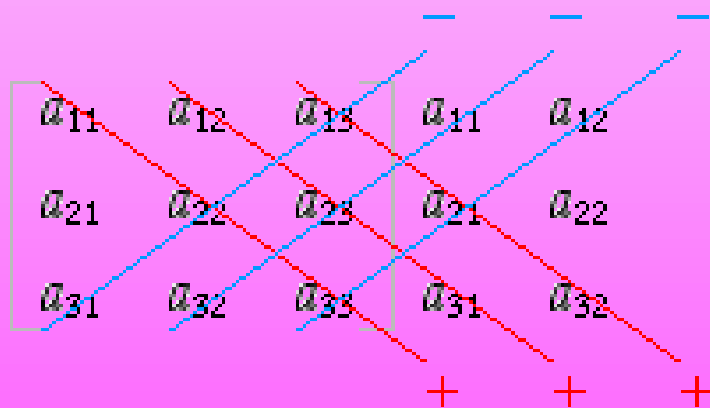


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV XO'JALIGI VAZIRLIGI
TOSHKENT DAVLAT AGRAR UNIVERSITETI

MATEMATIKA VA AXBOROTLAR TEXNOLOGIYASI KAFEDRASI

D. RASULOVA B. ABDALIMOV

DETERMINANT, MATRITSALARNI IQTISODIY MASALALARNI YECHISHGA
TATBIQLARI



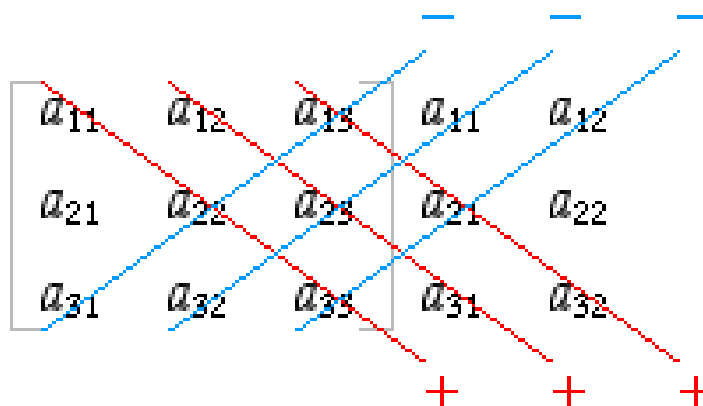
TOSHKENT - 2014

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV XO'JALIGI VAZIRLIGI
TOSHKENT DAVLAT AGRAR UNIVERSITETI

D. RASULOVA

B. ABDALIMOV

DETERMINANT, MATRITSALARNI IQTISODIY MASALALARNI
YECHISHGA TATBIQLARI



TOSHKENT - 2014

Maqola ma'lumotnoma ko'rinishida yozilgan bo'lib, unda determinant va matritsalar haqida asosiy tushunchalar, ularni yechish usullari hamda ularning qishloq xo'jaligi masalalarini yechishga tatbiqlari o'z ifodasini topgan.

Maqolada shuningdek, mavzularga doir asosiy tushuncha va tasdiqlarni mumkin qadar soddaroq, namunaviy misollar yechish bilan bayon etib, o'quvchi uchun tushunarli tarzda yoritishga harakat qilingan.

Maqola qishloq xo'jaligi sohasi mutaxassislari, iqtisod oliy o'quv yurtlari talabalari, kasb-hunar kolleji va akademik litsey o'quvchilari, abituriyentlar va maktab o'quvchilari uchun mo'ljallangan.

D. RASULOVA

B. ABDALIMOV

So'z boshi

Xalq xo'jaligining barcha sohalari iqtisodiyotda bo'ladigan o'zgarishlar rejalashtirish bilan, tahlil bilan va ko'p sonli operatsiyalar bilan bog'liqligi sababli ularni tatbiqiy matematikasiz tasavvur qilish qiyin.

Oliy matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish bilan bog'langandir. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga kelganligi bunga dalildir.

Biz quyida sodda chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish yo'llari haqida fikr yuritamiz. Bunday sistemani yechishda determinant hamda matritsalar haqida tushunchaga ega bo'lish muhim ahamiyat kasb etadi.

Shu sababli, biz ushbu maqolamizda

1. Determinantlar va ularni yechish usullari.
2. Matritsalar haqida asosiy tushunchalar va ular ustida amallar.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi va matritsalar yo'li bilan yechish

haqida tushunchalar berib, yechish uchun qo'llanma sifatida tavsiya etamiz.

