



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

**UDK
Qo'lyozma huquqi**

**JO'RAYEV ILHOMJON
TURSUNMUHAMMEDOVICHNING**

**“TURG'UN QONUNLAR UCHUN LOKAL LIMIT
TEOREMLAR” MAVZUSIDA**

**5A460104-“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” mutaxassisligi
bo'yicha magistr darajasini olish uchun**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

Ilmiy rahbar:

D.Otaqo'ziyev, f.-m. f. n., dotsent

Namangan - 2011

MUNDARIJA

KIRISH.

I – Bob. BOG’LIQMAS TASODIFIY MIQDORLAR YIG’INDISI UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMALAR.

- 1 – §. Masalaning qo’yilishi.
- 2 – §. Panjarasimon taqsimlangan tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun lokal limit teoremlar.
- 3 – §. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun lokal limit teoremlar.
- 4 - §. $n_0 = 1$ holda yaqinlashish tezligini baholash.
- 5 - §. Har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun lokal limit teoremlar.

II – Bob. TURG’UN QONUNLAR.

- 1 – §. Masalaning qo’yilishi.
- 2– §. Turg’un qonunlarning harakteristik funksiyalari va ularning xossalari.
- 3 – §. Turg’un qonunlar harakteristik funksiyalarining oshkor ko’rinishi.

III – Bob. TURG’UN QONUNLAR UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMALAR.

- 1 – §. Turg’un qonunlar uchun integral teoremlar.
- 2 – §. Turg’un qonunlar uchun lokal limit teoremlar.
- 3 – §. Yordamchi teoremlar.
- 4 – §. Asosiy teoremlarning isboti.

Xulosa va takliflar.

Foydalanilgan adabiyotlar.

АННОТАЦИЯ

Ушбу магистрлик диссертацияси “Турғун қонунлар учун локал лимит теоремалар” деб номланган ва Эҳтимоллар назариясининг локал лимит теоремаларига бағишланган ва шу йўналишга оид долзарб муаммоларни ҳал этишга бағишланган.

Диссертация 68 саҳифада баён этилган бўлиб, Кириш ва тўртта бобдан иборат. Кириш қисмида танланган мавзунинг долзарблиги, аҳамияти, йўналишнинг ўрганилганлик даражаси, шу йўналишда иш олиб борган олимлар ва эришилган натижалар ҳақида умумий маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг 1-боби «Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун локал лимит теоремалар» деб номланган ва унда тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг ҳар бир қўшилувчиси чегараланган зичлик функцияга эга бўлган ҳол, панжарасимон тақсимланган тасодифий миқдорлар учун лимит теорема, ҳар хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун лимит теоремалар ва бу теоремалар учун яқинлашиш тезлигининг баҳолари кўриб чиқилган, олинган натижаларнинг обзори келтирилган, айрим муҳим теоремаларнинг исботлари берилган, шунингдек ҳар хил тақсимланган тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун исботланган кўплаб теоремаларнинг бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар билан алоқаси кўрсатиб ўтилган.

Диссертациянинг 2-боби “Турғун қонунлар” деб номланган ва унда турғун қонунларнинг характеристик функциялари ва уларнинг хоссалари ҳамда турғун қонунлар характеристик функцияларининг ошкор кўриниши баён этилган, яъни ушбу теорема исбот қилинган.

Диссертациянинг 3-боби “Турғун қонунлар учун локал лимит теоремалар” деб аталади. Ушбу бобда Турғун қонунлар учун интеграл лимит теоремалар, Турғун қонунлар учун локал лимит теоремалар, ёрдамчи теоремалар ва асосий теоремаларнинг исботлари келтирилган.

Асосий қисмнинг охирида магистрантнинг хулосалари ва мулоҳазалари келтирилган. Диссертациянинг “Иловалар” қисмида секин ўзгарувчи функциялар ҳақидаги зарур маълумотлар ва магистрантнинг илмий мақоласи жой олган.

K I R I S H

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgan kunlardan boshlaboq Respublikamiz Prezidenti Islom Abdug'aniyevich Karimov mamlakatimizdagi kadrlar tayyorlash masalasiga asosiy e'tiborni qaratib kelmoqda. Xususan, 1997 yilning 29 avgustida O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisining 9 sessiyasida ta'lim to'g'risidagi qonunga asoslangan "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" qabul qilindi. Bu dastur uch bosqichdan iborat:

1-bosqich: 1997-2001 yillar. Bunda kadrlar tayyorlash milliy dasturining amalga oshirish uchun zarur shart sharoitlar yaratish.

2-bosqich: 2001-2005 yillar. Bunda xuquqiy me'yoriy xujjatlar asosida barkamol avlodni Davlat ta'limi standartiga javob beradigan qilib tayyorlash maqsad qilib qo'yilgan.

3-bosqich: 2005 yil va undan keyingi yillar. Bunda davr talabiga mos bo'lgan barkamol avlodni jamiyatimizning rivojlanishi darajasida tarbiyalab voyaga yetkazish maqsad qilib qo'yilgan.

Xozirgi paytda Respublikamizda "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"da nazarda tutilgan barcha rejalar muvaffaqiyat bilan amalga oshirildi va davom ettirilmoqda.

Tabiiyki, bu maqsadlarni yuqori saviyada amalga oshirish uchun oliygohlar, kollej va litseylarning bitiruvchilari har tomonlama yetuk kadrlar bo'lib yetishmog'i – zamon talabidir. Oliygozlarda magistrlar tayyorlashni yuqori saviyada tashkil etish ham shu programmaning bir qismidir.

Muxtaram Prezidentimiz I.A.Karimov, muntazam ravishda yosh avlodning bilimli, barkamol bo'lib yetishishi va mustaqil O'zbekistonimizning fidoyi kadrlari bo'lmog'i uchun sharoitlar yaratib bermoqdalar, o'zlarining har bir nutqlarida yoshlarning ta'lim tarbiyasi, bilim saviyasi, dunyoqarashini shakllantirish kabi dolzarb muammolarga alohida e'tibor qaratmoqdalar. Biz quyida Prezidentimiz I.A.Karimovning turli paytlarda so'zlagan nutqlaridan iqtiboslar keltiramiz.

O'zbekiston mustaqillikka erishgach butun ta'lim tizimini tubdan isloh qilish rejalari ishlab chiqildi, bunda asosiy e'tibor Respublika uchun ilmiy kadrlar tayyorlashni kengaytirishga qaratilgandir. Bu haqda Prezidentimiz I.A.Karimovning quyidagi fikrlarini keltirish joizdair:

- **"Yoshlarni zamonaviy fan – texnikaning, umuman ilm – fanning yutuqlaridan bahramand qilmasdan turib, ularga yuqori malakali mutaxassislar bo'lib yetishishga sharoit tug'dirmay turib, biz respublikamiz xalq xo'jaligini, sanoat ishlab chiqarish sohalarini tubdan o'zgartira olmaymiz, buni har doim yodda tutish kerak. Chunki ishsizlik, maosh kamligi, mutaxassislar yetishmasligi va boshqa ko'p yetishmovchiliklar ana shundan deb o'ylayman. ...Demak, xalq saylab qo'yan deputatlarning birinchi navbatdagi vazifalaridan biri – yoshlarimiz tarbiyasi. Milliy siyosatni, harakat dasturini ishlab chiqish masalasidir."**

Yoshlarni ilm – fanga qiziqtirish, respublikamiz hayotidagi dolzarb masalalarni hal etishga tayyorlab borish zarurdir.

- **"Ayniqsa, o'sib kelayotgan avlod taqdiriga hyech kim befarq qaray olmaydi. Bunda oliy o'quv yurtlarining ahamiyati kattadir. Yoshlarni qay usulda o'qitish, ularni tarbiyalash, mustaqil mamlakatning yetuk mutaxassislari bo'lishiga qayg'urish har birimizning muqaddas burchimizdir. Bunda oliy va o'rta maxsus ta'lim tizimi saviyasini jahon andozalari darajasiga yetkazish, xalq xo'jaligida kadrlarga bo'lgan talab va ehtiyojlarni ilmiy tahlil asosida aniqlash, xorijiy mamlakatlar tajribasidan oqilona foydalanish shu kunning dolzarb vazifalaridandir..."** – deb ta'kidlagan muxtaram Prezidentimiz I.A.Karimov. ([2]. "Ilm – ziyo salohiyati – yurt boyligi" nutqidan. "Ma'rifat" gazetasi. 1993 yil, 21 iyul).

Kasb – hunar kollejlari, litsey talabalari, oliy o'quv yurtini tamomlayotgan har bir yosh mutaxassisni o'z kasbining bilimdoni va jonkuyar qilib tayyorlash shu kunning eng birinchi talabidir. Bu o'rinda Prezidentimiz I.A.Karimovning ushbu so'zlarini keltirish joizdir:

- **"Hukumatimiz fan, ma'rifat va madaniyat sohasiga jiddiy e'tibor bilan qaramoqda. O'tish davrining eng qiyin va murakkab paytida ham davlat maorifni takomillashtirish, bilimli va har tomonlama barkamol avlodni voyaga yetkazish uchun hech narsani ayamayapti.**

Axir, o'ylab ko'raylik, birodarlar, biz bugun ne – ne mashaqqatlar bilan qurayotgan davlatimiz, mustaqil va har jihatdan mustahkam mamlakatimiz ertaga kimning qo'lida qoladi?

Bugungi katta islohotlar evaziga qo'lga kiritayotgan yutuqlarimizni ertaga farzandlarimiz davom ettirishga qodir bo'ladimi – yo'qmi?...

Islohotning taqdiri, uning qay darajada amalga oshirish, birinchi navbatda kadrlarning malakasiga, ularning o'z ishlarini qay darajada o'zlashtirib olganligiga, yurtparvarligi va fidoiyligiga bog'liq". (I.A.Karimovning xalq dasturlari Samarqand viloyati kengashi sessiyasida so'zlagan nutqidan, "Ma'rifat" gazetasi. 1995 yil 29 noyabr).

Oliygo'hnini bitirayotgan talabalarimiz o'zlari egalagan mutahassislik bo'yicha malakali mutaxassis bo'lishlari, ilm – fanning, xalq xo'jaligining turli jabxalaridagi o'rnini anglab olgan bo'lishlari kerak. Bu o'rinda I.A.Karimovning ushbu so'zlarini keltirish joizdir:

- **"Zero, ilmu tafakkur odamlar qalbiga nur, ongiga ziyo, xonadoniga fayz – baraka keltiradigan buyuk mo'jizadir. Ana shu nuqtai nazardan qaraganda, barkamol tashkilotchi va zukko kadrlarni tayyorlash ishiga alohida ahamiyat berishimiz kerak. Binobirin, savodli xalq va ilmi rahbarlar bilan ishlash ham oson, ham zavqli..."** (I.A.Karimov. "Istiqlol imkoniyatlaridan oqilona foydalanaylik", xalq deputatlari Qashqadaryo viloyati kengashi sessiyasida so'zlangan nutq. "Ma'rifat" gazetasi. 1995 yil, 6 dekabr).

Oliygo'hlardagi ta'lim va tarbiya jarayonini shunday tashkil etish lozimki, yosh kadrlar mustaqil ravishda ish yurita oladigan, o'z fikriga ega bo'lishi, o'zi egallagan mutaxassislik bo'yicha olgan diplomlarni oqlashlari lozim.

- **"Universitet diplomi darajasi va obro'sini oshirish zarur. Buning uchun o'quv muassasalari moddiy bazasini mustahkamlash, ularni zamonaviy o'quv va kompyuter texnikasi bilan jihozlash, zarur o'quv adabiyotlar bilan ta'minlash, o'quv dasturining turli shakllarini kengaytirish, o'qituvchilarning mehnatga rag'batini kuchaytirish kerak"** – deb ta'kidlaydi Prezidentimiz I.A.Karimov. ("Islohotlar izchilligi – inson mafaatlari omili", "Ma'rifat" gazetasi. 1997 yil, 1 mart).

Oliygo'hdagi talabalarga bilim berish jarayonida zamonaviy ilm – fan yutuqlariga katta e'tibor berish bilan birga o'tmishdagi tarixiy merosimizni yaxshi o'rganishimiz va buyuk ajdodlarimizning ishlarini davom ettirishimiz lozim. Bu borada so'z yuritganda Prezidentimizning quyidagi fikrlari hamma vaqt yodimizda bo'lmog'i kerak:

- **"Olimlarimiz eng yaxshi an'analarni o'zlashtirib, tarixiy merosimizni chuqur o'rganib, buyuk ajdodlarimizning ishlarini munosib davom ettirmoqdalar. Ilmiy ziyolilarimizning munosib fazilati hamma vaqt bilimga, ilg'or ilmiy tafakkurning oldingi marralarida bo'lishga intilishdan iborat.**

O'zbekiston innavatsion rivojlanish turining xozirgi zamon modeliga o'tish uchun hamma zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy – texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga, fundamental va amaliy fanning yutuqlarini chuqur talab qiladigan texnologiyalarni amaliyotga keng joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli ilmiy kadrlar sonini ko'paytirishga asoslanadi. Bu – mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan mamlakatlar qatoriga kirib borishning zarur sharti va mustahkam poydevori bo'lib xizmat qiladi." (O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyoti kafolatlari. I.A.Karimov. Toshkent. "O'zbekiston" nashriyoti 1997 yil).

