

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

SHODIYEVA DILFUZA ESHQOBILOVNAning

“5460100 — Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

**Yuqori darajali algebraik tenglamalar va ularning
yechimlari**
mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n. S.Botirov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika –matematika fakulteti

dekani:_____ prof. A.Tashatov

“_____” _____ 2013 yil

Qarshi -2013

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA – MATEMATIKA FAKULTETI
Matematik analiz va algebra kafedrası

”T A S D I Q L A Y M A N”
Kafedra mudiri: _____A.Imomov
“ _____ ” _____20_____ yil

BITIRUV MALAKAVIY ISHGA TOPSHIRIQ

Talaba: Shodiyeva Dilfuza

Ta’lim yo’nalishi: 5460100 Matematika

Bitiruv malakaviy ishi mavzusi: Yuqori darajali algebraik tenglamalar va ularning yechimlari.

Bitiruv malakaviy ish oldi amaliyoti o’tilgan joyi: Qarshi DU Matematik analiz va algebra kafedrası

Bitiruv malakaviy ishi rahbari: S.Botirov

Bitiruv malakaviy ishi maqsadi: Yuqori darajali algebraik tenglamalarni atroflicha o’rganish

Ish rejasi:

Bitiruv malakaviy ishi bo’limi	Bitiruv malakaviy ishi bo’limi nomi	Bajarish muddati
Kirish	Kirish	
I BOB	Algebraik tenglamalar	
II BOB	Yuqori darajali algebraik tenglamalar	

Bitiruv malakaviy ishining bajarish uchun zarur bo’lgan materiallar:

a) adabiyot manbalar:

1. А.И.Кострикин «Введение алгебры», М. 1977 г
2. А.Г.Курш «Олиь математика курси» Т.1976 у
3. Z.X.Xojiyev., A.S.Faynleyb., «Algebra va sonlar nazariyasi kursi». Т.2001 у
4. Д.К.Дадеев, И.С.Соминский, «Сборник задач по высшей алгебре». М.1977 г.

b) qonuniy-meyoriy hujjatlar: *O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qarorlari Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi boyruq va nizomlari, Matematik analiz va algebra kafedrası tayyorlagan BMI lar uchun uslubiy ko’satmalar.*

c) statistik va boshqa ma’lumotlar:

Topshiriq berilgan sana: 18.11.2012 у

Ishni topshirish muddati: 25.05.2013 у

Ilmiy rahbar imzosi:

S.Botirov

KAFEDRA MUDIRINING ISHNI HIMYOYAGA QO’YISH HAQIDAGI XULOSASI:

Kafedra mudiri: _____ A.Imomov
(imzo)

“ _____ ” _____2013 у.

МУНДАРИЖА

I-BOB. Algebraik tenglamalar

1-§. Algebraik tenglamalar haqida tushunchalar.....	
2-§. Ikki hadli tenglamalar.....	
3-§. Uchinchi darajali tenglamalar.....	
4-§. To'rtinchi darajali tenglamalar.....	

II-BOB. Yuqori darajali algebraik tenglamalar va ularning yechimlari

5-§. Beshinchi va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar xususida.....	
6-§. Algebraik tenglamalar ildizlarining chegaralari va ildizlar soni.....	
Xulosa.....	
Foydalanilgan adabiyotlar	

Kirish

Bizga ma'lumki, ko'pgina matematik, fizik va texnik masalalarni yechishda algebraik tenglamalarga duch kelamiz. Shuning uchun ham algebraik tenglamalar ularning xossalari ularning yechimlari mavjud yoki mavjud emasligini bilish doimo matematiklarni qiziqtirib kelgan. Bu yozilgan bitiruv malakaviy ishda algebra fanining muhim bo'limlaridan biri bo'lgan tenglamalarga bag'ishlangan bo'lib, bunda sodda algebraik tenglamalardan toki yuqori tartibli algebraik tenglamalarning yechimlari xususida fikr yuritiladi.

