

**Ш. А. АЛИМОВ, А. Р. ХАЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗАХМЕДОВ**

АЛГЕБРА

**УЧЕБНИК ДЛЯ 9 КЛАССОВ
СРЕДНИХ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ**

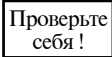
Издание второе

*Утвержден
Министерством народного образования
Республики Узбекистан*

**ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ "O'QITUVCHI"
ТАШКЕНТ — 2010**

ББК 22.14я721

Условные обозначения

	— начало и окончание решения задачи
	— начало и окончание обоснования математического утверждения
	— знак, отделяющий обязательные задачи от дополнительных
	— более сложные задачи
	— текст, который важно знать и полезно запомнить
	— выделение основного материала
	— самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу
	— тестовые задания

Издано за счет средств Республиканского целевого книжного
фонда для выдачи в аренду

А $\frac{4306020502 - 10}{353(04) - 2010}$ бл. - заказ — 2010

ISBN 978—9943—02—273—7

© ИПТД „O‘qituvchi“, перевод
с узбекского, 2006

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–8 КЛАССОВ

В курсе алгебры 7–8-х классов вы познакомились с алгебраическими выражениями, одночленами и многочленами, разложением многочленов на множители, алгебраическими дробями, неравенствами, линейной функцией и ее графиком, системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными, приближенными вычислениями, квадратными корнями.

Для закрепления пройденного материала вам предлагается решить следующие примеры и задачи.

1. Упростить:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $(5a - 2b) - (3b - 5a)$; | 3) $9a - (3a + 5b) - 4b$; |
| 2) $8a - (3a - 2b) - 5b$; | 4) $(7a - 2b) - (3a + 4b)$. |

2. Решить уравнение:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $4x - 6 = 12 - x$; | 3) $2\left(3 - \frac{x}{3}\right) = 5 + x$; |
| 2) $\frac{7x}{9} = \frac{5+x}{4}$; | 4) $\frac{5x-3}{2} - \frac{3-4x}{3} = \frac{2x+1}{4}$. |

3. Разложить на множители:

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $4a(x + y) - 5b(x + y)$; | 3) $x(a - 2) + y(2 - a) + 5(2 - a)$; |
| 2) $3a(x - y) - 4(y - x)$; | 4) $c(p - q) + a(p - q) + d(q - p)$. |

4. Упростить выражение:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(2a + b)^2 - (3a - b)^2$; | 3) $5(2 - a)^2 + 4(a - 5)^2$; |
| 2) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; | 4) $(3a - y)^2 + (a - 3y)^2$. |

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{6y-x}{4} = 2, \\ \frac{x+13y}{2} = 4. \end{cases}$$

6. Решить неравенство:

- 1) $\frac{x+4}{2} - x \leq 2 - \frac{x}{2}$; 2) $3(2x - 1) + 3(x - 1) > 5(x + 2) + 2(2x - 3)$.

7. Решить систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x+5 \leq 0, \\ 9x-18 \geq 0; \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{3(x-1)}{x+3} - 1,5x \geq 0, 2x-1,5, \\ \frac{x+3}{3} > \frac{x+5}{4}; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \frac{x-5}{4} \leq \frac{3x+1}{2}, \\ \frac{x+2}{3} \leq \frac{x+3}{5}; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x-1 < 7x+6, \\ 3x+1 > 4x-3, \\ 11x-9 \leq 14x+2. \end{cases} \end{array}$$

8. Решить неравенство:

$$1) |3-x| \leq \frac{2}{3}; \quad 2) |1-x| \geq 1; \quad 3) |3x+4| > 1; \quad 4) |5-4x| \leq 3.$$

9. Решить уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) |x+3| = |x-3|; & 3) |x+6| = |x+10|; \\ 2) |1-x| = |x+2|; & 4) |x+5| = |x-7|. \end{array}$$

10. Вычислить:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3}{\sqrt{11}+3} + \frac{7}{\sqrt{11}-2}; & 3) \frac{7}{3+\sqrt{13}} - \frac{2}{2-\sqrt{13}}; \\ 2) \frac{4}{\sqrt{7}-1} - \frac{2}{\sqrt{7}+3} - 3\sqrt{7}; & 4) \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{4}. \end{array}$$

11. Решить уравнение:

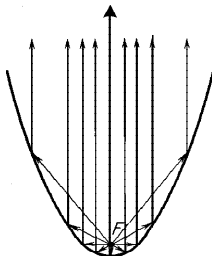
$$\begin{array}{ll} 1) x^2 - 3x - 4 = 0; & 3) \frac{x^2-3x}{7} + x = 11; \\ 2) 3x^2 - 5x + 4 = 0; & 4) 3x(x-2) - 1 = x - \frac{1}{2}(x^2 + 8). \end{array}$$

12. Решить систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases} & 4) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases} \end{array}$$

13. Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое 12. Найти эти числа.

Глава I КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ



§ 1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

В 8-м классе вы познакомились с линейной функцией $y = kx + b$ и ее графиком.

В различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют *квадратичными*. Приведем примеры.

1) Площадь квадрата y со стороной x вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью v , то расстояние s от него до поверхности земли в момент времени t определяется формулой $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$, где s_0 — расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t = 0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y = ax^2 + bx + c$. В первом примере $a = 1$, $b = c = 0$, а переменными являются x и y .

Во втором примере $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$, а переменные обозначены буквами t и s .