Prezidentimizning kadrlar haqidagi ushbu fikrlari katta ahamiyatga ega:

- **"Biz hayotimizning turli jabhalarida, xalq xo'jaligining barcha sohalarida tub islohotlarni amalga oshirib, yangilanish sari borar ekanmiz, ushbu islohotlarning turmush tarzimizni ijobiy tomonga o'zgartirishi, ma'naviy yuksalishimizga ko'mak berishi hamda milliy g'urur va iftixorlarimizning kuchaytirish ko'p jihatdan har tomonlama yetuk kadrlarga bog'liq ekanini unutmasligimiz kerak. Respublikamizning iqtisodiy, siyosiy va ma'naviy jihatdan ravnaq topishida, bu sohalaridagi muammolarni hal qilishimizda ham milliy kadrlar bosh omillardan biri bo'ladi"** ("Zamonaviy kadrlar tayyorlash – islohotlar muvaffaqiyatining asosi" nutqidan. "Ma'rifat" gazetasi. 1998 yil 28 yanvar).

Respublikamizda amalga oshirilayotgan barcha islohotlarda ilm – fanning yutuqlardan foydalanish nazarda tutilgandir. Oliygo'hdagi ta'lim olayotgan barcha yoshlar asosiy e'tiborni fan

asoslarini egallashga qaratmog'i kerak. Bu borada prezidentimiz I.A.Karimovning ushbu fikrlari dasturul – amal bo'lmog'i shart:

- **“Umuman men, fanni ilg'or taraqqiyot, progress degan so'zlar bilan yonma – yon qabul qilaman. Fanning vazifasi kelajagimizning shakl – tamoyilini yaratib berish, ertangi kunimizning yo'nalishlarini, tabiiy qonuniyatlarni, uning qanday bo'lishini ko'rsatib berishdan iborat, deb tushunaman. Odamlarga mustaqillikning afzalligini, mustaqil bo'lmagan millatning kelajagi yo'qligini, bu tabiiy qonuniyat ekanini isbotlab, tushuntirib berish lozim. Fan jamiyat taraqqiyotining olg'a siljituvchi kuchi, vositasi bo'lmog'i lozim”.** (I.A.Karimov. “Tarixiy xotirasiz kelajak yo'q”. “Munojot” jurnali, 1998 yil 5 - son).

“Shundan kelib chiqqan holda, bizning yaqin istiqbolimizdagi eng muhim vazifamiz, boshlagan ishlarimizni izchil davom ettirish – iste'mol talabini kengaytirish maqsadida sotsial sohani rivojlantirish, mehnatga haq to'lashni yanada oshirish, xizmat ko'rsatish sektorini, infratuzilma ob'ektlarini rivojlantirishga, transport va kommunikatsiya loyihalari amalga oshirishga alohida e'tibor berishdir”. (“Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsyasi”, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisi qonunchilik palatasi va Senatining qo'shma majlisidagi ma'ruzasi, Norin ovozi gazetasi, 2010 yil 19 – noyabr, №46(6747) – chi son.)

Yurtboshimiz I.A.Karimovning yuqorida keltirilgan chaqiriqlariga amal qilgan holda har bir magistr ham o'z izlanishlari bilan mamlakatimiz taraqqiyotiga munosib hissa qo'shmog'I kerak. Men ham ana Sunday maqsadlarni amalga oshirishda o'z hissamni qo'shish maqsadida ushbu magistrlik dissertatsiyasini yozdim.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi ehtimolliklar nazariyasining asosiy bo'limlaridan biri – lokal limit teoremlar nazariyasiga bag'ishlangan.

Magistrlik ishining I bobida panjarasimon taqsimlangan va uzluksiz tasodifiy miqdorlarning oddiy yig'indilari uchun lokal limit teoremlar ko'rilgan, bir xil taqsimlangan va har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun mavjud natijalar yoritilgan.

Magistrlik ishining II bobida Turg'un qonunlar va ularning xarakteristik funksiyalarining xossalari, xarakteristik funksiyalarining oshkor ko'rinishi haqida so'z yuritiladi.

Magistrlik ishining III bobida Turg'un qonunlar uchun lokal limit teoremlar. Yordamchi teoremlar hamda yangi olingan natijalar keltiridi. Ishning so'ngida xulosalar va takliflar berildi.

Ma'lumki, ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning ko'plab masalalarini hal etishda tasodifiy miqdorlarning yig'indilari, qo'shiluvchilar soni kattalashib borganda, qanday qonunga intilishini aniqlash muhim masala bo'lib qoladi; shunday masalalarni hal etish jarayonida, masalaning mohiyatiga qarab turlicha – markaziy limit teoremlar, lokal limit teoremlar va global limit teoremlar isbot etiladi. Biroq, bunday teoremlarning isbotlanishi bilan muammolar to'la hal bo'lib qolmaydi, chunki bu teoremlarda qo'shiluvchilar soni n - qanday bo'lganda bu teoremlarni qo'llash samarali bo'lishini oydin-lashtirish lozim bo'ladi.

Bunday savollarga javob berish uchun, isbotlangan lokal limit teoremlarda yaqinlashish tezligini aniqlash, olingan baholarning tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalariga va o'zgaruvchi x - ga qanday aloqadaligini ko'rsatish, qolaversa olingan tengsizliklarda qatnashuvchi o'zgarmas c – konstantalarning optimal(minimal) qiymatlarini topish eng muhim masalalardir.

Ushbu magistrlik ishim Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimovning quyidagi fikrlariga mos keladi degan fikrdaman. Prezidentimiz Ehtimollar nazariyasi haqida aytgan so'zlarini yodda tutishimiz lozim:

- **“ ... Respublikamizda quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvafaqqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar. Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differentsial tenglamalar va matematik fizika, funktsional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashhur”.** (“O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari” nomli kitoblaridan).

MAGISTRLIK ISHINING MAQSAD VA VAZIFALARI.

Magistrlik ishining asosiy maqsadi matematik tahlildagi funksiyalarni qatorga yoyish, qoldiq hadni baholash, absolyut integrallanuvchi funksiyalar va ayrim klassik tengsizliklarni ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning bo'limlaridagi muhim muamolarni hal etishga tadbqiq etishni ko'rsatishdan iborat.

Bizning vazifamiz matematik tahlil apparatidan foydalanib ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadagi muhim yo'nalish lokal limit teoremlar sohasida, hususan, turg'un qonunlarga oid lokal limit teoremlar sohasida olingan natijalarni kengaytirishdan iboratdir.

AMALIY AHAMIYATI.

Ehtimollar nazariyasining muhim qismi – limit teoremlar bo'limida erishilgan yutuqlarni xalq xo'jaligi, zamonaviy texnika, avtomatik liniyalar, kosmik tadqiqotlarga oid masalalarda qo'llashning imkoniy va foydali yo'nalishlarini ko'rsatishdan iborat.

Bu sohada dunyoning mashhur matematiklaridan tortib yosh izlanuvchilarning hissalari ham muhim. Moskvalik, Ukrainalik, Litvalik, O'zbekistonlik va boshqa horijiy davlatlarning olimlari juda muhim ishlarni amalgam oshirganlar. A.N.Kolmogorov, B. V. Gnedenko, V.M.Zolotaryov, I.A.Ibragimov, Yu.V.Linnik, A.A.Mitalauskas, V.V.Petrov, Yu.V.Proxorov, V.A.Statulyavichus, S. H. Sirojiddinov, M. Mamatov, T. Azlarov, N. Shohaydarova, M. G'ofurov, A. Jomirzaev, R. Ibragimov, V.Hojiboyev, A. Mashrabbayev, D. Otaqo'ziyev, M. Holmuradov va boshqa yuzlab matematiklar bu sohada izlanishlar olib borganlar va juda muhim natijalarga erishganlar.

ILMIY YANGILIGI.

Magistrlik dissertatsiyasida tanlangan sohaga oid Turg'un qonunlar uchun lokal teoremlardagi yaqinlashish tezligini aniqlovchi teoremlar isbot qilingan.

TADQIQOT OB'EKT VA PREDMETI.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika va unga qo'shni boshqa sohalarga oid ilmiy izlanishlarni davom ettirish.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi Kirish, Asosiy qism, Xulosa, Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va Ilovadan tashkil topgan. Asosiy qism uchta bobdan iborat bo'lib, birinchi va ikkinchi boblar tegishli mavzularning obzoriga bagishlangan, uchinchi bobda esa asosiy natijalar va ularning isbotlari keltirilgan. Internet ma'lumotlarida dissertatsiya mavzusiga oid eng yangi natijalardan namuna keltirilgan. Dissertatsiyaning ilova qismida asosiy qismda foydalanilgan faktlar haqida ma'lumotlar, dissertantning chop etgan maqolasi joy olgan. Shuningdek, ilovada dissertatsiya mavzusiga oid internetdan olingan maqolalardan ham namunalar keltirilgan.

Magistrant tomonidan olingan natijalar matematika fakultetidagi professor R. Ibragimovning ilmiy seminarida Namangan Davlat universiteti ilmiy – nazariy konferensiyalarida (2010 – 2011 yy.) muhokama qilingan va natijalar NamDU IQTIDORLI TALABALAR ILMIY AXBOROTI to'plamining 2011 yil № 2 sonida chop etilgan.

I BOB

BOG'LIQMAS TASODIFIY MIQDORLAR YIG'INDISI UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMALAR

1-§. Masalaning qo'yilishi

Ma'lumki, juda ko'p masalalarni hal etishda ehtimollar nazariyasidan foydalaniladi. Ko'plab nazariy va amaliy masalalarni echish jarayonida tasodifiy miqdorlarning yig'indisi sifatida ifodalanadigan harakteristikalar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Aksariyat hollarda qo'shiluvchilar soni katta bo'lgani sababli bunday yig'indilar uchun limitik taqsimotni izlanadi.

Masalan, tajribalar soni n unchalik katta bo'lmaganda biror hodisaning n marta tajriba o'tkazilganda k marta ro'y berish ehtimoli quyidagi binomial qonun bilan topiladi:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.1.1)$$

bu erda p - qaralayotgan hodisaning ro'y berish ehtimoli,

$$q = 1 - p.$$

Ammo n va k lar etarlicha katta bo'lganda (1.1.1) formuladan foydalanish juda ham murakkab hisob-kitoblarni talab etib, amaliyotda qo'llanishi samarali natijalarga olib kelmaydi.

(1.1.1) formuladagi n va k lar etarlicha katta bo'lgan hol uchun tegishli asimptotik formula topilib, bunga Muavr – Laplasning lokal teoremasi orqali erishilgandir.

Teorema. A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning n ta tajribada aniq k marta ro'y berish ehtimoli quyidagicha ifodalanadi:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 + \varepsilon_n), \quad (1.1.2)$$

bu erda

$$q = 1 - p, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \text{ va } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

n etarlichi katta bo'lganda (1.1.2) formuladan quyidagi taqribiy formulaga o'tiladi:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.1.3)$$

(1.1.3) formuladan foydalanish uchun standart normal qonunining zichlik funksiyasi deb ataluvchi quyidagi funksiyaning qiymatlarini bilish talab etiladi.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bu funksiyaning muhimligini e'tiborga olib, uning qiymatlarini topish uchun maxsus jadvallar tuzilgan bo'lib ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda ilova sifatida keltiriladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning keng qamrovli tadbirlarini amalga oshirish uchun masalani umumiyroq tarzda qo'yib, zarur natijalarga ega bo'lish muhimdir. Ehtimollar nazariyasining ushbu yo'nalishdagi masalalar har tomonlama o'rganilgan, ya'ni bir xil taqsimlangan o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun, o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar ketma-

ketligi uchun ma'lum shartlar o'rinli bo'lganda tasodifiy miqdorlarning momentlariga turli xil shartlar qo'yib lokal limit teoremlar isbotlangan va ulardagi yaqinlashish tezliklarini aniqlangandir.

Juda ko'plab mualliflarning ishlarida ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $P(x)$ ning chegaralangan bo'lishi, ya'ni $P(x) < A < \infty$ shartning bajarilishi talab etiladi, bu esa qaralayotgan masalalar sinfining torayishiga sabab bo'ladi. Biroq, lokal limit teoremaning o'rinli bo'lishi uchun $P(x) < A$ shartning bajarilishi zarur bo'lmasdan, biror $n_0 > 1$ nomerdan boshlab

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n_0}$$

yig'indining zichlik funksiyasi $P_{n_0}(x)$ ning chegaralangan bo'lishi zarur bo'ladi. Bu yo'nalishdagi teoremlar ham o'rganilgan, tegishli baholar olingan. Tabiiyki, bu yo'nalishdagi natijalar o'rganiladigan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi sinfining kengayishiga olib keladi va $n_0 = 1$ bo'lganda avvalgi natijalar hosil bo'ladi.

Texnikada, meditsinada, statistikaning turli masalalarini echishda, xalq xo'jaligining xilma-xil muammolarini hal etish jarayonida olingan limitik teoremlardan n ning qanday qiymatlaridan boshlab foydalanish etarlicha effekt berishini bilim muhimdir. Ushbu savolga javob berish uchun esa lokal limit teoremlardagi yaqinlashish tezligini aniqlashga imkon beruvchi formulalarni topishning ahamiyati kattadir.

Yaqinlashish tezligini aniqlash masalasi ham ko'p qirrali bo'lib, bular – X ga nisbatan notekis baholar, momentlarga nisbatan tekis baholar, olingan baholardagi C - koeffitsient qiymatini mini-mallashtirish, momentlar tartibini pasaytirish kabi o'nlab yo'nalishlar mavjud.

