

**Ш. А. АЛИМОВ, А. Р. ХАЛИМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗАХМЕДОВ**

АЛГЕБРА

**УЧЕБНИК ДЛЯ 8 КЛАССОВ
СРЕДНИХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ**

Второе издание

*Утвержден
Министерством народного образования
Республики Узбекистан*

**ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ „O‘QITUVCHI“
ТАШКЕНТ — 2010**

ББК 22.14я721

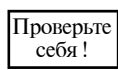
Условные обозначения

  } — начало и окончание решения задачи

  } — начало и окончание обоснования математического утверждения

 — занимательные задачи

 | — текст, который важно знать и полезно запомнить

 — самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

 — тестовые задания

 — исторические задачи

 — исторические сведения

**Издано за счет средств Республиканского целевого книжного
фонда для выдачи в аренду**

А $\frac{43060205002 - 23}{353(04) - 2010}$ бл. - заказ - 2010

ISBN 978—9943—02—294—2

© ИПТД „O‘qituvchi“, перевод
с узбекского, 2006

ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА, ИЗУЧЕННОГО В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

В курсе алгебры 7-го класса вы познакомились с алгебраическими выражениями, уравнениями первой степени с одним неизвестным, одночленами и многочленами, способами разложения многочленов на множители, алгебраическими дробями.

Для закрепления пройденного материала вам предлагается решить следующие примеры и задачи.

1. Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $S = 2(ab + ac + bc)$, где $a = 5$, $b = 4$, $c = 10$;

2) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$, где $h = 12$, $a = 10$, $b = 8$;

3) $S = \frac{(a+b)n}{2}$, где $a = 10$, $b = 40$, $n = 16$;

4) $V = \frac{1}{3}abh$, где $a = 30$, $b = 20$, $h = 25$.

2. Раскрыть скобки и упростить:

1) $7a - (5a + 4b)$;

3) $-(2a - 3b) - (-a + 3b)$;

2) $9x - (7y - 4x)$;

4) $8x - (3y + 5x) - (-2y - x)$.

3. Тормозной путь (в метрах) автомобиля, движущегося со скоростью v км/ч, вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$.

Вычислить тормозной путь автомобиля, если: 1) $v = 54$ км/ч; 2) $v = 63$ км/ч; 3) $v = 90$ км/ч; 4) $v = 100$ км/ч.

4. За каждый правильный ответ по математике начисляется k , английскому языку — m , родному языку и литературе — n баллов соответственно. Надира правильно ответила на a вопросов по математике, b — по английскому языку, c — по родному языку и литературе:

1) составить выражение для подсчета общего числа баллов, набранных Надирой;

2) сколько баллов она набрала, если $a = 35$; $b = 34$; $c = 36$; $k = 3,1$; $m = 2,1$; $n = 1,1$?

5. Решить уравнение (5–6).

1) $2x + 15 = 3x - 11$;

3) $2(x - 3) = 3(2 - x)$;

2) $7 - 5x = x - 2$;

4) $-3(4 - x) = 2(x - 5)$.

6. 1) $3,2x + 1,8x = 6x - 3,5$;

3) $0,5(0,4x - 8) = 5(0,2x - 1)$;

2) $7,5x - 2,5x = 7x - 10$;

4) $2,4(5x - 3) = -0,8(10 - 5x)$.

7. После того как турист прошел 3 км и еще $\frac{1}{3}$ оставшегося пути, он подсчитал, что до половины намеченного пути ему остается пройти еще 1 км. Какой путь он наметил пройти?

8. Кусок проволоки длиной 9,9 м разделили на две части. Найти длину каждой из частей, если:

1) одна из них короче другой на 20 %;

2) одна из них длиннее другой на 20 %.

9. 1) Одно число составляет 45 % второго. Найти эти числа, если одно из них больше другого на 66.

2) Одно число составляет 30 % второго. Найти эти числа, если одно из них меньше другого на 35.

10. Из одного села в другое отправился пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 2 ч следом за ним выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Во второе село он прибыл на 1 ч раньше пешехода. Найти расстояние между селами.

11. Вычислить:

1) $\frac{3 \cdot 4^{10} - 5 \cdot 2^{19}}{2^{15}}$;

2) $\frac{2^3 \cdot (4 \cdot 3^{15} - 7 \cdot 3^{14})}{3^{16} + 5 \cdot 3^{15}}$;

3) $\frac{2^{15} \cdot a^{16}}{4^7 \cdot a^{15}}$.

12. Записать многочлен в стандартном виде и вычислить его числовое значение:

1) ba^8ac , где $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = 2$;

2) $\frac{4}{5}x^8y^2 - \frac{5}{16}x^2y$, где $x = 3$, $y = \frac{1}{9}$.

13. Привести многочлен к стандартному виду:

1) $1,2ab + 0,8b^2 - 0,2ab + 2,2b^2 + 2ab$;

2) $3a^22a^2 + 3b^24a^2 - 2a^25b^2 - 3a2ab^2 - a^32a$.

Выполнить действия **(14–15)**.

14. 1) $(3a^2 - 2ab - b^2) - (2a^2 - 3ab - 2b^2)$;

2) $(7a^2 - 13ab + 10b^2) + (-3a^2 + 10ab - 7b^2)$;

3) $(a^2 + 3ab - b^2) \cdot ab$;

4) $abc \cdot (2a^2b - 3abc)$.

15. 1) $(x + y)(a - b)$;

3) $(a^2 - b^2)(a + b)$;

2) $(a - b + c)(a - c)$;

4) $(a - 3)(a - 2) - (a - 1)(a - 4)$.

16. Упростить выражение:

1) $4a^3 : a - (2a)^2 + a^4 : 3a^2$;

2) $(5a^4 + \frac{1}{3}a^3) : a^2 - (4a^3) : (2a) + (2a)^2$;

3) $(0,1b^4 - 2b^3 + 0,4b^2 + 0,02b) : (0,1b)$;

4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2 + \frac{9}{10}a^2b^3 - \frac{15}{16}ab^4\right) : \left(\frac{3}{4}ab^2\right)$.

