir oqibatida bu tebranish t o`tishi bilan butun krisstal panjara bo`ylab tarqaladi.

Demak, to`lqin jarayon jamoaviy tebranma harakatdan iborat (misol-tor).

Nyutonning II qonuniga ko`ra bu krisstal panjaradagi ixtiyoriy atomning harakat tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$m\ddot{a}_n = \vec{F}_n \quad (1)$$

Bu yerda a_n - n – atomning tezlanishi, F_n - n – zarrachaga qolgan barcha zarrachalar tomonidan ta`sir qiluvchi natijaviy kuch.

$$\text{№8 } n=1,2,3$$

$$ma_1 = F_{12} + F_{13}$$

$$ma_2 = F_{21} + F_{23}$$

$$ma_3 = F_{31} + F_{32}$$

Bu harakat tenglamasidagi eng asosiy muammo natijaviy F_n kuchni aniqlashdan iborat. Bunga sabab shuki, Kristal panjara tashkil qiluvchi zarralar orasidagi o'zaro ta'sir umumiy holda o'ta murakkab ko'rinishda ifodalanadi. Ya'ni o'zaro ta'sir potentsiali bu kristal panjarani tashkil qiluvchi atomlar orasidagi o'zaro ta'sir tabiati bilan aniqlanadi.

Ammo bizga ma'lumki, fizikaviy nuqtai nazardan zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchi masofa ortishi bilan zaiflashib boradi. Shuning uchun ham n -zarracha uchun yozilgan (1) - harakat tenglamasida bu zarracha eng yaqin zarralarning ta'sirini inobatga olish mumkin.

$$ma_n = F_{n,n-1} + F_{n,n+1}, \quad n=1,2,\dots,N \quad (2)$$

Eslatma. $n=1$ bo'lsa chap qo'shnili bo'lmaydi. $n=N$ bo'lsa- o'ng qo'shnisi bo'lmaydi. Eng sodd holda yonma-yon joylashgan 2 ta zarracha k -effektiv bikrlikka ega prujinalar orqali bog'langan deb qarash mumkin.

$$\begin{aligned} F &= -k\Delta x \\ k &= 20\varphi. \quad \text{bikr. koef.} \\ \Delta' &= x_{n+1} - x_n \\ \Delta'' &= x_n - x_{n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Guk qonuni Δ -zarrachalarning siljishlarining farqi (zarralar koordinatalarning ayirmasi).

Demak, bu holda (2) holat tenglamasini qo'yiladi.

Eng sodda ko'rinish yozish mumkin.

$$m\ddot{x}_n = -k(x_{n+1} - x_n) + k(x_n - x_{n-1})$$

Oxirgi ifodani qo'y.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= -k(x_{n+1} - x_n - x_n + x_{n-1}) \\ (m\ddot{x}_n &= -k(x_{n+1} - x_{n-1})) \\ m\ddot{x}_n &= -k[x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}] \end{aligned} \quad (4)$$

Natija demak kristall panjarani tashkil qiluvchi zarrachalar orasidagi o'zaro ta'sir (3) – Guk qonuniga bo'ysinsa, bu panjaradagi ixtiyoriy atomning tebranishi (4) tenglama bilan tavsiflanadi.

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} & n &= 1, 2, 3 \\
m\ddot{x}_1 &= -k[x_2 - 2x_1] \\
m\ddot{x}_2 &= -k[x_3 + x_1 - 2x_2] \\
m\ddot{x}_3 &= -k[x_2 - 2x_3] \\
m\ddot{x}_n &= -k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)
\end{aligned} \tag{5}$$

(1) harakat tenglamasidan foydalanib bu panjarada tarqaluvchi to'lqinlardan doiraviy ν ni aniqlaymiz.

Buning uchun avvalgidek (1)ning chiziqli ekanligidan foydalanamiz.

$$\text{Ya'ni } x_n = A e^{i(S \cdot x_n - \omega t)} \equiv A e^{i\varphi_n} \tag{6}$$

Bu yerda A n -chi atom tebranishlarining to'lqin amplitudasi φ_n n -chi tartibli atom tebranishlariga mos keluvchi to'lqin fazasi φ_n - bo'lib, quyidagiday yoziladi.

$$\varphi_n \approx S \cdot x_n - \omega t \tag{7}$$

Ko'rinib turibdiki to'lqin fazasi zarraning koordinatasi x_n hamda t -vaqtga bog'liq bo'ladi. Bu yerda x_n - n chi atomning koordinatasi bo'lib, agar barcha atomlar orasidagi masofa

$X_n = n \cdot a$ Demak n chi atomning to'lqin fazasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\varphi_n = S \cdot na - \omega t \tag{8}$$

2- §. Bir o'lchovli kristall panjaradagi uzluksiz to'lqin tenglamasi

Oldingi darsdagi oxirgi natijamizga ko'ra bir o'lchovli kristal panjarada tarqaluvchi to'lqinlar uchun quyidagi difrentsion bog'lanish o'rinli bo'ladi.

$$\omega^2 \varphi \omega_o^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

ω -kristall panjaradagi to'lqin doiraviy chastotasi ω_o –panjaradagi atomlarning xususiy tebranish doiraviy chastotasi.

$$\Phi = S \cdot a \quad (2)$$

a - panjara atomlar orasidagi masofa.

S - to'lqin vektor proyeksiyasi.

(1) va (2) ~ qo'yidagicha yozamiz.

$$\varpi^2 = \varphi \omega_o^2 \sin^2 \left(\frac{Sa}{2} \right) = 2\varpi_o^2 [1 - \cos Sa] \quad (3)$$

(3) dan foydalanib 1 o'lchovli kristall panjarada tarqaluvchi to'lqinlar tenglamasidan ko'chirgan ravishda qiyin emas.

Buning uchun (3) ni xuddi avvalgidek qo'yidagicha ko'rinishda qayta yozamiz.

$$\begin{aligned} m\varpi^2 x &= 2k[1 - \cos(1a)] \cdot x \\ m\ddot{x} &= 2k[1 - \cos(Sa)] \cdot x \end{aligned} \quad (4)$$

(4) dan foydalanib bir o'lchovli kristall panjara tarqaluvchi umumiy ko'rinishdagi to'lqin tenglamani keltirib chiqaramiz. Buning uchun Eyler formulasidan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ell^{2\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \ell^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases} \\ \ell^{i\varphi} + \ell^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi \\ \cos \varphi = \frac{1}{2} [\ell^{i\varphi} + \ell^{-i\varphi}] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\ell^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n!} \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots \\
\cos \varphi &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i2\varphi^2}{2} + \dots \right] \equiv \frac{1}{2} \left[2 + 2 \sum \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} \right] \equiv \\
1 + \sum \frac{(i2)^n \cdot \varphi^{2n}}{2n!} &\equiv 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \varphi^{2n}}{2n!}
\end{aligned} \tag{6}$$

Demak

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= 2k[1 - \cos(Sa)]x \\
m\ddot{x} &= 2k \left[1 - \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (Sa)^{2n}}{(2n)!} \right) \cdot x \right] \\
m\ddot{x} &= 2k \left(- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot S^{2n} \cdot a^{2n}}{(2n)!} \right) x
\end{aligned} \tag{7}$$

1-hol. n=1 (a→0)

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{(-1)^2 \cdot S^2 a^2}{x} \cdot x; \\
m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{S^2 \cdot a^2}{x} \cdot x; & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{S^2 a^2}{m} \cdot x
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{S^2 a^2}{m} = 0 \tag{8}$$

$$S \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{a^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\hat{P} = \hbar \hat{S} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

$$f = \ell^{i\varphi} \equiv \ell^{i(Sx - \varphi t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = iSf$$

$$\left(iS - \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot f = 0; \quad S = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -k[x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n]$$

$$\varphi_{n+1} \equiv \varphi(x + a_1 t) \equiv \varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \cdot a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x} \lambda^2_t$$

$$\varphi_{n-1} \equiv \varphi(x + a_1 t) \equiv \varphi(x) - a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$m\ddot{\varphi} = -k \left[\varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \cdot a + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varphi(x) - a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \equiv 2\varphi_n \right] = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{ka^2}{m} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (9)$$

Shunday qilib biz kristall panjara tarqaluvchi umumiy ko`rinishdagi to`lqin tenglamasini keltirib chiqardik.

3- §. Kristall panjarada tarqiluvchi to`lqinlar

Avvalgi natijalarimizga ko`ra kristall panjarada tarqaluvchi to`lqinlar uchun qo`yidagi umumiy munosabatni hosil qilgan edik.

$$m\ddot{x} = 2k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n!} \cdot (Sa)^{2n} \right] \cdot x \quad (1)$$

Bu yerda m kristall panjaradagi atomlar massasi x -kristall panjaradagi atomning chetlashuvi.

x - kristall panjaradagi atomlarning o`zaro ta'sir doimiysi bilan aniqlanuvchi effikt bikrlilik koeffisienti. a -kristall panjaralar atomlar orasidagi masofa

$$S = 2\pi/\lambda$$

Bundan ko`rinib turibdiki, agar kristall panjarada tor quiluvchi to`lqin uzunligi atomlar orasidagi masofaga nisbatan juda ham katta bo`lsa, ya'ni uzun to`lqinlar holida (1)- tenglamani qo`yidagicha soddalashtirish mumkin.

$$m\ddot{x} = 2k \left[\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{(-1)}{2n} \cdot \left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda} \right)^4 \right] x \quad (2)$$

Xuddi avvalgidek

$$\ddot{x} = \omega^2 x \quad (3)$$

Ekanligini inobatga olsak ω -doiraviy v uchun quyidagi munosabatni hosil qilamiz.

$$-\omega^2 = 2k \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2n} \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^4 \right] \quad (4)$$