Определение. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная, называется *квадратичной функцией*.

Например, квадратичными являются функции:

$$y = x^2, \quad y = -2x^2, \quad y = x^2 - x, \\ y = x^2 - 5x + 6, \quad y = -3x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Задача 1. Найти значение функции $y(x) = x^2 - 5x + 6$ при $x = -2, x = 0, x = 3$.

$$\Delta \quad y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20;$$

$$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6;$$

$$y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. При каких значениях x квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное: 1) 7; 2) -9; 3) -8; 4) 0?

Δ 1) По условию $x^2 + 4x - 5 = 7$. Решая это уравнение, получаем:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -6.$$

Итак, $y(2) = 7$ и $y(-6) = 7$.

2) По условию $x^2 + 4x - 5 = -9$, откуда

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) По условию $x^2 + 4x - 5 = -8$, откуда $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Решая это уравнение, находим $x_1 = -3, x_2 = -1$.

4) По условию $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1, x_2 = -5. \quad \blacktriangle$

В последнем случае были найдены значения x , при которых функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное 0, т. е. $y(1) = 0$ и $y(-5) = 0$. Такие значения x называют *нулями квадратичной функции*.

Задача 3. Найти нули функции $y = x^2 - 3x$.

Δ Решая уравнение $x^2 - 3x = 0$, находим $x_1 = 0, x_2 = 3. \quad \blacktriangle$

У п р а ж н е н и я

1. (Устно.) Является ли квадратичной функция:

1) $y = 2x^2 + x + 3$;

3) $y = 5x + 1$;

5) $y = 4x^2$;

2) $y = 3x^2 - 1$;

4) $y = x^3 + 7x - 1$;

6) $y = -3x^2 + 2x$?

2. Найти действительные значения x , при которых квадратич-

ная функция $y = x^2 - x - 3$ принимает значение, равное:

1) -1;

2) -3;

3) $-\frac{13}{4}$;

4) -5.

3. При каких действительных значениях x квадратичная функция $y = -4x^2 + 3x - 1$ принимает значение, равное:
 1) -2 ; 2) -8 ; 3) $-0,5$; 4) -1 ?
4. Определить, какие из чисел -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{3}$ являются нулями квадратичной функции:
 1) $y = x^2 + 2x$; 3) $y = x^2 - 3$;
 2) $y = x^2 + x$; 4) $y = 5x^2 - 4x - 1$.
5. Найти нули квадратичной функции:
 1) $y = x^2 - x$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$;
 2) $y = x^2 + 3$; 7) $y = 8x^2 + 8x + 2$;
 3) $y = 12x^2 - 17x + 6$; 8) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$;
 4) $y = -6x^2 + 7x - 2$; 9) $y = 2x^2 + x - 1$;
 5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 10) $y = 3x^2 + 5x - 2$.
6. Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если известны нули x_1 и x_2 этой функции:
 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$;
 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.
7. Найти значения x , при которых функции $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = 2x + 1$ принимают равные значения.

§ 2

ФУНКЦИЯ $y = x^2$

Рассмотрим функцию $y = x^2$, т. е. квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = c = 0$. Для построения графика этой функции составим таблицу ее значений:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Построив указанные в таблице точки и соединив их плавной кривой, получим график функции $y = x^2$ (рис.1).



Кривая, являющаяся графиком функции $y = x^2$, называется **параболой**.

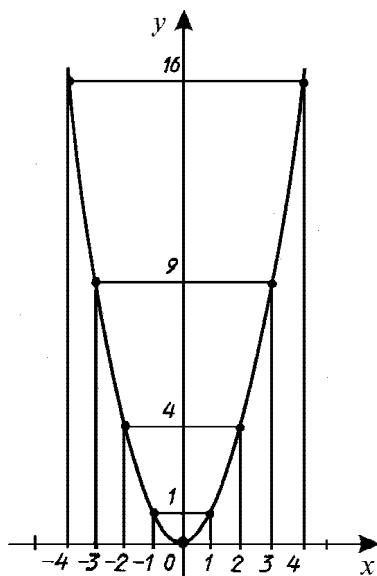


Рис. 1

Рассмотрим свойства функции $y = x^2$.

1) Значение функции $y = x^2$ положительно при $x \neq 0$ и равно нулю при $x = 0$. Следовательно, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат, а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $(0; 0)$.

2) График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат, так как $(-x)^2 = x^2$. Например, $y(-3) = y(3) = 9$ (рис. 1). Таким образом, ось ординат является осью симметрии параболы. Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют вершиной параболы. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x \geq 0$ большему значению x соответствует большее значение y . Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является возрастающей на промежутке $x \geq 0$ (рис. 1).

При $x \leq 0$ большему значению x соответствует меньшее значение y . Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является убывающей на промежутке $x \leq 0$ (рис. 1).

Задача. Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

Δ Координаты точки пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x^2 = x + 6$, т. е. $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Подставляя значения x_1 и x_2 в одно из уравнений системы, находим $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ: $(3; 9)$, $(-2; 4)$. **▲**

Парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка F , которую называют *фокусом параболы* (рис. 2).