Разложить на множители **(17–18)**.

17. 1) $5a^2 - 15a^4 + 10a^6$;

4) $(x - 1) - a(1 - x)$;

2) $9a^3 + 12a^2 - 6a$;

5) $4(a - 3) + a(3 - a)$;

3) $a(x + y) - b(x + y)$;

6) $a^2(1 - a) + 4(a - 1)$.

18. 1) $ay + zy - 2ap - 2zp$;

3) $a(5a - 4b) - 10a + 8b$;

2) $5ac - 6bd + 5ad - 6bc$;

4) $4ab - 6cd - 12ad + 2bc$.

19. Вычислить:

1) $49^2 + 51 \cdot 98 + 51^2$;

4) $\frac{53^2 - 53 \cdot 94 + 47^2}{53^2 - 47^2}$;

2) $58^2 - 116 \cdot 33 + 33^2$;

5) $\frac{183^3 - 93^3}{183^2 + 183 \cdot 93 + 93^2}$;

3) $\frac{19^2 + 38 \cdot 11 + 11^2}{19^2 - 11^2}$;

6) $\frac{43,73^2 - 43,73 \cdot 56,27 + 56,27^2}{43,73^3 + 56,27^3}$.

Выполнить действия (20–21).

20. 1) $\frac{2}{2a+3b} + \frac{5}{2a-3b} - \frac{15b}{4a^2-9b^2}$;

3) $\frac{1}{(a-2)^2} + \frac{1}{(a+2)^2}$;

2) $\frac{a-2}{a^2-1} - \frac{a}{(a-1)^2}$;

4) $\frac{4a+3}{4a-3} - \frac{4a-3}{4a+3} + \frac{1}{16a^2-9}$.

21. 1) $\frac{4a^3b^2}{18c^3} \cdot \frac{9c^2}{8a^2b^3}$;

3) $\frac{18a^2b^3}{7c^2d} : \frac{24ab}{14cd^2}$;

2) $\frac{12a^2b^3}{5ab^2} \cdot \frac{15ab}{9a^3b^2}$;

4) $\frac{45a^4b^2}{49c^3d^2} : \frac{9a^3b^2}{14cd}$.

Глава I | ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

§ 1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые: одну — горизонтально, вторую — вертикально (рис. 1). Их точку пересечения обозначим буквой O . Выберем некоторый отрезок в качестве *единичного отрезка* (его длина определяет единицу длины) и зададим на каждой прямой положительное направление: на горизонтальной прямой слева направо, на вертикальной прямой снизу вверх, превратив их тем самым в (числовые) оси.



Горизонтальная ось обозначается Ox и называется *осью абсцисс*; вертикальная ось обозначается Oy и называется *осью ординат*. Оси абсцисс и ординат называют *координатными осями*, их точку пересечения — *началом координат*. Точка O является началом отсчета на каждой из осей координат.

Таким образом, на оси абсцисс положительным числам соответствуют точки, расположенные справа от точки O , отрицательным числам — точки, расположенные слева от точки O . На оси ординат положительным числам соответствуют точки, расположенные выше точки O , а отрицательным числам — точки, расположенные ниже точки O .



РЕНЕ ДЕКАРТ (1596–1650)

— французский философ, математик, физик и физиолог. С его именем связано использование прямоугольной системы координат на плоскости.



Две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины образуют *прямоугольную систему координат на плоскости*.

Плоскость, на которой выбрана система координат, называется *координатной плоскостью*.

Прямые углы, образуемые осями координат, называют *координатными углами (квadrантами)* и нумеруют так, как показано на рисунке 1.

Пусть M — произвольная точка плоскости (рис. 2). Опустим из точки M перпендикуляр на ось абсцисс.

Число x , соответствующее основанию этого перпендикуляра, называется *абсциссой точки M* .

Опустим из точки M перпендикуляр на ось ординат. Число y , соответствующее основанию этого перпендикуляра, называется *ординатой точки M* .

Абсциссу и ординату точки M называют *координатами точки M* . Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y . Например, в записи $M(3; 5)$ число 3 — абсцисса, число 5 — ордината точки M .

В записи координат точек порядок чисел имеет существенное значение. Например, точки $M_1(1; 2)$ и $M_2(2; 1)$ — различные точки плоскости (рис. 3).

Рассмотрим частные случаи:

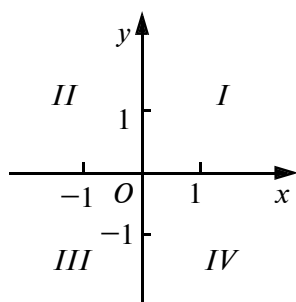


Рис. 1

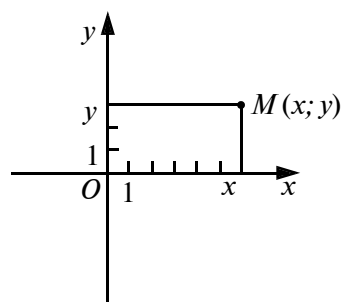


Рис. 2



Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю. Например, точка A на рисунке 4 имеет координаты $(2; 0)$.

Если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю. Например, точка B на рисунке 4 имеет координаты $(0; -2)$.

Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю: $O(0; 0)$.

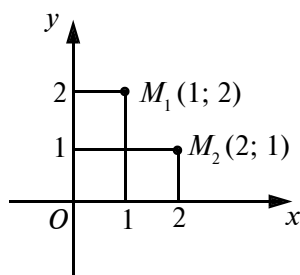


Рис. 3

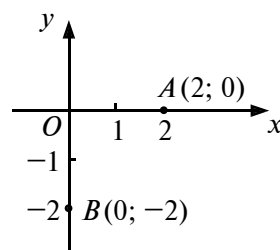


Рис. 4



Каждой точке M на координатной плоскости соответствует единственная пара чисел $(x; y)$ — ее координаты, и обратно, каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует единственная точка M координатной плоскости с координатами $(x; y)$.

Задача. Построить точку $M(-3; 2)$.