DETERMINANT, MATRITSALARNI IQTISODIY MASALALARNI YECHISHGA TATBIQLARI

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ta'rif: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ haqiqiy sonlar yordamida tuzilgan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ miqdor *ikkinchi tartibli determinant* deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar *determinantning elementlari* deyiladi. a_{11}, a_{12} - determinantning *birinchi satri*, a_{21}, a_{22} - *ikkinchi satri*, a_{11}, a_{21} - determinantning *birinchi ustuni*, a_{12}, a_{22} - *ikkinchi ustuni* deyiladi.

Ikkinchi tartibli determinantni ochish qoidasini simvolik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \swarrow & -a_{12} \\ a_{21} & \searrow & +a_{22} \end{array}$$

a_{11} va a_{22} dan iborat had determinantning *bosh diagonal* deyiladi, a_{12}, a_{21} esa *ikkinchi diagonal* deyiladi. Bosh diagonal uchidagi elementlar ko'paytirilib musbat, ikkinchi diagonal uchidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinib, natijalar qo'shiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{21}a_{12})$$

Misol 1. Quyidagi ikkinchi tartibli determinantlar hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Yechish:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 3 = 16 - 18 = -2$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-7) = 6 + 7 = 13$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

Ta’rif: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlardan tuzilgan

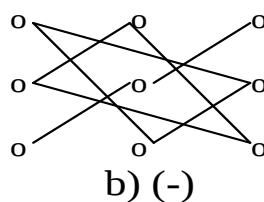
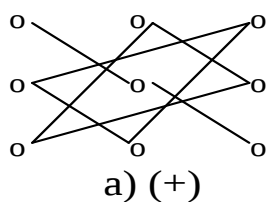
$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ifoda *uchinchi tartibli determinant* deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Uchinchi tartibli determinantni hisoblash usullari:

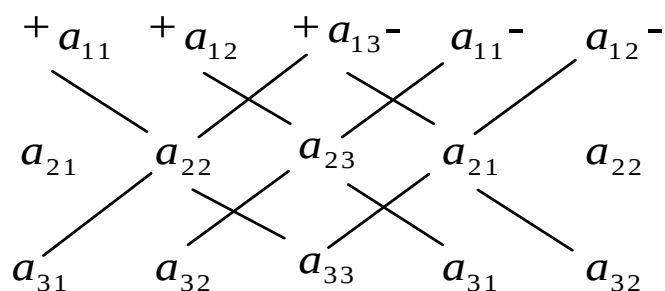
1. Uchburchak qoidasi. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash uchun «Uchburchaklar qoidasi» deb ataluvchi quyidagi sxemadan foydalanish mumkin:



1-rasm

Bosh diagonal va uni kesib o’tuvchi uchburchaklarning uchlaridagi elementlar ko’paytmalari “+” ishora bilan, ikkinchi diagonal va uni kesib o’tuvchi uchburchaklarning uchlaridagi elementlarning ko’paytmalari “-” ishoralar bilan olinib, natijalar qo’shilsa, uchinchi tartibli determinant qiymati kelib chiqadi.

2. Sarrius usuli. Uchinchi tartibli determinantni “Sarrius usuli”da quyidagi sxema bo’yicha hisoblaniladi.



2-rasm.

Bu yerda tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, asosiy diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «+» ishora bilan, yon diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «-» ishora bilan olinib, natijalar qo'shiladi.

3. Determinant elementlarini yoyib yozish orqali hisoblash usuli. Ikkinchi tartibli determinantning qiymatlaridan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni quyidagi yo'l bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta haddan iborat bo'lib, ularning 3 tasi “+” ishora bilan 3 tasi esa “-” ishora bilan olinadi.

Misol 2. Ushbu

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hisoblang.

Yechish:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot (-5) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = 110$$

Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar

Biror n -tartibli determinantning a_{ij} elementining minori deb, shu element turgan yo'l va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan $n-1$ tartibli determinantga aytiladi va odatda M_{ij} orqali belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantning a_{23} elementining minori $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinant bo'ladi.

n -tartibli determinantning a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb, shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va A_{ij} orqali belgilanadi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Misol 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantning a_{43} elementining minorini va a_{21} elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

Yechish:

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 - 15 + 8 = -24$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-24+3-6+4) = -23.$$

Chiziqli tenglamalar sistemasi

Ta'rif: Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

sistema *ikki noma'lum ikkita chiziqli tenglama sistemasi* deb ataladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar tenglamalar sistemasining *koeffitsientlari*, b_1, b_2 sonlar esa *ozod hadlar* deyiladi.

(1) tenglamalar sistemasining koeffitsientlaridan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

determinantni tuzamiz. So'ng (2) determinantning birinchi ustunidagi elementlarni (1) sistemaning ozod hadlari bilan almashtirib, quyidagi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

determinantni, ikkinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib, quyidagi

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

determinantni hosil qilamiz.

1 – teorema.

1. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu yechimlar

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi.

2. Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, (1) sistemaning yechimi mavjud bo'lmaydi.

3. Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Sistemani determinantlar yordamida bunday yechish usuli *Kramer qoidasi* deyiladi.

Misol 4. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistema uchun yuqoridagi (2), (3), (4) determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 11 \cdot (-5) = 3 + 55 = 58,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 11 = 33 - 44 = -11.$$

1-teoremadan foydalanib, berilgan sistemaning yechimini topamiz:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-11}{29} = -\frac{11}{29}.$$

Ta'rif: Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

sistema uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi deb ataladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsientlari, b_1, b_2, b_3 sonlar esa ozod hadlar deb ataladi.

Quyidagi uchinchi tartibli determinant tuziladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

1) Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu yechimlar

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo'ladi.

2) Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$ bo'lsa, (5) sistemaning yechimi mavjud bo'lmaydi.

3) Agar $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ bo'lsa, u holda (5) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Misol 5. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 4z = -3 \\ 5x - 4y + 6z = 5 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistema uchun yuqoridagi (6) - (9) determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 + 60 - 10 - 32 = 56,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -60 + 36 + 60 - 10 - 161 + 80 = -55,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -108 + 100 + 5 + 45 + 30 + 40 = 112,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 20 + 135 + 50 + 15 - 72 = 168.$$

Berilgan tenglamalar sistemasining yechimi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-55}{56} = -1,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{168}{56} = 3.$$

bo'ladi.

Misol 6.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish: Sistema determinanti $\Delta \neq 0$ ekanligi tekshiriladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 36 + 6 - 8 - 27 + 6 = 7 \neq 0$$

So'ngra, Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 lar hisoblanadi:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 10 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -60 - 18 + 60 + 24 + 60 - 45 = 21,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 20 - 36 - 20 - 6 + 90 = -7,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 30 + 180 - 40 - 30 - 54 = 14$$

Shunday qilib, berilgan sistemaning yechimi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$$

Chiziqli teglamalar sistemasi tushunchasiga tabiiy yondashish uchun quyidagi qishloq xo'jaligi ishlab chiqarish masalasini ko'raylik:

1-masala. Xo'jalk 400 ga yerga va ekish-terish ishlariga sarflash uchun 450000 so'm pulga ega. Ekiladigan paxta va bug'doydan kutiladigan hosil mos ravishda 25 s., 40 s. Har bir gektar paxta ekiladigan yerga 1400 so'm, bug'doyga 300 so'm sarflansin.

Barcha yer va pul resurslaridan foydalaniladigan variant (yechim) topilsin:

Yechish: x va y orqali – yetishtiriladigan paxta va bug'doy hajmini belgilab olamiz.

Savol: Yer ajratish tenglamasi qanday yozilgan?

Javob: Jami yetishtiriladigan paxta miqdori x ni har bir gektar yerdan kutiladigan hosil miqdori 25 s, ya'ni 2,5 t ga va mos ravishda y ni 2 t ga bo'lsak, u holda kutiladigan hosilni olish uchun $x/2,5$ ga yerga paxta, $y/4$ ga yerga bug'doy ekilishi kerak bo'ladi. Barcha yer 400 ga bo'lgani uchun $x/2,5 + y/4 = 400$ yoki $8x + 5y = 8000$ bo'ladi.

Savol: Ajratilgan mablag' bo'linishi tenglamasini qanday yozish mumkin?

Javob: Paxtaga ajratilgan gektarlar 1400 s ga, bug'doyga ajratilgani 300 s ga ko'paytiriladi, ularning yig'indisi 450000 s ni tashkil qilishi kerak

$$\frac{x}{25} \cdot 1400 + \frac{y}{4} \cdot 300 = 450000 \text{ yoki } 112x + 15y = 90000.$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 8x + 5y = 8000 \\ 112x + 15y = 90000 \end{cases}$$

Bu sistemani noma'lumni kamaytirish yo'li bilan yechamiz.

Yechish: Birinchi tenglama har bir hadini 14 ga ko'paytirib, ikkinchining mos hadlaridan ayiramiz:

$$\begin{cases} 8x + 5y = 8000 \\ -55y = -22000 \end{cases}$$

Sistema yechimiga ega bo'lamiz: $y = 400$ t, $x = 750$ t.

Savol. Paxta va bug'doy uchun qancha yer ajratilgan?

Javob: 750 t ni 2,5 t ga, 400 t ni 4 t ga bo'lib, paxta uchun 300 ga, bug'doy uchun 100 ga yer ajratilganini aniqlaymiz.

Matritsalar. Ular ustida amallar. Teskari matritsalar. Matritsali tenglamalarni yechish

Matritsaning umumiy ko'rinishi to'g'ri to'rtburchakli m-ta satr, n-ta ustundan iborat jadval bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

a_{ij} - matritsaning elementlari deyiladi, bunda i – uning satr belgisi, j – ustun belgisi.