Endi oxirgi ifodada $k = -\alpha$ ekanligini inobatga olamiz.

$$\omega^2 = 2\alpha \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2n} \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^4 \right] \equiv 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2 \right];$$

$$\omega = \frac{2\pi_a}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{m} \left[1 - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2 \right]} \quad (5)$$

$$\omega = \omega_o - \frac{2\pi_a}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2} \quad (6)$$

$$m = 54 \cdot m_o \quad m_o = 1,67 \cdot 10^{-27} kg \quad \alpha = 5,4 \cdot 10^{-17} N / m$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{5,4 \cdot 10^{-17}}{54 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = \frac{1}{\sqrt{16,7}} \cdot 10^5$$

$$\omega_o = \frac{1}{4} \cdot 10^5 \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ Hz} \quad \omega_o \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$a\text{-atomlar orasidagi masofa} \quad 10^{-8}m \quad a=10^{-8}m \quad \eta_1=1m\mu m=10^{-6}m$$

$$\omega_1=?$$

$$\omega = \omega_o \frac{2\pi_a}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2\pi_a}{\lambda} \right)^2}$$

$$\frac{2\pi_a}{\lambda} = \frac{6,28 \cdot 10^{-8}m}{10^{-6}m} = 6,28 \cdot 10^{-2} = 39,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega = \omega_o \frac{2\pi_a}{\lambda} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$\omega = \omega_o (Sa) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{12} \cdot S^2 \cdot a^2}; \quad S = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{d\omega}{dS} = \nu \quad \text{guruhiy tezlik.}$$

$$\nu_t = \frac{\omega}{s} \quad \text{fazoviy tezlik.}$$

4- §. To`lqinlarning fazoviy va guruhliy tezligi

Oxirgi darsdagi natijamizga ko`ra uzun to`lqin yaqinlashuvida kristall panjarada tarqaluvchi to`lqinlarning doiraviy va si quyidagi ifoda bilan aniqlanadi.

$$\omega = \omega_{uy}(Sa) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{12} S^2 a^2} \quad S = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Bu yerda ω_0 -kristall panjaradagi atomlarning xususiy tebranishlar doiraviy va si.

S- to`lqin soni.

a-atomlar orasidagi masofa.

Bu ifodadan foydalanib dastlab bu kristall panjarada tor qiluvchi to`lqinlar fazasining tarqalish tezligi (fazaviy tezlik).

$$v_\phi - \frac{\omega}{S} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} \quad (2)$$

Bu yerda $v_0 = \omega_0 a$

v_0 –bu kristall panjarada tarqalishi mumkin bo`lgan to`lqin tezligining chegaraviy qiymati.

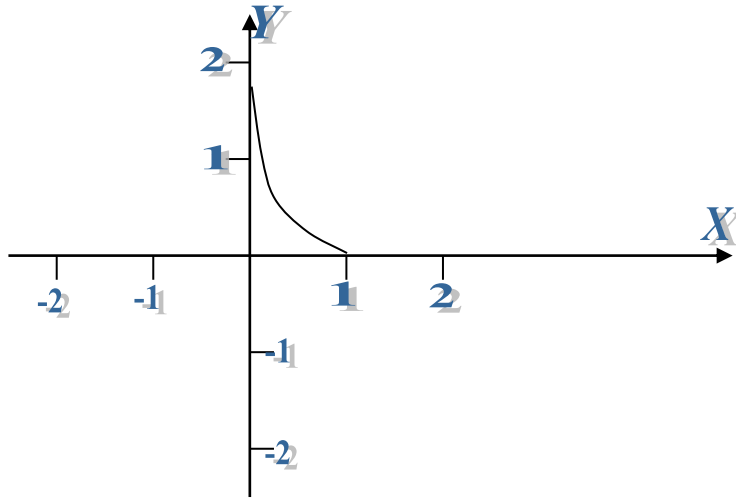
Endi to`lqinlarning guruhliy tezligini topamiz (to`lqin energiyasining tarqalish tezligi). $v_g = \frac{d\omega}{dS} = v_0 \cdot \frac{d}{dS}(\phi v)$;

$$\begin{aligned} v_2 &= S^1 \cdot \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} + \left(\sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} \right)^1 \cdot S = \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} + \frac{1}{2} \frac{S}{\sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} \\ \left(-\frac{a^2}{12} \cdot 2S \right) &= \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} + \left(-\frac{S^2 a^2}{12 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} \right) = \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}} - \frac{S^2 a^2}{12 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} = \frac{12 \left(1 - \frac{S^2 a^2}{12} \right) - S^2 a^2}{12 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} = \\ \frac{12 - S^2 a^2 - S^2 a^2}{12 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} &= \frac{12 - 2S^2 a^2}{12 \sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} = v_0 \frac{1 - \frac{1}{6} S^2 a^2}{\sqrt{1 - \frac{S^2 a^2}{12}}} \end{aligned} \quad (3)$$

Kurinib turibdiki $S=0$ bo`lganda guruhliy tezlik chegaraviy tezlikka teng edi.

$$\frac{S^2 a^2}{12} = x^2 \quad \frac{1}{6} S^2 a^2 = 2x^2 \quad \frac{v_g}{v_0} = y \quad y = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad 0 \leq x < 1$$

$$y=1 \quad y=0,35 \quad x=0 \quad x=0,6 \quad y = \frac{g_q}{g_o} \quad 2x^2=1 \quad y \equiv 0 \quad v_g=0$$



$$x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$$

$$x = \frac{Sa}{2\sqrt{3}} \quad \frac{Sa}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{6}}{a} \quad Sa < 2,4$$

Natija: Ko`rinib turibdiki to`lqin energiyasining tarqalish tezligi hech qachon v_0 chegaraviy tezlikdan katta bo`la olmaydi.

5- §. TO`LQIN TARQALISH USULI

1. Dalamber formulasi. To`lqin tenglamasi uchun chegaraviy masala yechimini qurish usullarini o`rganishni biz chegaralanmagan tor uchun boshlang`ich shartli masalani o`rganishdan boshlaymiz:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1)$$

tenglamaning

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bu tenglamani aralash hosila qatnashgan kanonik shaklga keltiramiz.

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

xarakteristik tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi.

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0.$$

Bu tenglamalarning integrallari.

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2$$

to`g`ri chiziqlardan iborat.

$$\xi = x + at \quad \eta = x - at$$

yangi o`zgaruvchilarni kiritib, torning tebranish tenglamasini quyidagi shaklga keltiramiz:

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad (3)$$

Oxirgi tenglamaning umumiy integralini topamiz. Ko`rinib turibdiki, (3) tenglamaning har qanday yechimi uchun

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

Bunda $f^*(\eta)$ qandaydir funksiya bo`lib, faqat  $\eta$  o`zgaruvchidan bog`liqdir. Bu tenglikni har bir fiksirlangan  $\xi$  uchun  $\eta$  bo`yicha integrallasak, quyidagini hosil qilamiz:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi), \quad (4)$$

bunda f_1 va f_2 funktsiyalar faqat ξ va η o`zgaruvchilarga bog`liq. Aksincha, agar f_1 va f_2 ikki marta differentsiallanuvchi bo`lgan ixtiyoriy funktsiyalar bo`lsa, u holda (4) formula bilan aniqlanadigan $u(\xi, \eta)$ funksiya (3) tenglamaning

yechimini ifoda qiladi. (3) tenglamaning har qanday yechimi (4) shaklda tasvirlanishi mumkin bo'lib, bu tenglamaning umumiy integralidan iboratdir. Shunga ko'ra,

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (5)$$

Funksiya (1) tenglamaning umumiy integrali bo'ladi.

Faraz qilaylik, qarayotgan masalaning yechimi mavjud bo'lsin. U holda bu yechim (5) formula orqali beriladi. f_1 va f_2 funksiyalarni boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib, aniqlaymiz:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (7)$$

Ikkinchi tenglikni integrallab,

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

tenglikni hosil qilamiz, bunda x_0 va C o'zgarmaslardir.

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

tengliklardan quyidagilarni topamiz:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Shunday qilib, biz f_1 va f_2 funksiyalarni φ va ψ berilgan funksiyalar orqali aniqladik, bundan tashqari, (8) tenglik argumentning ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi kerak. f_1 va f_2 funksiyalarning topilgan qiymatlarini (5) ga olib borib qo'ysak,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

yoki

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad (9)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formulani qo'yilgan masalaning yechimi mavjud deb hosil qildik va u D'alamber formulasi deb aytiladi. Bu formula yechimning yagonaligini isbotlaydi. Haqiqatdan ham, agar (1)-(2) masalaning ikkinchi yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu yechim ham (9) formula orqali tasvirlangan bo'ladi va birinchi yechim bilan ustma-ust tushgan bo'lur edi.

(9) formula (φ funksiya ikki marta differensiallanuvchi va ψ funksiya bir marta differensiallanuvchi bo'lishlik sharti bilan) tenglama va boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. Shunday qilib, keltirilgan metod qo'yilgan masalaning yechimi yagonaligini ham, va mavjudligini ham isbot etadi.

2. Bir jinsli bo'lmagan tenglama. Bir jinsli bo'lmagan tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$W(x, t; \tau)$ funksiya

$$\begin{aligned} W_{tt} &= a^2 W_{xx}, \\ -\infty < x < +\infty, \quad t > \tau \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} W(x, \tau; \tau) &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t}(x, \tau; \tau) &= f(x, \tau), \\ t = \tau, \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

yordamchi Koshi masalasining yechimi bo'lsin. Bu masalaning yechimi (9) D'alamber formulasiga ko'ra,

$$W(x, t; \tau) = W(x, t - \tau; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (14)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Quyidagi lemma o'rinli ekanligini isbot qilamiz :

Bir jinsli bo'lmagan (10) tenglamaning $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ nol boshlang'ich shartlarda yechimi

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (15)$$

shaklga ega bo'ladi.