Δ На оси абсцисс отметим точку с координатой -3 и проведем через нее перпендикуляр к этой оси. На оси ординат отметим точку с координатой 2 и проведем через нее перпендикуляр к оси ординат. Точка пересечения этих перпендикуляров — искомая точка M (рис. 5). **▲**

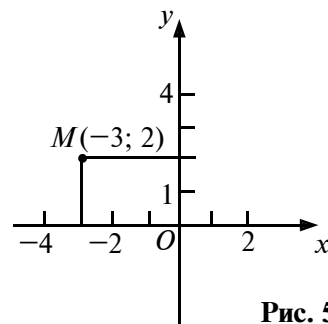


Рис. 5

Упражнения

1. Назвать абсциссу и ординату точки и построить ее: $(1; 0)$, $(4; 0)$, $(0; -2)$, $(-6; 0)$, $(0; -7)$, $(0; 0)$.
2. Найти координаты точек A , B , C , D , E , F , изображенных на рисунке 6.

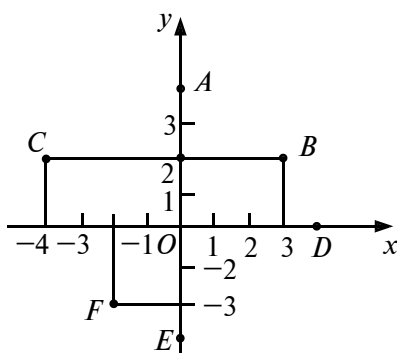


Рис. 6

3. Построить точки и указать, каким координатным углам они принадлежат:

- 1) $A (3; 4)$, $B (2; -5)$, $C (-2; 5)$, $E (-6; -2)$, $F (3; -0,5)$, $K (3; 0)$,
 $M (0; 1,5)$, $N (-3,5; 3,5)$, $L \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$;
- 2) $A (-1,5; 2,5)$, $B (-2,5; 1,5)$,
 $C \left(3\frac{1}{2}; 1\right)$, $F (2; -2)$, $M (0; 2,5)$.

4. Построить прямую, проходящую через точки:
 - 1) $A (3; -2)$ и $B (-2; 2)$;
 - 2) $M (2; 0)$ и $N (0; -2)$.
5. Построить отрезок по координатам его концов:
 - 1) $A (3; 4)$, $B (-6; 5)$;
 - 2) $M (0; -5)$, $N (4; 0)$.
6. Построить отрезок по координатам его концов:
 - 1) $A (3; 4)$, $B (-6; 4)$;
 - 2) $P (-5; 2)$, $Q (2; 7)$.
7. Построить треугольник по координатам его вершин:
 - 1) $K (-2; 2)$, $M (3; 2)$, $N (-1; 0)$;
 - 2) $A (0; -1)$, $B (0; 5)$, $C (4; 0)$.
8. Построить прямоугольник по координатам его вершин:
 $A (-2; 0)$, $B (-2; 3)$, $C (0; 3)$, $O (0; 0)$.
9. Даны три вершины $A (1; 2)$, $B (4; 2)$, $C (4; 5)$ квадрата $ABCD$.
 Найти координаты точки D и построить этот квадрат.
10. Построить по четыре точки: 1) лежащие на оси Ox ; 2) лежащие на оси Oy . Что общего у координат этих точек?

11. Построить прямую, проходящую через точки $A(0; 5)$ и $B(-2; 5)$. Чему равны ординаты; абсциссы точек, лежащих на прямой AB ?
12. Построить прямую, проходящую через точки $A(-2; 3)$ и $B(-2; -1)$. Чему равны ординаты; абсциссы точек, лежащих на прямой AB ?
13. Даны точки $A(5; 4)$, $B(2; -1)$, $C(-3; 2)$, $D(-4; -4)$. Построить точки, симметричные им: 1) относительно оси Ox ; 2) относительно точки $(0; 0)$. Определить координаты полученных точек.
14. Даны точки $A(2; -2)$, $B(1; 1)$, $C(-3; 2)$, $D\left(-4; -2\frac{1}{2}\right)$. Построить точки, симметричные им: 1) относительно оси Oy ; 2) относительно точки $(0; 0)$. Определить координаты полученных точек.

§ 2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Поезд движется из Ташкента в Самарканд со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии от Ташкента поезд будет через t часов после отправления?

Δ Если искомое расстояние (в км) обозначить буквой s , то ответ можно записать в виде следующей формулы:

$$s = 60t. \blacktriangle \tag{1}$$

При движении поезда путь s и время t непрерывно изменяются. Поэтому их называют *переменными величинами* или просто *переменными*. При этом важно заметить, что переменные s и t изменяются не произвольно, а подчиняясь закону равномерного прямолинейного движения (1), т. е. каждому значению времени t соответствует одно значение пути s . Например, при $t = 2$ по формуле (1) получим:

$$s = 120.$$

Таким образом, формула (1) устанавливает правило вычисления пути s по данному значению времени t . В этой задаче t — положительное число и не может быть больше времени движения поезда от Ташкента до Самарканда.

Рассмотрим еще один пример зависимости между переменными величинами.

Пусть x — длина стороны квадрата, y — его площадь. Тогда

$$y = x^2. \quad (2)$$

Формула (2) выражает правило вычисления площади по заданному значению x . Например, если $x = 2$, то $y = 4$; если $x = 3$, то $y = 9$ и так далее. В этой задаче x может принимать любые значения из множества положительных чисел.

В рассмотренных задачах указаны правила, дающие возможность находить по заранее заданному значению одной переменной величины значение второй.



Если значению x из некоторого числового множества сопоставлено по некоторому правилу число y , то говорят, что на этом множестве определена *функция*.

Для того чтобы подчеркнуть зависимость величины y от величины x , пишут $y(x)$ (читается: « y от x »). При этом x называют *независимой переменной*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Например, площадь квадрата является функцией длины его стороны x , то есть

$$y(x) = x^2.$$

Число $y(2)$ — это площадь квадрата, длина стороны которого равна 2, то есть $y(2) = 2^2 = 4$. Аналогично, $y(5) = 25$, $y(6) = 36$.

