МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.55

Имомкулов Севдиер Акрамович

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2006

Работа выполнена на кафедре «Теория функций» Ургенчского государственного университета

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, академик **А. С. Садуллаев**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Г. Худайберганов**
доктор физико-математических наук, профессор **Ш. Ярмухамедов**
доктор физико-математических наук, профессор **А.М. Кытманов**

Ведущая организация: Математический институт Российской Академии Наук им. В.А. Стеклова

Защита состоится «___» _____________2006 г. в ____ часов на заседании Объединенного Специализированного Совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, по адресу: 700174, Ташкент-174, Вузгородок, Национальный Университет Узбекистана им Мирзо Улугбека, Механико-математический факультет (ауд. Г-303)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «____»__________________2006 года.

Ученый секретарь Объединенного Специализированного Совета доктор физ.-мат наук : **А .А. Абдушукуров**

1. Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. Вопросы аналитического продолжения и структуры особых множеств аналитических функций играют основополагающую роль в теории функций комплексного переменного. Строгое определение принципа аналитического продолжения и первые результаты в этом направлении связаны с именами выдающихся основателей комплексного анализа Вейерштрасса и Римана.

В настоящее время проблема аналитического продолжения функций одного комплексного переменного обладает достаточно полным набором результатов, которые имеют многочисленные приложения в разных областях науки: в теоретической физике, механике, алгебраической геометрии и т.п.

В отличие от теории функций одного комплексного переменного, в теории функций многих комплексных переменных понятие аналитического продолжения кроме индивидуального характера приобретает и «принудительный» характер, свойственный для какого-либо класса: если всякая плоская область является областью голоморфности некоторой голоморфной функции, то в многомерном случае существуют области, которые не являются областями голоморфности, т.е. всякая голоморфная в этой области функция аналитически продолжается на более широкую область.

Настоящая диссертация посвящена продолжениям функций нескольких переменных, удовлетворяющим условиям аналитичности на пучках комплексных прямых. Причем наибольший интерес для нас представляют следующие два направления: аналитичность сепаратно-аналитических функций и аналитическое продолжение вдоль фиксированного направления. В диссертации также всесторонне изучаются продолжения гармонических, плюригармонических и субгармонических функций, которые, как известно, тесно связаны с аналитическими функциями.

Рассматриваемые задачи были инициированы фундаментальной теоремой Хартогса, которая утверждает, что если функция $f(z),\ z=(z_1,z_2,\ldots,z_n),$ голоморфна в области $D\subset \mathbf{C}^n$ по каждой из переменных $z_j,\ j=1,2,\ldots,n,$ то она будет голоморфной в D по совокупности переменных. Теорема Хартогса имеет множество различных по характеру обобщений, расширений и непосредственно примыкает к тематике, связанной с аналитическим продолжением функций.

Известные работы А.А. Гончара, Е.М.Чирки, В.П.Захарюты, Й.Сичака, А.С.Садуллаева, Э.Бедфорда и В.А.Тейлора являются основополагающими в этом направлении. Отметим, что свойство аналитичности сепаратно-аналитических функций имеет глубокую связь с известной теоремой Боголюбова об “острие клина”, которая, как известно, нашла существенные приложения в теоретической физике.

Вышесказанным и объясняется актуальность рассматриваемой диссертационной темы. Важность темы диссертации подчеркивается еще и тем, что она имеет различные применения, как внутри самого комплексного анализа, так и в других областях математики.

Цель работы. Основными целями настоящей работы являются:

определить область голоморфности сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области;

изучить аналитическую продолжимость функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых;

исследовать продолжение плюригармонических функций вдоль фиксированного направления;

описать структуру особых множеств субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \leq p < \infty$.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории функций многих комплексных переменных, комплексной теории потенциала и теории аналитических пространств.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Определены области голоморфности сепаратно-аналитических и сепаратно-гармонических функций, заданных на части границы.

2. Изучены аналитические продолжения голоморфных и плюригармонических функций вдоль фиксированного направления.

3. Структура особых множеств субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, полностью описана через $C_{q,m}$- ёмкость.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты, представленные в работе, могут быть использованы в дальнейшем развитии теории функций, они также могут быть полезными в приложениях комплексного анализа в других областях математики и физики.

Апробация работы. Результаты диссертации систематически докладывались на семинаре «Комплексная теория потенциала» в УрГУ (руководитель: проф. А.С.Садуллаев); на семинаре по комплексному анализу кафедры математического анализа НУУз (руководитель: проф. Г. Худайберганов), а также на традиционных Республиканских конференциях «Актуальные проблемы комплексного анализа» (1993-2003 гг.).