Ma'lumki, kvadrati tenglamalarning yechish usullari hatto qadimgi yunonlarga ham ma'lum bo'lgan bir vaqtda uchinchi va to'rtinchi darajali algebraik tenglamalarni yechish usullari XVI asrga kelib taqaladi. Bundan so'ng ya'ni har qanday beshinchi darajali tenglamalarning ildizlarini uning koeffitsiyentlari orqali radikallar yordamida ifodalaydigan formulalarni topish mumkin yoki mumkin emasligi, agar mumkin bo'lmasa bunday yuqori darajali algebraik tenglamalarning ildizlarining chegaralari va ildiz sonini topish ushbu bitiruv malakaviy ishning asosiy mazmunini tashkil qiladi:

Mavzuning dolzarbligi: Fan va texnikaning jadal suratda rivojlanishi algebra fanini ham ayniqsa algebraik tenglamalarni ularning yechimlari mavjud yoki mavjud emasligi tenglamalarning ildizlarini topa bilish ya'ni bunday tenglamalarni yechish va yechish metodlarini izlash shuningdek tenglama ildizlarini chegaralari, yechimlar sonini bilish bu bitiruv malakaviy ishning dolzarb vazifalaridan biri qilib, belgilangan.

Mavzuning maqsad va vazifalari: Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi algebraik tenglamalarni chuqurroq tahlil qila bilish ya'ni

tenglamalarni yechish metodlarini har tomonlama o'rganib chiqish, yuqori darajali algebraik tenglamalar va ularning yechimi bunday tenglamalarni yechish mumkin yoki mumkin emasligini har tomonlama o'rganib, yuqori darajali algebraik tenglamalarni ildizlarini uning koeffitsiyentlari orqali radikallar yordamida ifodalaydigan formulalarini mavjud yoki mavjud emasligini aniqlash bu bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsad va vazifalari qilib belgilanadi.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va amaliy ahamiyati: ushbu bitiruv malakaviy ishning mavzusiga oid barcha adabiyotlarni to'plash va shu vaqtga qadar to'plangan bilimlar asosida yuqori darajali algebraik tenglamalarni har tomonlama tahlil qila bilish bunday algebraik tenglamalarni yechish metodlarini o'rganish, yuqori darajali algebraik tenglamalarning ildizlarini uning koeffitsiyentlari orqali radikallar yordamida ifodalaydigan formulalarini topa bilish, shuningdek yuqori darajali algebraik tenglamalarni ildizlari chegaralari hamda ildizlar sonini aniqlash bu bitiruv malakaviy ishning ilmiy ham amaliy ahamiyatga ega ekanligidan dalolat beradi.

Shu bilan bir qatorda ushbu bitiruv malakaviy ishi matematik talabalar, yosh matematik o'qituvchilar hamda matematika faniga qiziquvchi yosh avlod vakillari uchun katta ahamiyat kasb etadi.

I. BOB. ALGEBRAIK TENGLAMALAR.

1-§. ALGEBRAIK TENGLAMALAR HAQIDA TUSHUNCHA

Bizga ma'lumki, quyidagi, ya'ni

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1.1.1)$$

ko'rinishdagi ifoda matematikada ko'p o'chraydi. (1.1.1) ifodadagi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ko'effitsiyentlar birorta sonlar maydonining elementlari bo'lib, demak, (1.1.1) ning chap tomoni P maydon ustidagi bir noma'lumli n - darajali ko'phadni tasvirlaydi. (1.1.1) ni P maydon ustidagi bir noma'lumli n - darajali algebraik tenglama deb ataladi; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ lar tenglama ko'effitsiyentlari a_0 esa bosh ko'effitsiyent deyiladi. $a_0x^n, a_1x^{n-1}, \dots, a_{n-1}x, a_n$ larni tenglama hadlari $a_0 \neq 0$ bo'lganda a_0x^n ni bosh had deymiz, hamda a_n ni ozod had deyiladi, n - darajali tenglama uchun albatta $a_0 \neq 0$ shart bajariladi, chunki $a_0 \neq 0$ qiymatda tenglamaning darajasi n dan kichik bo'ladi.

1 – ta'rif. (1.1.1) – algebraik tenglamaning chap tomonidagi ko'phadni nolga aylantiruvchi $x = a$ son qiymat bu tenglamaning ildizi deyiladi.

(1.1.1) tenglamaning har bir a ildizi bu tenglamani qanoatlantiruvchi son deyiladi. Demak, biror b son (1.1.1) tenglamaning ildizi bo'lmasa, ya'ni u tenglamaning chap tomonidagi ko'phadni nolga aylantirmasa bu son (1.1.1) ni qanoatlantirmaydi, ya'ni (1.1.1) ning ildizi bo'la olmaydi deymiz.