Число $y(2)$ называют *значением* функции $y = x^2$, соответствующим значению $x = 2$. Значение этой функции при $x = 5$ равно 25, а значение функции, соответствующее $x = 6$, равно 36.

Обычно независимая переменная обозначается буквой x , а зависимая переменная — буквой y . Но такое обозначение не является обязательным. Например, функция, рассмотренная в начале этого параграфа, выражает зависимость пути s от времени t . В этом случае пишут: $s(t) = 60t$. При такой записи выражение $s(2)$ обозначает путь (в км), пройденный за два часа, то есть $s(2) = 60 \cdot 2 = 120$ км. Аналогично, $s(1) = 60$, $s(3) = 180$.

Функция может быть задана различными способами.



1. Функция может быть задана формулой.

Например, формула $y = 2x$ показывает, как по заданному значению x вычислить соответствующее значение функции y . Такой способ задания функции называется *аналитическим способом*.

Задача 2. Функция задана формулой $y = x^2 + x + 1$.

Найти $y(-2)$, $y(0)$, $y(1)$.

Δ 1) Подставляя в эту формулу $x = -2$, получаем:

$$y(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3;$$

$$2) y(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1;$$

$$3) y(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3.$$

Ответ: $y(-2) = 3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3$. ▲

Задача 3. Функция задана формулой $y = -3x + 5$. Найти такое значение x , при котором значение y равно -1 .

Δ Подставляя в формулу вместо y число -1 , получаем $-1 = -3x + 5$.

Решая это уравнение, находим $3x = 5 + 1$, $x = 2$.

Ответ: $x = 2$. ▲



2. Функция может быть задана таблицей.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

Согласно этой таблице, значению $x = 3$ соответствует $y = 9$, а значению $x = 5$ соответствует $y = 25$.

Такой способ задания функции называется *табличным способом*.

Примеры табличного способа задания функции: таблица квадратов натуральных чисел, таблица кубов натуральных чисел, таблица прироста вклада в сберегательном банке в зависимости от величины вклада.



3. Функция может быть задана графиком.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 4. Дана функция $y = x^2 + 2$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: 1) (1; 3); 2) (2; 2).

Δ 1) Найдем значение y при $x = 1$:

$$y(1) = 1^2 + 2 = 3.$$

Так как $y(1) = 3$, то точка (1; 3) принадлежит графику данной функции.

$$2) y(2) = 2^2 + 2 = 6.$$

Точка графика с абсциссой $x = 2$ имеет ординату $y = 6$, поэтому точка (2; 2) не принадлежит графику данной функции. ▲

Предположим, что на координатной плоскости изображен график некоторой функции $y(x)$ (рис. 7). Для того чтобы по заданному графику найти значение функции $y(x)$ при каком-то определенном значении x , проведем через точку оси абсцисс с координатой x перпендикуляр к этой оси и найдем точку M пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и даст соответствующее значение функции.

Способ задания функции с помощью ее графика называется *графическим способом*.

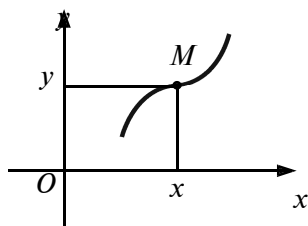


Рис. 7

Графики функций широко применяются в практике. При построении графиков в научных исследованиях и современном производстве используются автоматические записывающие устройства, вычерчивающие графики изменения величин. С помощью графика часто изображают, например, зависимость температуры от времени; железнодорожники пользуются графиками движения, экономисты графически изображают рост производительности труда.

- 15

3) верны ли равенства: $y(-3) = -1$, $y(-\frac{1}{2}) = 6$, $y(7) = 19$, $y(-7) = -10$?

22. (Устно.) Следующая таблица выражает зависимость атмосферного давления p от высоты h над уровнем моря:

h , км	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p , мм рт. ст.	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,2	198,1	40,9

- 1) назвать величину атмосферного давления на высоте 1 км; 3 км; 5 км; 10 км;
- 2) на какой высоте над уровнем моря атмосферное давление составит 760,0 мм рт. ст.; 462,2 мм рт. ст.?

23. (Устно.) Результаты измерений температуры воздуха за сутки приведены в следующей таблице:

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °C	-1	1	-3	-4	$2\frac{1}{2}$	5	8	$10\frac{1}{2}$	11	9	6	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

- 1) назвать температуру в 6 ч, 18 ч, 24 ч;
- 2) в какое время суток температура была равна $+1^\circ\text{C}$, -4°C , $+11^\circ\text{C}$?
- 3) почему эту зависимость можно назвать функцией?

24. Дана функция $y = x^2 - 5x + 6$. Определить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

- 1) $A(1; 2)$;
- 2) $B(-2; 0)$;
- 3) $C(-2; 20)$;
- 4) $D(3; 0)$.

25. Дана функция $y = x^2 - 5x + 6$. Определить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

- 1) $E(-1; 1)$;
- 2) $F(1; 0)$;
- 3) $G(3; 27)$;
- 4) $H(-2; 7)$.

§ 3. ФУНКЦИЯ $y = kx$ И ЕЕ ГРАФИК

Приведем еще один пример функциональной зависимости.

Найдем площадь прямоугольника, длина основания которого равна 3, а высота равна x . Если искомую площадь обозначить буквой y , то ответ можно записать формулой $y = 3x$.

Если основание прямоугольника равно k , то зависимость между высотой x и площадью y выразится формулой $y = kx$. Каждое заданное значение k определяет некоторую функцию

$$y = kx. \quad (1)$$

Теперь построим график функции $y = kx$.

Пусть $k = 2$, тогда функция может быть записана в виде:

$$y = 2x. \quad (2)$$

По формуле (2) вычислим значения y для нескольких значений x .

Возьмем, например, $x = 2$, получим $y = 4$. Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 = 0$; если $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) = -6$; если $x = 0,5$, то $y = 2 \cdot 0,5 = 1$ и т. д.

Составим таблицу:

x	2	0	-3	0,5
y	4	0	-6	1

Построим точки с найденными координатами.