Результаты диссертации докладывались также на семинаре по многомерному комплексному анализу в Институте математики Стокгольма (Швеция, 16 апреля 2005 г., руководитель: проф. Микаел Пассари); на семинаре по математической физике на математическом факультете СамГУ (Самарканд, январь 2004 г., руководитель: проф. Ш. Ярмухамедов) и на международных конференциях «Комплексный анализ и его приложение», МИРАН им. В.А. Стеклова, Москва, 25-30 июня 2001 г. (под председательством проф. А.А. Гончара); «Многомерный комплексный анализ», КрасГУ, Красноярск, 5-10 августа 2002 г. (под председательством проф. Е.М. Чирки); «Геометрический анализ и его приложения», ВолГУ, Волгоград 24-30 мая 2004 г. (под председательством проф. Е.М. Чирки); «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа» СамГУ, Самарканд, 11-15 сентября 2000 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-30], список которых приводится в конце автореферата. В работах [11], [12], [19] А. С. Садуллаеву принадлежит постановка задач, С. А. Имомкуловым получены их решения. Работы [5], [6] написано совместно Б. И. Абдуллаевым: в работе [5] доказательства теоремы 1и 2 в случаях $p=\frac{n}{n-2}$ и $p=\frac{n}{n-1}$ принадлежит автору диссертации; в [6] теорема доказана совместно. Работы [8], [9], [17] написано совместно Ж.У.Хужамовым и все результаты, полученные в этих работах, усилены в [13], [19]. А также работы [15], [16], [7] и [18] написаны в соавторстве, и вклад каждого из соавторов в работах равноценен.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из 4 глав и 14 параграфов. Параграфы, теоремы, леммы, определения и формулы занумерованы двумя цифрами, первая из которых указывает номер главы. В конце приведен список литературы из 130 наименований.

Полный объем диссертационной работы 135 страниц.

2. Содержание диссертации

Во введении приведен краткий обзор исследований, относящихся к тематике диссертационной работы, и изложено содержание диссертации.

В первой главе изучаются сепаратно - аналитические функции, заданные на части границы области (§1.1).

Пусть даны две области $D\subset \mathbf{C}^n$, $G\subset \mathbf{C}^m$ и два множества, $E\subset \overline{D}, F\subset \overline{G}$. Предположим, что функция $f(z,w)$, первоначально определенная на множестве $E\times F$, обладает свойствами:

а) для любого фиксированного $w^0\in F$, функция $f(z,w^0)$ голоморфно продолжается в D;

б) для любого фиксированного $z^0\in E$, функция $f(z^0,w)$ голоморфно продолжается в G.

В таком случае $f(z,w)$ определяет некоторую функцию на множестве $X=\big((D\cup E)\times F\big)\cup\big(E\times(G\cup F)\big)$ и она называется *сепаратно-аналитической функцией* на X.

Задача состоит в том, чтобы определить область $\hat{X}$ ($X \subset \hat{X} \bigcup \partial\hat{X}$), куда функция $f(z,w)$ голоморфно продолжается по совокупности переменных.

Впервые эта задача, когда $E \subset D,\ F \subset G$, была поставлена М.Хукухарой. В одномерном случае $n = m = 1$, поставленная задача решена Й.Сичаком, а в общем случае В.П.Захарютой: пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ и $G \subset \mathbf{C}^m$ – сильно псевдовыпуклые области, а E и F замкнутые подмножества соответственно в D и G. Если $f(z,w)$ сепаратно – аналитическая функция на множестве

$$X = (D \times F) \bigcup (E \times G),$$

то она голоморфно продолжается в область

$$\hat{X} = \left\{ (z,w) \in D \times G : \omega^*(z,E,D) + \omega^*(w,F,G) < 1 \right\}.$$

Здесь ω^* обозначает основную величину комплексной теории потенциала, так называемую P-меру множества $E \subset D \subset \mathbf{C}^n$ относительно области D.

А. А. Гончаром доказана следующая теорема, которая является граничным вариантом теоремы о сепаратно – аналитических функциях: пусть D и G плоские жордановы области с гладкими границами и $E \subset \partial D,\ F \subset \partial G$ граничные дуги. Если $f(z,w)$ непрерывная и сепаратно – аналитическая на множестве

$$X = \big((D \bigcup E) \times F\big) \bigcup \big(E \times (G \bigcup F)\big)$$

функция, то $f(z,w)$ голоморфно продолжается в область

$$\hat{X} = \left\{ (z,w) \in D \times G : \omega^*(z,E,D) + \omega^*(w,E,G) < 1 \right\},$$

где ω^* - гармоническая мера.

Доказательство этой теоремы опирается на интегральную формулу Карлемана о восстановлении голоморфной функции по её значениям, заданном на части границы $E \subset \partial D$ и поэтому здесь существенно, чтобы области D и G были плоскими.

Отметим также, что известные методы аналитического продолжения сепаратно-аналитических функций, заданных во внутренних сечениях на граничный случай непосредственно не применимы в связи с невозможностью построения ортогонального базиса для граничных множеств (см. §1).

Тем не менее, имеет место

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $D \subset \mathbf{C}^n$ *– область с гладкой границей* $\partial D, E \subset \partial D$ *– граничное подмножество положительной меры Лебега,* $m_{2n-1}(E) > 0$, *а* $F \subset G$ *неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области* $G \subset \mathbf{C}^m$. *Предположим, что функция* $f(z,w)$, *заданная на множестве* $E \times F$, *обладает следующими условиями сепаратно-аналитичности* (*на* $X = ((D \bigcup E) \times F) \bigcup (E \times G)$):

а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ *функция* $f(z, w^0)$ *является сужением некоторой ограниченной голоморфной функции* $\psi_{w^0}(z) \in O(D) \bigcap L^{\infty}(\overline{D})$: *в каждой точке* $\xi \in E$ *угловой предел* $\psi^*_{w^0}(\xi)$ *существует и равен* $f(\xi, w^0)$;

б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ *функция* $f(z^0, w)$, *определенная на* F, *является сужением некоторой голоморфной функции* $\Phi_{z^0}(w) \in O(G)$: $\Phi_{z^0}(w) = f(z^0, w)$ *для всех* $w \in F$.