Endi shu yo'nalishlarda erishilgan natijalar bilan tanishib chiqamiz.

2-§. PANJARASIMON TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMA

Ta'rif. Agar shunday a va $h > 0$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = a + kh) = 1$$

tenglik bajarilsa, u o'olda ξ tasodifiy miqdor h qadamli panjarasimon taqsimotga ega deyiladi.

ξ esa panjarasimon taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad - \text{ binomial qonun}$$

va

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad - \text{ Puasson qonun}$$

bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorlar panjarasimon taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misol bo'la oladi.

Lemma. ξ panjarasimon taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lishi uchun biror $t \neq 0$ da ξ tasodifiy miqdor harakteristik funksiyasining moduli birga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Agar hech bir $b (-\infty < b < \infty)$ va $h_1 > h$ da ξ tasodifiy miqdorning barcha qiymatlarini $b + kh_1$ ko'rinishda ifodalab bo'lmasa, u holda h son taqsimotning maksimal qadami deyiladi.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ o'zaro bog'liqmas panjarasimon taqsimotga ega bo'lgan va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.

U holda

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

yig'indisi ham panjarasimon taqsimotga ega bo'lib, uning qiymatlarini $\{na + kh\}$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

Aytaylik,

$$P_n(x) = P(S_n = na + kh)$$

bo'lsin.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz.

$$Z_{n,k} = \frac{an + kh - A_n}{B_n}, \quad A_n = MS_n, \quad B_n^2 = DS_n = nD\xi_1.$$

1.2.1-teorema (B.V.Gnedenko). Agar $0 < D\xi_1 < \infty$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{B_n}{n} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{Z_{n,k}^2}{2}} \rightarrow 0$$

munosabat k ga nisbatan tekis bajarilishi uchun h ning maksimal qadami bo'lishi zarur va etarlidir.

Eslatma. Ushbu bobda olingan natijalarni isbotsiz keltiramiz. Ularning hammasi harakteristik funksiyalar metodi bilan isbotlangan. Etarlicha ma'lumot olish uchun tavsiya etilgan adabiyotlarga murojaat etish mumkin.

Endi ushbu teoremadagi yaqinlashish tezligini aniqlashga doir teoremlarni keltiramiz. Umumiylikka halal bermagan holda, $h = 1$ deb olamiz.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$ o'zaro bog'liqmas butun qiymatli, maksimal qadami 1 ga teng bo'lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.

U holda

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

yig'indi ham butun qiymatli bo'ladi.

Faraz qilaylik

$$M_{\xi_1} = a, D_{\xi_1} = \sigma^2, B_n = n\sigma^2, \xi_n = (S_n - an)/\sigma\sqrt{n}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$y = Y_{n,k} = \frac{k - ah}{\sigma\sqrt{n}}, \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

$$P\left\{\xi_n = \frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = P\{S_n = k\} = P_n(k).$$

1.2.2-Teorema. Agar $M|\xi_1|^3 = \beta_3 < \infty$ bo'lsa, u holda

$$\left| B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Quyidagi teoremda $\beta_3 < \infty$ talab o'rniga $\beta_{2+\delta} < \infty$ ($0 < \delta \leq 1$) deb olib, natija umumlashtirilgan:

1.2.3-Teorema. (M.Mamatov). Agar ξ_i tasodifiy miqdorlar $2 + \delta$ ($0 < \delta \leq 1$) tartibli absolyut markaziy momentga ega bo'lsa, u holda

$$\left| B_n P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \right| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right).$$

1.2.4-Teorema. (M.Mamatov). Agar $M|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ ($0 < \delta < 1$) bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1-\delta}{2}}} \left| P\{S_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(k-na)^2}{2n\sigma^2}} \right| < \infty.$$

Bu teoremdan, etarlicha katta n larda quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\sigma\sqrt{n}P\{S_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z_{n,k}^2}{2}} = o\left(n^{-\frac{\delta}{2}}\right).$$

YUqorida keltirilgan teoremlarda ξ_1 tasodifiy miqdorning momentlari chekli bo'lishi talab etiladi. Bu natijalar quyidagi teoremlarda yanada umumlashtirilgandir.

$g(x)$ $[0, \infty)$ da nomanfiy, juft va kamaymovchi funksiya bo'lib, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ bo'lsin.

1.2.5-Teorema. (N.S.Hohaydarova, T.Zuparov). Ushbu

$$\max_x \left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k) - \varphi\left(\frac{an + kh}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| = O(g^{-1}(\sqrt{n}))$$

munosabat o'rinli bo'lishi uchun

$$1) \int_{|x| \geq Z} x^2 dF(x) = O(g^{-1}(Z));$$

2) h - maksimal qadam shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir.

YUqorida keltirilgan teoremlar uchun ξ_1 - tasodifiy miqdorning momentlashga nisbatan tekis baholar olingan bo'lib, ushbu yo'nalishi juda mukammal o'rganilgandir.

Tegishli ma'lumotlar olish uchun ro'yxatda keltirilgan adabiyotlarga murojaat etishni tavsiya etamiz.

3-§. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR YIG'INDISI UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMLAR

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$$

uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ular $P(x)$ umumiy zichlik funksiyaga va chekli o'rta qiymat hamda dispersiyaga ega bo'lsinlar.

1.3.1-Teorema. (B.V.Gnedenko). $\{\xi_n\}$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi umumiy $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega bo'lsin va ularning o'rta qiymatlari hamda dispersiyalari chekli bo'lib, biror n_0 - nomerdan boshlab $\frac{S_n - A_n}{\sqrt{nD\xi_1}}$ yig'indi $\bar{P}_n(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsin.

$$\bar{P}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 0$$

munosabat $n \rightarrow \infty$ da x ($-\infty < x < \infty$) ga nisbatan tekis bajarilishi uchun $P_{n_0}(x) < \infty$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_0 sonning topilishi zarur va etarlidir.

$\{\xi_n\}$ – bog'liqmas, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $F(x)$ ularning taqsimot funksiyasi va $M\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ bo'lsin.

Quyidagi yig'indilarni tuzamiz.

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n; \quad \xi_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

S_n va ξ_n yig'indilarning zichlik funksiyalari (agar ular mavjud bo'lsa) $P_n(x)$ va $\bar{P}_n(x)$ kabi belgilaymiz.

1.3.2-Teorema. (D.Otaqoziev). $\{\xi_n\}$ bog'liqmas bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi bo'lib, $F(x)$ ularning taqsimot funksiyasi bo'lsin. Agar shunday n_0 son topilsinki, $\sup_x P_{n_0}(x) \leq A$ o'rinli bo'lsa, u holda $n \geq 2n_0$ nomerlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\sup_x |\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{C \cdot \sqrt{n_0} \cdot \beta_3 \max[1; (\sigma\sqrt{n_0}A)^3]}{\sigma^3 \sqrt{n}}.$$

bu erda $\beta_z = M|\xi_1|^3$.

$n_0 = 1$ va $n_0 > 1$ bo'lgan hollarni alahida – alohida ko'rib o'tamiz.

4-§. $n_0 = 1$ HOLDA YAQINLASHISH TEZLIGINI BAHOLASH

Ushbu paragrafda zichlik funksiyalari chegaralangan tasodifiy miqdorlar uchun lokal – limit teoremlardagi yaqinlashish tezligini aniqlashga doir teoremlarni keltiramiz.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ bog'liqmas bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, bir xil $P(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsin, hamda

$$M\xi_1 = 0, \quad D\xi_1 = 1, \quad M|\xi|^3 < \infty, \quad \sup_x P(x) \leq A$$

shartlar o'rinli bo'lsin.

$$\xi_n = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{n}}$$

tasodifiy yig'indining zichlik funksiyasi $\bar{P}_n(x)$ bo'lsin.

$\sup_x P(x) \leq A < \infty$ shart ancha og'ir shart bo'lib, barcha zichlik funksiyalar ham bunday shartni qanoatlantiravermaydi.

Quyida bu shartga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdorlarga misol keltiramiz.

1) $M\xi_1 = 0, \quad M\xi_1^2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun

$$P(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Bu funksiya uchun

$$\sup_x |P(x)| = \sup_x \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = A.$$

2) ξ tasodifiy miqdor Koshi taqsimotiga ega bo'lsa uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (-\infty < x < \infty).$$

U holda

$$\sup_x |P(x)| = \sup_x \frac{1}{\pi(1+x^2)} \leq \frac{1}{\pi} = A.$$

3) Agar ξ tasodifiy miqdor ikki yoqlama Laplas qonuni bilan taqsimlangan bo'lsa unga mos zichlik funksiya

$$P(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu hol uchun:

$$\sup_x P(x) = \sup_x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = \frac{\lambda}{2} = A,$$

bu erda λ - taqsimot parametri.

Bunday misollarni ko'plab keltirishimiz mumkin.

$\sup_x P(x) \leq A$ shart bajarilmaydigan, ya'ni $\sup_x P(x) = \infty$ bo'lgan holni keyingi II, III

boblarda ko'rib o'tamiz.

Endi $\sup_x P(x) \leq A$ bo'lgan hol uchun olingan natijalarni keltiramiz:

1.4.1-Teorema (S.H.Sirojiddinov, M.Mamatov). $\{\xi_n\}$ bog'liqmas bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $P(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lib,

$$M_{\xi_1} = 0, \quad M_{\xi_1}^2 = 1, \quad M_{\xi_1}^3 = \alpha_3 < \infty$$

bo'lsin.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \bar{P}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx = \frac{|\alpha_3|}{3\sqrt{2\pi n}} \cdot \left(1 + 4e^{-\frac{3}{2}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1.4.2-Teorema. (N.S.Hohaydarova). $\{\xi_n\}$ bog'liqmas bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $P(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lib,

$$M_{\xi_1} = 0, \quad M_{\xi_1}^2 = 1, \quad M|\xi_1|^3 = \beta_3 < \infty, \quad \sup_x P(x) \leq A$$

bo'lsin.

U holda

$$\sup_x \left| \bar{P}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leq \frac{C\beta_3}{\sqrt{n}} \cdot \max(i; A^3);$$

va barcha X lar uchun

$$\left| \bar{P}_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leq \frac{C \cdot \beta_3^{2m-1} \max(1; A^{2m+1})}{\sqrt{n}(1+|x|^m)},$$

bu erda $m = 2; 3$, C - absolyut o'zgarmas son.

5-§. HAR XIL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR YIG'INDISI UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMLAR

Endi umumiyroq holga o'tamiz. $\{\xi_n\}$ - bog'liqmas har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin.

$M_{\xi_k} = 0$, $D_{\xi_k} = \sigma_k^2$ va ξ_k ning zichlik funksiyasi $P_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ bo'lsin.

Har bir tasodifiy miqdorning uchinchi tartibli momenti $\beta_{3k} = M|\xi_k|^3$ mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz.

Quyidagi yig'indini tuzamiz

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{S_n},$$

bu erda

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

$\bar{P}_n(x)$ - orqali yuqoridagi yig'indining zichlik funksiyasini belgilaymiz.

$$B_{3n} = \sum_{k=1}^n \beta_{3k}; \quad T_{3n} = \frac{S_n^3}{4B_{3n}}$$

deb olamiz.

$$P_k(x) \leq A_k < \infty, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'lsin.

Umumiylikka halal bermasdan quyidagicha yozish mumkin:

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$$

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$I. A_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$II. \sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k^2 \sigma_k^2} \geq C_1 \cdot \frac{\max_k \beta_{3k}^2}{\sigma_{k_n}^6} \cdot \ln S_n,$$

bu erda C_1 qandaydir musbat son ($C_1 \geq 16\pi^2 / C_k$), $\sigma_{k_n}^2$ - esa barcha dispertsiyalarning eng kichigi, $\sigma_{k_n}^2 \neq 0$.

1.5.1-Teorema. (N.S.Hohaydarova). $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun I va II shartlar o'rinli bo'lsin. U holda $n \rightarrow \infty$ da X - ga nisbatan tekis holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq C \cdot \left[\frac{\sum_{k=1}^n \beta_{3k}}{S_n^3} + \frac{A_2}{S_n} \right], \quad x \in (-\infty; \infty).$$

1.5.2-Teorema. 1.5.1-teoremaning shartlari biror musbat C son bilan o'rili bo'lib, $|\xi_k| \leq L = \lambda_n S_n$ tengsizlik k ga nisbatan tekis bajarilsa, u holda $0 < \lambda_n x < (3 - \sqrt{5})/4$ tengsizlik o'rinli bo'lganda

$$\frac{\bar{P}_n(x)}{\varphi(x)} = e^{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \cdot \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} \left[1 + \theta_1 \lambda_n x \right] \left[1 + \theta_2 \left(\frac{\sum_{k=1}^n \beta_{3k}}{S_n^3} + \frac{A_2}{S_n} \right) \right],$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu erda $\lambda_n \rightarrow 0$, $\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ - qaralayotgan intervalda yaqinlashuvchi qator, θ_1 va θ_2 lar absolyut sonlar bilan chegaralangan miqdorlar.