Приложив линейку, можно убедиться, что все построенные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая и является графиком функции $y = 2x$ (рис. 8).

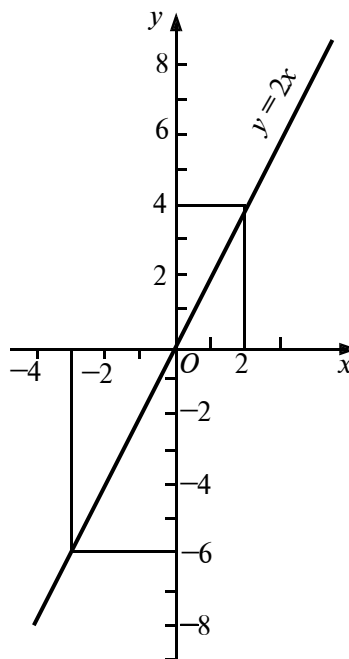


Рис. 8

Точка с координатами $(x; y)$ лежит на этой прямой только при условии, что $y = 2x$. Например, точка с координатами $(-1; -2)$ лежит на этой прямой, т. к. $-2 = 2 \cdot (-1)$ — верное равенство.



Можно показать, что *графиком функции $y = kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат.*

Из курса геометрии известно, что через две точки проходит единственная прямая, поэтому, для того чтобы построить график функции $y = kx$, достаточно построить две точки графика, а затем с помощью линейки провести через эти точки прямую. Так как начало координат принадлежит графику функции $y = kx$, то для построения этого графика достаточно найти еще одну точку.

Задача. Построить график функции $y = kx$ при:

1) $k = 1$; 2) $k = -1$; 3) $k = 0$.

Δ 1) Пусть $k = 1$, тогда $y = x$. Если $x = 1$, то и $y = 1$. Поэтому точка $(1; 1)$ принадлежит графику. Для построения графика функции $y = x$ проведем прямую, проходящую через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Эта прямая делит первый и третий координатные углы пополам (рис. 9).

2) Пусть $k = -1$, тогда $y = -x$. Если $x = 1$, то $y = -1$. Поэтому точка $(1; -1)$ принадлежит графику. Прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(1; -1)$, является графиком функции $y = -x$. Эта прямая делит второй и четвертый координатные углы пополам (рис. 10).

3) Пусть $k = 0$, тогда $y = 0 \cdot x$, т. е. $y = 0$ для любого x . Поэтому графиком этой функции будет прямая, совпадающая с осью абсцисс. ▲

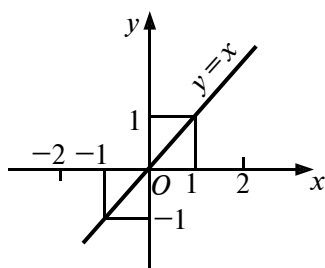


Рис. 9

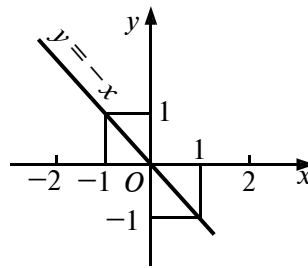


Рис. 10



Например, путь, пройденный телом при движении с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения. Масса газа постоянной плотности прямо пропорциональна его объему.

Упражнения

- 26.** Тетрадь стоит 80 сумов. Выразить формулой зависимость между купленным числом тетрадей (n) и уплаченной за них суммой (y). Найти $y(6)$, $y(11)$.
- 27.** Автомобиль «Нексия» движется по шоссе со скоростью 80 км/ч. Записать формулу, выражающую зависимость длины пути s (в км) от времени движения t (в часах). Чему равно $s(3)$, $s(5,4)$? Построить график функции **(28–30)**.
- 28.** 1) $y = 3x$; 3) $y = -4x$;
2) $y = 5x$; 4) $y = -0,8x$.
- 29.** 1) $y = 1,5x$; 3) $y = -0,2x$;
2) $y = -2,5x$; 4) $y = 0,4x$.
- 30.** 1) $y = 2\frac{1}{2}x$; 3) $y = 0,6x$;
2) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{5}{3}x$.
- 31.** Построить график функции, заданной формулой $y = -1,5x$. Найти по графику:
1) значение y , соответствующее значению x , равному 1; 0; 2; 3 соответственно;

- 2) значение x , если значение y равно -3 ; $4,5$; 6 ;
- 3) несколько целых значений x , при которых значения y будут положительны (отрицательны).

32. Построить график функции, заданной формулой $y = 0,2x$. Найти по графику:

- 1) значение y , соответствующее значению x , равному -5 ; 0 ; 5 ;
- 2) значение x , если значение функции равно -2 ; 0 ; 2 ;
- 3) несколько значений x , при которых значения y будут положительны (отрицательны).

33. Построить график функции и указать, внутри каких координатных углов расположен этот график:

- | | |
|--------------------------|------------------|
| 1) $y = \frac{1}{3}x$; | 3) $y = 4,5x$; |
| 2) $y = -\frac{1}{3}x$; | 4) $y = -4,5x$. |

34. Построить график функции:

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| 1) $y = 3,5x$; | 2) $y = -\frac{2}{5}x$. |
|-----------------|--------------------------|

Найти в каждом из этих случаев по две точки графика, лежащие выше оси абсцисс (ниже оси абсцисс).

35. Задать формулой функцию, график которой — прямая линия, изображенная на чертеже:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1) рис. 11; | 2) рис. 12; | 3) рис. 13; | 4) рис. 14. |
|-------------|-------------|-------------|-------------|

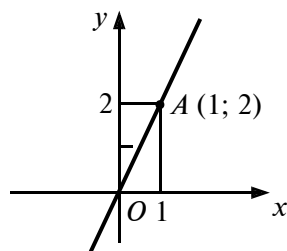


Рис. 11

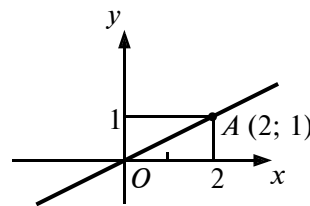


Рис. 12

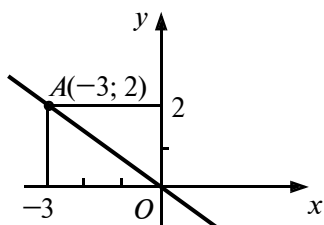


Рис. 13

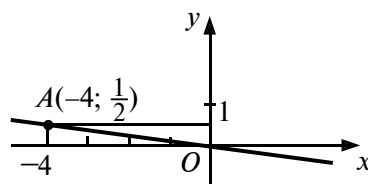


Рис. 14

36. Прямая OA проходит через начало координат и точку $A\left(\frac{1}{2}; 7\right)$.