(15) funksiyani differensiallab, va $W(x, t; \tau)$ funksiya uchun (12) shartdan

$$u_t(x, t) = W(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau, \quad (16)$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{\partial W}{\partial t}(x, t; t) + \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + f(x, t), \quad (17)$$

$$u_{xx}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau. \quad (18)$$

Tengliklarni hosil qilamiz. Bundan esa, (12) ga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz:

$$u_{tt}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + f(x, t) = \int_0^t a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau + f(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t).$$

(10)-(11) masalaning yechimini

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau \quad (19)$$

Shaklida tasvirlash mumkin. W uchun (14) ifodadan foydalanib,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (20)$$

formulani hosil qilamiz.

Agar $\varphi''(x), \psi'(x)$ va $\frac{\partial f}{\partial x}$ hosilalar mavjud bo'lsa, u holda to'g'ridan

to'g'ri (20) ni (10) ga qo'yish orqali haqiqatdan, ham (20) funksiya (10)-(11) masalaning yechimi bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Agar f funksiya x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $t=\tau$ uchun W funksiya tenglamani qanoatlantirishi (14) formuladan kelib chiqadi, yani (19) ifoda Koshi masalasining yechimi mavjud bo'lganda o'rinlidir.

3. Yechimning turg'unligi. (1) tenglamaning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bir qiymatli aniqlandi. Bu yechim boshlang'ich shartlar uzluksiz o'zgarganda uzluksiz o'zgarishini isbot qilamiz.

$[0, t_0]$ vaqt oralig'i qanday bo'lganda ham va ε aniqlik darajasi qanday bo'lganda ham, shunday bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ son topiladiki, agar faqat boshlang'ich qiymatlar

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) &= \psi_1(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} u_2(x, 0) &= \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) &= \psi_2(x) \end{aligned} \right\}$$

bir-biridan δ dan kichik farq qilsa, ya'ni

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$$

bo'lsa u holda (1) tenglamaning mos $u_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ yechimlari t_0 vaqt oralig'ida bir-biridan ε dan kichik farq qiladi, ya'ni $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ ($0 \leq t \leq t_0$) bo'ladi. Bu teoremaning isboti juda soddadir. $U_1(x, t)$ va $u_2(x, t)$ funksiyalar o'zining boshlang'ich qiymatlari orqali (9) formula bilan bog'langan bo'lganligi uchun

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \left| \frac{\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)}{2} \right| + \left| \frac{\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)}{2} \right| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha$$

Tengsizlik o'rinli ekanligidan

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \delta \cdot 2at \leq \delta(1 + t_0)$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}$ deb olsak, yuqoridagi tasdiqning isboti kelib chiqadi.

4. Yarim chegaralangan to'g'ri chiziqli va davom ettirish usuli.

To'liq tarqalishi haqidagi masalani $x \geq 0$ yarim chegaralangan to'g'ri chiziqli qaraymiz. Bu masala to'liq aksi jarayonini o'rganishda juda muhim qiymatga ega va quyidagicha qo'yiladi:

$$0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad \text{uchun} \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Tebranish tenglamasining

$$u(0,t) = \mu(t) \quad (\text{yoki } u_x(0,t) = \nu(t)) \quad t \geq 0$$

Chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi va

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x < \infty$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin.

Avval bir jinsli chegaraviy shart bo'lgan holni qaraymiz:

$$u(0,t) = 0 \quad (\text{yoki } u_x(0,t) = 0),$$

ya'ni $x=0$ (yoki chegarada erkin bo'lgan) chegarada tor mahkamlangan holda boshlang'ich qo'zg'alishning tarqalishi haqidagi masalani qaraymiz.

Quyida cheksiz to'g'ri chiziqliqda aniqlangan tebranish tenglamasi yechimining xossalari haqidagi ikkita lemmani keltiramiz:

1. Chegaralanmagan to'g'ri chiziqliqda tebranishning tarqalishi haqidagi masalada ((1)-(2) masala) berilgan boshlang'ichlar biror x_0 nuqtaga nisbatan tok funksiyalar bo'lsa, u holda mos yechim bu nuqtada nolga teng bo'ladi.

2. Chegaralanmagan to'g'ri chiziqliqda tebranishning tarqalishi haqidagi masalada ((1)-(2) masala) berilgan boshlang'ichlar biror x_0 nuqtaga nisbatan tok funksiyalar bo'lsa, u holda mos yechim x bo'yicha hosilasi bu nuqtada nolga teng bo'ladi.

1- lemmani isbot qilamiz. x_0 nuqtani koordinata boshi deb qabul qilamiz. Bu holda berilgan boshlang'ichlarning tok funksiya bo'lishlik sharti

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x)$$

Shaklida yoziladi. (9) formula bilan aniqlanadigan $u(x,t)$ funksiya $x=0$ va $t>0$ uchun

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha) d\alpha = 0$$

Nolga teng, chunki birinchi qo'shiluvchi $\varphi(x)$ toq ekanligidan nolga teng, ikkinchi qo'shiluvchi esa, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan oraliq bo'yicha toq funksiyadan olingan integral nolga tengdir.

Xuddi shunga o`xshash 2 lemmani isbot qilamiz. Berilgan boshlang`ichlarning juft funksiya bo`lishlik sharti

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x)$$

shaklida bo`ladi. Juft funksiyaning hosilasi toq funksiya ekanligini eslasak,

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x)$$

bo`ladi.

(9) formuladan quyidagi hosil qilamiz:

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0, t > 0,$$

chunki birinchi qo`shiluvchi  $\varphi'(x)$  to` ekanligidan nolga teng, ikkinchi qo`shiluvchi esa, $\psi(x)$ juft ekanligidan nolga tengdir.

Bu ikkita lemma yordamida quyidagi masalalarni yechish mumkin:

(1) tenglamaning

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\}, \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

boshlang`ich shartlarni va

$u(0,t)=0, \quad t>0$ (birinchi chegaraviy masala) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin.

(2) shartda qatnashgan $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning toq funksiya sifatidagi $\Phi(x)$ va $\Psi(x)$ davomini qaraymiz:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \text{ uchun} \\ -\varphi(-x), & x < 0 \text{ uchun} \end{cases},$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \text{ uchun} \\ -\psi(-x), & x < 0 \text{ uchun.} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

Funksiya barcha x va $t > 0$ uchun aniqlangan. Birinchi lemmaga ko'ra, $u(0,t)=0$ bo'ladi. Bundan tashqari, bu funksiya $t=0$ va $x > 0$ uchun quyidagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi:

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad x > 0.$$

Shunday qilib hosil qilingan $u(x,t)$ funksiya $x \geq 0$, $t \geq 0$ uchun qo'yilgan masalaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Oldingi funksiyalarga qaytib, quyidagini yozish mumkin:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\ \quad t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun} \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\ \quad t > \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun.} \end{cases} \quad (3)$$

$t < \frac{x}{a}$ sohada chegaraviy shartning ta'siri sezilmaydi va $u(x,t)$ uchun ifoda cheksiz to'g'ri chiziq uchun (9) yechim bilan ustma-ust tushadi.

Xuddi shunga o'xshash, agar $x=0$ uchun chegara erkin, ya'ni $u_x(0,t)=0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \text{ uchun} \\ \varphi(-x), & x < 0 \text{ uchun} \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \text{ uchun} \\ \psi(-x), & x < 0 \text{ uchun} \end{cases}$$

juft funksiya sifatidagi davomini qarasak,

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

yoki

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\ t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun} \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\}, \\ t > \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun.} \end{cases}$$

$x \geq 0$ sohada tebranish tenglamasining (2) boshlang'ich shartni va $u_x(0,t)=0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz hosil qilingan natijalarni quyidagi ikkita qoida shaklida ifodalaymiz:

Yarim chegaralangan to'g'ri chiziqda $u(0,t)=0$ chegaraviy shart bilan berilgan masalani yechish uchun berilgan boshlang'ichlarni butun to'g'ri chiziqqa toq davom ettirish kerak.

Yarim chegaralangan to'g'ri chiziqda $u_x(0,t)=0$ chegaraviy shart bilan berilgan masalani yechish uchun berilgan boshlang'ichlarni butun to'g'ri chiziqqa juft davom ettirish kerak.

Biz $u(0,t)=\mu(t)=0$ yoki $u_x(0,t)=\gamma(t)=0$ bir jinsli chegaraviy shartli masalani qaradik. Umuman, bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shartda yechim yig'indi shaklida tasvirlanib, har bir qo'shiluvchi qo'yilgan shartlardan faqat bittasini (yoki chegara shartini, yoki boshlang'ich shartini) qanoatlantiradi.

Endi nol boshlang'ich shartini va berilgan

$$\tilde{u}(x,0)=0, \quad \tilde{u}_t(x,0)=0, \quad \tilde{u}(0,t)=\mu(t), \quad t > 0$$

Chegara shartini qanoatlantiruvchi yechimni izlaymiz.