Agar $\{\xi_n\}$ - bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, 4 teoremdan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Agar $C_3 A^2 \beta^2 \leq \frac{n}{\ln \sqrt{n}}$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\beta}{\sqrt{n}} \max(1; A), \quad x \in (-\infty; \infty).$$

$\{\xi_n\}$ - tasodifiy miqdorlarning momentlari o'rniga quyidagi "kesilgan" momentlarni qarab, yuqorida olingan natijalarni yaxshilash mumkin. Bu yo'nalishda M. G'ofurov tomonidan olingan quyidagi natijalarni ko'rib o'tish mumkin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2; \quad \lambda_k = \sup_{z \geq 0} \int_{|x| > z} x^2 P_k(x) dx;$$

$$\rho_k = \sup_{z \geq 0} \left\{ \left| \int_{-z}^z x^3 P_k(x) dx \right| + z \int_{|x| > z} x^2 P_k(x) dx \right\}.$$

Faraz qilaylik, $P_k(x) \leq A_k < \infty$ bo'lsin.

Ushbu tengsizlik o'rinli:

$$\sigma_k^2 A_k^2 \geq \frac{1}{12}.$$

Tabiiyki, $\rho_k < \beta_{3k}$ o'rinli bo'lgani uchun, ushbu shartlar bilan olingan teoremlar avvalgi natijalarni yaxshilaydi.

$$\min_{1 \leq j \leq n}^{(k)} A_j = A_k^{(n)}$$

orqali $A_1, A_2, \dots, A_n$ sonlar ichida k - chi eng kichigini belgilaymiz.

$$\text{Xususan, } \min_{1 \leq j \leq n}^{(1)} A_j = \min_{1 \leq j \leq n} A_j.$$

Quyidagi shartlarni kiritamiz:

$$\text{A) } A_2^{(n)} < \infty;$$

B) $A_4^{(n)} < \infty$;

V) shunday α va β o'zgaras sonlar mavjud bo'ladiki, barcha n lar uchun

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \leq \alpha n, \quad \bar{\sigma}_n^2 = \min_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \geq \beta_k > 0.$$

Teoremlardagi C lar bir xil bo'lmagan o'zgaras sonlar bo'lishi mumkin.

1.5.3-teorema. (M.O'.G'ofurov). Agar $\{\xi_n\}$ - bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun A, B shartlar o'rinli bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik X - ga nisbatan tekis bajariladi.

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq C \cdot \left\{ \lambda(n) + \frac{\alpha \cdot (w_k + A_2^n)}{\beta \lambda(n) \cdot \Lambda^k(n)} \right\},$$

bu erda

$$w_k = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^3} \right)^k, \quad \lambda(n) = \sum_{k=1}^n \rho_k / S_n^3, \quad \Lambda(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{A_k^2 \sigma_k^2},$$

k -ixtiyoriy musbat son.

Ko'rinib turibdiki, yuqoridagi natija $\Lambda(n)$ ga bog'liq. Buni e'tiborga olsak quyidagi teorema o'rinlidir:

1.5.4-teorema. Agar biror absolyut C_0 konstanta uchun $\Lambda(n) \geq C_0 \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \rho_k^2}{\bar{\sigma}_n^6} \log S_n$ va

A shart o'rinli bo'lsa, u holda quyidagi baho X - ga nisbatan tekis bajariladi

$$|\bar{P}_n(h) - \alpha(x)| \leq C \left(\lambda(n) + \frac{A_2^{(n)}}{S_n} \right). \text{ Ushbu teorema 3-teoremani yaxshilaydi, chunki 3-}$$

teoremada 3-chi tartibli momentning chekli bo'lishi talab etilgan.

1.5.5.-teorema. $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun δ, B shartlar o'rinli bo'lsa, u holda

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \left[\lambda(n) + \frac{\alpha^3 (w_k + A_k^{(n)})}{\beta^4 \lambda^3(n) \Lambda^k(n)} \right].$$

Bu natijalarda $\{\xi_n\}$ - bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning zichlik funksiyasi $P(x)$ bo'lsa, va

$$M_{\xi_1} = 0, \quad D_{\xi_1} = 1, \quad \rho = \sup_{z>0} \left\{ \left| \int_{-z}^z x^3 P(x) dx \right| + z \int_{|x|>z} x^2 P(x) dx \right\} < \infty$$

shartlar o'rinli bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinli:

1.5.6-teorema. Agar $P(x) \leq A$ bo'lsa, quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq C \cdot \frac{\rho \max(1; A^3)}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$|\bar{P}_n(x) - \varphi(x)| \leq C \cdot \frac{\rho^3 \max(1; A^5)}{(1+x^2)\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

II – Bob. Turg'un qonunlar

1 – §. Masalaning qo'yilishi

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Ushbu

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} \quad (2)$$

yig'indini tuzamiz. S_n - yig'indining taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ bo'lsin, A_n va B_n lar normallovchi koeffitsientlar.

(1) – tasodifiy miqdorlar ma'lum shartlarni qo'ymasdan, umumiy holda, $F_n(x)$ funksiyaning asimptotik tahlili juda mushkul masaladir.

(1) – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bir xil taqsimlangan va o'zaro bog'liq bo'lmagan hol juda ham batafsil o'rganilgan, ya'ni (1) o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun $M\xi_1 = a$, $D\xi_1 = \sigma^2$ mavjud bo'lsa, u holda (2) yig'indining ko'rinishi

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)}}$$

kabi bo'ladi.

Ushbu holda $F_n(x)$ funksiya $n \rightarrow \infty$ da $N(a, \sigma)$ normal qonunga intiladi. Ushbu holni I – bobda batafsil o'rganib chiqildi.

(1) – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi har xil taqsimlangan bo'lsa, ya'ni $M\xi_k = a_k$, $D\xi_k = \sigma_k^2$, $k=1,2,\dots$ – bo'lgan hol ham ancha yaxshi o'rganilgan, mos markaziy va lokal teoremlar isbotlangan, bu teoremlardagi yaqinlashish tezliklari ham aniqlangan, bu holda jamlovchi (limitik) funksiya normal qonundan iborat bo'ladi. Biroq, A_n va B_n koeffitsientlarning qanday aniqlanishiga qarab, (2) – yig'indining $F_n(x)$ taqsimot funksiyasi normal taqsimotdan boshqa taqsimotlarga intilishi mumkin.

O'zaro barqaror bog'langan (xususan, o'zaro bog'liqmas va bir xil taqsimlangan) tasodifiy miqdorlarning (2) – yig'indisi, limitik funksiya sifatida, faqat turg'un qonunlarga intiladi.

Bu aytilganlardan kelib chiqadiki, (2) yig'indilar taqsimot funksiyasining limiti bo'lmish – turg'un qonunlarni har tomonlama tahlil etish maqsadga muvofiqdir.

2 – §. TURG'UN QONUNLARNING HARAKTERISTIK FUNKSIYALARI VA ULARNING XOSSALARI

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $a_1 > 0$, b_1 , $a_2 > 0$, b_2 – lar uchun

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b) \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ taqsimot funksiya turg'un taqsimot deyiladi, bu yerda $a > 0$ va b – lar qandaydir o'zgarmas sonlar.

$F(x)$ taqsimot funksiyaga mos harakteristik funksiyani $f(t)$ orqali belgilaymiz va ixtiyoriy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ sonlar uchun

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) \cdot f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-ibt} \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $a > 0$ va b – lar qandaydir o'zgarmas sonlar.

O'zaro bog'liqmas ξ_k – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun quyidagi tasdiq o'rinli:

2.1. – Teorema. $F(x)$ taqsimot funksiya o'zaro bog'liqmas bir xil taqsimlangan ξ_k tasodifiy miqdorlarning (2) ko'rinishdagi yig'indilariga limitik funksiya bo'lishi uchun $F(x)$ ning turg'un taqsimot bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu yerda (2) dagi B_n o'zgarmaslar $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$ – ko'rinishga ega bo'lib, $0 < \alpha \leq 2$, $h(n)$ – sust o'zgaruvchi (Karamat ma'nosida) funksiya.

Zarurlikning isboti: B_n – normallovchi koeffitsientning ko'rinishini keyingi punktlarda aniqlashtiramiz. $F(x)$ taqsimot funksiyaga mos harakteristik funksiyani $\varphi(t)$ – deb belgilaylik, ξ_1 – tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasini esa $f(t)$ – deylik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 1 \quad (5)$$

munosabatlarni isbotlaylik.

(5) munosabatlarning birinchisi o'rinli emas, deb faraz qilaylik. U holda B_n ketma – ketlikdan shunday B_{n_k} – qisman ketma – ketlik ajratib olish mumkin,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_{n_k} = B \neq \infty$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Teorema shartiga ko'ra barcha t lar uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$\left| f\left(\frac{t}{B_{n_k}}\right) \right|^{n_k} = \varphi(t) \cdot (1 + o(1)),$$

demak, barcha t lar uchun

$$|f(t)| = |\varphi(t \cdot B_{n_k})|^{\frac{1}{n_k}} \cdot (1 + o(1))$$

tenglik $|f(t)| \equiv 1$ bo'lganda, demak, $|\varphi(t)| \equiv 1$ bo'lgandagina bajariladi, ya'ni

$F(x)$ – xosmas taqsimot bo'lganda bajariladi. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $F(x)$ – xos taqsimot funksiya deb qaralmoqda.

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ bajarilmaydi deb qilgan farazimiz noto'g'ri ekan.

Endi, (5) dagi ikkinchi munosabatni isbot qilamiz.

Yuqorida isbotlangan $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ munosabatga asosan, barcha t lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{t}{B_{n+1}}\right) \right| = 1,$$

va demak, $n \rightarrow \infty$ da

$$\left| f\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|^n = |\varphi(t)| \cdot (1 + o(1)),$$

$$\left| f\left(\frac{t}{B_{n+1}}\right) \right|^n = |\varphi(t)| \cdot (1 + o(1)).$$

Bu tengliklarning birinchisida t ni $\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot t$ bilan, ikkinchisida esa t ni $\frac{B_n}{B_{n+1}} \cdot t$ bilan almashtirib, quyidagilarni isbotlaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \varphi \left(\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot t \right) \right|}{|\varphi(t)|} = 1, \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \varphi \left(\frac{B_n}{B_{n+1}} \cdot t \right) \right|}{|\varphi(t)|} = 1.$$

Agar, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ va $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ ketma – ketliklardan xech bo’lmaganda, bittasi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} \neq 1$$

bo’lsa, u holda, bu ketma – ketliklardan $B < 1$ songa intiluvchi qisman ketma – ketlikni ajratib olish mumkin.

Ushbu olingan ketma – ketliklarda (6) – bo’yicha limitga o’tib, $|\varphi(t)| = |\varphi(B^n t)|$ tenglikka ega bo’lamiz, bu jarayonni n marta takrorlansa, barcha n lar uchun

$$|\varphi(t)| = |\varphi(B^n t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\varphi(0)| = 1$$

munosabat hosil bo’ladi. Ammo, xosmas taqsimotlar uchun oxirgi munosabatning bo’lishi mumkin emas. Demak, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ va $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ ketma – ketliklardan $B < 1$ ga intiluvchi qisman ketma – ketlik ajratib olish mumkin, – degan farazimiz noto’g’ri, shuning uchun (6) – dagi ikkinchi munosabat ham o’rinli.

Shunday qilib, (6) – dagi ikkinchi munosabat ham isbotlandi.

Endi, agar $F(x)$ – xos taqsimot funksiya bo’lsa, uning turg’un bo’lishini isbotlaymiz.

$a_1 < a_2$ – ixtiyoriy musbat sonlar, b_1, b_2 – lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo’lsin.

(6) – o’rinli bo’lgani uchun $m = m(n)$ ketma – ketlikni shunday tanlash mumkinki, $n \rightarrow \infty$ da quyidagilar o’rinli bo’ladi:

$$\frac{B_m}{B_n} \rightarrow \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{m}{B_n} \rightarrow 0.$$

Quyidagi yig’indini qaraymiz:

$$\frac{B_n}{B} \cdot \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_n}{B_n} - A_n - b_1 \right) + \frac{B_m}{B} \cdot \left(\frac{\xi_{n+1} + \xi_{n+2} \dots + \xi_{n+m}}{B_m} - A_m - b_2 \right) = \frac{\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_{n+m}}{B} - A, \quad (7)$$

bu yerda

$$B = \frac{B_n}{a_1}, \quad A = \frac{1}{B} \cdot (B_n A_n + B_m A_m + b_1 B_n + b_2 B_m).$$

Teoremada talab qilingan shartlarga asosan (7) – ning chap tomonidagi yig’indilar, mos ravishda, $F(a_1 x + b_1)$ va $F(a_2 x + b_2)$ taqsimot funksiyalarga intiladi. Demak, (7) ning o’ng tomonidagi yig’indi ham yaqinlashadi va uning taqsimot funksiyasi $F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2)$ kompozitsiyadan iborat bo’ladi.

Ammo, oxirgi yig’indi quyidagi ko’rinishga ega

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 \dots + \xi_{n+m}}{B_{n+m}} \cdot \frac{B_{n+m}}{B} - A_{n+m} - (A + A_{n+m}).$$

Demak, uning taqsimot funksiyasi $F(ax + b)$ ko’rinishda bo’ladi, u holda

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b),$$

ya’ni $F(x)$ – taqsimot funksiya turg’un taqsimot ekan (ta’rifga asosan).

Yetarlilikning isboti. $F(x)$ – turg'un taqsimot bo'lsin. Taqsimot funksiyalari $F(x)$ dan iborat bo'lgan

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma – ketligini qaraymiz. (3) – tenglikka asosan $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ yig'indining taqsimot funksiyasi $F(a_n x + b_n)$ ko'rinishga ega bo'ladi, demak

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{a_n} + b_n$$

normallangan yig'indining taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'ladi.