Agar satrlar va ustunlar soni teng bo'lsa, ya'ni $n = m$ bo'lsa, bunday matritsa *kvadrat matritsa* deb ataladi.

Agar kvadrat matritsaning asosiy diagonalidan tashqari barcha elementlari nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

bunday matritsa *diagonal matritsa* deb ataladi.

Diagonal matritsaning diagonalidagi barcha elementlari 1 ga teng bo'lsa, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

bunday matritsa *birlik matritsa* deb ataladi.

$A=(a_{ij})$ matritsaga *transponirlangan matritsa* deb, uning barcha satrlari mos ravishda ustunlari bilan almashtirilgan matritsaga aytiladi, $A^T=(a_{ji})$. Agar biror A matritsa uchun $A=A^T$ bo'lsa, uni simmetrik matritsa deyiladi.

Agar matritsa birgina satrdan iborat bo'lsa, bunday matritsa *satr-matritsa* deyiladi, masalan, (2, 3, 4). Agar matritsa birgina ustundan iborat bo'lsa, bunday matritsa *ustun-matritsa* deyiladi, masalan, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ikkita matritsa $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ lar *bir tipli* deyiladi, agar ularda satrlar va ustunlar soni bir xil bo'lsa, bir tipli matritsalar ustida qo'shish, ayirish amallarini bajarish mumkin. Bunda mos elementlar qo'shiladi yoki ayiriladi. Masalan, (3 x 4) tipli matritsalar uchun:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}$$

Misol 7. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsalarining yig'indisini hisoblang.

Yechish:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matritsa A ning biron k soniga ko'paytmasi deb, shunday kA matritsaga aytiladiki, bunda uning har bir elementi A ning mos elementlarini k soniga ko'paytirishdan hosil bo'ladi. Masalan,

$$kA = \begin{pmatrix} 3k & 2k & -4k \\ 1k & 5k & 3k \end{pmatrix}, \quad k = 2 \text{ bo'lsa,}$$

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Ikkita matritsani ko'paytirishda quyidagi shart bajarilishi kerak: birinchi matritsa ustunlar soni ikkinchi matritsa satrlar soniga teng bo'lishi kerak, ya'ni $(m \times n)$ tipdagi matritsani $(n \times k)$ tipdagi matritsaga ko'paytirish mumkin.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

C matritsa $(m \times k)$ tipli bo'lib, bunda $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, ya'ni C matritsaning i – satr, j – ustundagi elementini topish uchun A matritsaning i satrdagi elementlarini B matritsaning j ustundagi elementlariga mos ravishda ko'paytirib, yig'indisi olinadi.

Misol 8. Quyidagi matritsalar ko'paytmasi topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ -8 & 1 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$$

Masala 2. Xo'jalikdagi 3 ta sigirdan sut sog'ilishi miqdori va undagi yog' va oqsil moddalar quyidagi jadval sifatida berilgan bo'lsin.

	Sog'ilgan sut miqdori l.	Yog'liligi %	Oqsil %
Govmush	5000	4,2	3,4
Qashqa	4260	4,0	3,5
Merka	4850	3,8	3,6

Quyidagi matritsalar tuzamiz:

$$A = (5000 \quad 4260 \quad 4850), \quad B = \begin{pmatrix} 0,042 & 0,034 \\ 0,04 & 0,035 \\ 0,038 & 0,036 \end{pmatrix}$$

Ularni ko'paytmasi bilan

$$A \cdot B = (5000 \quad 4260 \quad 4850) \cdot \begin{pmatrix} 0,042 & 0,034 \\ 0,04 & 0,035 \\ 0,038 & 0,036 \end{pmatrix} = (564,7 \quad 493,7)$$

barcha sutdagi umumiy yog' va oqsil miqdorlarini aniqlaymiz.

Masala 3. Xo'jalikda paxta, bug'doy, sholi ekiladi. Yillik reja shartli birliklarda $X = (12, 4, 5)$ satr-matritsa orqali berilgan bo'lib, butun texnologik jarayonda har bir shartli birlik mahsulot uchun sarflangan mablag' shartli birliklarda quyidagi jadval orqali berilgan:

	Urug'lik uchun	Qo'l mehnat uchun	Mex. mehnat uchun	Sug'orish	O'g'it uchun
Paxta	2	5	6	3	3
Bug'doy	3	0	4	1	1
Sholi	4	4	1	5	1

Savol: Texnologik jarayon deb nimaga aytiladi?

Javob: Bu, urug' ekishdan boshlab, to hosilni yig'ib olguncha bo'lgan barcha ishlar yig'indisi.