Если в этой точке находится источник света, то все отраженные от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

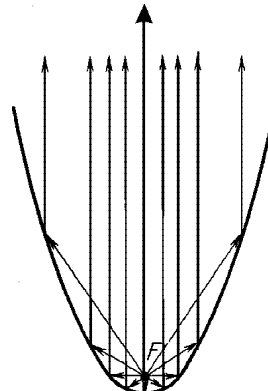


Рис. 2

У п р а ж н е н и я

8. На миллиметровой бумаге построить график функции $y = x^2$. По графику приближенно найти:
 - 1) значение y при $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = 1,9$; $x = -2,3$; $x = -1,5$;
 - 2) значения x , если $y = 2$; $y = 3$; $y = 4,5$; $y = 6,5$.
9. Не строя графика функции $y = x^2$, определить, какие из точек принадлежат ему: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$.
10. (Устно.) Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, $C(4; 15)$, $D(\sqrt{3}; 3)$ относительно оси ординат. Принадлежат ли все эти точки графику функции $y = x^2$?
11. (Устно.) Сравнить значения функции $y = x^2$ при:

1) $x = 2,5$ и $x = 3\frac{1}{3}$;	3) $x = -0,2$ и $x = -0,1$;
2) $x = 0,4$ и $x = 0,3$;	4) $x = 4,1$ и $x = -5,2$.
12. Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:

1) $y = 25$;	3) $y = -x$;	5) $y = 3 - 2x$;
2) $y = 5$;	4) $y = 2x$;	6) $y = 2x - 1$.

13. Является ли точка A точкой пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:

- 1) $y = -x - 6$, если $A(-3; 9)$; 2) $y = 5x - 6$, если $A(2; 4)$?

14. Верно ли утверждение, что функция $y = x^2$ возрастает:

- 1) на отрезке $[1; 4]$; 3) на промежутке $x > 3$;
2) на интервале $(2; 5)$; 4) на отрезке $[-3; 4]$?

15. На одной координатной плоскости построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3$. При каких значениях x точки параболы лежат выше прямой? ниже прямой?

16. При каких x значения функции $y = x^2$:

- 1) больше 9; 3) не меньше 16;
2) не больше 25; 4) меньше 36?

§ 3

ФУНКЦИЯ $y = ax^2$

Задача 1. Построить график функции $y = 2x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = 2x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 3). ▲

Сравним графики функций $y = 2x^2$ и $y = x^2$ (рис. 3). При одном и том же x значение функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y = x^2$. Это значит, что каждую точку графика функции $y = 2x^2$ можно получить из точки графика функции $y = x^2$ с той же абсциссой увеличением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается *растяжением* графика функции $y = x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

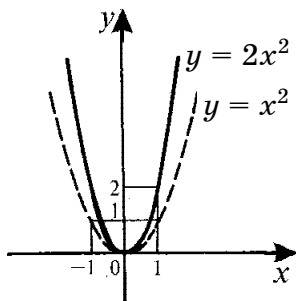


Рис. 3

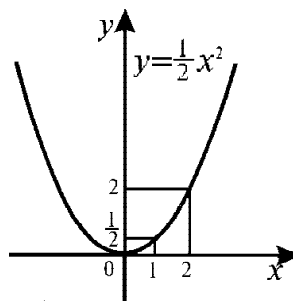


Рис. 4

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Построив найденные точки, проведем через них плавную кривую (рис. 4). ▲

Сравним графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x^2$. Каждую точку графика $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из точки графика функции $y = x^2$ с той же абсциссой уменьшением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается *сжатием графика функции $y = x^2$* к оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

Задача 3. Построить график функции $y = -x^2$.

△ Сравним функции $y = -x^2$ и $y = x^2$. При одном и том же x значения этих функций равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, график функции $y = -x^2$ можно получить симметрией относительно оси Ox графика функции $y = x^2$ (рис. 5). ▲

Аналогично график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ симметричен графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ относительно оси Ox (рис. 6).



График функции $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ также называют **параболой**. При $a > 0$ ветви параболы направлены **вверх**, а при $a < 0$ — **вниз**.

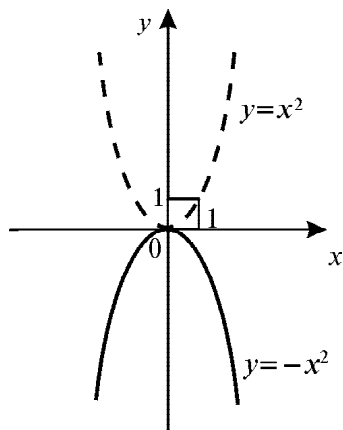


Рис. 5

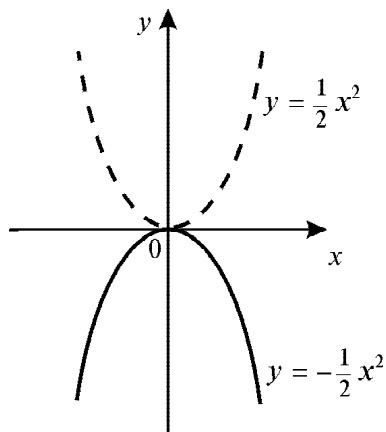


Рис. 6

Заметим, что фокус параболы $y = ax^2$ находится в точке $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$.
Перечислим *основные свойства функции* $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

- 1) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ принимает положительные значения при $x \neq 0$; если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ принимает отрицательные значения при $x \neq 0$; значение функции $y = ax^2$ равно 0 только при $x = 0$.
- 2) Парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси ординат.
- 3) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$;
Если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ убывает при $x \geq 0$ и возрастает при $x \leq 0$.