Teorema isbot bo'ldi.

3 – §. TURG'UN QONUNLAR HAKARISTIK FUNKSIYALARINING OSHKOR KO'RINISHI

Endi turg'un taqsimot qonunlar harakteristik funksiyalarining oshkor (aniq) ko'rinishini topishga harakat qilaylik.

2.2. – Teorema. $F(x)$ taqsimot funksiya turg'un taqsimot bo'lishi uchun – uning chegarasiz bo'linadigan bo'lishi zarur va yetarli, $f(t)$ – harakteristik funksiyaning logarifmi uchun Levi formulasi quyidagi ko'rinishda bo'lishi kerak:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma \cdot t + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u), \quad (8)$$

bu yerda

$$M(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha}, \quad N(u) = \frac{c_2}{u^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2, \\ c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_1 + c_2 > 0,$$

yoki

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma \cdot t - \sigma^2 \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (9)$$

Isboti. $F(x)$ taqsimot funksiyaning chegarasiz bo'linuvchiligi avvalgi teoremdan kelib chiqadi. Shuning uchun $\ln f(t)$ – ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma \cdot t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u). \quad (10)$$

Quyidagi

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) \cdot f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-ibt} \quad (4)$$

tenglikni logarifmlab, quyidagini yozishimiz mumkin:

$$\ln f\left(\frac{t}{a}\right) = \ln f\left(\frac{t}{a_1}\right) + \ln f\left(\frac{t}{a_2}\right) + ibt \quad (11)$$

(10) va (11) munosabatlarni taqqoslab, quyidagilarni yozish mumkin:

$$i \cdot \gamma \cdot a \cdot t - \frac{\sigma^2 t^2}{2a^2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(au) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(au) = \\ = i \cdot \gamma \cdot a_1 \cdot t - \frac{\sigma^2 t^2}{2a_1^2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(a_1 u) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(a_1 u) + \\ + i \cdot \gamma \cdot a_2 \cdot t - \frac{\sigma^2 t^2}{2a_2^2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(a_2 u) + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(a_2 u).$$

bu tenglikdan, chegarasiz bo'linuvchi qonunning Levi formulasi yordamida yagona ko'rinishda ifodalanishiga asosan, quyidagilar kelib chiqadi:

$$\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) = 0, \quad (12)$$

$$M(au) = M(a_1 u) + M(a_2 u), \quad u < 0, \quad (13)$$

$$N(au) = N(a_1 u) + N(a_2 u), \quad u > 0. \quad (14)$$

(13) va (14) funksional tenglamalarni yechishga o'tamiz. Ularning bittasini, masalan, (13) tenglamani o'rganish yetarli.

$M(u) \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Ushbu belgilashni qaraymiz:

$$m(x) = M(-e^x), \quad (-\infty < x < \infty).$$

(13) tenglamadan kelib chiqadiki, $m(x)$ funksiya quyidagi funksional tenglamani qanoatlantiradi:

$$m(x + \lambda) = m(x + \lambda_1) + m(x + \lambda_2),$$

bu yerda λ_1, λ_2 – lar ixtiyoriy sonlar, $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$.

Bu tenglikdan esa, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – sonlar har qanday bo'lganda ham ushbu tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$m(x + \lambda) = m(x + \lambda_1) + m(x + \lambda_2) + \dots + m(x + \lambda_n). \quad (15)$$

Xususiyl holda, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ deb olsak, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$m(x + \lambda) = n \cdot m(x), \quad (16)$$

bu yerda $\lambda = \lambda(n)$.

Agar $\lambda\left(\frac{1}{n}\right) = -\lambda(n)$ deb olsak, (16) – dan $\frac{1}{n}m(x) = m\left(x + \lambda\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ bo'lishini topamiz.

Agar $\frac{p}{q}$ – ratsional son bo'lsa, u holda

$$\frac{p}{q}m(x) = pm\left(x + \lambda\left(\frac{1}{q}\right)\right) = m\left(x + \lambda\left(\frac{1}{q}\right) + \lambda(p)\right) = m\left(x + \lambda\left(\frac{p}{q}\right)\right). \quad (17)$$

$M(u)$ funksiya $(-\infty < x < 0)$ da kamayuvchi bo'lgani uchun $m(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda o'smaydi. U holda, (17) tenglikdan kelib chiqadiki, ratsional sonlar to'plamida aniqlangan $\lambda\left(\frac{p}{q}\right)$ funksiya kamayuvchidir. Demak, barcha s – larda quyidagi limitlar mavjud:

$$\lambda(s-0) = \lim_{\frac{p}{q} \rightarrow s-0} \lambda\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$\lambda(s+0) = \lim_{\frac{p}{q} \rightarrow s+0} \lambda\left(\frac{p}{q}\right),$$

va (17) ga asosan, barcha $s > 0$ sonlar uchun

$$\lambda(s-0) = \lambda(s+0) = \lambda(s).$$

$m(x)$ funksiya barcha x – larda chapdan uzluksiz bo'lgani uchun, (7) munosabatdan kelib chiqadiki, barcha $s > 0$ larda $m(x)$ funksiya ushbu tenglamani qanoatlantiradi:

$$s \cdot m(x) = m(x + \lambda(s)), \quad (18)$$

bu yerda $\lambda(s)$ funksiya s – ning uzluksiz funksiyasi.

Bundan tashqari, (18) tenglikdan $s \rightarrow 0$ – dan ∞ – gacha o'zgarganda $\lambda(s)$ – butun haqiqiy o'qni kezib chiqishini ko'rish qiyin emas.

$M(u) \neq 0$ deb faraz qilgan edik, demak, $m(x) \neq 0$.

Umumiylikka halal bermasdan, $m(0) \neq 0$ deb hisoblash mumkin (aks holda koordinatalar boshini siljitishga to'g'ri keladi).

$m_1(x) = \frac{m(x)}{m(0)}$ deb faraz qilamiz. x_1 va x_2 lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. s_1 va s_2 – larni shunday

tanlaymizki: $\lambda(s_1) = x_1$, $\lambda(s_2) = x_2$ bo'lsin. U holda

$$s_1 \cdot m(0) = m(x_1), \quad s_2 \cdot m(0) = m(x_2), \quad s_2 \cdot m(x_1) = m(x_1 + x_2)$$

tengliklarga asosan, $m_1(x)$ funksiya uchun quyidagi funksional tenglamaga ega bo'lamiz:

$$m_1(x_1 + x_2) = m_1(x_1) \cdot m_2(x_2), \quad (19)$$

$m_1(x)$ – manfiymas, aynan nolga teng bo'lmagan kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun, (19) tenglamadan barcha x – lar uchun $m_1(x) \neq 0$ kelib chiqadi.

$m_2(x) = \ln m_1(x)$ deb faraz qilamiz. $m_2(x)$ – monoton va ushbu tenglamani qanoatlantiradi:

$$m_2(x_1 + x_2) = m_2(x_1) + m_2(x_2). \quad (20)$$

Ma'lumki (qarang. Г.Харди, Д.Литтлвуд, Г.Полиа. Неравенства, ИЛ, 1948 г), bu tenglamaning yagona monoton yechimi $m_2(x) = \alpha \cdot x$ ko'rinishda bo'ladi. $M(-\infty) = 0$ bo'lishini e'tiborga olib, yuqoridagi tenglikdan ushbularni topamiz:

$$m_1(x) = m_1(0) \cdot e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0,$$

$$M(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad c_1 > 0.$$

$\int_{-1}^0 u^2 dM(u) = c_1 \alpha \int_0^1 u^{1-\alpha} du$ integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\alpha < 2$ bo'lishi kerak. Va nihoyat, ushbuni hosil qilamiz:

$$M(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha}, \quad c_1 \geq 0, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (21)$$

Xuddi shunga o'xshash

$$N(u) = -\frac{c_2}{u^{\alpha'}}, \quad c_2 \geq 0, \quad 0 < \alpha' < 2 \quad (22)$$

funksiyani ham topish mumkin.

(13) va (14) tengliklarda $a_1 = a_2 = 1$ deb olib, (21) va (22) lar yordamida quyidagicha bo'lishini topamiz:

$$\frac{1}{\alpha^\alpha} = \frac{1}{\alpha^{\alpha'}} = 2. \quad (23)$$

Shunday qilib, $\alpha = \alpha'$. So'ngra (12) da $a_1 = a_2 = 1$ deb olib

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{a^2} - 2 \right) = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar xech bo'lmaganda, $M(u)$ va $N(u)$ funksiyalarning bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda $\frac{1}{a^2} = 2$, demak, $M(u) = N(u) = 0$.

Shunday qilib, harakteristik funksiyaning Levi formulasidan, yoki

$$M(u) = \frac{c_1}{|u|^\alpha}, \quad N(u) = -\frac{c_2}{u^{\alpha}}, \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0,$$

$$c_1 + c_2 > 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad \sigma = 0,$$

yoki

$$M(u) = N(u) = 0.$$

Teorema isbot bo'ldi.

(8) formulaning o'ng tomonidagi integrallarni elementar funksiyalar bilan ifodalash mumkinligidan, olingan natijalarni quyidagicha ifodalash mumkin.

2.3. – Teorema. $F(x)$ taqsimot funksiya turg'un taqsimot bo'lishi uchun uning harakteristik funksiyasining logarifmi quyidagicha ifodalanishi zarur va yetarlidir:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma \cdot t - c |t|^\alpha \left(1 - i\beta \cdot \frac{t}{|t|} \cdot \omega(t, \alpha) \right), \quad (24)$$

bu yerda α, β, γ, c – lar o'zgarmas sonlar (γ – ixtiyoriy haqiqiy son, $c \geq 0, 0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1$) va

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \cdot \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Bundan tashqari, (24) formuladagi α son (8) formuladagi bilan bir xildir (albatta, $\alpha \neq 2$ bo'lganda).

Isboti. (8) formulaga murojaat qilamiz va uchta holni alohida qarab chiqamiz.

1 – hol. $0 < \alpha < 1$. Bu holni quyidagi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{u^2}{1+u^2} \cdot \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} \quad \text{va} \quad \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^2} \cdot \frac{du}{u^{1+\alpha}}$$

integrallar chekli va (8) formuladan quyidagi kelib chiqadi:

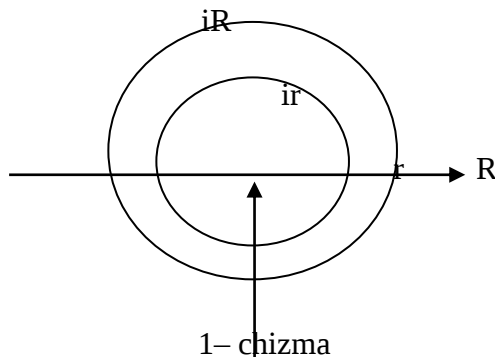
$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t + \alpha \cdot c_1 \int_{-\infty}^0 (e^{itu} - 1) \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} + \alpha \cdot c_2 \int_0^{+\infty} (e^{itu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}}.$$

Agar $t > 0$ bo'lsa, u holda

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t + \alpha \cdot t^\alpha \left(c_1 \int_0^{+\infty} (e^{-iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{+\infty} (e^{iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right).$$

$\frac{e^{iu} - 1}{u^{1+\alpha}}$ funksiya manfiy yarim o'qdan tashqari kompleks tekislikda analitikdir. Bu

funksiyani yopiq kontur bo'yicha $((r, R) - \text{haqiqiy interval, markazi koordinata boshida va radiusi } R \text{ bo'lgan aylana yoyi, } (ir, iR) - \text{mavhum o'q kesmasi va markazi koordinata boshida, radiusi } r \text{ bo'lgan aylana yoyi (1-chizmaga qarang))$ integrallab va $R \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$ da ushbularni topamiz:



bu yerda

$$\int_0^{+\infty} (e^{iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \int_0^{+\infty} (e^{-iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = e^{-i \frac{\pi \alpha}{2}} \cdot L(\alpha),$$

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} (e^{-u} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} < 0.$$

Shunga o'xshash:

$$\int_0^{+\infty} (e^{-iu} - 1) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = e^{-i \frac{\pi \alpha}{2}} \cdot L(\alpha).$$

Shuning uchun, $t > 0$ bo'lganda

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t + \alpha \cdot L(\alpha) \cdot t^\alpha \cdot \left((c_1 + c_2) \cos \frac{\pi}{2} \alpha + i(c_1 - c_2) \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right) = i \cdot \gamma' \cdot t - c \cdot t^\alpha \cdot \left(1 - i\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right),$$

$$\text{bu yerda} \quad c = -\alpha \cdot L(\alpha) \cdot (c_1 + c_2) \cos \frac{\pi}{2} \alpha \geq 0, \quad \beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \leq 1.$$

$t < 0$ bo'lganda

$$\ln f(t) = \ln \overline{f(-t)} = i \cdot \gamma' \cdot t - c \cdot |t|^\alpha \cdot \left(1 - i\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right),$$

va demak, barcha t – lar uchun

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t - c \cdot |t|^\alpha \cdot \left(1 - i\beta \cdot \frac{t}{|t|} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right).$$

2 – hol. $1 < \alpha < 2$. Endi (8) formulani quyidagi ko'rinishda qaytadanyozib olishimiz mumkin:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t + \alpha \cdot c_1 \int_{-\infty}^0 (e^{itu} - 1 - itu) \frac{du}{|u|^{1+\alpha}} + \alpha \cdot c_2 \int_0^{+\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{du}{u^{1+\alpha}},$$