Savol: Barcha xarajatlar matritsasi qanday yoziladi?

Javob:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Savol: Sarflangan mablag'lar qanday hisoblanadi?

Javob: X va A matritsalar ko'paytmasidan topiladi:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 80 & 93 & 65 & 45 \end{pmatrix}$$

Teorema: Ikkita bir xil o'lchovli kvadrat matritsalar ko'paytmasi determinanti ko'payuvchilar determinantlari ko'paytmasiga teng:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Misol 9.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = 5, \quad \det B = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\det(A \cdot B) = 5 = 5 \cdot 1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 14 & 9 \end{vmatrix} = 117 - 112 = 5$$

Ta'rif: Berilgan kvadrat matritsa A ga teskari matritsa deb shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, ularning ko'paytmasi birlik matritsa E ni beradi, ya'ni

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$$

Berilgan kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun $\det A \neq 0$ bo'lishi kerak, chunki aks holda

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$$

tenglik ma'noga ega bo'lmaydi.

Teorema: Matritsa A teskari matritsaga ega bo'lishi uchun $\det A \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Bunday matritsa *xosmas matritsa* deyiladi. Haqiqatdan ham, bu shart bajarilsa,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (13)$$

dan teskari matritsa topiladi, bu yerda $\Delta = \det A$, A_{ij} – algebraik to’ldiruvchi va $\tilde{A}$ - qo’shilgan matritsa.

Misol – 10. Quyidagi matritsaga teskari matritsa topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Avvalo, uning determinanti $\det A$ hisoblanadi.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 36 - 4 - 6 - 8 + 9 = 30 \neq 0,$$

demak, A teskari matritsaga ega. Har bir element uchun algebraik to’ldiruvchilar topiladi.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Teskari matritsa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{30} & -\frac{5}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{15}{30} & -\frac{3}{30} & -\frac{5}{30} \\ -\frac{5}{30} & \frac{7}{30} & \frac{7}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

Misol – 11. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Sistemani matritsaviy ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Sistema yechimini topamiz:

$$x = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2$$

Matritsalarini elementar o'zgartirish deb quyidagilarga aytiladi:

1. Ixtiyoriy ikkita satrlar (ustuni) joyini almashtirish;
2. Satr (ustun) elementlarini biror noldan farqli songa ko'paytirish;
3. Satr (ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) elementlariga mos ravishda qo'shish.

Quyida bulardan foydalanib, xosmas A matritsaga teskari matritsa topishning ancha oson usulini keltiramiz. Ma'lumki, ixtiyoriy xosmas A matritsani elementar

o'zgarishlar yordamida birlik matritsa E ko'rinishiga keltirish mumkin. Agar A ustida bajarilgan elementar O'zgarishlarni E ustida bajarilsa, A^{-1} matritsa hosil bo'ladi. Bu yerda elementar o'zgarishlar faqatgina yo satrlar bo'yicha, yo ustunlar bo'yicha bajarilishi kerak. Misolda ko'raylik.

Misol – 12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{bunda} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Quyidagicha yozib olib, elementar o'zgarishlar o'tkazamiz:

$$\begin{aligned} C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{II} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -8 & 0 & 2 \end{array} \right) &\xrightarrow{III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array} \right) &\xrightarrow{IV} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array} \right) &\xrightarrow{V} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \end{array} \right) = \tilde{O} \end{aligned}$$

Bunda biz quyidagi o'zgarishlarni bajardik:

I – Birinchi satr elementlarini mos ravishda 2 va 4 ga ko'paytirib, ikkinchi va uchinchi satr mos elementlaridan ayrildi;

II – Ikkinchi satr elementlari birinchi satr mos elementlariga qo'shildi, uchinchi satr elementlari 2 ga ko'paytirildi;

III – Ikkinchi satr elementlari 3 ga ko'paytirilib, uchinchi satr mos elementlaridan ayrildi;

IV – Uchinchi satr elementlari ikkinchi satr mos elementlariga qo'shildi;

V – Ikkinchi satr elementlari $\frac{1}{2}$ ga teng ko'paytirildi.

Shunday qilib,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Haqiqatdan ham,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-2 & 1+2-3 & 0-2+2 \\ -2+4-2 & 2+2-3 & 0-2+2 \\ -4+10-6 & 4+5-9 & 0-5+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Endi chiziqli tenglamalar sistemasining ishlab chiqarishdagi muhim tatbiqini – tarmoqlararo balans sistemasi modelini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, n ta ishlab chiqarish tarmoqlari bo'lib,

i – tarmoqning yalpi mahsuloti x_i va unga talab y_i bo'lsin.

i – tarmoqning j – tarmoq mahsulotini ishlab chiqarish uchun mahsulotning bir qismi sarflansin. a_{ij} orqali 1 birlik j – tarmoq mahsulotini ishlab chiqarish uchun sarflangan

i – tarmoq mahsuloti koeffitsientini baholaymiz.