Bizga ma'lumki, $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlarini topish bu tenglamani yechish deyiladi.

Masalan: rasional sonlar maydonidagi uchinchi darajali $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$ tenglama uchun $\frac{1}{2}$ son ildiz, chunki bu son tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 0.$$

Ammo, masalan, 5 soni bu tenglamaning ildizi emas, chunki u tenglamani qanoatlantirmaydi:

$$12 \cdot 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 1 = 1500 - 100 - 15 + 1 = 1386 \neq 0.$$

Bundan keyin (1.1.1) tenglamaning chap tomonidagi ko'phadni qisqacha $f(x)$, $j(x)$ yoki $y(x), \dots$ ko'rinishda, tenglamani esa $f(x) = 0$, $j(x) = 0$, yoki $y(x) = 0, \dots$ ko'rinishda belgilaymiz. $x = a$ son $f(x) = 0$ tenglamaning ildizi bo'lsa, $f(a) = 0$ ni ildizi bo'lmasa $f(a) \neq 0$ ni hosil qilamiz.

Yuqoridagi misolda $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ bo'lib, $f(5) \neq 0$ dir. Endi biz (1.1.1)

n - darajali algebraik tenglamaning xususiy holi bo'lgan, ikki hadli tenglamalar tushunchasi bilan tanishib o'tamiz.

2-§. IKKI HADLI TENGLAMALAR

Algebraik tenglamalarning ikki hadli tenglamalar deb atalgan xususiy holi

$$u^n - a = 0 \quad (1.2.1)$$

ko'rinishga ega, bunda a noldan farqli ixtiyoriy kompleks son. Bu tenglamani istalgan $\sqrt[n]{a}$ ildiz qanoatlantiradi: $(\sqrt[n]{a})^n - a = a - a = 0$. Demak, (1.2.1) tenglamaning n ta har xil ildizlari mavjud. Ular

$$u_k = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{j}{n} + i \sin \frac{j}{n}) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{j + 2kp}{n} + i \sin \frac{j + 2kp}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

formula vositasi bilan topiladi. (1.2.1) tenglama bilan birgalikda,

$$x^n - 1 = 0 \quad (1.2.2)$$

tenglamani ham qaraymiz. Bu tenglama ushbu n ta har xil

$$x_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2kp}{n} + i \sin \frac{2kp}{n} \quad (1.2.3)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

ildizlarga ega.

(1.2.1) tenglamaning bitta tayin u_k ildizini (1.2.2) tenglamaning n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ ildizlariga ko'paytirsak, (1.2.1) ning hamma n ta ildizlari hosil bo'ladi. Chunki birinchidan u_k, x_i son (1.2.1) ni qanoatlantiradi, ya'ni

$(u_k x_i)^n - a = a \Leftrightarrow a = a - a = 0$, ikkinchidan esa, $u_0 x_i$ ildizlar har xil, chunki $u_k x_s = u_k x_t$ dan mumkin bo'lmagan $x_s = x_t$ tenglik kelib chiqadi.

Endi biz (1.2.2) –tenglamaning xossalarini qarab chiqamiz. (1.2.2) tenglamaning ildizlari quyidagi xossalarga ega:

1⁰. (1.2.2) – tenglama ildizlaridan istalgan ikkitasining ko'paytmasi yana shu tenglamaning ildizini tasvirlaydi. Haqiqatan ham $x_s = 1$ va $x_t = 1$ ildizlar uchun: $(x_s x_t)^n - 1 = x_s^n x_t^n - 1 = 1^n - 1 = 0$ o'rinlidir.

2⁰. (1.2.2) tenglama ildizlaridan istalgan ikkitasining bo'linmasi yana (1.2.2) tenglamasining ildizini ifodalaydi. Haqiqatan ham

$$\frac{x_s^n}{x_t^n} - 1 = \frac{x_s^n}{x_t^n} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0.$$

3⁰. (1.2.2) tenglamaning istalgan ildizini har qanday butun darajaga ko'tarsak, yana shu tenglamaning ildizi hosil bo'ladi. Chunki, $(x_s^m)^n - 1 = (x_s^n)^m - 1 = 1^m - 1 = 0$ dir.