Bundan esa, $t > 0$ da quyidagini topamiz:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t + \alpha \cdot t^\alpha \cdot \left(c_1 \int_0^{+\infty} (e^{-iu} - 1 + iu) \frac{du}{u^{1+\alpha}} + c_2 \int_0^{+\infty} (e^{iu} - 1 + iu) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right).$$

$\frac{e^{-iu} - 1 + iu}{u^{1+\alpha}}$ funksiyani yuqoridagi 1- chizmada ko'rsatilgan kontur bo'yicha integrallab, quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$\int_0^{+\infty} (e^{-iu} - 1 + iu) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot M(\alpha),$$

$$\int_0^{+\infty} (e^{iu} - 1 - iu) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = e^{i\frac{\pi\alpha}{2}} \cdot M(\alpha),$$

bu yerda

$$M(\alpha) = \int_0^{+\infty} (e^{-u} - 1 + u) \frac{du}{u^{1+\alpha}} = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} > 0.$$

Birinchi holdagi kabi ishlarni bajarib, quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t - c \cdot |t|^\alpha \cdot \left(1 - i\beta \cdot \frac{t}{|t|} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right),$$

bu yerda

$$c = -\alpha \cdot M(\alpha) \cdot (c_1 + c_2) \cos \frac{\pi}{2} \alpha \geq 0,$$

$$\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \leq 1.$$

3 – hol. $\alpha = 1$ bo'lsin. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

ayniyatni e'tiborga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{du}{u^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos tu}{u^2} du + i \cdot \int_0^{+\infty} \left(\sin tu - \frac{ut}{1+u^2} \right) \frac{du}{u^2} = \\ &= -\frac{\pi}{2} t + it \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin tu}{u^2} du - t \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{u(1+u^2)} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{2} t + i \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-t \cdot \int_{\varepsilon}^{\varepsilon \cdot t} \frac{\sin u}{u^2} du + t \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u(1+u^2)} \right) du \right) = \\ &= -\frac{\pi}{2} t + it \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u(1+u^2)} \right) du - it \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon \cdot t} \frac{du}{u} = -\frac{\pi}{2} t - it \ln t + it\Gamma, \end{aligned}$$

bu yerda

$$\Gamma = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u(1+u^2)} \right) du.$$

Uzil–kesil quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\ln f(t) = i \cdot \gamma' \cdot t - c \cdot |t| \cdot \left(1 - i\beta \cdot \frac{t}{|t|} \cdot \frac{2}{\pi} \ln|t| \right),$$

$$\text{bu yerda} \quad c = (c_1 + c_2) \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad |\beta| \leq 1.$$

Teorema isbot bo'ldi.

2.3. – Teorema yordamida B_n – normallovchi koeffitsientlarning ko'rinishini aniqlashimiz mumkin. Shu maqsadda quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2.4. – Teorema. Agar o'zaro bog'liqmas, bir xil taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$Z_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

yig'indining taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ α – ko'rsatkichli turg'un qonunga yaqinlashsa, u holda

$$B_n = n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot h(n), \quad (25)$$

bu yerda $h(n)$ – sust o'zgaruvchi funksiya.

Isboti. Haqiqatan ham, barcha t – lar uchun:

$$\left| f_n \left(\frac{t}{B_n} \right) \right| = e^{-c|t|^\alpha} (1 + o(1)). \quad (26)$$

$k \geq 1$ – ixtiyoriy butun son bo'lsin. U holda

$$\left| f_{kn} \left(\frac{t}{B_{kn}} \right) \right| = e^{-c|t|^\alpha} (1 + o(1))$$

va shu paytning o'zida

$$\left| f_{kn} \left(\frac{t}{B_{kn}} \right) \right| = \left| f_n \left(\frac{t}{B_{kn}} \right) \right|^k = \left| f_n \left(\frac{t \cdot \frac{B_n}{B_{kn}}}{\frac{B_n}{B_{kn}}} \right) \right|^k = e^{-c|t|^\alpha} (1 + o(1)), \quad (27)$$

shuning bilan birga, (26) va (27) ifodalardagi qoldiq hadlar har bir chekli intervalda t – ga nisbatan tekis nolga intiladi.

Avvalo, $\left\{ \frac{B_n}{B_{kn}} \right\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, bu ketma-ketlik chegaralangan bo'lmasa, shunday $\{n_j\}$ ketma-ketlikni tanlab olishimiz mumkinki,

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} \left\{ \frac{B_{kn_j}}{B_{n_j}} \right\} = 0.$$

(27) tenglikdan $t = \frac{B_{kn_j}}{B_{n_j}}$ deb faraz qilib va n_j – ni cheksizlikka intiltirib, hamda (26) ni

e'tiborga olib, mumkin bo'lmagan

$$e^{-ck} = 1$$

tenglikni hosil qilar edik.

Shunday qilib, $\left\{ \frac{B_n}{B_{kn}} \right\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Bu holda (26) va (27) tengliklar quyidagilarni yozishga imkon beradi:

$$e^{-c|t|^\alpha} = e^{-c|t|^\alpha \left(\frac{B_n}{B_{kn}} \right)^{\alpha k}} (1 + o(1)).$$

So'nggi tenglik esa, faqat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{B_{kn}}{B_n} \right\} = k^{\frac{1}{\alpha}}$$

bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, (25) tenglik isbotlandi.

III – BOB. TURG'UN QONUNLAR UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMLAR

1 – §. TURG'UN QONUNLAR UCHUN INTEGRAL TEOREMLAR

Endi turg'un qonunlar uchun limitik teoremlar va ularning yaqinlashish tezligi haqidagi ayrim natijalarni keltiramiz.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – o'zaro bog'liqmas bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning $F(x)$ taqsimot funksiyasiga mos harakteristik funksiyasi

$$\tilde{g}_\alpha(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \cdot (1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \cdot \omega(t, \alpha)) \right\}$$

ko'rinishda bo'lgan α parametrli turg'un qonunning tortilish sohasiga tegishli bo'lsin, bu yerda

$$|\beta| \leq 1 \quad \text{va} \quad \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 2, \quad \alpha \neq 1; \\ \frac{2}{\pi} * \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

$\tilde{g}_\alpha(t)$ harakteristik funksiyaga mos taqsimot va zichlik funksiyalarni mos ravishda, $G_\alpha(x)$ va $g_\alpha(x)$ kabi belgilaymiz.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \mu(m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^m d(F(x) - G_\alpha(x)), \\ \chi(m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m d(F(x) - G_\alpha(x)), \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots$$

ifodalar m – chi tartibli psevdomentlar va absolyut psevdomentlar bo'lsin.

$$Z_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

yig'indini qaraymiz.

Z_n – ning taqsimot va zichlik funksiyalari mos ravishda, $F_n(x)$ va $P_n(x)$ bo'lsin.

$$D_0 = (0; 2], \quad D_1 = (0; 1] \cup (1; 2], \quad r = [\alpha] + 1 \quad \text{bo'lsin.}$$

Ushbu shartlarni kiritamiz:

- a) $\chi(r) < \infty$ va $\mu(0) = \dots = \mu(r-1)$, $\alpha \in D_0$;
- b) $\chi(1+\alpha) < \infty$ va $\mu(0) = \dots = \mu(r)$, $\alpha \in D_0$;
- v) $P(x) \leq A < \infty$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
- g) $\gamma(-\frac{1}{\alpha}) < \infty$,

bu yerda $P(x)$ – ξ_1 tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

3.1. – Teorema. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun

a) shart o'rinli bo'lsin. U holda, $\alpha \in D_0$ uchun

$$\sup_x |F_n(x) - G_\alpha(x)| \leq c_1(\alpha) \cdot \max \left(\chi(r), \chi(r)^{\frac{1}{r+1}} \right) \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}},$$

bu yerda

$$A_1 = \sup_x G_\alpha(x), \quad c_1(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \cdot 2^{\frac{r}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{24A_1}{\pi} \cdot \max \left(16^{\frac{1}{\alpha}}, 16^{\frac{1}{r-\alpha}} \right).$$

3.2. – Teorema. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun b) shart o'rinli bo'lsin. U holda, $\alpha \in D_0$ bo'lganda

$$\sup_x |F_n(x) - G_\alpha(x)| \leq C_2(\alpha) \cdot \max(\chi(1+\alpha), \chi(1+\alpha)^{\frac{1}{2+\alpha}}) \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}},$$

bu yerda

$$c_2(\alpha) = \frac{12}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) + 12A_1 \right)$$

3.1. va 3.2. Teoremlarning isbotini (I.I.Banis. Otsenka skorosti sxodimosti v integral'noy teoreme, Lit. mat. sb., 1972, 12, N1, str. 41- 46) maqoladan topish mumkin.

2 – §. TURG'UN QONUNLAR UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMLAR

1 – § dagi belgilashlar va shartlardan foydalanamiz.

3.3. – Teorema $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun

a) va b) shartlar o'rinli bo'lsin. U holda, $\alpha \in D_0$ bo'lganda

$$\sup_x |P_n(x) - g_\alpha(x)| \leq C_3(\alpha, A, \beta_{\frac{\alpha}{2}}, \chi(r)) \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}.$$

3.4. – Teorema. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun b) va v) shartlar o'rinli bo'lsin. U holda, $\alpha \in D_0$ bo'lganda

$$\sup_x |P_n(x) - g_\alpha(x)| \leq C_4(\alpha, A, \beta_{\frac{\alpha}{2}}, \chi(1+\alpha)) \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Keltirilgan teoremlarni isbotlashda zarur bo'ladigan yordamchi teoremlar – lemmalarni keltiramiz.

3 – §. YORDAMCHI TEOREMLAR

3.1. – Lemma. Agar $M|\xi_1|^m < \infty$ bo'lsa, u holda

$$|f_n^{(m)}(t)| \leq m! (\sqrt{n})^m \cdot \rho_m \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (28)$$

bu yerda $\rho_m = \beta_m / \sigma^m$.

Isboti. Isbotni matematik induksiya metodi yordamida bajaramiz.

$m=1$ bo'lsin. Ushbu formulani qaraylik:

$$f_n^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k a_{j,k} f_n^{(k-j)}(t) \cdot f^{(j)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{-1}, \quad (29)$$

bu yerda

$$\left. \begin{aligned} a_{1,k} &= \frac{\sqrt{n}}{\alpha} - \frac{k-1}{\sigma\sqrt{n}}, \\ a_{2,k} &= \frac{k-1}{\sigma^2} \left(1 - \frac{k-2}{2n} \right), \\ a_{j,k} &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})^j} \cdot (n \cdot \theta(j,k) - \theta_1(j,k)), \\ |\theta(j,k)| &\leq k^{j-1}, \quad |\theta_1(j,k)| \leq k^j. \end{aligned} \right\} \quad (29^*)$$

(29) munosabatning isboti [5] (Т.Зупаров. О проблеме Варинга с растущим числом слагаемых, сб, сл. процессы и смежные вопросы, Ташкент, «Фан», 1971, II, с.36-45) da keltirilgan.

U holda

$$|f_n'(t)| \leq \sqrt{n} \rho_1 \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-1}.$$

Faraz qilaylik, (28) munosabat barcha $m = \overline{1, k}$ lar uchun o'rinli bo'lsin, $m = k+1$ uchun to'g'ri bo'lishini isbot qilamiz.

(29) formulaga asosan:

$$|f_n^{(k+1)}(t)| \leq \sum_{j=1}^{k+1} a_{j,k+1} \cdot |f_n^{(k+1-j)}(t)| \cdot \left| f^{(j)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{-1}.$$

Qilingan farazni e'tiborga olsak:

$$\begin{aligned} |f_n^{(k+1)}(t)| &\leq \sum_{j=1}^{k+1} a_{j,k+1} \cdot (k+1-j)! (\sqrt{n})^{k+1-j} \cdot \frac{\beta_{k+1-j}}{\sigma^{k+1-j}} \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(k+2-j)} \cdot \left| f^{(j)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k+1} a_{j,k+1} \cdot (k+1-j)! (\sqrt{n})^{k+1-j} \cdot \frac{\beta_j \cdot \beta_{k+1-j}}{\sigma^{k+1-j}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Quyidagi tengsizlikdan foydalanamiz (qarang: [6], c.15):

$$\beta_j \cdot \beta_{k+1-j} \leq \beta_{k+1}.$$

U holda (30) tengsizlikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$|f_n^{(k+1)}(t)| \leq \beta_{k+1} \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(k+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k+1} a_{j,k+1} \cdot (k+1-j)! (\sqrt{n})^{k+1-j}.$$

Endi (30) munosabatlarni e'tiborga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |f_n^{(k+1)}(t)| &\leq \frac{\beta_{k+1}}{\sigma^{k+1}} \cdot (\sqrt{n})^{k+1} \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(k+1)} \cdot k! \left(1 + \frac{1}{n} + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{k+1}{n}\right)^k \right) \leq \\ &\leq (k+1)! (\sqrt{n})^{k+1} \cdot \rho_{k+1} \cdot \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^{n-(k+1)}, \end{aligned}$$

bu esa yuqoridagi lemmani isbot etadi.