U holda

[illegible]

Bu sistemani o'zgartirib yozsak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

[illegible]

Bu sistemalarni to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix},$$

Yalpi mahsulot ustun-matritsasi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

yakuniy mahsulot ustun-matritsasi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ va birlik matritsa E lar yordamida

matritsaviy ko'rinishda yozamiz:

$$X = A \cdot X + Y \text{ yoki } (E - A) \cdot X = Y$$

Savol: Bu matritsaviy tenglamalar teng kuchlimi?

Javob: Ha, ikkinchisini hosil qilish uchun birinchisidan AX ni tenglikning chap tomoniga o'tkazamiz $X - AX = Y$ da X ni qavsdan tashqariga chiqaramiz

$$(E - A)X = Y.$$

Yuqorida ko'rganimizday, bu matritsaviy tenglamani yechish uchun tenglikning ikkala tomonini chapdan $(E-A)^{-1}$ ga ko'paytiramiz: $X = (E-A)^{-1} Y$, $(E-A)^{-1} = B$ desak, $X = BY$ hosil bo'ladi. Bunda B to'liq xarajatlar koeffitsientlari matritsasi, uning elementi b_{ij} esa j - tarmoq mahsulotining bir birligini chiqarish uchun sarflanadigan i - tarmoq mahsulotini aniqlaydi.

Endi tarmoqlararo balans sistemasiga misol keltiramiz va uni yuqorida aytib o'tilgan usul bilan yechish usulini ko'rsatamiz.

Masala-4. Iqtisodiyot shartli ravishda 3 ta sektorga bo'lingan bo'lsin: I-og'ir sanoat, II-qishloq xo'jaligi, III-yengil sanoat. Quyidagi jadvalda to'g'ri moddiy xarajatlar koeffitsientlari va yakuniy mahsulot hajmi (shartli raqamlarda) berilgan bo'lsin:

	Yalpi mahsulot	To'g'ri xarajatlar koeffitsienti			Yakuniy mahsulot
		I	II	III	
I	X	0,2	0,2	0,3	104
II	Y	0,1	0,1	0,3	77
III	Z	0,2	0,1	0,2	92

Ushbu shartlar bo'yicha yalpi mahsulot hisoblansin. (15) dan foydalanib, tarmoqlararo balans tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} (1-0,2)x - 0,2y - 0,3z = 104 \\ -0,1x + (1-0,1)y - 0,3z = 77 \\ -0,2x - 0,1y + 0,8z = 92 \end{cases}$$

10-misolda qo'llaniladigan usul yordamida sistema matritsasining teskari matritsasini topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0,8 & -0,2 & & -0,3 & 1 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0,9 & & -0,3 & 0 & 1 & 0 \\ -0,2 & -0,9 & & 0,8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -2 & -3 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 3 & 0 & -10 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 3 & 0 & -10 & 0 \\ 8 & -2 & -3 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -9 & 3 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 70 & -27 & 10 & 80 & 0 \\ 0 & -19 & 14 & 0 & -20 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{33}{70} & \frac{9}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{27}{70} & \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{467}{70} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & 10 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4830}{3269} & \frac{1330}{3269} & \frac{330}{467} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{980}{3269} & \frac{4060}{3269} & \frac{270}{467} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1330}{3269} & \frac{840}{3269} & \frac{700}{467} \end{array} \right)$$

Teskari matritsadan foydalanib, masalaning yechimini topamiz:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4830}{3269} & \frac{1330}{3269} & \frac{330}{467} \\ \frac{980}{3269} & \frac{4060}{3269} & \frac{270}{467} \\ \frac{1330}{3269} & \frac{840}{3269} & \frac{700}{467} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 104 \\ 92 \\ 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Demak, $x = 250$, $y = 180$, $z = 200$ ekan.

Masala – 5. Qoramolni bo'rdoqilikga semirtirish uchun quyidagi ratsion o'rnatilgan:

10 kg pichan, 20 kg lavlagi va 2 kg yanchilgan arpa. Buni satr-matritsa ko'rinishida yozsak $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 2 \end{pmatrix}$. Ma'lumki, pichan o'z tarkibida 12% protein, 24% hujayra moddasi, 35% azotsiz ekstrakt moddalar, 75% organik moddalar saqlaydi.

Bu ko'rsatkichlar:

Lavlagi uchun	1,6%,	0,9%,	9,5%,	12,1%.
Arpa uchun	11%,	9,8%,	58%,	83,5%.