Тогда $f(z,w)$ *определяет некоторую сепаратно-аналитическую функцию на множестве* X *и голоморфно продолжается в область*

$$\hat{X} = \left\{ (z,w) \in D \times G : \omega^*_{in}(z,E,D) + \omega^*(z,F,G) < 1 \right\}.$$

Здесь $\omega^*_{in}(z,E,D)$ - внутренняя Р-мера граничного множества $E \subset \partial D$, относительно области D.

В диссертации изучается также вопрос о непрерывности продолжении сепаратно - аналитических функций вплоть до границы.

Имеет место следующий любопытный факт.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $E \subset \partial D$ *открытый кусок границы, а* $F \subset G$ *неплюриполярный компакт. Если функция* $f(z,w)$, *непрерывная на* $E \times F$, *является сепаратно-аналитической и ограниченной на множестве* $X = ((D \bigcup E) \times F) \bigcup (E \times G)$, *то её голоморфное продолжение* $S(z,w)$ *в* $\hat{X}$ *будет непрерывной вплоть до* $E \times G$, *т.е.*

$$S(z,w) \in O(\hat{X}) \bigcap C(\hat{X} \bigcup (E \times G)).$$

Без условия ограниченности f на X теорема 1.2, вообще говоря, не верна. В §1.1 построен пример, подтверждающий этот факт (пример 1.1).

В §1.2 рассматривается следующая задача: пусть $E \subset D \subset \mathbf{R}^n$, $F \subset G \subset \mathbf{R}^m$, и $u(x,y)$ сепаратно – гармоническая на множестве $X=(D\times F)\bigcup(E\times G)$ функция. Требуется описать область гармоничности функции $u(x,y)$. Эта задача изучена в работах А. Заряхи , Нгуен Тан Вана и недавней работе Хекарт Джон-Марка.

Одним из основных методов изучения вопросов продолжения сепаратно–гармонических функций является переход к голоморфным функциям, а затем использование принципов голоморфных продолжений. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}_x^n$, вложенное в пространство $\mathbf{C}_z^n=\mathbf{R}_x^n+i\mathbf{R}_y^n$, где $z=(z_1,z_2,...,z_n),\ \ z_j=x_j+iy_j,\quad j=1,2,...,n.$ При таком вложении имеет место

Л е м м а 1.1. *Для любой области* $D\subset\mathbf{R}^n$ *существует область* $\hat{D}\subset\mathbf{C}^n$*, такая, что* $D\subset\hat{D}$ *и любая гармоническая в* D *функция голоморфно продолжается в область* $\hat{D}$*, т.е. существует голоморфная в области* $\hat{D}$ *функция* $f_u(z)$ *такая, что* $f_u|_D\equiv u$.

Используя эту лемму, легко доказывается

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $E\subset D\subset\mathbf{R}^n$ *и* $F\subset G\subset\mathbf{R}^m$ *– компактные множества, являющиеся неплюриполярными в смысле подмножеств пространств* $\mathbf{C}^n=\mathbf{R}^n+i\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{C}^m=\mathbf{R}^m+i\mathbf{R}^m$*. Тогда любая сепаратно – гармоническая на множестве* $X=(D\times F)\bigcup(E\times G)$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область*

$$\hat{X}=\left\{ (x,y)\in D\times G:\omega^*(x,E,D)+\omega^*(y,F,G)<1 \right\}.$$

Здесь $\omega^*(x,E,\hat{D})$ и $\omega^*(y,F,\hat{G})$ – P- меры множеств E и F относительно области $\hat{D}$ и $\hat{G}$: $E\subset\hat{D}\subset\mathbf{C}^n, F\subset\hat{G}\subset\mathbf{C}^m$. Таким образом, если компакты $E\subset D$ и $F\subset G$ плюрирегулярные, например, шары, то функция $u(x,y)$ гармонически продолжается в некоторую окрестность $E\times F$.

В §1.2 доказывается также следующий граничный вариант.

Т е о р е м а 1.5. *Пусть* $D\subset\mathbf{R}^n$ *- ограниченная область, а* $F\subset G$ *- неплюриполярный, в смысле подмножества* $\mathbf{C}^m=\mathbf{R}^m+i\mathbf{R}^m$*, компак в области* $G\subset\mathbf{R}^n$*. Предположим, что функция* $u(x,y)$*, непрерывная на множестве* $(\overline{D}\times F)\bigcup(\partial D\times G)$*, обладает следующими условиями сепаратно – гармоничности*:

а) при каждом фиксированном $y^0\in F$ *функция* $u(x,y^0)$ *гармоническая в области* D;

б) при каждом фиксированном $x^0 \in \partial D$ *функция* $u(x^0, y)$ *гармоническая в области* G.

Тогда $u(x, y)$ *гармонически продолжается в область* $D \times G$.

Отметим, что в теореме 1.5 полную границу ∂D нельзя заменить некоторым подмножеством (куском) границы $E \subset \partial D$(см. пример 1.2). Это объясняется тем, что кусок границы не является множеством единственности для гармонических функций.