3.2. – Lemma. Harakteristik funksiyasi $f(t)$ bo'lgan ξ tasodifiy miqdor uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

$$P(x) \leq A < \infty, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad M|\xi|^{\alpha_1} = \beta_{\alpha_1} < \infty, \quad \alpha_1 \in (0; 2].$$

U holda quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \exp\left(\frac{-c_1(\alpha_1)}{A^2 \beta_{\alpha_1}^{2/\alpha_1}}\right), \quad |t| \geq \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}; \\ |f(t)| &\leq \exp\left(\frac{-c_2(\alpha_1) \cdot t^2}{A^2}\right), \quad |t| < \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}. \end{aligned}$$

Eslatma: $\alpha_1 = 2$ bo'lganda Survila lemmasi hosil bo'ladi (qarang [7]).

Isboti. Lemma isboti [7] dagiga o'xshash tarzda amalga oshiriladi.

Lemmaning shartlariga ko'ra ξ tasodifiy miqdor $P(x) \leq A$ zichlik funksiyaga ega va $\beta_{\alpha_1} < \infty$. Shuning uchun ξ va η lar bog'liqmas va bir xil taqsimlangan va $P(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lganda $\xi - \eta$ ayirma ham zichlik funksiyaga ega va $q(x) \leq A$ va $M|\xi - \eta|^{\alpha_1} \leq 2^{\alpha_1} \cdot M|\xi|^{\alpha_1}$.

U holda

$$|f(t)|^2 = g_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \cdot \cos tx dx = 1 - 4 \int_0^{+\infty} q(x) \cdot \sin^2 \frac{tx}{2} dx. \quad (31)$$

$g_1(t) = g_1(-t)$ bo'lgani uchun musbat t - larni qarash yetarli.

$$\max_{|t| \geq b} g_1(t) = g_1(t_0) = 1 - \gamma \quad (32)$$

o'rinli bo'lsin. U holda

$$\int_0^{+\infty} q(x) \cdot \sin^2 \frac{t_0 x}{2} dx = \frac{\gamma}{4}. \quad (33)$$

$(0, +\infty)$ to'plamni quyidagicha ikkita to'plamga ajratamiz: $(0, +\infty) = R_1 \cup R_2$

bu yerda

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ x : x > 0; \sin^2 \frac{t_0 x}{2} \geq \varepsilon \right\}, \\ R_2 &= \left\{ x : 0 \leq x \leq a\beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}; \sin^2 \frac{t_0 x}{2} < \varepsilon \right\} \cup \left\{ x : x > a\beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}; \sin^2 \frac{t_0 x}{2} < \varepsilon \right\} = R_2^{(1)} \cup R_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Bu yerda $a > 1$, $0 < \varepsilon < 1$ bo'lib, ularni keyinchalik tanlab olamiz.

Quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 \frac{t_0 x}{2} \cdot q(x) dx \geq \varepsilon \int_{R_1} q(x) dx = \varepsilon \cdot Q(R_1). \quad (35)$$

(33) va (34) munosabatlarga asosan:

$$Q(R_1) \leq \frac{\gamma}{4\varepsilon}.$$

$$Q(R_2) = \frac{1}{2} - Q(R_1) \quad \text{va}$$

$$Q(R_2) = Q(R_2^{(1)}) + Q(R_2^{(2)}) = \int_{R_2^{(1)}} q(x) dx + \int_{R_2^{(2)}} q(x) dx \quad (36)$$

o'rinli bo'lib,

$$R_2^{(2)} \subset \left\{ x : x > a\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} \right\}$$

bo'lgani uchun

$$Q(R_2^{(2)}) = \int_{R_2^{(2)}} q(x) dx \leq \int_{a\beta_{\alpha_1}^{1/\alpha_1}} q(x) dx \leq \frac{1}{2a^{\alpha_1}},$$

u holda (36) tenglikdan foydalanib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$Q(R_2^{(1)}) = Q(R_2) - Q(R_2^{(2)}) = \frac{1}{2} - Q(R_1) - Q(R_2^{(2)}) \geq \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4r} - \frac{1}{2a^{\alpha_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^{\alpha_1} - 1}{a^{\alpha_1}} - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \right). \quad (37)$$

Ma'lumki,

$$|\sin z| \geq \frac{2}{\pi}(z),$$

bu yerda, (z) – orqali butun va π ga karrali songacha bo'lgan eng qisqa masofa belgilangan, ya'ni

$$(z) = \min_k |z - k\pi|.$$

Shuning uchun, $|\sin z| < \sqrt{\varepsilon}$ bajarilsa, hamma vaqt

$$\left| \frac{2}{\pi}(z) \right| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Shunday qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$R_2^{(1)} \subset \left\{ x : 0 \leq x \leq a\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}; \left| x - \frac{2k\pi}{t_0} \right| < \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{t_0}; k = 0, 1, 2, \dots \right\} = \tilde{R}_2^{(1)}.$$

Demak,

$$Q(R_2^{(1)}) \leq Q(\tilde{R}_2^{(1)}). \quad (38)$$

Ammo, $0 \leq x \leq a\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}$ bo'lgani uchun, quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$0 \leq k \leq \frac{at_0\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}}{2\pi} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}.$$

Shu boisdan, $t_0 > b$ bo'lganda $\tilde{R}_2^{(1)}$ to'plamdagi intervallar soni quyidagi sondan ko'p emas

$$\frac{1}{2\pi} \left[(1+a) \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} \cdot t_0 + \pi\sqrt{\varepsilon} \right] \quad \text{va}$$

$$Q(\tilde{R}_2^{(1)}) = \int_{\tilde{R}_2^{(1)}} q(x) dx = k \int_{\frac{2k\pi}{t_0} - \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{t_0}}^{\frac{2k\pi}{t_0} + \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{t_0}} q(x) dx \leq \frac{A\sqrt{\varepsilon}}{2} \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} \left[(1+a) + \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{t_0 \cdot \beta_{\alpha_1}^{1/\alpha_1}} \right].$$

Faraz qilaylik,

$$t_0 \geq \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} = b$$

bo'lsin. U holda

$$Q(\tilde{R}_2^{(1)}) \leq A\sqrt{\varepsilon} \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}(a+2). \quad (39)$$

(37), (38) va (39) tengsizliklardan quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$A\sqrt{\varepsilon} \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}(a+2) \geq \left[\frac{a^{\alpha_1}-1}{a^{\alpha_1}} - \frac{\gamma}{2\varepsilon} \right],$$

$$\text{yoki} \quad \gamma \geq 2\varepsilon \cdot \frac{a^{\alpha_1}-1}{a^{\alpha_1}} - 4\varepsilon^{\frac{3}{2}} \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} A \cdot (a+2). \quad (40)$$

$\sqrt{\varepsilon} = u$ deb olib, (40) tengsizlikdan ushbuni hosil qilamiz:

$$\gamma \geq \max_{0 < u < 1} \left[2u^2 \cdot \frac{a^{\alpha_1}-1}{a^{\alpha_1}} - 4a^3 A \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}(a+2) \right].$$

Bu ifodaning maksimum qiymati

$$u = \frac{a^{\alpha_1}-1}{3A\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} a^{\alpha_1}(a+2)} \quad (41)$$

nuqtaga mos kelishini ko'rish qiyin emas. U holda

$$\gamma \geq \frac{2(a^{\alpha_1}-1)^3}{27A^2\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} a^{3\alpha_1}(a+2)^2}.$$

Ushbu tengsizlikni ko'rsatish qiyin emas:

$$A\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} \geq \frac{1}{4 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha_1}}}. \quad (42)$$

U holda (41) – (42) tengsizliklardan ushbuga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{4 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha_1}}(a^{\alpha_1}-1)}{3a^{\alpha_1}(a+2)} < 1,$$

agarda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsa:

$$a > a_1 = \frac{4 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha_1}}}{3}.$$

Shunday a – ni hamma vaqt topish mumkin, chunki uni ixtiyoriy tanlab olinadi. Shu sababli

$$\gamma \geq \frac{2}{27A^2\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}} \cdot \max_{a > a_1} \frac{(a^{\alpha_1}-1)^3}{a^{3\alpha_1}(a+2)^2} = \frac{c_0(\alpha_1)}{A^2\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}}.$$

$c_0(\alpha_1) > 0$ bo'lishi ravshan.

(32) munosabatdan, so'nggi tengsizlik yordamida, $|t| \geq \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}$ oraliq uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|f(t)|^2 \leq 1 - \frac{c_0(\alpha_1)}{A^2\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}},$$

Yoki

$$|f(t)| \leq \exp \left(- \frac{c_1(\alpha_1)}{A^2\beta_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}}} \right).$$

Shunday qilib, lemmaning birinchi qismi isbot bo'ldi.

Lemmaning ikkinchi qismining isbotini quyidagi tasdiq yordamida hosil qilamiz (qarang: [6], c.21):

Agar $|t| \geq b$ da $|f(t)| \leq c$ o'rinli bo'lsa, u holda

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1-c^2}{8 \cdot b^2} \cdot t^2, \quad |t| < b$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, lemma to'la isbot etildi.

3.3. – Lemma. b) va $\chi(1+\alpha) \geq 1$ shartlar o'rinli bo'lib,

$$|t| \leq T_n = \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{6 \cdot \chi(1+\alpha)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$|f_n(t) - \tilde{g}(t)| \leq 3 \cdot \chi(1+\alpha) \cdot \frac{|t|^{1+\alpha}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{2}\right).$$

$\chi(1+\alpha) < 1$ bo'lganda, yuqoridagi tengsizlik $|t| \leq T_n = \frac{1}{6} \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}$ oraliqda o'rinli bo'ladi.

4 – §. ASOSIY TEOREMALARNING ISBOTI.

3.1. Teorema va 3.2. Teoremlarning isbotini [10] dan topish mumkin.

3.3. Teoremaning isboti.

$n \geq 2$ bo'lganda quyidagi munosabat o'rinli:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_n(t) dt,$$

bu yerda $f_n(t) = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i$ yig'indining harakteristik funksiyasi.

U holda

$$2\pi \cdot |P_n(x) - g_\alpha(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - \tilde{g}_\alpha(t)| dt = I_1 + I_2 + I_3, \quad (43)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|t| \leq \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t) - \tilde{g}_\alpha(t)| dt, \\ I_2 &= \int_{|t| > \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t)| dt, \\ I_3 &= \int_{|t| > \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |\tilde{g}_\alpha(t)| dt, \\ \varepsilon &= \begin{cases} \frac{1}{(12 \cdot \chi(r))^{\frac{1}{r-\alpha}}}, & \chi(r) \geq 1, \\ \frac{1}{12^{\frac{1}{r-\alpha}}}, & \chi(r) < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

I_1 integralni baholashda 3.3.Lemmadan foydalanamiz va quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$I_1 = \int_{|t| \leq \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t) - \tilde{g}_\alpha(t)| dt \leq \frac{6 \cdot \chi(r)}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}} \cdot \int_{|t| \leq \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |t|^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} dt \leq \frac{12}{\alpha} \cdot 2^{\frac{r+1}{\alpha}} \cdot \chi(r) \cdot \Gamma\left(\frac{r+1}{\alpha}\right) \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}. \quad (44)$$

Endi I_2 integralni baholashga o'tamiz. Shu maqsadda I_2 integralni quyidagicha ikkita integralning yig'indisi sifatida ifodalab olamiz:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|t| > \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} |f_n(t)| dt = \int_{|t| > \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} \left| f\left(t \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right|^n dt = n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{|t| > \varepsilon} |f(t)|^n dt \leq \\ &\leq n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi \cdot \beta_{\alpha/2}^{-\frac{2}{\alpha}}} |f(t)|^n dt + n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{|t| > \pi \cdot \beta_{\alpha/2}^{-\frac{2}{\alpha}}} |f(t)|^n dt = I_2' + I_2'' \end{aligned} \quad (45)$$

Ma'lumki (qarang [11]), $F(x)$ taqsimot funksiya α ($0 < \alpha \leq 2$) parametrli turg'un qonunning normal sohasiga tortilsa (intilsa), u holda ixtiyoriy $\delta < \alpha$ ($\delta > 0$) uchun

$$\beta_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\delta dF(x) < \infty.$$

Shu sababli, I_2' va I_2'' larni baholash jarayonida 3.4. Lemmadan foydalanish mumkin. Natijada quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} I_2' &\leq n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi \cdot \beta_{\alpha/2}^{-\frac{2}{\alpha}}} \exp\left(-\frac{c(\alpha) \cdot t^2}{A^2} \cdot n\right) dt \leq \\ &\leq c \cdot (12 \cdot \chi(r))^{\frac{2(r-\alpha+1)}{\alpha(r-\alpha)}} \cdot \beta_{\alpha/2}^{\frac{2}{\alpha}} \cdot A^{\frac{2(r-\alpha+1)}{\alpha}} \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Endi I_2'' ni baholaymiz. 3.4. Lemмага asosan:

$$I_2'' \leq n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \exp\left(-\frac{c(\alpha) \cdot (n-2)}{A^2 \cdot \beta_{\alpha/2}^{\frac{2}{\alpha}}}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

Ma'lumki (Parseval tengligi):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) dx.$$

Bu tenglikdan foydalansak:

$$\begin{aligned} I_2'' &\leq 2\pi \cdot n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \exp\left(-\frac{c(\alpha) \cdot (n-2)}{A^2 \cdot \beta_{\alpha/2}^{\frac{2}{\alpha}}}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x) dx \leq \\ &\leq c \cdot A^{\frac{2(r-\alpha+1)}{\alpha}+1} \cdot \beta_{\alpha/2}^{\frac{4(r-\alpha+1)}{\alpha^2}} \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (47)$$

(45), (46) va (47) munosabatlardan quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c \cdot 12^{\frac{2(r-\alpha+1)}{\alpha(r-\alpha)}} \cdot \max\left(1; A^{\frac{2(r+1)-\alpha}{\alpha}}\right) \cdot \max\left(1; \chi(r)^{\frac{2(r-\alpha+1)}{\alpha(r-\alpha)}}\right) \times \\ &\times \max\left(\beta_{\alpha/2}^{\frac{2}{\alpha}}; \beta_{\alpha/2}^{\frac{4(r-\alpha+1)}{\alpha^2}}\right) \cdot n^{-\frac{r-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (48)$$

I_3 integralni bevosita baholaymiz:

$$I_3 \leq \int_{|t| \leq \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} \exp(-|t|^\alpha) dt = \frac{2}{\alpha} \cdot \int_{|z| \leq \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot e^{-z} dz \leq \frac{24 \cdot \chi(r) \cdot \Gamma\left(\frac{r-\alpha+1}{\alpha}\right)}{\alpha \cdot n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}. \quad (49)$$

(44), (48) va (49) natijalarni (43) ga qo'yib, mos shakl almashtirishlarni bajarsak, teoremaning isbotiga ega bo'lamiz.