Графиком какой из следующих функций является эта прямая:
 $y = 7x$, $y = -14x$, $y = 14x$?

37. Построить график функции $y = kx$, если известно, что ему принадлежит точка B :

- 1) $B(2; -3)$; 2) $B\left(3\frac{1}{3}; 2\right)$.

График какой из этих функций проходит через точку $M(-10; 15)$?

38. Плот плывет по реке со скоростью 2 км/ч. Выразить путь s , пройденный плотом за x часов. Вычислить путь, пройденный плотом за 1 ч, 2,5 ч, 4 ч. Построив график зависимости пути плота от времени движения, найти по графику время, за которое плот пройдет 6 км.
39. Пешеход идет со скоростью 3 км/ч. Выразить путь s , пройденный пешеходом за t часов. Построить график пути в зависимости от времени. Найти по графику путь, пройденный пешеходом за 0,5 ч; 1 ч; 1 ч 30 мин.

§ 4. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Познакомимся теперь с линейной функцией.



Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — заданные числа.

При $b = 0$ линейная функция принимает вид $y = kx$, графиком которой является прямая линия, проходящая через начало координат. Можно показать, что *графиком линейной функции $y = kx + b$ также является прямая линия*. Так как прямая определяется двумя ее точками, то *для построения графика функции $y = kx + b$ достаточно построить две точки этого графика*.

Задача 1. Построить график функции $y = 2x + 5$.

Δ При $x = 0$ значение функции $y = 2x + 5$ равно 5, т. е. точка $(0; 5)$ принадлежит графику. Если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 5 = 7$, т. е. точка $(1; 7)$ также принадлежит графику. Построим точки $(0; 5)$ и $(1; 7)$ и проведем через них прямую. Эта прямая и является графиком функции $y = 2x + 5$ (рис. 15). ▲

Заметим, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ имеет ординату, на 5 единиц большую, чем точка графика функции $y = 2x$ с той же абсциссой. Это означает, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ получается сдвигом на 5 единиц вверх вдоль оси ординат соответствующей точки графика функции $y = 2x$.



Вообще, график функции $y = kx + b$ получается сдвигом графика функции $y = kx$ на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y = kx$ и $y = kx + b$ являются параллельные прямые.

Задача 2. Найти точки пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осями координат и построить график.

Δ Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Ордината этой точки равна 0. Поэтому $-2x + 4 = 0$, откуда $x = 2$.

Итак, точка пересечения графика с осью абсцисс имеет координаты $(2; 0)$.

Найдем точку пересечения графика с осью ординат. Так как абсцисса этой точки равна 0, $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.

Итак, точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты $(0; 4)$. График функции $y = -2x + 4$ изображен на рисунке 16. ▲

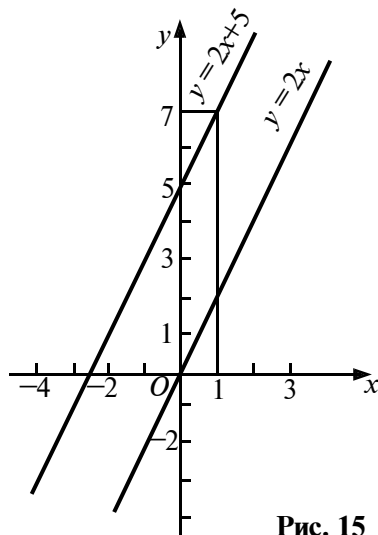


Рис. 15

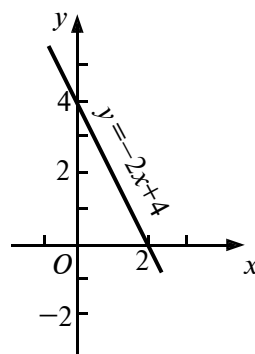


Рис. 16

Заметим, что для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения графика с осями координат.

Задача 3. Построить график линейной функции $y = kx + b$ при $k = 0$ и $b = 2$.

△ Если $k = 0$ и $b = 2$, то $y = 2$. Ординаты всех точек графика равны 2, и поэтому графиком функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0; 2)$. ▲

С помощью линейной функции описываются многие физические процессы. Например, путь, пройденный телом при прямолинейном равномерном движении, является линейной функцией времени.

Упражнения

40. (Устно.) Является ли линейной функция, заданная формулой:

- | | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = -x - 2$; | 3) $y = \frac{x}{3}$; | 5) $y = \frac{3}{x} + 8$; |
| 2) $y = -2x^2 + 3$; | 4) $y = 250$; | 6) $y = -\frac{x}{5} + 1$? |

Назвать значения k и b для линейных функций.

41. Дана линейная функция $y(x) = 3x - 1$. Найти:

- 1) $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$;
- 2) значение x , если $y(x) = -4$, $y(x) = 8$, $y(x) = 0$.

42. Температура воды в сосуде, куда был помещен кипятильник, имела температуру 12°C . Каждую минуту ее температура повышалась на 8°C . Найти формулу, выражающую изменение температуры воды (T) в зависимости от времени (t) ее нагревания. Будет ли $T(t)$ функция линейной? Чему равны $T(5)$, $T(8)$? Через сколько минут после начала нагревания вода закипит?