Вторая глава диссертации посвящена задачам о продолжении голоморфных функций вдоль фиксированного направления.

Основным результатом второй главы является следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $D \subset \mathbf{C}^n$ *– область с кусочно-гладкой границей и* $M \subset \partial D$ *– порождающее* k*-мерное,* $n \le k \le 2n-1$, *многообразие класса* C^1. *Если функция* $f(z, w)$ *голоморфна в поликруговой области*

$$D \times V = D \times \{w : |w| < r\} \subset \mathbf{C}_z^n \times \mathbf{C}_w,$$

непрерывна на $\overline{D} \times V$ *и при каждом фиксированном* ξ *из некоторого множества* $E \subset M$ *положительной меры Лебега на* M, $m_k(E) > 0$, *функция* $f(\xi, w)$ *переменной* w *продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости* $\mathbf{C}$, *за исключением полярного (конечного) множества особенностей, то* $f(z, w)$ *голоморфно продолжается в* $(D \times \mathbf{C}) \setminus S$, *где* S *- некоторое замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество* $D \times \mathbf{C}$.

По содержанию эта теорема относится к тематике голоморфного продолжения вдоль фиксированного направления. Первый результат в этом направлении принадлежит Хартогсу: пусть функция $f(z, w)$ определена в поликруге $U \times \{w : |w| < R\} \subset \mathbf{C}_z^n \times \mathbf{C}_w$, голоморфна в $U \times \{w : |w| < r\}$, $0 < r < R$, и при каждом фиксированном $z^0 \in U$ функция $f(z^0, w)$ голоморфна по w в круге $\{w : |w| < R\}$.Тогда f голоморфна в поликруге $U \times \{w : |w| < R\}$ по совокупности переменных.

Это утверждение, называемое основной леммой Хартогса, имеет множество различных по характеру обобщений. Одно из них, продолжение функций имеющих полюсов вдоль фиксированного направления, рассмотрено В. Ротштейном и доказано, что такие функции являются мероморфными. М. Казаряном рассмотрен случай, когда особое множество состоит из одной точки. Более окончательный результат при минимальных условиях на множество внутренних сечений, вдоль которых есть такое продолжение, получен в работах А. С. Садуллаева и Е. М. Чирки: пусть

$f(z,w)$ голоморфно в поликруге $U\times\{w:|w|<r\}\subset\mathbf{C}_z^n\times\mathbf{C}_w$ и при каждом фиксированном z^0 из некоторого неплюриполярного множества $E\subset U$ функция $f(z^0,w)$ переменного w продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (конечного) множества особенностей. Тогда $f(z,w)$ голоморфно продолжается в $(U\times\mathbf{C})\setminus S$, где S-замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $U\times\mathbf{C}$.

Одним из особенностей этой теоремы является тот факт, что тонкость особых множеств на сечениях требуется не для всех $z\in U$, а лишь для точек z из некоторого неплюриполярного множества $E\subset U$.

Доказательство теоремы 2.1 основывается на известном методе подклеивания аналитических дисков к порождающему многообразию, а также на свойствах плюрисубгармонических функций и псевдовогнутых множеств (§2.1 – 2.5). Сама теорема 2.1 доказывается в §2.6. Обобщения и следствия из теоремы 2.1 приведены в §2.7.

Глава 3 посвящена задачам о продолжении плюригармонических функций вдоль фиксированного направления.

Отметим, что так называемая основная лемма Хартогса (гл.2) справедлива и в случае плюригармонических (Ph) функций: если функция $u(z,w)$ плюригармонична в области $U\times\{\,w:|w|<r\,\}$, $0<r<R$, и при каждом фиксированном $z\in U$ функция $u(z,w)$ переменного w гармонически продолжается в круг $\{w:|w|<R\}$, то $u(z,w)$ плюригармонична в $U\times\{w:|w|<R\}$. Действительно, функция $f(z,w)=u(z,w)+i\vartheta(z,w)$ удовлетворяет всем условиям основной леммы Хартогса, где $\vartheta(z,w)$ сопряжённая плюригармоническая функция к $u(z,w)$. $f(z,w)$ голоморфна в $U\times\{w:|w|<r\}$ и при любом фиксированном $z^0\in U$ функция $f(z^0,w)$ голоморфна в $\{w:|w|<R\}$. Следовательно, $f(z,w)$ голоморфна в области $U\times\{w:|w|<R\}$ и $\operatorname{Re} f(z,w)=u(z,w)$ плюригармонична в $U\times\{w:|w|<R\}$.

Однако в случае, когда $u(z,w)$ имеет особенности по направлению w, такое простое доказательство не проходит, так как сопряжённая гармоническая функция, в общем случае в неодносвязной области является многозначной функцией, т.е. функция $f(z,w)=u(z,w)+i\vartheta(z,w)$ является многозначной аналитической функцией и в этом случае нам неизвестно однозначная продолжаемость функции $u(z,w)$. В этой главе мы изучаем однозначную продолжаемость таких функции.