Все эти свойства видны на графике (рис. 7 и 8).

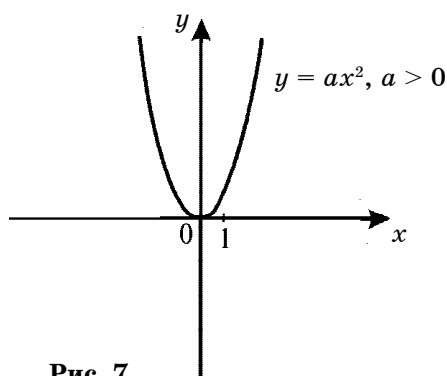


Рис. 7

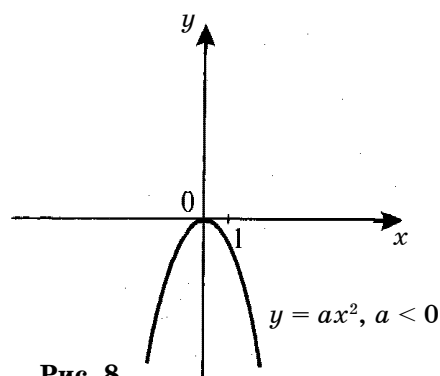


Рис. 8

У п р а ж н е н и я

17. На миллиметровой бумаге построить график функции $y = 3x^2$. По графику приближенно найти:

- 1) значения y при $x = -2,8; -1,2; 1,5; 2,5$;
- 2) значения x , если $y = 9; 6; 2; 8; 1,3$.

18. (Устно.) Определить направления ветвей параболы:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. На одной координатной плоскости построить графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = 3x^2$; 3) $y = 3x^2$ и $y = -3x^2$;
2) $y = -x^2$ и $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Используя графики, выяснить, какие из этих функций возрастают на промежутке $x \geq 0$.

20. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 2x^2$ и $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Является ли убывающей на промежутке $x \leq 0$ функция:

1) $y = 4x^2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

22. Выяснить, является ли функция $y = -2x^2$ возрастающей или убывающей:

1) на отрезке $[-4; -2]$; 3) на интервале $(3; 5)$;
2) на отрезке $[-5; 0]$; 4) на интервале $(-3; 2)$.

23. Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где s — путь в метрах; a — ускорение в м/с²; t — время в секундах. Найти ускорение a , если за 8 сек. тело прошло путь, равный 96 м.

§ 4

ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$

Задача 1. Построить график функции $y = x^2 - 2x + 3$ и сравнить его с графиком функции $y = x^2$.

△ Составим таблицу значений функции $y = x^2 - 2x + 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2 - 2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 9).

Для сравнения графиков преобразуем формулу $y = x^2 - 2x + 3$, используя метод выделения полного квадрата:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

Сначала сравним графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Заметим, что если $(x_1; y_1)$ — точка параболы $y = x^2$, т. е. $y_1 = x_1^2$, то точка $(x_1 + 1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x - 1)^2$, так как $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = x^2$ *сдвигом* (параллельным переносом) вправо на единицу (рис. 10).

Теперь сравним графики функций $y = (x - 1)^2$ и $y = (x - 1)^2 + 2$. При каждом x значение функции $y = (x - 1)^2 + 2$ больше значе-

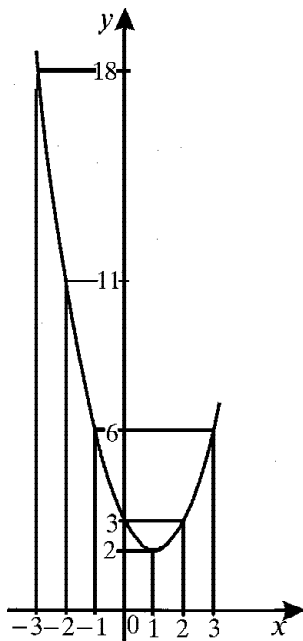


Рис. 9

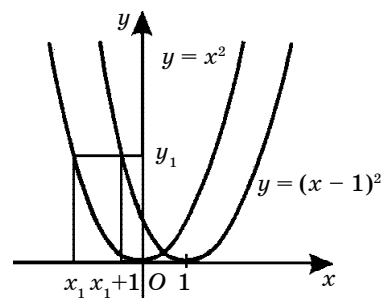


Рис. 10

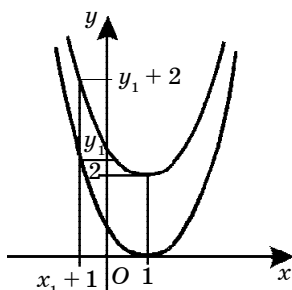


Рис. 11

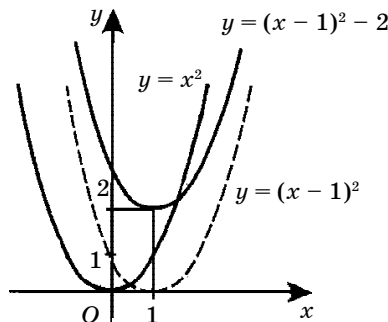


Рис. 12

ния функции $y = (x - 1)^2$ на 2. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2 + 2$ является парабола, полученная сдвигом параболы $y = (x - 1)^2$ вверх на две единицы (рис. 11).