43. Построить график функции:

1) $y = 2x + 1$;	3) $y = 3x - 4$;	5) $y = \frac{1}{4}x - 2$;
2) $y = -2x + 1$;	4) $y = 0,5x - 1$;	6) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

44. Найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат:

1) $y = -1,5x + 3$;	3) $y = -1,5x - 6$;	5) $y = -\frac{1}{4}x + 2$;
2) $y = -2x + 4$;	4) $y = 0,8x - 0,6$;	6) $y = \frac{2}{3}x - 5$.

45. Построить график функции и найти точки пересечения его с осями координат:

1) $y = 2x + 2$;	3) $y = 4x + 8$;	5) $y = 2,5x + 5$;
2) $y = -\frac{1}{2}x - 1$;	4) $y = -3x + 6$;	6) $y = -6x - 2$.

46. Построить график функции:

1) $y = 7$;	2) $y = -3,5$;	3) $y = \frac{1}{4}$;	4) $y = 0$.
--------------	-----------------	------------------------	--------------

47. (Устно.) Как из графика функций $y = -2x$ можно получить графики функций $y = -2x + 3$ и $y = -2x - 3$?

48. (Устно.) Как из графика функции $y = \frac{1}{3}x$ можно получить графики функций $y = \frac{1}{3}x + 2$ и $y = \frac{1}{3}x - 2$?

49. 1) Построить график функции $y = -0,5x - 2$ и найти по графику несколько значений x , при которых значения функции положительны (отрицательны);

- 2) построить график функции $y = -4x + 3$ и найти по графику несколько значений x , при которых значения функции положительны (отрицательны).
- 50.** Построить график функции, заданной формулой $y = 2x + 3$. Найти по графику:
- 1) значение y , соответствующее значению x , равному -1 ; 2 ; 3 ; 5 соответственно;
 - 2) при каком значении x значение y равно 1 ; 4 ; 0 ; -1 соответственно.
- 51.** Линейная функция задана формулой $y = x + 2$. Принадлежат ли точки $M(0; 2)$, $N(1; 3)$, $A(-1; 1)$, $B(-4,7; -2,7)$, $C\left(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ графику этой функции?
- 52.** Найти значение k , если известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точку: 1) $P(-7; -12)$; 2) $C(3; -7)$.
- 53.** Найти значение b , если известно, что график функции $y = -3x + b$ проходит через точку: 1) $M(-2; 4)$; 2) $N(5; 2)$.
- 54.** Построить график функции $y = kx + 1$, если известно, что ее график проходит через точку: 1) $M(1; 3)$; 2) $M(2; -7)$.
- 55.** 1) На овощном складе было 400 т картофеля. Ежедневно на склад привозили еще по 50 т картофеля. Выразить формулой зависимость количества картофеля на складе (p) от времени (t).
2) На овощном складе было 400 т картофеля. Ежедневно со склада увозили по 50 т картофеля. Выразить формулой зависимость количества картофеля на складе (p) от времени (t).
- 56.** Турист проехал от города 10 км на автобусе, а затем продолжал движение в том же направлении пешком со скоростью 5 км/ч. На каком расстоянии (y) турист был от города через x часов ходьбы?
- 57.** Определить координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = 13 - x$ и вычислить площадь прямоугольного треугольника, ограниченного этой прямой и координатными осями.

58. Построить точки, симметричные точкам $A(5; 0)$, $B(5; -3)$, $C(0; 3)$, $D(-3; 1)$, $E(4; 2)$ относительно начала координат и найти их координаты.
59. Дана точка $A(5; 3)$. Построить точки, симметричные данной точке относительно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) начала координат. Найти координаты полученных точек.
60. На координатной плоскости расположены точки $A(2; 7)$, $B(3; 4)$, $C(2; -7)$, $D(-3; -4)$, $E(-2; 7)$. Определить, какие пары этих точек симметричны относительно:
1) оси абсцисс;
2) оси ординат;
3) начала координат.
61. Центр квадрата со стороной 4 расположен в начале координат, а его стороны параллельны осям координат. Найти координаты вершин квадрата.

1. Найти координаты точек пересечения прямых с осями координат:
1) $y = x + 1$; 3) $2y - 3x + 4 = 0$;
2) $y = 2x - 1$; 4) $3y - 4x - 3 = 0$.
2. Найти значение k , если известно, что точка $(1; 1)$ принадлежит графику функции:
1) $y = kx + 2$; 2) $y = kx - 2$.
3. Найти значение b , если известно, что точка $(-2; 3)$ принадлежит графику функции:
1) $y = -2x + b$; 2) $y = -5x + b$.
4. Прямая проходит через точки $A(0; -1)$ и $B(2; 5)$. Найти уравнение прямой.
5. График функции $y = kx + b$ проходит через точки $A(0; 3)$ и $B(1; 2)$. Найти k и b .

62. Пользуясь формулой равномерного движения $s = vt$, выразить время движения как функцию пути и скорости.
63. Пользуясь формулой плотности вещества $\rho = \frac{m}{V}$, выразить:
 1) массу тела m как функцию его плотности и объема;
 2) объем тела V как функцию его массы и плотности.
64. Зависимость между переменными x и y выражена формулой $y = kx$. Найти k , если $y = -5$ при $x = 2,5$.
65. 1) График функции $y = kx$ проходит через точку $B(-30; 3)$. Найти k .
 2) График функции $y = kx$ проходит через точку $B(4; -80)$. Найти k .



ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Даны координаты трех вершин прямоугольника $MNPQ$: $M(0; 0)$, $N(0; 2)$, $P(3; 2)$. Найти координаты вершины Q .
 А) $(3; 0)$; С) $(2; 3)$; Е) $(-3; 0)$.
 В) $(0; 3)$; D) $(2; 0)$;
2. Даны координаты вершин квадрата $MNPQ$: $M(0; 0)$, $N(0; 1)$, $P(1; 1)$, $Q(1; 0)$. Найти координаты точки пересечения диагоналей квадрата.
 А) $\left(1; \frac{1}{2}\right)$; С) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$; Е) $\left(1; \frac{1}{4}\right)$.
 В) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; D) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$;
3. Какие из следующих точек: 1) $(0; 7)$; 2) $(1; 11)$; 3) $(-1; 4)$; 4) $(-2; 1)$; 5) $(-3; 2)$; 6) $(2; 10)$ принадлежат графику функции $y = 3x + 7$?
 А) 1, 2, 5; С) 1, 3, 4; Е) 4, 5, 6.
 В) 2, 4, 6; D) 3, 4, 6;
4. Какие из следующих точек: 1) $(1; -3)$; 2) $(0; 5)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(3; -1)$; 5) $(-1; 6)$; 6) $(-2; 9)$ не принадлежат графику функции $y = -2x + 5$?
 А) 2, 3, 4; С) 1, 2, 4; Е) 1, 3, 6.
 В) 4, 5, 6; D) 1, 3, 5;

5. Через какие квадранты проходит график функции $y = -2x - 1$?
- А) I, II, III; С) I, II, IV; Е) II, III, IV.
 В) I, III, IV; D) II, III;
6. График функции $y = kx + 4$ проходит через точку $M(1; 1)$. Найти k .
- А) -3 ; В) 3 ; С) -2 ; D) -4 ; Е) 2 .
7. График функции $y = -2x + b$ проходит через точку $M(-1; 7)$. Найти b .
- А) 9 ; В) 5 ; С) -5 ; D) 3 ; Е) ответа нет.
8. График функции $y = kx + b$ проходит через точки $M(0; -1)$, $N(1; -5)$. Найти k и b .
- А) $k = 2$, $b = 3$; С) $k = -4$, $b = -1$; Е) $k = -3$, $b = -2$.
 В) $k = 3$, $b = 2$; D) $k = 2$, $b = -3$;
9. Прямая проходит через точки $M(0; -5)$ и $N(1; -2)$. Выписать уравнение этой прямой.
- А) $y = 2x - 3$; С) $y = 5x - 3$; Е) $y = 4x - 6$.
 В) $y = -3x + 5$; D) $y = 3x - 5$;
10. Прямая проходит через начало координат и точку $M(-2; 5)$. Графиком какой из следующих функций будет эта прямая:
- 1) $y = -\frac{5}{2}x$; 3) $y = \frac{2}{5}x$; 5) $y = -2x$?
 2) $y = \frac{5}{2}x$; 4) $y = -2x + 5$;
- А) 2, 3; В) 3, 4; С) 4, 5; D) 2; Е) 1.
11. Найти на графике функции $y = -9x + 5$ точку, координаты которой равны между собой.
- А) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; С) $\left(\frac{-3}{4}; \frac{-3}{4}\right)$; Е) $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
 В) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; D) $\left(\frac{-1}{5}; \frac{-1}{5}\right)$;

12. Найти на графике функции $y = -5x + 3$ точку, сумма координат которой равна 15.

- A) (3; 15); C) (-4; 19); E) такой точки нет.
B) (-3; 18); D) (-2; 17);

13. При каком значении x значение функции $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ равно 1?

- A) $-\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{15}$; C) $\frac{15}{8}$; D) $-\frac{15}{8}$; E) $\frac{3}{2}$.

14. При каких значениях k и b прямая $y = kx + b$ проходит через точки $M\left(0; 1\frac{1}{4}\right)$ и $N\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$?

- A) $k = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{4}$; C) $k = \frac{2}{5}, b = \frac{4}{3}$; E) $k = \frac{1}{5}, b = -\frac{3}{4}$.
B) $k = -\frac{2}{5}, b = \frac{4}{3}$; D) $k = \frac{-2}{5}, b = 1\frac{1}{4}$;

15. График какой из функций проходит через точки $M(1; 1)$, $N\left(\frac{1}{3}; 3\right)$?

- 1) $y = 2x - 1$; 3) $y = -3x + 4$;
2) $y = -6x + 5$; 4) $y = 3x - 2$.

- A) 1; B) 2; C) 2 и 3; D) 1 и 4; E) 3.

16. Найти координаты точек пересечения графика функции $y = -3x - 5$ с осями координат:

- A) $(0; -5)$ и $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$; D) $(0; 5)$ и $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$;

- B) $(0; -5)$ и $\left(-\frac{3}{5}; 0\right)$; E) правильный ответ не приведен.

- C) $(0; 5)$ и $\left(\frac{3}{5}; 0\right)$;

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M(0; 7)$, $N\left(\frac{7}{4}; 0\right)$.

- A) $y = 4x + 7$; C) $y = \frac{4}{7}x - 1$; E) $y = 7x + 7$.
B) $y = -4x + 7$; D) $y = 4x - 7$;



Исторические задачи

1. Длина железного стержня при температуре 0°C равна 1 м. При нагревании на 1°C его длина увеличивается на 0,000012 части его длины. Найти длину стержня при нагревании его до температуры $t^{\circ}\text{C}$.

2. Если температура воздуха составляет x° по шкале Цельсия, что соответствует температуре y° по шкале Фаренгейта, то переход от одной из них к другой совершается по формуле $y = \frac{9}{5}(x + 32)$. Построить график этой функции, выбрав подходящий масштаб на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат.



Исторические сведения

Функция в переводе с латинского означает «воплощать, выполнять». Первые определения функции появились в трудах Г. В. Лейбница (1646–1716), И. Бернулли (1667–1748), Н. И. Лобачевского (1792–1856). Определение, данное П. Л. Дирихле (1805–1859), близко к тому, которое дается в школьных учебниках.

Ученые древности понимали необходимость понятия функциональной зависимости между величинами. Более чем 4000 лет тому назад ученые Древнего Вавилона вывели приближенную формулу $S = 3r^2$, связывающую площадь круга и его радиус r .

Таблицы квадратов, кубов натуральных чисел, квадратных корней — это не что иное, как задание функций табличным способом.

Великий ученый Абу Райхан Беруни (973–1048) также использовал в своих трудах понятие функции и ее свойств. В 6-ой главе своего знаменитого трактата «Канон Масуда» он рассматривал понятия областей изменения аргумента (независимой переменной) и функции (зависимой переменной), знаков функции, дал определение наибольшего и наименьшего значений функции.