Основным результатом главы 3 является

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $u(z,w)$ *плюригармоническая функция в поликруге* $U\times V\subset\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}$ *и при каждом фиксированном* z^0 *из некоторого неплюриполярного множества* $E\subset U$ *функция* $u(z^0,w)$ *переменного* w *продолжается до функции, гармонической на всей плоскости* $\mathbf{C}$, *за исключением одной особой точки. Тогда* $u(z,w)$ *плюригармонически* (*может быть, многозначно*) *продолжается в* $(U\times\mathbf{C})\setminus S$, *где* S *– график некоторой мероморфной функции* $w=a(z)$. *Более того, если* E *не содержится в счетном объединении локальных множеств нулей плюригармонических функций, то продолжение* $u(z,w)$ *является однозначной плюригармонической функцией.*

З а м е ч а н и е 3.1. *Множество* $E\subset\mathbf{C}^n$ *называется локальным множеством нулей плюригармонических функций, если для каждой точки* $z^0\in E$ *существует окрестность* $z^0\in B$ *и функция* $u\in Ph(B)$, $u\not\equiv 0$, *такая, что* $u|_{E\cap B}=0$. *Любое подмножество* $E\subset\mathbf{C}^n$ *положительной меры (или хаусдорфовой размерности* $>2n-1$*) не является счетным объединением локальных множеств нулей* Ph *функций. Наоборот, любая гиперплоскость является нулем некоторой* Ph *функции, хотя она и не является плюриполярной.*

Для доказательства теоремы 3.1 существенно используется аналогичный результат о продолжении голоморфных функций вдоль фиксированных прямых. Сначала устанавливается многозначность продолжении функции u в $(U\times\mathbf{C})\setminus S$, а затем, используя второе условие, что E не содержится в счетном объединении локальных множеств нулей плюригармонических функций, получаем его однозначность. В §3.1 приведен также пример, показывающий, что если E всего лишь неплюриполярное множество, то продолжение функции u не будет однозначным.

Теорема 3.1 обобщается и на случай, когда функция $u(z^0,w)$ имеет конечное число особенностей. Однако в случае, когда особое множество является счетным или полярным, имеет место следующий более слабый результат.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть функция* $u(z,w)$ *плюригармонична в поликруге* $U\times V$ *и при каждом фиксированном* z^0 *из некоторого неплюриполярного* *множества* $E \subset U$ *функция* $u(z^0, w)$ *переменного* w *продолжается до функции, гармонической на всей плоскости* $\mathbf{C}$*, за исключением полярного* (*конечного*) *множества особенностей. Тогда* $u(z,w)$ *плюригармонически* (*может быть, многозначно*) *продолжается в область* $(U \times \mathbf{C}) \setminus S$*, где* S *- некоторое замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество* $U \times \mathbf{C}$.

В §3.2 главы 3 доказывается следующая теорема о продолжении плюригармонических функций по граничным сечениям.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $D \subset \mathbf{C}^n$ *- ограниченная область с кусочно - гладкой границей и* $M \subset \partial D$ *– порождающее* k*-мерное* $(n \le k \le 2n-1)$ *многообразие класса* C^1*. Если функция* $u(z,w)$ *принадлежит* $\mathrm{Ph}(D \times V) \cap C(\overline{D \times V})$ *и при каждом фиксированном* ξ *из некоторого множества* $E \subset M$*, положительной меры Лебега,* $m_k(E) > 0$*, функция* $u(\xi, w)$ *переменного* w *продолжается до функции, гармонической на всей плоскости* $\mathbf{C}$*, то* $u(z,w)$ *плюригармонически продолжается в* $D \times \mathbf{C}$.

С аналитическими функциями тесно связаны также субгармонические функции. Последняя глава диссертации посвящена исследованию особых множеств субгармонических функций.

Устранимые особенности ограниченных субгармонических функций характеризуется ньютоновской (логарифмической при $n=2$) емкостью: любая ограниченная субгармоническая вне E функция субгармонически продолжается на E, тогда и только тогда, когда емкость множества E равна нулю.

В работах А.С. Садуллаева и Ж. Р. Ярметова изучена устранимые особенности субгармонических функций из класса $Lip_\alpha,\ 0 < \alpha \le 2$: пусть E компактное множество в области $G \subset \mathbf{R}^n$ такое, что Хаусдорфова мера $H_{n-2+\alpha}(E) = 0,\ 0 < \alpha \le 2.$ Тогда любая субгармоническая в $G \setminus E$ функция из класса $Lip_\alpha(G)$ субгармонически продолжается в G, т.е. такое множество E является устранимым для субгармонических функций из класса $Lip_\alpha(G)$.

В главе 4 мы изучаем особые множества субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \le p < \infty$. Отметим, что для классов гармонических функций структура особых множеств описана в работах Е. П. Долженко (для класса $Lip_\alpha, 1 \le \alpha \le 2$), Л. Карлесона (для класса $Lip_\alpha,\ 0 < \alpha < 1$), П. Бланшета (для класса C^1), В.Г. Мазья и В. П. Хавина (для класса $L_p^1, 1 \le p < \infty$). При изучении устранимых особенностей гармонических функций существенно используется вещественно аналитичность гармонических функций и тот факт, что значения оператора Лапласа $\Delta u = 0$. Известно, что класс субгармонических функций является более широким и не обладает свойством аналитичности и, обычный метод, используемый для гармонических функций, здесь неприменим. Поэтому изучение особенностей субгармонических функций основывается на методах теории распределения и теории потенциала.