Osongina ko'rish mumkinki, chegaraviy rejim torning o'ng tomoniga qarab yo'nalgan a tezlikdagi to'lqinni paydo qiladi va bu quyidagi shakldagi analitik yechim ekanligini ko'rsatadi:

$$\tilde{u}(x,t) = f(x-at).$$

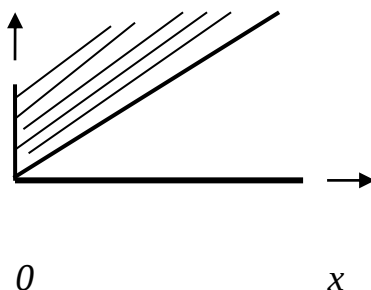
Chegaraviy shartdan f funksiyani aniqlaymiz:

$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t).$$

Bundan esa, $f(z) = \mu(-\frac{z}{a})$, shuning uchun,

$$\tilde{u}(x,t) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Biroq, bu funksiya $x-at \leq 0$ sohadagina aniqlangan, chunki $\mu(t)$ funksiya $t \geq 0$ uchun aniqlangandir. Chizmada bu soha tekislikdagi shtrixlangan qismni ifoda



qiladi:

Argumentning barcha qiymatlari uchun $\tilde{u}(x,t)$ funksiyaning topish uchun $\mu(t)$ funksiyaning t ning manfiy qiymatlari $t < 0$ uchun $\mu(t) = 0$ deb olamiz. U holda,

$$\tilde{u}(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Funksiya argumentning barcha qiymatlari uchun aniqlangan bo'ladi va nol boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Bu funksiya va (21) shakldagi funksiya yig'indisi bir jinsli tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimini ifoda qiladi. Yarim chegaralangan tor uchun

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\ t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha, \\ t > \frac{x}{a}, \quad x > 0 \text{ uchun.} \end{cases} \quad (22)$$

hosil bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash ikkinchi chegaraviy masalaning yechimini ko'rish mumkin.

5. Chegaralangan oraliq uchun masala. Chegaraviy masalani $(0,l)$ oraliq uchun qaraymiz:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

tenglamaning

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} t \geq 0$$

chegara shartlari va

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz. Avval bir jinsli chegaraviy shart, ya'ni $u(0,t)=u(l,t)=0$ bo'lgan holda qaraymiz. Bu holda masala yechimini quyidagicha tasvirlash mumkin deb, davom ettirish usuli bilan izlaymiz:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

bunda Φ va Ψ – funksiyalar aniqlanishi zarur. Boshlang'ich shartlarga ko'ra,

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l$$

bo'lgani uchun Φ va Ψ – funksiyalar $(0,l)$ intervalda aniqlanadi. Nol chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi uchun Φ va Ψ – funksiyalarga $x=0$, $x=l$ nuqtalarga nisbatan toq bo'lishlik shartini talab etamiz:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l-x), \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l-x). \end{aligned}$$

Bu tengliklarni moslab,

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

va shunga o'xshash Ψ – funksiya uchun

$$\Psi(x') = \Psi(x' + 2l)$$

Tengliklarga ega bo'lamiz, y'ni Φ va Ψ – funksiyalar $2l$ davrli davriy funksiyalar bo'ladi.

Osongina ko'rish mumkinki, koordinata boshiga nisbatan toq bo'lishlik sharti va davriylik sharti butun $-\infty < x < \infty$ to'g'ri chiziqqa $\Phi(x)$ va $\Psi(x)$ – davom ettirilgan funksiyalarni aniqlaydi. Ularni (9) formulaga qo'yib, masala yechimini hosil qilamiz.

Endi chegaraviy rejimning tarqalishi haqidagi masalani qaraymiz.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = 0$$

nol boshlang'ich shartlarni va

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= \mu(t), \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

chegara shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz. U holda $t < \frac{l}{a}$ uchun

yechim

$$u(x,t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{bunda} \quad \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t < 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{uchun} \\ \text{uchun} \end{matrix}$$

yechimdan iborat bo'ladi. Biroq, bu funksiya

$$t > \frac{l}{a} \quad \text{uchun} \quad u(l,t) = 0$$

chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi. Chapga yo'nalgan va $x=l$ uchun chetlanishi

$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$ ga teng bo'lgan "aks ettirilgan" to'lqinni qaraymiz. Uning analitik ifodasi

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{j-x}{a}\right) = \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

formula orqali beriladi. Osongina ko'rish mumkinki,

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

Ikkita to'lqin ayirmasi $t < \frac{2l}{a}$ uchun tenglama yechimi bo'ladi.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right) \quad (23)$$

qator shaklidagi yechimni hosil qilamiz, bu qator (har bir tayinlangan t uchun)

faqat chekli sondagi noldan farqli hadlarga ega bo'lib, har bir yangi aks ettirishda

argument $\frac{2l}{a}$ ga kamayadi, funksiya esa, $t < 0$ uchun $\bar{\mu}(t) = 0$ bo'ladi. Chegaraviy

shartlarning bajarilishi bevosita tekshiriladi. Haqiqatdan ham, $x=0$ deb olsak va

birinchi yig'indida $n=0$ uchun $\mu(t)$ ga teng bo'lgan qo'shiluvchini alohida

ajratamiz. Birinchi va ikkinchi yig`indidagi qolgan qo`shiluvchilar n - ning bir xil qiymatlarida o`zaro yo`qoladi; bu esa, $u(0,t)=\mu(t)$ ekanligini ko`rsatadi.

n -ni $n-1$ bilan almashtirib va shu bilan jamlash chegaralarini o`zgartirib, birinchi yig`indini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a} \right)$$

shaklga almashtiramiz. Endi $x=l$ deb olsak, yig`indidagi birinchi va ikkinchi qo`shiluvchilar bevosita o`zaro yo`qolishiga ishonch hosil qilamiz.

Boshlang`ich shartlar ham, bevosita tekshiriladi, chunki  $t=0$  uchun barcha funksiyalarning argumentlari manfiy va (23) ifoda  $t=0$  uchun nolga teng bo`ladi.

Xuddi shunga o`xshash,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

Funksiya $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$ nol boshlang`ich shartli va $u(0,t)=0$, $u(l,t)=\mu(t)$ chegaraviy shartli bir jinsli tenglamaning yechimini beradi.

6- §. O`ZGARUVCHANLARNI AJRATISH USULI

1. Torning erkin tebranish tenglamasi. O`zgaruvchilarni ajratish usuli yoki Fure metodi xususiy hosilani tenglamalarni yechishning eng ko`p ratqalgan usullaridan biridir. Bu usulning qo`llanilishini chekkalari mahkamlangan torning tebranishi haqidagi masala uchun keltiramiz. Shunday qilib,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

tenglamaning

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni va

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz. (1) tenglama chiziqli va bir jinsli bo`lganligi uchun bu tenglamaning xususiy yechimlari yig`indisi ham uning yechimi bo`ladi. Yetarlicha ko`p sondagi xususiy yechimlarga ega bo`lgandan izlanayotgan yechimni ayrim koeffitsiyentlar bilan jamlash yordamida hosil qilishga harakat qilish mumkin.

Quyidagi asosiy yordamchi masalani qaraymiz :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

tenglamaning aynan noldan farqli bo`lib,

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (5)$$

ko`paytma shaklida tasvirlanuvchi yechimini toppish talab etilsin, bunda  $X(x)$ -faqat  $x$  o`zgaruvchining funksiyasi, $T(t)$ - esa faqat t o`zgaruvchining funksiyasidir.

(5) ko`rinishdagi yechimni (1) tenglamaga qo`yamiz:

$$X'' \cdot T = \frac{1}{a^2} X \cdot T''$$

yoki XT ga bo'lish natijasida

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. (5) ko'rinishdagi funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun (6) tenglik ayniyatdan iborat bo'lishi kerak, ya'ni $0 < x < l$, $t > 0$ erkli o'zgaruvchilarning barcha qiymatlari uchun o'rinli bo'lishi kerak bo'ladi. (6) tenglikning o'ng qismi faqat t o'zgaruvchiga, chap qismi esa, faqat x o'zgaruvchiga bog'liq. Masalan, x o'zgaruvchining ayrim qiymatini tanlab va t o'zgaruvchini o'zgartirib (yoki aksincha), (6) Tenglikning o'ng va chap qismi shu argumentning o'zgarishida o'zgarmas qiymatni saqlaydi:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''}{T} = \lambda, \quad (7)$$

bunda λ – o'zgarmas bo'lib, uning ishorasi haqida hech qanday talab qo'ymagan holda, keyingi hisoblar qulay bo'lishi uchun minus ishora bilan olamiz.

(7) munosabatdan $X(x)$ va $T(t)$ funksiyalarni aniqlash uchun

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (8)$$

$$T''(x) + a^2 \lambda T(x) = 0, \quad T(x) \neq 0 \quad (9)$$

oldin differentsial tenglamalarni xosil qilamiz.

(4) che garaviy shartlardan

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0) \cdot T(t) = 0, \\ u(l, t) &= X(l) \cdot T(t) = 0 \end{aligned}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa, $X(x)$ funksiya

$$X(0) = X(l) = 0 \quad (10)$$

qo'shimcha shartni qanoatlantirishi kelib chiqadi, aks holda $T(t) \equiv 0$ va $u(x, t) \equiv 0$ bo'lgan bo'lur edi. $T(t)$ funksiya uchun asosiy yordamchi masalada hech qanday qo'shimcha shart yo'q.

Shunday qilib, $X(x)$ funksiyani aniqlash uchun xos qiymat haqidagi eng soddalashtirilgan masalani hosil qilamiz:

λ parametrning shunday qiymatlarini va shu yechimni topish kerakki, bunda

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & X(x) &\neq 0, \\ X(0) &= X(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

masala trivial bo'lmagan yechimiga ega bo'lsin. Bunday λ parametrning qiymatlariga xos qiymat deb, unga mos trivial bo'lmagan yechimiga ega, (11) masalaning xos funksiyasi deb aytiladi. Bu keltirilgan xos qiymat va xos funksiya masalasi Shturm-Liuvill masalasi deb ham aytiladi. λ parametrning manfiy, nol va musbat bo'lgan hollarini alohida qarab chiqamiz.