Итак, графиком функции $y = x^2 - 2x + 3$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = x^2$ на единицу вправо и на две единицы вверх (рис. 12). Осью симметрии параболы $y = x^2 - 2x + 3$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы — точку (1; 2). ▲

Аналогично доказывается, что графиком функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$:

вдоль оси абсцисс вправо на x_0 , если $x_0 > 0$, влево на $|x_0|$, если $x_0 < 0$; вдоль оси ординат вверх на y_0 , если $y_0 > 0$, вниз на $|y_0|$, если $y_0 < 0$.

Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ с помощью выделения полного квадрата можно записать в виде

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

т. е. в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Равенство $y = ax^2 + bx + c$ называют *уравнением параболы*. Координаты (x_0, y_0) вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ можно найти по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Ось симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, если $a > 0$, и направлены вниз, если $a < 0$.

Задача 2. Найти координаты вершины параболы

$$y = 2x^2 - x - 3.$$

△ Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$.

Ордината вершины параболы

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 + 24}{8} = -3\frac{1}{8}.$$

О т в е т: $\left(\frac{1}{4}; -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

Задача 3. Записать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку $(-2; 5)$, а ее вершиной является точка $(-1; 2)$.

△ Так как вершиной параболы является точка $(-1; 2)$, то уравнение параболы можно записать в виде

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

По условию точка $(-2; 5)$ принадлежит параболе, и, следовательно,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

откуда $a = 3$.

Таким образом, парабола задается уравнением

$$y = 3(x + 1)^2 + 2, \text{ или } y = 3x^2 + 6x + 5. \text{ ▲}$$

У п р а ж н е н и я

Найти координаты вершины параболы **(24–26)**.

24. (Устно.)

1) $y = (x - 3)^2 - 2$;

3) $y = 5(x + 2)^2 - 7$;

2) $y = (x + 4)^2 + 3$;

4) $y = -4(x - 1)^2 + 5$.

25. 1) $y = x^2 + 4x + 1$;

3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;

2) $y = x^2 - 6x - 7$;

4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$; 3) $y = 3x^2 + 2x$;
2) $y = -x^2 - 5$; 4) $y = -4x^2 + x$.

27. Найти на оси Ox точку, через которую проходит ось симметрии параболы:

- 1) $y = x^2 + 3$; 4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
2) $y = (x + 2)^2$; 5) $y = x^2 + x + 1$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. Проходит ли ось симметрии параболы $y = x^2 - 10x$ через точку:

- 1) (5; 10); 2) (3; -8); 3) (5; 0); 4) (-5; 1)?

29. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

- 1) $y = x^2 - 3x + 2$; 3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 1$; 4) $y = 3x^2 - 4x$.

30. Написать уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку $(-1; 6)$, а ее вершиной является точка $(1; 2)$.

31. (Устно.) Принадлежит ли точка $(1; -6)$ параболе $y = -3x^2 + 4x - 7$?

32. Найти значение k , если точка $(-1; 2)$ принадлежит параболе:

- 1) $y = kx^2 + 3x - 4$; 2) $y = -2x^2 + kx - 6$.

33*. С помощью шаблона параболы $y = x^2$ построить график функции:

- 1) $y = (x + 2)^2$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = -(x - 1)^2 - 3$;
2) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = -x^2 + 1$; 6) $y = (x + 2)^2 + 1$.

34*. Записать уравнение параболы, полученной из параболы $y = 2x^2$:

- 1) сдвигом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо;
- 2) сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх;
- 3) сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево и вдоль оси Oy на единицу вниз;
- 4) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 единицы вправо и вдоль оси Oy на 3,5 единицы вверх.

§ 5

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Задача 1. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

△ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2,$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Построим точку $(2; -1)$.

2. Проведем через точку $(2; -1)$ прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы (рис. 13, а).

3. Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, найдем нули функции: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Построим точки $(1; 0)$ и $(3; 0)$ (рис.13, б).

4. Возьмем две точки на оси Ox , симметричные относительно точки $x = 2$, например, $x = 0$ и $x = 4$. Вычислим значения функции в этих точках: $y(0) = y(4) = 3$. Построим точки $(0; 3)$ и $(4; 3)$.

5. Проведем параболу через построенные точки (рис.13, в). ▲

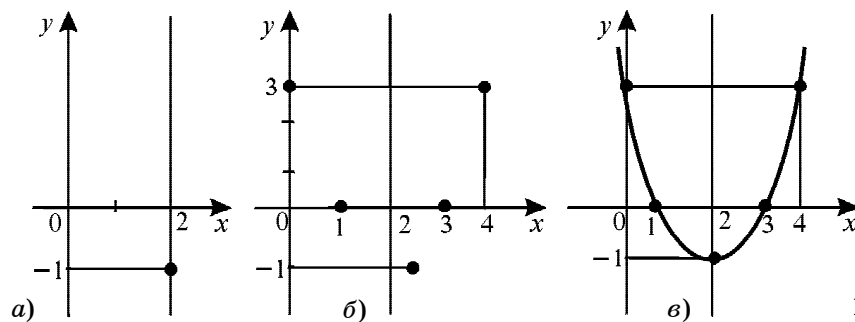


Рис. 13

По такой же схеме можно *построить график любой квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$:

1. Построить вершину параболы (x_0, y_0) , вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.
 2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.
 3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
 4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси. Для этого надо взять две точки на оси Ox , симметричные относительно точки x_0 , и вычислить соответствующие значения функции (эти значения одинаковы). Например, можно построить точки параболы с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0$, если $x_0 \neq 0$ (ординаты этих точек равны c).
 5. Провести через построенные точки параболу.
- Заметим, что для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы.