Ushbu ko'rsatkichlar bo'yicha quyidagi matritsa tuzamiz:

$$B = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,24 & 0,36 & 0,75 \\ 0,016 & 0,009 & 0,095 & 0,121 \\ 0,11 & 0,098 & 0,58 & 0,835 \end{pmatrix}$$

Savol: Kunlik ratsionda bu moddalardan qancha borligini qanday hisoblash mumkin?

Javob: A va B matritsalarini ko'paytirib topiladi:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 10 & 20 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,12 & 0,24 & 0,36 & 0,75 \\ 0,016 & 0,009 & 0,095 & 0,121 \\ 0,11 & 0,098 & 0,58 & 0,835 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,2 + 0,32 + 0,22 & 2,4 + 0,18 + 0,196 & 3,6 + 1,9 + 1,16 & 7,5 + 2,42 + 1,67 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,74 & 2,776 & 6,66 & 11,59 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Masala – 6. Uchta N, M, K xo'jalik yetishtirgan paxta hosilini №1 va №2 paxta zavodlariga topshiradigan bo'lsin.

Paxta tashish hajmi:

Paxta zavodlari \ Xo'jaliklari	№1	№2
N	1600 t	800 t
M	1200 t	2000 t
K	1300 t	1750 t

va tashish uchun sarflaydigan mablag':

Xo'jaliklar \ Paxta zavodlari	N	M	K
№1	2,3	4	5,4
№2	3,5	3,2	2,1

Jadvallar orqali berilgan bo'lsin(ikkinchi jadval shartli pul birliklarida).

Savol: Bu masalada umumiy transport xarajatlari qanday hisoblanadi?

Javob: Avvalo, bu jadvallarga moslab A va B matritsalar tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1600 & 800 \\ 1200 & 2000 \\ 1300 & 1750 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2,3 & 3 & 5,4 \\ 3,5 & 3,2 & 2,1 \end{pmatrix}$$

va ularni ko'paytmasini topamiz:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6480 & 9860 & 10320 \\ 9760 & 11200 & 10680 \\ 9115 & 10800 & 10695 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa asosiy diagonal elementlari har bir xo'jalikning umumiy transport xarajatlarini beradi.

Masala – 7. Korxona 3 xil mahsulot $x = (20 \ 7 \ 10)$ vektor-reja bo'yicha ishlab chiqarsin. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 4 xil homashyo A matritsa bo'yicha ishlatilsin.

Homashyo xillari

$$A = (a_{ij}) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ mahsulot xillari}$$

bunda, masalan, a_{23} – ikkinchi mahsulotni bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflangan uchinchi homashyo miqdori va hokazo. Undan tashqari,

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lib, uning birinchi ustunida har bir homashyo bir birligining narxi, ikkinchi ustunda har bir homashyo bir birligini tashish uchun ketgan transport xarajatlari bo'lsin.

Savol: Har bir mahsulot bir birligi tannarxi va umumiy xarajatlari qanday topiladi?

Javob: A va B matritsalarini ko'paytirib, mahsulotlar birligi tannarxini topamiz:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 86 & 17 \\ 92 & 21 \\ 109 & 27 \end{pmatrix}$$

vektor-reja (satr-matritsa)ni hosil bo'lgan $A \cdot B$ matritsaga ko'paytirib, barcha xarajatlar topiladi:

$$X \cdot (A \cdot B) = (20 \quad 7 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 86 & 17 \\ 92 & 21 \\ 109 & 27 \end{pmatrix} = (3454 \quad 757)$$

Savol: Natija nimani bildirdi?

Javob: Bunda 3454 shartli pul birligi homashyoga va 757 transportga sarflangan.

Matritsa rangi

Ixtiyoriy A matritsa (10) berilgan bo'lsin. Bu matritsada ixtiyoriy k ta satr va k ta ustun olsak, ularning kesishgan joyida turuvchi elementlar k -tartibli kvadrat matritsa tashkil qiladi va bu matritsaning determinanti A matritsaning k -tartibli minori deyiladi.

Ta'rif: Nolga teng bo'lmagan minorlar orasida eng yuqori tartibi, berilgan matritsaning *rangi* deyiladi va $\text{rang} A = r$ deb belgilanadi.

Demak, agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, uning barcha tartibi r dan katta, minorlari 0 ga teng. O'z-o'zidan ravshanki, har qanday matritsaning rangi $0 \leq r \leq \min(m, n)$ tengsizlikni qanoatlantiradi, bunda m, n lar mos ravishda satrlar va ustunlar soni.