1). $\lambda < 0$ bo'lsin. U holda xos qiymat va xos funksiya masalasi trivial bo'lmagan yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, (8) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_0 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlarga ko'ra,

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) &= C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad \left(\alpha = l\sqrt{-\lambda} \right), \end{aligned}$$

ya'ni

$$C_2 = -C_1 \quad \text{va} \quad C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$$

bo'ladi. Lekin qaralayotgan holda, α – haqiqiy va musbat bo'lgani uchun

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$$

bo'ladi. Shuning uchun $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

va shunga ko`ra,

$$X(x) \equiv 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

2). $\lambda=0$ bo`lsin. Bu holda ham, xos qiymat va xos funksiya masalasining trivial bo`lmagan yechimi mavjud emas. Haqiqatdan ham, bu holda (8) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

ko`rinishda bo`ladi. Chegaraviy shartlarga ko`ra,

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

ya'ni

$$C_1 = 0 \quad \text{va} \quad C_2 = 0$$

va shunga ko`ra,

$$X(x) \equiv 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

3). $\lambda > 0$ bo`lsin. U holda (8) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

shaklida yoziladi. Chegaraviy shartlarga ko`ra,

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

bo`ladi. Agar

$$X(x) \neq 0$$

bo`lsa, u holda $D_2 \neq 0$, shuning uchun

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

yoki

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}, \quad \text{bunda } n=1,2,3,\dots$$

bo`ladi. Shunga ko`ra, (11) masalaning trivial bolmagan yechimi

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

qiymatdagina mumkindir. Bu xos qiymatga mos keluvchi xos funksiya

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

bunda D_n - ixtiyoriy o'zgarmasdir.

Demak, λ parametrning

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad (13)$$

qiymatida (11) masalaning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lib, ixtiyoriy o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida topilib, bu o'zgarmasni birga teng qilib olsak,

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (14)$$

hosil bo'ladi. Bu λ_n qiymatga mos, (9) tenglamaning yechimi

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda A_n va B_n – ixtiyoriy o'zgarmaslardir.

(1)-(3) masalaga qaytsak,

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

Funksiyalar (1) tenglamaning xususiy yechimlari bo'lib, (2) chegaraviy shartni qanoatlantiradi va (5) ko'rinishdagi ikkita funksiya ko'paytmasi shaklida tasvirlanib, bittasi faqat x ga, ikkinchisi esa, faqat t ga bog'liqdir. Bu yechimlar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ boshlang'ich funksiyalarning faqat xususiy hollari uchun boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishi mumkin.

Umumiy holda (1)-(3) masalaning yechimini qaraylik. (1) tenglamaning chiziqli va bir jinsli ekanligidan xususiy yechimlarning yig'indisi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

Ham shu tenglamani va (2) chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Boshlang'ich shart A_n va B_n o'zgarmaslarni aniqlashga imkon beradi. (17) funksiya (3) shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x,0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Fure qatorlari nazariyasidan ma'lumki, $0 \leq x \leq l$ oraliqda berilgan ixtiyoriy bo'lakli-uzluksiz va bo'lakli differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (19)$$

Fure qatoriga yoyiladi, bunda

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \quad (20)$$

Odatda $2l$ – davrli davriy

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

funksiya qaraladi, bunda $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$,

$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$. Agar $F(x)$ toq funksiya bo'lsa, u holda $a_n = 0$ bo'lib,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

bunda, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$

bo'ladi. Agar $F(x)$ funksiya faqat $(0,l)$ oraliqda berilgan bo'lsa, u holda biz uni toq funksiya qilib, $(-l,l)$ oraliqga davom ettiramiz, hamda (19) va (20) formulalarga ega bo'lamiz.

Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar Fure qatoriga yoyilish shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (22)$$

Bu qatorlarni (18)-formulalar bilan taqqoslash shuni ko'rsatadiki, boshlang'ich shart bajarilishi uchun

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi a} \psi_n \quad (23)$$

deb olish kerak va (17) funksiya to'liq aniqlanib, tadqiq etilayotgan masalaning yechimini aniqlaydi.

Biz yechimni (17) qator shaklida aniqladik. Agar (17) qator uzoqlashuvchi yoki bu qator aniqlaydigan funksiya differentsiyalanuvchi tenglamaning yechimini ifoda qilmaydi.

Hosil qilingan $u_n(x,t)$ yechimni quyidagi shaklda tasvirlash mumkin:

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (24)$$

bunda

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\arctg \frac{B_n}{A_n} \quad (25)$$

torning har bir x_0 nuqtasi $\alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0$ amplitude bilan

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a(t + \delta_n) \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

ko'rinishda garmonik tebranadi. Torning bu ko'rinishdagi harakati bo'ylanma to'lqin deb ataladi. $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$ bo'ladigan $x = m \frac{l}{n}$ ($m=1,2,\dots,n-1$) nuqtalar butun jarayon davomida qo'zg'almaydi va $u_n(x,t)$ bo'ylanma to'lqinning tugun nuqtasi deyiladi. $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$ bo'ladigan $x = \frac{2m+1}{2n} l$ ($m=0,1,2,\dots,n-1$) nuqtalarda α_n maksimal amplitude bilan tebranish ro'y beradi va bo'ylanma to'lqinning qaytishi deb aytiladi.

Vaqtning ixtiyoriy holatida bo`ylanma to`lqin

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

sinusoida shaklidagi ko`rinishga (profilga) ega bo`ladi, bunda

$$C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n(t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

$\cos \omega_n(t + \delta_n) = \pm 1$ bo`ladigan vaqtning  $t$  holatida cheklanish maksimal qiymatga erishadi va harakat tezligi nolga teng bo`ladi.

$\cos \omega_n(t + \delta_n) = 0$ bo`ladigan vaqtning t holatida chetlanish nolga teng va harakat tezligi maksimal qiymatga erishadi.

Torning barcha nuqtalari bir xil tebranish chastotasiga ega va

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \quad (26)$$

bo`ladi. ω_n – chastotalar tor tebranishining xususiy chastotalari deb ataladi. Torning

ko`ndalang tebranishi uchun  $a^2 = \frac{T}{\rho}$  va shunga ko`ra,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (27)$$

bo`ladi.

7-§. Ixtiyoriy tebranishni bo`ylanma to`lqin superpozitsiyasi shaklida tasvirlash

Biz chekkalari mahkamlangan torning erkin tebranishi haqidagi masalani qaradik va bo`ylanma to`lqin shaklidagi xususiy yechimlar mavjudligini isbotladik. Chekli yig`indi uchun yaxshi ma`lum bo`lgan superpozitsiya prinsipini cheksiz qatorlar uchun umumlashtirishni qaraymiz.  $L(u)$ - oddiy yoki xususiy hosilali chiziqli differentsial operator bo`lsin.

Lemma(Umumlashgan superpozitsiya prinsipi). Agar $u_i(i=1,2,...,n,...)$ funksiyalar $L(u)=0$ chiziqli va bir jinsli tenglamaning xususiy yechimlari bo`lsa, u holda  $L(u)=0$  tenglamada qatnashgan  $u$  funksiyaning hosilalarini hisoblash uchun  $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$  qatorda hadma-had differentsiallash mumkin bo`lganda, bu qator yig`indisi ham shu tenglamaning yechimi bo`ladi.

Haqiqatdan ham, agar $L(u)=0$ tenglamada qatnashgan u funksiyaning hosilalarini hisoblash uchun $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ qatorda hadma-had differentsiallash mumkin bo`lsa, u holda shu tenglamaning chiziqli ekanligidan va yaqinlashuvchi qatorlarni hadma-had qo`shish mumkinligidan

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, u funksiya tenglamani $L(u)=0$ qanoatlantirar ekan. Qatorni hadma-had differentsiallash mumkin bo`lishi uchun yetarli shart sifatida differentsiallash natijasida hosil qilingan

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) \tag{28}$$

qatorning tekis yaqinlashishi shartidan foydalanamiz.

Endi biz chegaraviy masalaga qaytaylik. Biz avval

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{29}$$

funksiyaning uzluksizligiga ishonch hosil qilamiz. Bundan esa, o'zining boshlang'ich va chegaraviy qiymatlariga uzluksiz ravishda erishishini hosil qilamiz. Buning uchun $u(x,t)$ uchun qatorning tekis yaqinlashishini isbot qilish yetarlidir., chunki qatorning umumiy hadi uzluksiz funksiyadir. Shuning uchun uzluksiz funksiyalardan tuzilgan tekis yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi uzluksiz funksiyani aniqlaydi.

$$|u_n(x,t)| \leq |A_n| + |B_n|$$

tengsizlikdan foydalanib.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (30)$$

qator (29) qator uchun majorant qator ekanligi kelib chiqadi. Agar (30) majorant qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (29) qator tekis yaqinlashuvchi qator bo'lib, $u(x,t)$ uzluksiz funksiya bo'ladi.

$u_t(x,t)$ funksiya o'zining boshlang'ich qiymatiga uzluksiz ravishda erishishiga ishonch hosil qilish uchun, bu funksiyaning uzluksiz ekanligini isbot qilish kerak bo'ladi. Buning uchun esa,

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a \left(-A_n \sin \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

qatorning tekis yaqinlashishini yoki

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|) \quad (31)$$

qatorning yaqinlashishini isbot qilish yetarlidir.

Nihoyat, $u(x,t)$ funksiya tenlamani qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish uchun, ya'ni umumlashgan superpozitaiya prinsipini qo'llash uchun $u(x,t)$ uchun qatorni hadma-had ikki marta differensiallash mumkinligini isbot qilish, buning uchun esa, o'z navbatida

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x,t) = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

qatorlarning tekis yaqinlashishini isbot qilish yetarlidir. Bu qatorlarga proporsional o'zgarma ko'paytuvchi aniqligida

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|) \quad (32)$$

umumiy majorant qator mos keladi.

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi a} \psi_n,$$

bunda

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$$

bo'lganligi uchun qaralayotgan masala

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| & \quad (k = 0, 1, 2) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| & \quad (k = -1, 0, 1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini isbot qilishga olib kelinadi.