Основными результатами четвертой главы являются следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Пусть* E *- компактное подмножество области* $G \subset \mathbf{R}^n$, $n > 2$. *Всякая субгармоническая в* $G \setminus E$ *функция* $u(x)$ *из класса* $L_p(G)$, $\dfrac{n}{n-2} \le p < +\infty$, *субгармонически продолжается в* G *тогда и только тогда, когда емкость* $C_{q,2}(E) = 0,\ q = \dfrac{p}{p-1}$.

Замечание 4.1. *Если* $p < \dfrac{n}{n-2}$ ($p < +\infty$ *при* $n = 2$), *то уже одноточечное множество не является устранимым, как это видно на примере функции* $\dfrac{1}{|x|^{n-2}}$ ($Ln\dfrac{1}{|x|}$, *при* $n = 2$).

Теорема 4.2. *Пусть* E *- компактное подмножество области* $G \subset \mathbf{R}^n$, $n > 1$. *Всякая субгармоническая в* $G \setminus E$ *функция* $u(x)$ *из класса* $L_p^1(G)$, $\dfrac{n}{n-1} \le p < +\infty$, *субгармонически продолжается в* G *тогда и только тогда, когда ёмкость* $C_{q,1}(E) = 0,\ q = \dfrac{p}{p-1}$.

Замечание 4.2. *В случае* $p < \dfrac{n}{n-1}$ *как и выше одноточечное множество не является устранимым для субгармонической функции из класса* $L_p^1(G)$, *как это видно на примере функции* $\dfrac{1}{|x|^{n-2}}$ ($Ln\dfrac{1}{|x|}$ *при* $n = 2$).

В случае $m = 2,\quad p \ge 1$ в работах Б.И. Абдуллаева аналогичным методом доказано, что устранимые особенности субгармонических функций из класса L_p^2 исчерпываются множествами Лебеговой меры нуль, т.е. множества, $m_n(E) = 0$ и только они являются устранимыми особенностями для класса L_p^2. Кроме того, в случае $m \geq 3,\ p \geq 1$, устранимые особенности субгармонических функций из класса L_p^m полностью описываются нигде неплотными множествами.

Таким образом, объединяя эти результаты, мы получим полное представление об особых множествах субгармонических функций из класса L_p^m.

Следующая теорема дополняет полученные в данном направлении результаты.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть* E *- компактное подмножество области* $G \subset \mathbf{R}^n$, $n > 1$. *Всякая субгармоническая в* $G \setminus E$ *функция* $u(x)$ *с конечным интегралом Дирихле:*

$$\int_G \left|gradu(x)\right|^2 dx < \infty,\ ,\ \forall G \subset\subset G,$$

субгармонически продолжается в G *тогда и только тогда, когда ньютоновская (логарифмическая при* $n = 2$*) ёмкость* $Cap(E) = 0$.

Известно, что устранимые особенности классов ограниченных сверху субгармонических функций, ограниченных субгармонических функций и равномерно непрерывных субгармонических функций имеют одинаковые метрические характеристики: устранимые особенности вышеперечисленных классов субгармонических функций полностью описываются множествами ньютоновской (логарифмической при $n = 2$) ёмкости нуль.

Теорема 4.3 показывает, что множества устранимых особенностей класса субгармонических функций с конечным интегралом Дирихле также совпадают с множествами устранимых особенностей этих классов, что на первый взгляд совсем не является очевидным.

Доказательство теоремы 4.3 вытекает из следующего факта: пусть SH_1-класс субгармонических в $G \setminus E$ и локально ограниченных в области G функций, SH_3-класс субгармонических в $G \setminus E$ и локально ограниченных сверху в области G функций и SH_2-класс субгармонических в $G \setminus E$ функций, с конечным интегралом Дирихле

$$\int_{G'} \left|gradu(x)\right|^2 dx < +\infty,$$

для любого $G' \subset\subset G$. Тогда, если $Cap(E) = 0$, то имеют место соотношения $SH_1 \subset SH_2 \subset SH_3$ (Лемма 4.2).

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту, академику А. С. Садуллаеву за постоянное внимание и поддержку при работе над диссертацией.

3. Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию сепаратно-аналитических функций, аналитического продолжения функций вдоль фиксированного направления и изучению особых множеств субгармонических функций.

По основным результатам диссертационного исследования мы пришли к следующим выводам:

1. Определены область голоморфности сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы, и область гармоничности сепаратно-гармонических функций.

2. Изучены аналитические продолжения функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых.

3. Исследовано продолжение плюригармонических функций вдоль фиксированного направления.

4. Дано полное описание особых множеств субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, с помощью $C_{q,m}$- емкости.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении целей исследований диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят значительный вклад в теорию аналитического продолжения.

4. Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Имомкулов С.А. Сепаратно-субгармонические функции// ДАН УзССР. – 1990. – №2. – С. 8 - 10.
2. Имомкулов С.А. Дважды дифференцируемость субгармонических функций// Известия РАН. Сер. матем. – 1992. – Т.56(4). – С. 877 - 888.
3. Имомкулов С. А. Дифференцируемость субгармонических функций// УзМЖ. – 1994. – №1. – С. 35 - 40.
4. Имомкулов С.А. О гладкости монотонных и выпуклых функций// ДАН РУз. – 1995. – № 9-10. – С. 10 - 12.
5. Имомкулов С.А., Абдуллаев Б.И. Устранимые особенности субгармонических функций из класса L_P и L_P^1 // УзМЖ. – 1997. – №4. – С. 10 - 14.
6. Имомкулов С.А., Абдуллаев Б.И. Устранимые особенности субгармонических функций с конечным интегралом Дирихле// УзМЖ. – 1998. – №2. – С. 26 - 30.
7. Имомкулов С.А., Даужонов О. Дифференциальные свойства потенциалов Рисса // ДАН РУз. – 2000. – №4. – С. 9 - 11.
8. Имомкулов С.А., Хужамов Ж.У. О сепаратно-аналитических функциях многих переменных// УзМЖ. – 2000. – №3. – С. 3 - 7.
9. Имомкулов С.А., Хужамов Ж.У. О голоморфном продолжении функций многих комплексных переменных// Симметрия и дифференциальные уравнения. Сб. труд. меж. конф. КрасГУ. – 2000. – С. 112-113.
10. Имомкулов С.А. О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// ДАН РУз. – 2003. – №3. – С. 15 - 18.
11. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение плюригармонических функций по граничным сечениям// Вестник Национального Университета Узбекистана. –2003. – №3.– С. 40 -43.
12. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями на параллельных сечениях// Вестник КрасГУ. Серия физ-мат.науки – 2004. – Вып. 5/1. – С. 3 - 6 .
13. Имомкулов С.А. О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Известия РАН, серия математическая. – 2005. – Т. 69, №2. – С. 125 -144.
14. Имомкулов С.А. О сепаратно - гармонических функциях// Вопросы математического анализа. Сб. науч. статей. Красноярск. – 2004. – №8 – С. 58 - 65.
15. Туйчиев Т.Т., Имомкулов С.А. Голоморфное продолжение функций, имеющих особенности на параллельных многомерных сечениях// ДАН РУз. – 2004. – №2. – С. 12 -15.

16. Имомкулов С.А., Туйчиев Т.Т. Продолжение голоморфных функций с особенностями конечной ёмкости на граничном пучке комплексных прямых// УзМЖ. –2004. – №3. – С. 39 – 46.
17. Imomkulov S.A., Khujamov J.U. On holomorphic continuation of functions along boundary sections// Mathematica Bohemica.(Czech Republic). – 2005. – 130(3). – P. 309 - 322.
18. Имомкулов С.А., Даужонов О. Дифференциальные свойства потенциалов Рисса// Крайові задачі для диференціальних рівнянь.Зб. наук. праць. Черновці (Украина).– 2005. – Вып. 12.– С. 120-128.
19. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение сепаратно – аналитических функций, заданных на части границы области// Математические заметки . – 2006. – Т .79, №2.– С. 234-243.
20. Имомкулов С.А. О гладкости монотонных и выпуклых функций// новые теоремы молодых математиков – 94: Тез. докл. респ. науч. конф. г.Наманган 1994. С. 39.
21. Имомкулов С.А., Абдуллаев Б.И. Интегральное представление гармонических функций имеющих особое множество// Актуальные проблемы комплексного анализа: Тез. докл. респ. науч. конф. 20-22 ноябрь 1995. – Ургенч. УрГУ, 1995. С. 17-18.
22. Имомкулов С.А., Абдуллаев Б.И. Об особых множествах плюрисубгармонических функций// Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа: Тез. докл. межд. конф. 11-15 сентябрь 2000. – Самарканд, 2000. С. 41.
23. Имомкулов С.А. Граничная теорема единственности для плюригармонических функций// Комплексный анализ и теория потенциала: Тез. докл. межд. конф. 7-12 август 2001. – Киев, 2001. С. 75.
24. Имомкулов С.А., Хужамов Ж.У. О голоморфном продолжении сепаратно-голоморфных функций// Комплексный анализ и теория потенциала:Тез. докл. межд. конф. 7-12 август 2001. – Киев, 2001. С. 85.
25. Имомкулов С.А., Саидов Й.Р. Интегральное представление гармонических функций// Комплексный анализ и теория потенциала:Тез. докл. межд. конф.7-12 август 2001.–Киев, 2001. С.75-76.
26. Имомкулов С.А. Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями// Задачи диф. урав. и мат. анализа: Тез. докл. респ. науч. конф. 13-15 сентябрь 2001. – Нукус,2001. С. 3.
27. Имомкулов С.А. О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Многомерный комплексный анализ: Тез.докл. межд. конф. 5-10 август 2002. – Красноярск, КрасГУ, 2002. С. 16.
28. Imomkulov S.A. Boundary Properties of pseudoconcave sets// Kolmogorov and contemporary mathematics: International conference. June 16-21, 2003. – Moscow, 2003. Part 2. P. 938-939

29. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение плюригармонических функций вдоль фиксированного направления// Геометрический анализ и его приложения: Тез. докл. межд. школы- конф.24-30 мая 2004. – Волгоград, 2004. С.156 – 158.
30. Imomkulov S.A. On holomorphic continuation of functions// Joint math. meeting. AMS 1003-32-828. 5-8 January 2005, Atlanta, GA, USA.