Endi matritsa hisoblashda qulayliklar yaratuvchi ushbu xossalarni ta'kidlab chiqamiz:

1. Matritsa transponirlanganda;
2. Satrlari (ustunlari) o'zaro o'rin almashtirilganda;
3. Satrning (ustunning) barcha elementlari o dan farqli songa ko'paytirilganda;
4. Biror satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlari biror songa ko'paytirilib, qo'shilsa;
5. Butunlay nollardan tashkil topgan satr (ustun) olib tashlansa;

Bunda $\tilde{\mathbf{A}}$ (16) sistemaning kengaytirilgan matritsasi deyiladi.

Teorema: Chiziqli tenglamalar sistemasi (16) birgalikda bo'lishi uchun A va $\tilde{A}$ matritsalar ranglari teng bo'lishi zarur va kifoya.

A va $\tilde{A}$ matritsalarining ranglari teng bo'lganda, $\text{rang} A$ birgalikda chiziqli tenglamalar sistemasining rangi deyiladi.

I. Birgalikda chiziqli tenglamalar sistemasining rangi noma'lumlar soniga teng bo'lsa, sistema yagona yechimga ega.

II. Agar rangi noma'lumlar sonidan kichik ($r < n$) bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

Misol – 14. Ushbu sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Yechish: Matritsaning ranglarini hisoblaymiz.

A matritsa 1-satr elementlaridan 2-satr elementlarini mos ravishda ayirishdan 3-satr elementlari hosil bo'ladi, demak, 3-satr elementlarini tashlab yuborishimiz mumkin.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \quad \text{bo'lgani uchun, } \text{rang} A = 2.$$

$\tilde{A}$ matritsada

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 27 + 6 + 6 - 3 = 21 \neq 0$$

bo'lgani uchun $\text{rang } \tilde{A} = 3$.

Demak, berilgan sistema birgalikda emas.

Misol – 15. Sistema yechilsin:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{rang} A = \text{rang } \tilde{A} = 2$ bo'lgani uchun sistema birgalikda.

Sistemadan ikkita tenglama olamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Uni quyidagi shaklga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -1 - 4x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Kramer qoidasi yordamida

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

bo'lgani uchun

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 + x_3 - x_4 & 2 \\ -1 - 4x_3 + 2x_4 & -1 \end{vmatrix} = 7x_3 - 3x_4 - 1, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 + x_3 - x_4 \\ 2 & -1 - 4x_3 + 2x_4 \end{vmatrix} = -6x_3 + 4x_4 - 7$$

Demak,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = -\frac{7}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}$$
$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{6}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + \frac{7}{5}$$

x_3 va x_4 larga ixtiyoriy qiymatlar berib, x_1 va x_2 uchun cheksiz ko'p yechimlar olamiz.

Yuqorida ko'rganlarimizdan xulosa qilib, ixtiyoriy n noma'lumli m ta tenglamalar sistemasini yechishda quyidagi qoidani bayon qilamiz:

n ta noma'lumli m ta tenglamalar sistemasi (16) berilgan bo'lib, sistema matritsasi A va kengaytirilgan matritsasi $\tilde{A}$ larning rangi r ga teng bo'lsin, ya'ni

bu matritsalarda kamida bitta r -tartibli 0 ga teng bo'lmagan minor mavjud bo'lsin. Bunday bazis minorlardan bittasini tanlab olib, sistema (16)da unga mos bo'lgan r ta tenglama qoldiramiz.

Bu tenglamalar bazis tenglamalari deyiladi, ular bazis sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema tenglamalarining chap tomonlarida minorga tegishli koeffitsientlariga ega bo'lgan noma'lumli hadlarini qoldirib, qolgan hadlarini o'ng tomonga o'tkazamiz. Sistemani chap tomonda qolgan asosiy noma'lumlar bo'yicha yechib va o'ng tomonga o'tgan ozod noma'lumlarga turli qiymatlar berib sistemaning cheksiz ko'p yechimlarini topamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Абдалимов Б. «Олий математика», «Укитувчи», 1994
2. Абдалимов Б., Абдугаппаров А., Мусамухамедов Р., Ташпулатов С. «Олий математикадан масалалар ечиш буйича кулланма», «Укитувчи», 1985
3. Абдалимов Б., Исоков Р. А. Чизикли алгебра элементлари ва уларнинг иктисодий масалаларда кулланилиши, «Фан», 1998
4. Карасев А. И. и др. «Математические методы и модели в планировании», «Экономика», 1987
5. Кравченко Р. Г. И др. «Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства», Колос, 1967
6. Гельфанд И. М. «Чизикли алгебрадан лекциялар», «Урта ва олий мактаб», 1961
7. Рублев А. Н. «Линейная алгебра», Высшая школа, 1968
8. Головина Л. И. «Линейная алгебра и некоторые ее приложения», «Наука», 1971
9. Курош А. Р. «Курс высшей алгебры», «Наука», 1968
10. Мальцев А. И. «Основы линейной алгебры», «Наука», 1970