Shu maqsadda Fure qatorining bizga ma'lum bo'lgan xossalari qo'llaymiz.

Agar $F(x)$ funksiya $2l$ davr bilan davriy funksiya bo'lib, k -tartibli hosilasi uzluksiz va $k+1$ tartibli hosilasi esa, bo'lakli – uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) \quad (34)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi, bunda a_n va b_n – Fure koeffitsientlaridir. Agar

faqat $(0, l)$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}_{n=1}^{\infty}$ sistema bo'yicha

qatorga yoyilmasi haqida gapiradigan bo'lsak, u holda $F(x)$ funksiya uchun yuqoridagi qo'yilgan shartlar bajarilishi uchun $f(x)$ funksiyaning toq funksiya sifatida davom ettiramiz. Xususan, $F(x)$ funksiyaning uzluksizligi uchun $f(0)=0$ shart zarurdir, aks holda toq funksiya sifatida davom ettirilgan funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi. Xuddi shuningdek, $x=l$ nuqtada $f(l)=0$ bo'lishi kerak, chunki davom ettirilgan funksiya uzluksiz va $2l$ davr bilan davriy bo'lishligi kerak bo'ladi.

Toq funksiya sifatida davom ettirganda $x=0$ va $x=l$ nuqtalarda birinchi tartibli hosilaning uzluksizligi bevosita kelib chiqadi. Umuman, davom ettirilgan funksiyaning juft tartibli hosilalarining uzluksizligi uchun

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0,2,4,\dots,2n) \quad (35)$$

shartlarni qo'yish talab etiladi.

Toq tartibli hosilalarining uzluksizligi qo'shimcha shartlarsiz o'rinli bo'ladi.

Demak, $\sum_{m=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|$ ($k=0,1,2$) qatorlarning yaqinlashishi uchun $\varphi(x)$

boshlang'ich chetlanish quyidagi shartlarni qanoatlantirishi talab etiladi.

1^o. $\varphi(x)$ funksiya ikkinchi tartibgacha uzluksiz hosilaga ega va uchinchi tartibli hosila bo'lakli-uzluksiz funksiya bo'lib,

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0 \quad (36)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

$\sum_{m=1}^{\infty} n^k |\psi_n|$ ($k=-1,0,1$) qatorlarning yaqinlashishi uchun $\psi(x)$ boshlang'ich

tezlikka quyidagi shartlar qo'yiladi:

2^o. $\psi(x)$ funksiya uzluksiz-differentsiallanuvchi va ikkinchi tartibli hosila bulakli-uzluksiz funksiya bo'lib,

$$\psi(0)=\psi(l)=0 \quad (37)$$

shartlarni qanoatlantirsin.

Shunday qilib, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ boshlang'ich funksiyalar 1^o va 2^o shartlarni qanoatlantirsa, u holda ixtiyoriy $u(x,t)$ tebranish bo'ylanma to'lqinlar superpozitsiyasi shaklida tasvirlanadi.

1^o va 2^o shartlarni bu yerda yuqoridagi usulning qo'llanilishini isbot qilish bilan bog'liq yetarli shartdan iborat bo'ladi.

8 - §. Bir jinsli bo'lmagan tenglama

Tebranishning bir jinsli bo'lmagan

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l, \quad t < 0 \quad (38)$$

tenglamasini

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l \quad (39)$$

boshlang'ich shartlar va

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0 \quad (40)$$

bir jinsli chegaraviy shartlar bilan qaraymiz. Masalan yechimini x bo'yicha Fure qatorli

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (41)$$

shaklidagi yoyilma ko'rinishida izlaymiz, bunda t parametr deb qaraladi. $u(x, t)$ funksiyaning aniqlash uchun $u_n(t)$ funksiyalarni topish talab etiladi.

$f(x, t)$ va boshlang'ich funksiyalarni Fure qatori shaklida tasvirlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Izlayotgan (41) ko'rinishdagi yechimni berilgan (38) tenglamaga qo'ysak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) - u_n''(t) + f_n(t) \right\} = 0$$

tenglik hosil bo'lib, bu tenglik yoyilmaning barcha koeffitsientlar nolga teng bo'lgandagina o'rinlidir, ya'ni

$$u_n''(n) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (43)$$

$u_n(t)$ funksiyalarni aniqlash uchun biz o'zgarmas koeffitsientli oddiy differensial tenglamalarni hosil qildik. Boshlang'ich shartlardan esa,

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

bundan esa,

$$\left. \begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ u_n'(0) &= \psi_n, \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

shartlar kelib chiqadi. Bu qo'shimcha shartlar (43) tenglamaning yechimini to'liq aniqlaydi.

$u_n(t)$ funksiyani $u_n(t) = u_n^{(I)}(t) + u_n^{(II)}(t)$ yig'indi shaklida tasvirlash mumkin bo'lib, bunda

$$u_n^{(I)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad (45)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning nol boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi

yechimi va

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \quad (46)$$

funksiya esa bir jinsli tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidir. Shunday qilib, izlanayotgan yechim

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l} a t + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} a t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (47)$$

shaklida yoziladi. Ikkinchi qo'shiluvchi erkin tebranuvchi torning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidir. Birinchi yig'indiga e'tiborimizni qarataylik. Bu yig'indi nol boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi va tashqi kuch ta'siridagi majburiy tebranishni ifodalaydi.

$f_n(t)$ uchun (42) ifodadan foydalanib,

$$u_n^{(I)}(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

(48)

bunda

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n a}{l} (t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi$$

bo`ladi.

9- §. Birinchi umumiy chegaraviy masala

Tebranish tenglamasi uchun birinchi umumiy chegaraviy masalani qaraymiz:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (49)$$

tenglamaning

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l \quad (50)$$

boshlang'ich shartlar va

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0 \quad (51)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin.

Yangi noma'lum $v(x, t)$ funksiyani

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t)$$

tenglik yordamida kiritamiz. Bunda $v(x, t)$ funksiya $u(x, t)$ funksiya dan qandaydir $U(x, t)$ ma'lum funksiya ga chetlanishini ifoda qiladi. Bu $v(x, t)$ funksiya

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

tenglamaning

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

boshlang'ich shartlar va

$$\left. \begin{aligned} v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t) \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi ko'rinishida aniqlanadi. $U(x, t)$ yordamchi funksiyani $\bar{\mu}_1(t) = 0$ va $\bar{\mu}_2(t) = 0$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. Buning uchun

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

deb tanlab olish yetarli bo`ladi. Shunday qilib, $u(x,t)$ funksiya uchun umumiy chegaraviy masala $v(x,t)$ funksiya uchun bir jinsli chegaraviy masalaga olib kelindi. Bu masalani yechish esa yuqorida keltirilgan edi.

10- §. Uch o`lchamli to`lqin tenglamasi

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

to`lqin tenglamasini qaraymiz va uning

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0(x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \varphi_1(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz.

Butun fazoda $\varphi_0(x, y, z)$ funksiya uchunchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga, $\varphi_1(x, y, z)$ funksiya esa, ikkinchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega deb olamiz.

Avval markazi $M(x, y, z)$ nuqtada radiusi $r = at$ bo`lgan  $S_{at}$  sfera sirti bo`yicha olingan

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \quad (3)$$

Integral (1) to`lqin tenglamasining yechimi bo`lishligini ko`rsatamiz, bu yerda $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$

- ixtiyoriy funksiyadir.

S_{at} sfera radiusining yo`naltiruvchi kosinuslardir. Ularni biz quyidagi shaklda yozamiz:

$$\alpha = \sin \theta \cos \psi, \quad \beta = \sin \theta \sin \psi, \quad \gamma = \cos \theta,$$

bunda θ burchak 0 dan π gacha va ψ burchak 0 dan 2π gacha o`zgaradi. Agar  $(\xi, \eta, \zeta)$  nuqta  $S_{at}$  sfera nuqtasi bo`lsa, u holda (α, β, γ) – nuqta markazi koordinata boshida radiusi birga teng bo`lgan  $S_1$  sfera nuqtasi bo`ladi, hamda har ikkita sferaning mos $d\sigma_r$ va $d\sigma_1$ yuza elementlari

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\psi$$

munosabat bilan bog`langan. U holda (3) integral

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma_1 \quad (4)$$

shaklga keladi. Bundan esa, osongina ko`rish mumkinki, agar  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  funksiya  $k$ -tartibgacha ( $k \geq 2$ ) o`zining uzluksiz hosilalariga ega bo`lsa, u holda  $u(x, y, z, t)$  funksiya ham  $k$ -tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo`ladi.