Задача 2. Построить график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

△ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, \quad y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Построим точку $(3; -1)$ — вершину параболы (рис. 14).

2. Проведем через точку $(3; -1)$ ось симметрии параболы (рис. 14).

3. Решая уравнение $-2x^2 + 12x - 19 = 0$, убеждаемся в том, что уравнение не имеет действительных корней, и, следовательно, парабола не пересекает ось Ox .

4. На оси Ox возьмем две точки, симметричные относительно точки $x = 3$, например точки $x = 2$ и $x = 4$. Вычислим значение функции в этих точках: $y(2) = y(4) = -3$. Построим точки $(2; -3)$ и $(4; -3)$ (рис. 14).

5. Проведем параболу через найденные точки (рис. 15). ▲

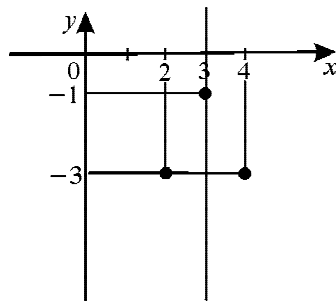


Рис. 14

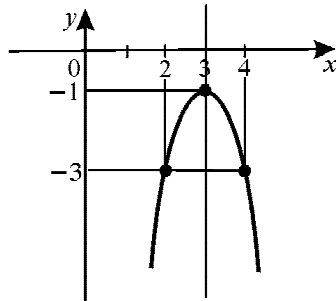


Рис. 15

Задача 3. Построить график функции $y = -x^2 + x + 6$ и выяснить, какими свойствами обладает эта функция.

△ Для построения графика найдем нули функции:

$$-x^2 + x + 6 = 0,$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Координаты вершины параболы можно найти так:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1 + 2 + 24}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

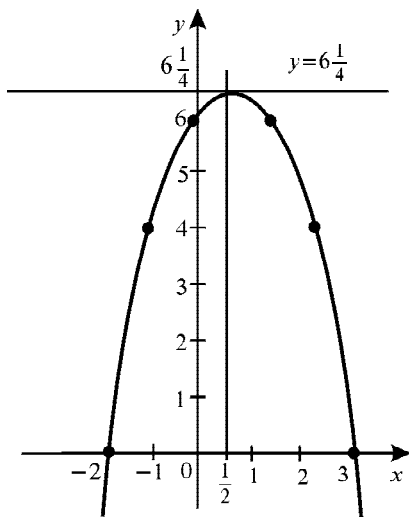


Рис. 16

Так как $a = -1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Найдем еще несколько точек параболы: $y(-1) = 4$, $y(0) = 6$, $y(1) = 6$, $y(2) = 4$.

Строим параболу (рис. 16).

С помощью графика получим следующие свойства функции

$$y = -x^2 + x + 6:$$

1) при любых значениях x значения функции меньше или равны $6\frac{1}{4}$;

2) значения функции положительны при $-2 < x < 3$, отрицательны при $x < -2$ и $x > 3$, равны нулю при $x = -2$ и $x = 3$;

3) функция возрастает на промежутке $x \leq \frac{1}{2}$, убывает на промежутке $x \geq \frac{1}{2}$;

4) при $x = \frac{1}{2}$ функция принимает наибольшее значение, равное $6\frac{1}{4}$;

5) график функции симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$. ▲

Отметим, что функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает *наименьшее* или *наибольшее значение* в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, которое является абсциссой вершины параболы.

Значение функции в точке x_0 можно найти по формуле

$$y_0 = y(x_0).$$

Если $a > 0$, то функция имеет *наименьшее значение*, а если $a < 0$, то функция имеет *наибольшее значение*.

Например, функция $y = x^2 - 4x + 3$ при $x = 2$ принимает наименьшее значение, равное -1 (рис. 13, в); функция $y = -2x^2 + 12x - 9$ при $x = 3$ принимает наибольшее значение, равное -1 (рис. 15).

Задача 4. Сумма двух положительных чисел равна 6. Найти эти числа, если сумма их квадратов наименьшая. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

△ Обозначим первое число буквой x , тогда второе число равно $6 - x$, а сумма их квадратов равна $x^2 + (6 - x)^2$. Преобразуем это выражение:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $y = 2x^2 - 12x + 36$. Найдем координаты вершины этой параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \quad y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Итак, при $x = 3$ функция принимает наименьшее значение, равное 18. Таким образом, первое число равно 3, второе также равно 3. Значение суммы квадратов этих чисел равно 18. ▲

У п р а ж н е н и я

35. Найти координаты вершины параболы:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $y = x^2 - 4x - 5$; | 3) $y = -x^2 - 2x + 5$; |
| 2) $y = x^2 + 3x + 5$; | 4) $y = -x^2 + 5x - 1$. |

36. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 1) $y = x^2 - 3x + 5$; | 3) $y = -2x^2 + 6$; |
| 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$; | 4) $y = 7x^2 + 14$. |

Построить график функции и по графику:

- 1) найти значения x , при которых значения функции положительны; отрицательны;
- 2) найти промежутки убывания и возрастания функции;
- 3) выяснить, при каком значении x функция принимает наибольшее или наименьшее значение (**37–38**).