Р Е З Ю М Е

диссертации Имомкулова Севдиёра Акрамовича на тему **«Аналитическое продолжение функций, заданных на части границы»,** представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01- математический анализ

Ключевые слова: аналитическое продолжение, сепаратно-аналитическая функция, N-множества, P-мера, комплексная теория потенциала, потенциал Рисса, субгармоническая функция, плюригармоническая функция.

Объект исследования: сепаратно-аналитическая функция, голоморфная функция, плюригармоническая функция, сепаратно-гармоническая функция, субгармоническая функция.

Цель работы: определение области голоморфности сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области;

изучение аналитической продолжаемости функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых;

исследование продолжения плюригармонических функций вдоль фиксированного направления;

описание структуры особых множеств субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \leq p < \infty$.

Методы исследования: методы теории функций многих комплексных переменных, комплексной теории потенциала и теории аналитических пространств.

Полученные результаты и их новизна:

- определены области голоморфности сепаратно-аналитических и сепаратно-гармонических функций, заданных на части границы.

- изучены аналитические продолжения голоморфных и плюригармонических функций вдоль фиксированного направления.

- структура особых множеств субгармонических функций из класса $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, полностью описана через $C_{q,m}$- ёмкость.

Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Практическая значимость: диссертационная работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: методы и результаты, представленные в работе могут быть использованы в дальнейшем развитии теории функций. Они также могут быть полезными в приложениях комплексного анализа.

Область применения: теория функций комплексного переменного и её приложения.

Физика – математика фанлари доктори даражасига талабгор
Имомкулов Севдиёр Акрамовичнинг
01.01.01 – математик анализ ихтисослиги буйича
«Соха чегараси кисмида аникланган функцияларни соха ичига аналитик давом эттириш» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сузлар: аналитик давом эттириш, сепарат-аналитик функция, N – туплам, P – улчов, комплекс потенциаллар назарияси, Рисс потенциали, субгармоник функция, плюригармоник функция.

Тадкикот объектлари: сепарат-аналитик функциялар, голоморф функциялар, плюригармоник функциялар, сепарат-гармоник функциялар, субгармоник функциялар.

Ишнинг максади: соха чегараси кисмида аникланган сепарат-аналитик функцияларни голоморфлик сохаларини аниклаш;

комплекс тугри чизикларнинг чегаравий дастасида аникланган функцияларни аналитик давом этишлари хакидаги масалани урганиш;

плюригармоник функцияларни бир йуналиш буйлаб давом эттириш масаласини тадкик килиш;

$L_p^m, 1 \leq p < \infty$, синфга карашли субгармоник функцияларни махсуслик тупламларини тузилишини урганиш.

Тадкикот усуллари: куп комплекс узгарувчининг функциялари назарияси усуллари, комплекс потенциаллар назарияси ва аналитик фазолар назарияси усуллари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги:

– чегара кисмида аникланган сепарат-аналитик ва сепарат-гармоник функцияларнинг голоморфлик сохалари аникланди;

– голоморф ва плюригармоник функцияларни бир йуналиш буйлаб давом эттириш масаласи урганилди;

– $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, синфга карашли субгармоник функцияларни махсуслик тупламларининг тузилиши $C_{q,m}$- сигим ёрдамида тула тахлил килинди.

Амалий ахамияти: диссертация назарий ахамиятга эга.

Тадбик этиш даражаси ва иктисодий самарадорлиги: диссертациядаги натижалар ва усуллар функциялар назариясининг кейинги ривожланишида ва комплекс анализнинг тадбикларида кулланилиши мумкин.

Кулланиш сохаси: комплекс узгарувчининг функциялари назарияси ва унинг тадбиклари.

RESUME

of the thesis of Imomkulov Sevdiyor Akramovich on the scientific
degree of the doctor of Physics and Mathematics,
speciality 01.01.01- mathematical analysis,
subject:
“Analytical continuation of functions from a piece of the boundary”

Key words: analytical continuation, separately-analytical functions, N-sets, P-measure, complex theory of potential, Riesz`s potential, subharmonic function, pluriharmonic function.

Subject of the inquiry: separately-analytical functions, holomorphic functions, pluriharmonic functions, separately-harmonic functions, subharmonic function.

Aim of the inquiry: to determinate of the domain of holomorphicity of the separately-analytic functions from the piece of the boundary;

to study analytically continuability of functions defined on a pencil of boundary complex line;

to study continuation of the pluriharmonic functions in a fixed direction;

to describe structure of singular sets of subharmonic functions from $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, class.

Methods of inquiry: methods of theory of functions of several complex variables, complex theory of potential and theory of analytical spaces.

Achieved results and their novelty:

– determined a domains of holomorphy of separately-analytic and separately-harmonic functions defined on a piece of boundary;

– studied analytic continuation of holomorphic and pluriharmonic functions in a fixed direction;

– described the structure of singular sets of subharmonic functions from $L_p^m, 1 \leq p < \infty$, class through $C_{q,m}$- capacity.

All proved theorems are new.

Practical value: dissertation has a theoretical character.

Applications and economical efficiency: presented methods and results can be used for the further developing of the functions theory. They also can be useful in the applications of the complex analysis.

Area of application: the theory of functions of complex variable and its application.