(4) formuladan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_1$$

yoki, integrallashning boshlang`ich sohasiga qaytib,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r \quad (5)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi (4) ifodada t bo`yicha hosila olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma_1 + \frac{at}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\sigma_1 \quad (6)$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ hosilani hisoblash uchun (6) ifodani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iint_{S_{at}} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\sigma_r$$

Bu yerda Ostrogradskiy formulasini qo`llash,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint_{D_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

bunda D_{at} markazi $M(x, y, z)$ nuqtada radiusi $r=at$ bo`lgan shar bo`ladi.

$$I = \iiint_{D_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

deb belgilasak, u holda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at}$$

bo`ladi. Bu ifodadan  $t$  bo`yicha hosila olsak, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left(\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at} \cdot \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at} \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$$

Osongina ko`rish mumkinki,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a \int \int_{S_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r. \quad (8)$$

Haqiqatdan ham, I integralda markazi $M(x,y,z)$ nuqtada boʻlgan (ρ, θ, ψ) sferik koordinatalariga oʻtib,

$$I = \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho$$

tenglikka ega boʻlamiz. Bu ifodadan t boʻyicha hosila olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right)_{\rho=at} a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\psi = a \int \int_{S_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r.$$

Agar $\varphi(x,y,z)$ funksiya ikkinchi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega boʻlsa, u holda (5), (7) va (8) tengliklarni taqqoslab, biz (3) formula bilan aniqlanadigan $u(x,y,z,t)$ funksiya (1) toʻlqin tenglamasini qanoatlantirishini koʻramiz. (4) va (6) formulalardan bevosita $u(x,y,z,t)$ funksiya

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (9)$$

boshlangʻich shartlarni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Agar $u(x,y,z,t)$ funksiya (1) toʻlqin tenglamasining (9) boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi boʻlsa, u holda osongina koʻrish mumkinki,

$$v(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

funksiya (1) tenglamaning

$$v|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{t=0} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi boʻladi. Endi (9) boshlangʻich shartlar holida $\varphi(x,y,z)$ funksiya oʻrniga $\varphi_1(x,y,z)$ funksiyani va (10) boshlangʻich shartlar holida $\varphi(x,y,z)$ funksiya oʻrniga esa $\varphi_0(x,y,z)$ funksiyani olib, hamda shunday qilib qurilgan yechimlarni qoʻshsak, biz (1) tenglamaning (2) boshlangʻich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimiga ega boʻlamiz.

Shunday qilib, (1) to'lqin tenglamasining (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}} \frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r + \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}} \frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \quad (11)$$

shaklida yoziladi. Bu formula Kirxgof formulasi deyiladi.

Uch o'lchamli fazoda (11) Kirxgof formulasi bilan ifodalangan to'lqin taqalishining fizik ko'rinishini tasavvur qilish uchun boshlang'ich qo'zg'alishni chegaraviy S bo'lgan chegaralangan V sohada jamlangan deb olamiz, ya'ni φ_0 va φ_1 funksiyalar V sohadan tashqarida nolga teng bo'ladi.

$M(x, y, z)$ nuqta V sohadan tashqarida joylashgan bo'lsin. d va D orqali mos ravishda $M(x, y, z)$ nuqtadan S sirt nuqtasigacha bo'lgan eng kichik va eng katta masofalarni belgilaymiz. $t < \frac{d}{a}$ uchun S_{at} sfera V sohadan tashqarida joylashgan bo'ladi, shuning uchun φ_0 va φ_1 funksiyalar S_{at} sferada nolga teng va (11) formuladan $u(M, t) = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni boshlang'ich qo'zg'alish hali M nuqtaga yetib kelishga ulgurgani yo'q. Vaqtning $t = \frac{d}{a}$ momentida S_{at} sfera S sirtga urinadi va M nuqta orqali to'lqin oldi fronti o'tadi. Vaqtning $t = \frac{d}{a}$ momentidan vaqtning $t = \frac{D}{a}$ momentigacha S_{at} sfera V sohani kesadi va (11) formula $u(M, t) \neq 0$ ekanligini beradi. Nihoyat, $t = \frac{D}{a}$ uchun S_{at} sfera S sirt bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lmaydi (butun V soha S_{at} sfera ichiga joylashgan bo'ladi) va (11) formuladan $u(M, t) = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni boshlang'ich qo'zg'alish M nuqta orqali o'tib ketadi. Vaqtning $t = \frac{D}{a}$ momentiga M nuqta orqali o'tuvchi to'lqin orti fronti mos keladi. Berilgan t vaqt momentida to'lqin oldi fronti hali tebranmagan nuqtalarni tebranayotgan nuqtalardan ajratuvchi sirtidan iborat. Avvalgiga ko'ra, bu sirtning barcha nuqtalari S dan at ga teng bo'lgan eng qissa masofaga ega. To'lqin oldi fronti markazi S sirtida va radiusi at bo'lgan sferalar oilasi uchun o'ramadan iborat. To'lqin orti fronti berilgan t vaqt momentida hali

tebranayotgan nuqtalarni tebranish to'xtagan nuqtalardan ajratuvchi sirtdan iborat. a o'zgarmas to'lqin fronti tarqalishining tezligidan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, lokal boshlang'ich qo'zg'alish fazodagi har bir M nuqtada vaqt bo'yicha lokallashgan ta'sirni paydo qiladi va bundan tashqari to'lqin oldi va orti fronti to'lqinlari tarqalishiga ega bo'lamiz (Gyuygens prinsipi).

2. Silindrik to'lqinlar. Boshlang'ich funksiyalar φ_0 va φ_1 funksiyalar faqat x va y dan bog'liq bo'lgan, ya'ni z o'qiga parallel har qanday to'g'ri chiziqli o'zgarmas qiymatni saqlaydigan xususiy holni qaraymiz. Agar $M(x,y,z)$ nuqtani z o'qiga harakatlantirsak, u holda (11) Kirxgof formulasining o'ng qismi o'zining qiymatini o'zgartirmaydi, ya'ni u funksiya ham z dan bog'liq bo'lmaydi va (11) formula

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad (13)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini beradi.

Biz (11) yechimni xy tekisligida qarashimiz mumkin. Buning uchun (11) formuladagi sfera bo'yicha olingan integrallarni xy tekisligidagi doiralar bo'yicha olingan integrallar bilan almashtiramiz. xy tekisligida $M(x,y)$ nuqtani olamiz.

$$\xi = x + \alpha at, \quad \eta = y + \beta at, \quad \zeta = z + \gamma at$$

formulalar bilan aniqlanadigan (ξ, η, ζ) koordinatali nuqta $z=0$ uchun markazi $M(x,y,0)$ nuqtada radiusi at bo'lgan S_{at} sfera nuqtasidir. xy tekisligining yuqori va pastki qismida joylashgan sfera qismi xy tekisligiga proeksiyalanganda markazi $M(x,y)$ nuqtada va radiusi at bo'lgan C_{at} doiradan iborat. Ma'lumki, $dC_{at} = \cos(nz) d\sigma_{at}$, bunda n -esa S_{at} ga o'tkazilgan normaldir, ya'ni shu sferaning Oz o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qiluvchi radiusidir. Agar N sferadagi o'zgaruvchi nuqta, N_1 - esa uning xy tekisligiga proeksiyasi bo'lsa, u holda

$$\cos(nz) = \frac{|NN_1|}{|MN|} = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at},$$

bunda (ξ, η) -koordinatalari o'zgaruvchi bo'lgan C_{at} doiradagi nuqtadir.

(11) formulani almashtirish natijasida

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{at}} \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{C_{at}} \frac{\varphi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \quad (14)$$

Formulani hosil qilamiz. Bu formula (12) to'liq tenglamasining (13) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini beradi. (14) formulaga Puasson formulasi deb ataladi.

Boshlang'ich qo'zg'alish xy tekisligidagi l konturli B chekli soha bilan chegaralangan, ya'ni $\varphi_0(x, y)$ $\varphi_1(x, y)$ funksiyalar B ning teshqarisida nolga teng deb olamiz. $M(x, y)$ nuqta B sohadan tashqarida joylashgan bo'lsin. Vaqtning $t < \frac{d}{a}$ momenti uchun, bunda d orqali $M(x, y)$ nuqtadan l konturgacha bo'lgan eng kichik masofa, C_{at} doira B soha bilan umumiy nuqtalarga ega emas, $\varphi_0(x, y)$ $\varphi_1(x, y)$ funksiyalar C_{at} doiraning barcha joyida nolga teng va (14) formuladan $u(M, T) = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni boshlang'ich qo'zg'alish hali M nuqtaga yetib kelishga ulgurani yo'q. Vaqtning $t < \frac{d}{a}$ momentida M nuqtaga to'liq oldi fronti yetib keladi. $t = \frac{D}{a}$ qiymat uchun, bunda D orqali $M(x, y)$ nuqtadan l konturgacha bo'lgan eng katta masofa, C_{at} doira B sohaning ichida butunicha joylashgan va

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint_B \frac{\varphi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \quad (15)$$

hosil bo'ladi. Vaqtning $t = \frac{D}{a}$ momentidan keyin $u(x, y, t)$ funksiya uch o'lchamli fazodagi singari nolga aylanmaydi. Formulaning maxrajida $a^2 t^2$ qatnashganligi uchun $t \rightarrow \infty$ da $u(x, y, t) \rightarrow 0$ ekanligini tasdiqlash muqim. Shunday qilib, tekislikdagi lokallashgan boshlang'ich qo'zg'alish uchun yechim vaqt bo'yicha lokallashmagan bo'ladi. Bu holda to'liq oldi frontiga ega, lekin to'liq orti frontiga ega bo'lmagan to'liq paydo bo'ladi (Gyuygens prinsipi o'rinli emas). Uch o'lchamli fazoda (12) tenglamaga silindrik to'liq deb ataluvchi to'liq mos keladi.

3. Yechimning berilgan boshlang'ichlardan uzluksiz bog'liqligi. To'liq tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimini beruvchi chiqarilgan barcha formulalar boshlang'ich funksiyalardan olingan integrallarning vaqt bo'yicha hosilalarini saqlaydi. Shuning uchun, agar φ_0 va φ_1 boshlang'ich funksiyalarning o'zlari bilan birga ularning birinchi tartibli hosilalari yetarlicha kam o'zgarsa, u holda Koshi masalasining yechimini beruvchi u funksiya ham kam o'zgaradi, ya'ni yechimning berilgan boshlang'ichlardan uzluksiz bog'liqligiga ega bo'lamiz. Bu yerda albatta, agar boshlang'ich funksiya beriladigan soha cheksiz bo'lsa, u holda t ning qiymatlarining faqat chegaralangan holi qaraladi.

4. Yagonalik teoremasi. To'liq tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligini isbot qilamiz. Yozuvlarning kamaytirish maqsadida $a = 1$

deb hisoblaymiz, chunki to'liqin tenglamasida t ni $\frac{t}{a}$ bilan almashtirish shunga olib keladi.