- | | |
|---|--|
| 37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$;
2) $y = -x^2 + x + 2$;

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$;
2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$;
4) $y = 3x^2 - 8x + 4$; | 3) $y = -x^2 + 6x - 9$;
4) $y = x^2 + 4x + 5$.

5) $y = 4x^2 + 12x + 9$;
6) $y = -4x^2 + 4x - 1$;
7) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
8) $y = -3x^2 - 6x - 4$. |
|---|--|

39. По данному графику квадратичной функции (рис. 17) выяснить ее свойства.

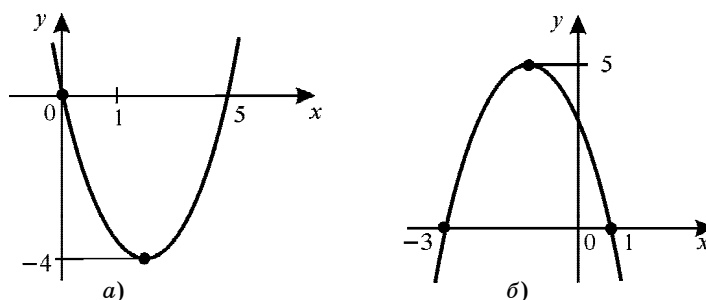


Рис. 17

-
40. Число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.
41. Сумма двух чисел равна 10. Найти эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.
42. Участок прямоугольной формы, примыкающий к стене дома, требуется огородить с трех сторон забором длиной 12 м. Какими должны быть размеры участка, чтобы площадь его была наибольшей?
43. В треугольнике сумма основания и высоты, опущенной на это основание, равна 14 см. Может ли такой треугольник иметь площадь, равную 25 см^2 ?
44. Не строя график, определить, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение:
- 1) $y = x^2 - 6x + 13$; 3) $y = -x^2 + 4x + 3$;
2) $y = x^2 - 2x - 4$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.
45. Определить знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:
- 1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината положительна;
2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината ее вершины отрицательны.
- 46*. С высоты 5 м вертикально вверх из лука выпущена стрела с начальной скоростью 50 м/с. Высота h м, на которой находится стрела через t секунд, вычисляется по формуле
- $$h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } g \approx 10 \text{ м/с}^2. \text{ Через сколько секунд}$$
- стрела:
- 1) достигнет наибольшей высоты и какой;
2) упадет на землю?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

47. Найти значения x , при которых квадратичная функция $y = 2x^2 - 5x + 3$ принимает значение, равное:

- 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) -1.

48. Найти координаты точек пересечения графиков функций:

- 1) $y = x^2 - 4$ и $y = 2x - 4$;
2) $y = x^2$ и $y = 3x - 2$;
3) $y = x^2 - 2x - 5$ и $y = 2x^2 + 3x + 1$;
4) $y = x^2 + x - 2$ и $y = (x + 3)(x - 4)$.

49. Решить неравенство:

- 1) $x^2 \leq 5$; 2) $x^2 > 36$.

50. Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

- 1) $y = x^2 + x - 12$; 5) $y = 5x^2 + x - 1$;
2) $y = -x^2 + 3x + 10$; 6) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 7) $y = 4x^2 - 11x + 6$;
4) $y = 7x^2 + 4x - 11$; 8) $y = 3x^2 + 13x - 10$.

51. Найти координаты вершины параболы:

- 1) $y = x^2 - 4x - 5$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$;
2) $y = -x^2 - 2x + 3$; 5) $y = -2x(x + 2)$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 6) $y = (x - 2)(x + 3)$.

52. Построить график функции и по графику выяснить ее свойства:

- 1) $y = x^2 - 5x + 6$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$;
2) $y = x^2 + 10x + 30$; 5) $y = -3x^2 - 3x + 1$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 6) $y = -2x^2 - 3x - 3$.

Проверьте себя!

1. Построить график функции $y = x^2 - 6x + 5$ и найти ее наименьшее значение.
2. С помощью графика функции $y = -x^2 + 2x + 3$ найти значения x , при которых значение функции равно 3.
3. По графику функции $y = 1 - x^2$ найти значения x , при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.
4. На каких промежутках функция $y = 2x^2$ возрастает? убывает? Построить график этой функции.
5. Найти координаты вершины параболы $y = (x - 3)^2$ и построить ее график.

53. Не строя график функции, найти ее наибольшее или наименьшее значение:

1) $y = x^2 + 2x + 3$;

3) $y = -3x^2 + 7x$;

2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

4) $y = 3x^2 + 4x + 5$.

54. Периметр прямоугольника 600 м. Какими должны быть его высота и основание, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

55. Прямоугольник разбит на 3 части двумя отрезками, параллельными одной из его сторон. Сумма периметра прямоугольника и длин отрезков равна 1600 м. Найти стороны прямоугольника, если его площадь наибольшая.

56. Найти коэффициенты p и q квадратичной функции

$y = x^2 + px + q$, если эта функция:

- 1) при $x = 0$ принимает значение 2, а при $x = 1$ — значение 3;

- 2) при $x = 0$ принимает значение 0, а при $x = 2$ — значение 6.