Eslatma. 3.4. Teoremaning isboti ham, avvalgi paragrafda keltirilgan lemmalarga asoslangan holda, 3.3. Teoremadagi kabi harakteristik funksiyalar metodiga binoan isbotlanadi. Ishning hajmi kattalashib ketmasligi uchun bu isbot jarayonini keltirib o'tirmaymiz.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Shunday qilib, o'zaro bog'liqmas bir xil taqsimlangan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun

$$Z_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} \quad (50)$$

normallangan va markazlashgan yig'indilarning $F_n(x)$ taqsimot funksiyalari va $P_n(x)$ zichlik

funksiyalari $A_n = M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)$, $B_n = D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)$ bo'lganda $N(0;1)$ – standart normal

taqsimotga intilishini ko'rdik va mos teoremlarning yaqinlashish tezliklarining baholari bilan tanishib chiqdik. Bu hol (50) yig'indilar taqsimotlari uchun eng batafsil o'rganilgan hol bo'lib, unda B.Gnedenko, S.X.Sirojiddinov, N.Shohaydarova, M.Mamatov va boshqa ko'plab olimlar yaxshigina natijalarga erishganlar.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar har xil taqsimlangan, ya'ni $P(\xi_k < x) = F_k(x)$, $k=1,2,\dots$ bo'lgan holda ham, $M\xi_k$, $D\xi_k$, $k=1,2,\dots$ momentlar chekli bo'lgan holda mos integral, lokal va global teoremlar olingan, yaqinlashish tezliklari aniqlangan. Bu yo'nalishda ham Rossiya, Litva va O'zbekiston olimlarining xizmatlari kattadir.

Mazkur ishning II – III boblarida ko'rdikki, ξ_k $k=1,2,\dots$ – tasodifiy miqdorlarning momentlari, psevdomentlari, absolyut momentlari va zichlik funksiyalariga tegishli shartlar qo'yilganda (50) ko'rinishdagi yig'indilarning taqsimot funksiyalari $F_n(x)$, zichlik funksiyalari $P_n(x)$ α ($0 \leq \alpha \leq 2$) parametrli turg'un qonunlarga intilar ekan.

Ushbu sinfga oid olingan natijalar juda umumiy bo'lganligi uchun, tasodifiy miqdorlarga qo'yiladigan talablar ham ancha og'ir va olingan natijalarning ko'rinishlari ham ixcham emas.

Shunisi e'tiborga sazovorki, $\alpha=2$ bo'lganda, bu olingan natijalardan I – bobdagi natijalar kelib chiqadi.

Mazkur yo'nalishda global teoremlarni, asimptotik yoyilmalarni olish va olingan baholardagi c – o'zgarmas koeffitsientlarni minimallashtirish masalalarini ko'rish maqsadga muvofiqdir.

Yuqorida ko'rilgan masalalar har xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun ko'rilgan, u teoremlarda ham turli xil baholarni olish, asimptotik yoyilmalarni topish masalalari aktualdir.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak, ehtimollar nazariyasining limit teoremlar sohasi juda yaxshi o'rganilgan, ajoyib natijalar olingan soha bo'lib, unda qo'yilgan masalalar hayotiy muammolarni yechish jarayonida paydo bo'lgani diqqatga sazovordir.

Ushbu sohaga oid ishlar bilan tanishish jarayonida shu narsa ma'lum bo'ldiki, bunday natijalarni tasodifiy miqdorlarga ancha kuchsiz shartlar qo'yib natijalarga erishish, olingan natijalarni boshqa fazolarga ko'chirish kabi muammolarning ko'p qismi yechimini kutib yotmoqda ekan, keyinchalik, o'z ilmiy izlanishlarim jarayonida bu yo'nalishda sezilarli darajada natijalarga erishishga harakat qilishni o'z oldimga maqsad qilib qo'ydim va uni amalga oshirish yo'lida harakat qilaman.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Karimov.I.A. Jahon moliyaviy - iqtisodiy inqirozi, O‘zbekiston sharoitida, uni bartaraf etishning yo‘llari va choralari. Toshkent. 2009 yil.
2. Karimov.I.A. Barkamol avlod orzusi. T. 1999 yil.
3. Karimov.I.A. O‘zbekiston XXI asr bo‘sag‘asida. T. 1997 yil.
4. Karimov.I.A. Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo etish – ustuvor maqsadimizdir. (Prezident I.A.Karimovning O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining qo‘shma majlisidagi ma‘ruzasi). O‘zbekiston ovozi gazetasi, 12 son, 2010 yil 28-yanvar.
5. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining qarori. “Barkamol avlod yili” Davlat dasturi to‘g‘risida. O‘zbekiston ovozi gazetasi, 12 son, 2010 yil 28-yanvar.
6. Karimov.I.A. “Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsyasi”, O‘zbekiston Respublikasi Oliy majlisi qonunchilik palatasi va Senatining qo‘shma majlisidagi ma‘ruza, Norin ovozi gazetasi, 2010 yil 19 – noyabr, № 46 – chi son.
7. Sirojiddinov.S.X, Mamatov. M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, 1980 yil.
8. Jorayev.I. Turg‘un qonunlar uchun lokal limit teoremlar. “NamDU Axborotnomasi” 2011 yil 4-son.
9. Р.С.Гутер, В.Овчинский. Основы теории вероятностей, Москва 1967.
10. И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник. Независимые и стационарно связанные величины. Москва 1965.
11. Г.Харди, Д.Литтлвуд, Г.Полиа. Неравенства, ИЛ, 1948.
12. Т.Зупаров. О проблеме Варинга с растущим числом слагаемых, сб, сл. процессы и смежные вопросы, Ташкент, «Фан», 1971, II, с. 36-45.
13. В.В.Петров. Суммы независимых случайных величин. Москва 1972.
14. П.Сурвила. О локальной предельной теореме для плотностей. Лит. мат. сб., 1963, 3, N1, с. 225-236.
15. Д.Атакузиев. Кондидатская диссертация, с. 51-56.
16. И.И.Банис, и другие. О скорости сходимости к устойчивому закону в локальной теореме, Лит. мат. сб., 1971, II, N3, с. 511-516.
17. И.И.Банис. Оценка скорости сходимости в интегральной теореме, Лит. мат. сб., 1972, 12, N1, с. 41- 46.
18. В.В.Петров. О моментах притягивающихся к устойчивым распределениям – Теория вероятностей и её применения, 1973, 18, N3, с.593-595.
19. WWW.fakultet.uz
20. WWW.Oqayiq.uz
21. WWW.Ziyonet.uz
22. WWW.Fank.ru
23. WWW.Mail.ru
24. WWW.sefan.ru

V. ILOVALAR

Турғун қонунлар учун локал лимит теоремалар

Жўраев И (НамДУ 2–курс магистранти)

$\{\xi_n\}$ – ўзаро боғлиқмас бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма – кетлиги бўлсин ва унинг $F(x)$ тақсимот функциясига мос характеристик функцияси

$$\tilde{g}_\alpha(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \cdot (1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \cdot \omega(t, \alpha))\right\}$$

кўринишда бўлган α параметрли турғун қонуннинг тортилиш соҳасига тегишли бўлсин, бу ерда

$$|\beta| \leq 1 \quad \text{ва} \quad \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 2, \quad \alpha \neq 1; \\ \frac{2}{\pi} \cdot \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

$\tilde{g}_\alpha(t)$ характеристик функцияга мос тақсимот ва зичлик функцияларни $G_\alpha(x)$ ва $g_\alpha(x)$ каби белгилаймиз.

$$\mu(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m d(F(x) - G_\alpha(x)),$$

$$\chi(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m d(F(x) - G_\alpha(x)),$$

$m = 0, 1, 2, \dots$ – ифодалар m – чи тартибли псевдомоментлар ва абсолют псевдомоментлар бўлсин.

$$Z_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

йиғиндини қараймиз.

Z_n йиғиндининг тақсимот ва зичлик функциялари $F_n(x)$ ва $P_n(x)$ бўлсин.

$$D_0 = (0; 2], \quad D_1 = (0; 1) \cup (1; 2], \quad r = [\alpha] + 1 \quad \text{бўлсин.}$$

Ушбу шартларни киритамиз:

- а) $\chi(r) < \infty$ ва $\mu(0) = \dots = \mu(r-1)$, $\alpha \in D_0$;
- б) $\chi(1+\alpha) < \infty$ ва $\mu(0) = \dots = \mu(r)$, $\alpha \in D_0$;
- в) $P(x) \leq A$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
- г) $\gamma(-\frac{1}{\alpha}) < \infty$.

бу ерда – $P(x)$ ξ_1 – тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.

1 – Теорема. $\{\xi_n\}$ – тасодифий миқдорлар кетма – кетлиги учун а) ва б) шартлар ўринли бўлсин. У ҳолда, $\alpha \in D_0$ бўлганда

$$\sup_x |P_n(x) - g_\alpha(x)| \leq C_1(\alpha, A, \beta_\alpha, \chi(r)) \cdot \frac{1}{n^{\frac{r-\alpha}{\alpha}}}.$$

2 – Теорема. $\{\xi_n\}$ – тасодифий миқдорлар кетма – кетлиги учун б) ва в) шартлар ўринли бўлсин. У ҳолда, $\alpha \in D_0$ бўлганда

$$\sup_x |P_n(x) - g_\alpha(x)| \leq C_2(\alpha, A, \beta_{\frac{\alpha}{2}}, \chi(1+\alpha)) \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

1 ва 2 теоремалар қуйидаги леммаларга асосланиб исбот қилинади:

1 – Лемма. Агар $M|\xi_1|^m < \infty$ бўлса, у ҳолда

$$|f_n^{(m)}(t)| \leq m! (\sqrt{n})^m \rho_m \cdot \left| f\left(\frac{t}{r\sqrt{n}}\right) \right|^{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

бу ерда $\rho_m = \beta_m / \sigma^m$.

2 – Лемма. Характеристик функцияси $f(t)$ бўлган ξ_1 тасодикий миқдор учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

$$P(x) \leq A < \infty, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad M|\xi_1|^{\alpha_1} = \beta_{\alpha_1} < \infty, \quad \alpha_1 \in (0; 2].$$

У ҳолда қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \exp\left(\frac{-C_1(\alpha_1)}{A^2 \beta_{\alpha_1}^{2/\alpha_1}}\right), & |t| &\geq \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}, \\ |f(t)| &\leq \exp\left(\frac{-C_2(\alpha_1) \cdot t^2}{A^2}\right), & |t| &< \pi \cdot \beta_{\alpha_1}^{-\frac{1}{\alpha_1}}. \end{aligned}$$

Эслатма: $\alpha_1 = 2$ бўлганда Сурвила леммаси ҳосил бўлади (қаранг [1]).

3 – Лемма. б) ва $\chi(1+\alpha) \geq 1$ шартлар ўринли бўлиб, $|t| \leq T_n = \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{6 \cdot \chi(1+\alpha)}$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$|f_n(t) - \tilde{g}(t)| \leq 3\chi(1+\alpha) \cdot n^{-\frac{1}{\alpha}} |t|^{1+\alpha} \cdot \exp\left(-\frac{|t|^\alpha}{2}\right);$$

$\chi(1+\alpha) < 1$ бўлса, у ҳолда юқоридаги тенгсизлик $|t| \leq T_n = \frac{1}{6} \cdot n^{\frac{1}{\alpha}}$ ораликда ўринли бўлади. Ушбу лемманинг исботи [2] да келтирилган.

Адабиётлар.

- [1]. П.Сурвила. О локальной предельной теореме для плотностей. Лит. мат. сб., 1963, III, N1, стр. 225-236.
- [2]. И.И.Банис, и другие. О скорости сходимости к устойчивому закону в локальной теореме, Лит. мат. сб., 1971, II, N3, стр. 511-516.
- [3]. И.А.Ибрагимов, Ю.В.Линник. Независимые и стационарно связанные величины. Москва 1965.
- [4]. В.В.Петров. Суммы независимых случайных величин. Москва 1972.
- [5]. Д.Атакузиев. Кондидатская диссертация. Т. 1980.
- [6]. В.В.Петров. О моментах притягивающихся к устойчивым распределениям – Теория вероятностей и её применения, 1973, 18, N3, стр. 593-595.