Aniqlik uchun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (16)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad (17)$$

uch erkli o'zgaruvchili bo'lgan holda qaraymiz. Ikki marta uzluksiz differensiyalanuvchi funksiyalar sinfida (16), (17) Koshi masalasi yechimi yagona ekanligini ko'rsatamiz. $u_1(x, y, t)$ va $u_2(x, y, t)$ funksiyalar (16) tenglamaning (17) ko'rinishdagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlari bo'lsin. U holda $u(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$ ayirma (16) to'liqin tenglamasining va

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (18)$$

nol boshlang'ich berilganlarni qanoatlantiradi.

Ixtiyoriy (x, y) va ixtiyoriy $t > 0$ qiymatda $u \equiv 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Uch o'lchamli (x, y, t) fazoni qaraymiz va ixtiyoriy $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olamiz, bundan tashqari $t_0 > 0$.

Bu nuqtadan shu nuqta uchi bo'ladigan

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$$

konusni xarakteristik konus deb ataymiz. Xarakteristik konus yon sirti va $t = 0$ tekislik qismi bilan chegaralangan konus ichidan iborat soha D bo'lsin (D -konus).

Quyidagi ayniyatni tekshirish qiyin emas:

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

D soha bo'yicha bu ayniyatni integrallaymiz. Chap qismidagi integral nolga teng, chunki u funksiya (16) tenglamaning yechimidir:

$$0 = \iiint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy dt.$$

Bu integralni Ostrogradskiy formulasidan foydalanib, D soha sirti bo'yicha olingan integral bilan almashtiramiz. Γ orqali konusning yoni sirtini, σ_0 -orqali esa

asosini belgilaymiz. (18) boshlang'ich berilganlarga ko'ra, σ_0 da $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

bo'lib, faqat Γ bo'yicha bitta integral qoladi:

$$\iint_{\Gamma} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \cos(nt) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nx) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny) \right\} dS = 0.$$

Xarakteristik konusning Γ yon sirtida

$$\cos^2(nt) - \cos^2(nx) - \cos^2(ny) = 0.$$

Endi (19) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\iint_{\Gamma} \frac{1}{\cos(nt)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(nx) \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(ny) \right]^2 \right\} dS = 0 \quad (20)$$

Γ sirt ustida $\cos(nt) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hamda integral ostidagi funksiya uzluksiz va manfiymas ekanligiga ko'ra, (20) dan konus yon sirtida uning nolga tengligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(nx) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(ny) &= 0 \end{aligned} \quad (\Gamma \text{ da})$$

yoki

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cos(nx)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\cos(ny)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\cos(nt)} = \lambda \quad (21)$$

l orqali xarakteristik konusning qandaydir yasovchisini belgilasak, (21) tenglikdan foydalanib, konus yasovchisi bilan shu sirtning normali hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(lx) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(ly) + \frac{\partial u}{\partial t} \cos(lt) = \\ \lambda [\cos(nx) \cos(lx) + \cos(ny) \cos(ly) + \cos(nt) \cos(lt)] &= \\ \lambda \cos(nl) &= 0 \end{aligned}$$

Demak, l yasovchi bo'ylab, $u = \text{const}$ bo'ladi. Konus yasovchisining $t=0$ tekislik bilan kesishgan joyidagi qiymati $u=0$. Shuning uchun konus yasovchisi bo'lib $u=0$ bo'ladi. Xususan, bu konusning uchi bo'lib M nuqtasida ham bajariladi: $u(M)=0$. Shuni isbot qilish talab etilgan edi. Agar (18) bir jinsli boshlang'ich shartlar butun xy tekisligining hamma joyida emas, balki D sohaning σ_0 asosidagina o'rinli bo'lganda ham, bu tasdiq o'z kuchida qoladi. Bundan (16) to'lqin tenglamasi yechimining $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi qiymati $t=0$ tekislikning faqat shu uchi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bo'lgan xarakteristik konusning $t=0$ tekislikni kesgan qismidagi boshlang'ich shartlarini bog'liq ekanligini to'g'risida xulosa chiqarish mumkin bo'ladi.

5. Bir jinsli bo'lmagan to'liq tenglamasi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (22)$$

tenglamani qaraymiz va uning

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (23)$$

nol boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz.

Bunga bir jinsli tenglamaning (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qo'shsak, u holda (22) tenglamaning (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini hosil qiladi. (22), (23) masalani yechish uchun

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (24)$$

bir jinsli tenglamani

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = f(x, y, z, \tau) \quad (25)$$

Boshlang'ich shartlar qanoatlantirgan holda qaraymiz, bundan tashqari vaqtning boshlang'ich momenti sifatida $t=0$ emas, balki $t=\tau$ olinadi, bunda τ qandaydir parametr. (24), (25) masalaning yechimi Kirxgof formulasi orqali ifodalanadi, lekin bu formulada t ni $t-\tau$ bilan almashtirish kerak, chunki vaqtning boshlang'ich momenti $t=0$ emas, balki $t=\tau$ olinadi. Demak, biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$v(x, y, z, t; \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi} \iint_{S_1} f[x + \alpha a(t-\tau), y + \beta a(t-\tau), z + \gamma a(t-\tau), \tau] d\sigma_1. \quad (26)$$

Endi

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t; \tau) d\tau \quad (27)$$

formula bilan aniqlangan $u(x, y, z, t)$ funksiya (22) bir jinsli bo'lmagan to'liq tenglamasining (23) berilgan nol boshlang'ichlarni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat bo'ladi. Haqiqatdan ham, (27) formuladan

$$\Delta u(x, y, z, t) = \int_0^t \Delta v(x, y, z, t; \tau) d\tau \quad (28)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (27) ifodada t bo'yicha hosila olsak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau + v(x, y, z, t; \tau) \Big|_{t=\tau} \quad (29)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda (25) shartlarning birinchisiga ko'ra, integral tashqarisidagi had nolga teng. t bo'yicha yana bir marta hosila olsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau}$$

Tenglikka ega bo'lamiz, bundan tashqari, (25) shartlarning ikkinchisiga ko'ra integral tashqarisidagi had $f(x, y, z, t)$ ga teng, ye'ni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + f(x, y, z, t). \quad (30)$$

(28), (30) formulalardan va (24) tenglamadan bevosita ko'rish mumkinmi, (27) formula bilan aniqlanadigan $u(x, y, z, t)$ funksiya (22) bir jinsli bo'lmagan tenglamani qanoatlantiradi. (27) va (29) formulalardan (23) boshlang'ich shartlarning ham bajarilishi kelib chiqadi. Endi (27) formuladagi funksiya o'rniga uning (26) formuladagi ifodasini qo'ysak,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) \left\{ \iint_{S_1} f[x + \alpha a(t - \tau), y + \beta a(t - \tau), z + \gamma a(t - \tau), \tau] d_1 \sigma_1 \right\} d\tau$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda τ o'rniga $r - a(t - \tau)$ yangi integrallash o'zgaruvchisini kiritamiz. U holda

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f\left(x + \alpha r, y + \beta r, z + \gamma r, t - \frac{r}{a}\right)}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\psi dr$$

ga ega bo'lamiz. Sferik koordinatalar o'rniga

$$\xi = x + \alpha r, \quad \eta = y + \beta r, \quad \zeta = z + \gamma r$$

to'g'ri burchakli koordinatalarga o'tib va

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ekanligidan

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

ni hosil qilamiz va $u(x,y,z,t)$ yechim uchun oxirgi shaklni yozamiz:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int \int \int_{D_{at}} \frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (31)$$

bunda D_{at} radiusi at bo'lgan markazi esa, (x,y,z) nuqtada bo'lgan shardir.

(31) ifoda kechikuvchi potensial deb ataladi.

Ta'kidlash kerakki, f funksiyadan integrallash bajarilganda qarayotgan t vaqt momenti emas, balki $t - \frac{r}{a}$ vaqt momenti qaraladi, bunda t ro'y berayotgan vaqtgacha bo'lgan vaqt farqi, shu tarqalayotgan jarayonning a tezlik bilan (ξ, η, ζ) nuqtadan (x,y,z) nuqttagacha yo'l bosib o'tishi uchun ketgan vaqtdir.

Xuddi shunga o'xshash, yuqoridagidek, biz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t) \quad (32)$$

bir jinsli bo'lmagan to'lqin tenglamaning

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (33)$$

berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini hosil qilishimiz mumkin. Bu yechim quyidagi shaklga ega:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\int_{\rho \leq a(t-\tau)} \int \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \right] d\tau, \quad (34)$$

bunda $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (35)$$

Tenglama holida berilgan nol boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim quyidagicha bo'ladi:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau. \quad (36)$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Hasanov A.B. Shtrum-Liuvill chegaraviy masalalari nazaariyasiga kirish. I-Qism. Toshkent- 2011yil. 496 bet.
2. Saloxiddinov M.S.”Integral tenglamalar” Toshkent-2009.
3. Владимиров В.С.”Уравнения математической физика” Москва-1982.
4. Арфкен Г. Математическое методы в физике. Москва-1970.
5. Qosimov Sh.G. “Matematik fizika tenglamalari” Ma’ruza matni.UZMU-2011.
6. Nurmurodova X.G. (Ilmiy rahbar: Imomkulov S.A.). “Bir o’lchovli kristall panjaradagi to’lqin tenglamasini keltirib chiqarish yo’llari”. Ta’lim va tarbita jarayoniga zamonaviy yondashuvlar: muammolar, vazifalar, yechimlar. Iqtidorli magist va talabalarning IX ilmiy-amaliy konferensiyasi. NavDPI, 2012-yil, 21-22 betlar.