57. Найти p и q , если парабола $y = x^2 + px + q$:
- 1) пересекает ось абсцисс в точках $x = 2$ и $x = 3$;
 - 2) пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$ и ось ординат в точке $y = 3$;
 - 3) касается оси абсцисс в точке $x = 2$.
- 58*. При каких значениях x принимают равные значения функции:
- 1) $y = x^2 + 3x + 2$ и $y = |7 - x|$;
 - 2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ и $y = |3x - 3|$?
- 59*. Построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что:
- 1) парабола проходит через точки с координатами $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(3; 3)$;
 - 2) точка $(1; 3)$ является вершиной параболы, а точка $(-1; 7)$ принадлежит параболе;
 - 3) нулями функции $y = ax^2 + bx + c$ являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, а наибольшее значение равно 2.

? ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Найти значение a , для которого одна из точек пересечения параболы $y = ax^2$ с прямой $y = 5x + 1$ имеет абсциссу $x = 1$.
 А) $a = 6$; В) $a = -6$; С) $a = 4$; D) $a = -4$; Е) $a = 7$.
2. Найти значение k , для которого одна из точек пересечения параболы $y = -x^2$ с прямой $y = kx - 6$ имеет абсциссу $x = 2$.
 А) $k = -1$; В) $k = 1$; С) $k = 2$; D) $k = -2$; Е) $k = -6$.
3. Найти значение b , для которого одна из точек пересечения параболы $y = 3x^2$ с прямой $y = 2x + b$ имеет абсциссу $x = 1$.
 А) $b = 2$; В) $b = -1$; С) $b = 1$; D) $b = -2$; Е) $b = 3$.

Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат (4–7).

4. $y = x^2 - 2x + 4$.
 А) $(-1; 3)$; В) $(3; 1)$; С) $(1; 3)$; D) $(0; 4)$; Е) $(4; 0)$.

5. $y = -x^2 - 4x - 5$.

A) $(-1; 2)$; B) $(2; -1)$; C) $(5; 0)$; D) $(-5; 0)$; E) $(0; -5)$.

6. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

A) $(\frac{1}{3}; 0), (\frac{1}{2}; 0), (0; 1)$; D) $(\frac{1}{3}; 0), (\frac{1}{2}; 0), (0; 1)$;

B) $(-\frac{1}{3}; 0), (-\frac{1}{2}; 0), (1; 0)$; E) правильный ответ не
приведен.

C) $(0; \frac{1}{3}), (0; \frac{1}{2}), (0; 1)$;

7. $y = -x^2 + 6x + 7$.

A) $(-1; 0), (-7; 0), (0; -7)$; D) $(-1; 2), (7; -1), (7; 0)$;

B) $(-1; 0), (7; 0), (1; 7)$; E) $(3; 16)$.

C) $(1; 0), (7; 0), (0; -7)$;

Найти координаты вершины параболы (8–11).

8. $y = x^2 - 4x$.

A) $(0; 4)$; B) $(4; 2)$; C) $(2; -4)$; D) $(-4; 2)$; E) $(0; -4)$.

9. $y = -x^2 + 2x$.

A) $(-1; -1)$; B) $(1; -2)$; C) $(0; 2)$; D) $(1; 1)$; E) $(1; -1)$.

10. $y = x^2 + 6x + 5$.

A) $(3; -4)$; B) $(-5; -1)$; C) $(-1; -5)$; D) $(3; 4)$; E) $(-3; -4)$.

11. $y = -5x^2 + 4x + 1$.

A) $(\frac{2}{5}; \frac{9}{5})$; B) $(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5})$; C) $(-\frac{9}{5}; \frac{2}{5})$; D) $(2; 9)$; E) $(9; 5)$.

12. Написать уравнение параболы, которая пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$, а ось ординат в точке с ординатой $y = \frac{1}{2}$.

- А) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; С) $y = x^2 - 3x + 2$; Е) правильный ответ не приведен.
 В) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; D) $y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$;

13. Написать уравнение параболы, которая пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами $x = -1$ и $x = 3$, а ось ординат в точке с ординатой $y = 1$.

- А) $y = -x^2 + 2x + 3$; С) $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x + 1$; Е) правильный ответ не приведен.
 В) $y = -\frac{x^2}{3} + 2x + 1$; D) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - 1$;

В каких квадрантах расположена парабола (14–18)?

14. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

- А) I, II, III; С) I, III, IV; Е) I, II, IV.
 В) II, III, IV; D) I, II, III, IV;

15. $y = x^2 - 4x + 6$.

- А) I, IV; В) II, III; С) I, II, III, IV; D) II, III, IV; Е) I, II.

16. $y = -x^2 - 6x - 11$.

- А) III, IV; В) I, II, III; С) II, III, IV; D) I, III, IV; Е) I, II.

17. $y = -x^2 + 5x$.

- А) I, II, III; С) I, II, III, IV; Е) правильный ответ не приведен.
 В) I, III, IV; D) II, III, IV;

18. $y = x^2 - 4x$.

- А) I, II, III; В) II, III, IV; С) I, II, IV; D) III, IV; Е) I, II.

19. Сумма двух положительных чисел равна 160. Найти эти числа, если сумма их кубов имеет наименьшее значение.

- А) 95; 65; В) 155; 5; С) 75; 85; D) 80; 80; Е) 90; 70.

20. Сумма двух положительных чисел равна a . Найти эти числа, если сумма их квадратов имеет наименьшее значение.

- А) $\frac{2a}{5}, \frac{3a}{5}$; В) $a^3, a^3 - a$; С) $\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}$; D) $a^2, a - a^2$; Е) $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$.