Biz ikki hadli tenglamaga misol keltiraylik.

Misol. $u^3 - i = 0$ tenglamani yechaylik. Bu tenglama ildizlarining biri

$$u_2 = -i \text{ bo'lib, u } u_k = \sqrt[3]{i} = \cos \frac{\frac{\rho}{2} + 2kp}{3} + i \sin \frac{\frac{\rho}{2} + 2kp}{3} \text{ formuladan}$$

$k = 2$ qiymatda hosil qilinadi. Berilgan tenglamaning hamma ildizlarini topish uchun $x^3 - 1 = 1$ ning ildizlarini topamiz; ya'ni

$$x_1 = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{4p}{3} + i \sin \frac{4p}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \sqrt[3]{1} = \cos 2p + i \sin 2p = 1.$$

Bu ildizlarni u_2 ga ko'paytiramiz:

$$u_0 = -ix_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$u_1 = -ix_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$u_2 = -ix_2 = i.$$

3-§.UCHINCHI DARAJALI TENGLAMALAR.

Ma'lumki, n - darajali tenglamalardan biri bu uchinchi darajali tenglamalardir. Bizga k kompleks sonlar maydoni ustidagi uchinchi darajali tenglamaning ikki tomonini uning bosh koeffitsiyentiga bo'lsak, u holda uning shakli

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.3.1)$$

ko'rinishga keladi.

Endi biz uchinchi darajali bir noma'lumli (1.3.1) tenglamani yechish usuli bilan tanishib chiqaylik. Buning uchun tenglamada

$$x = y - \frac{a}{3} \quad (1.3.2)$$

almashtirishni bajarib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (1.3.3)$$

(1.3.3) – tenglamada

$$p = b - \frac{a^2}{3}, q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \quad (1.3.4)$$

dan iborat. (1.3.3) normal shakldagi tenglama bo'lib, tenglamani yechish uchun:

$$y = u + v \quad (1.3.5)$$

belgilashni kiritamiz. Bu yerda u va v hozirda bizga noma'lum bo'lgan yangi noma'lumlar. (1.3.5) ifoda (1.3.3) – tenglamaga qo'yamiz, natijada $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$ bo'lib bundan esa

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0 \quad (1.3.6)$$

hosil qilamiz. Endi u va v noma'lumlarni shunday aniqlaymizki, ular uchun

$$3uv + p = 0 \text{ yoki } uv = -\frac{p}{3} \quad (1.3.7)$$

bajariladigan bo'lsin. U holda (1.3.6) va (1.3.7) ifodalardan

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (1.3.8)$$

ekanligi kelib chiqadi. Elementar algebra kursidan ma'lum bo'lgan Veyt formulalariga asosan u^3 va v^3 lar.

Ushbu

$$z + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

kvadrat tenglamasining ildizlarini ifodalaydi. Hosil qilingan bu tenglamani yechib, quyidagini topamiz;

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

va

$$v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

bundan esa, (1.3.5) ga ko'ra

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.3.9)$$

ekanligi kelib chiqadi. (1.3.9) ifoda Kordano formulasi deb ataladi. Bu formula ikkita ildizning yig'indisidan ibrat. Har bir ildiz esa uchta esa uchta qiymatga ega bo'lganidan u uchun 6 ta qiymat hosil bo'ladi. Ammo biz bilamizki, uchinchi darajali (1.3.3) tenglama faqat uchta ildizga ega. Bu uchta ildizni quyidagicha hosil qilamiz. Eng avvalo

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.3.10)$$

ildizning uchta u_1, u_2, u_3 noma'lumning unga mos v_1, v_2, v_3 qiymatlarini (1.3.7) dan aniqlab olamiz. Natijada (1.3.3) tenglamaning uchta

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = u_2 + v_2, \quad y_3 = u_3 + v_3$$

ildizi kelib chiqadi.

Ma'lumki, u noma'lumning uchta qiymatini hosil qilish uchun uning bitta u_1 qiymatini $\sqrt[3]{1}$ ning uchta

$$1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e, \quad -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^2$$

$$e^2 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$e^2 = e \cdot e = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1;$$

qiymatiga mos ravishda ko'paytiriladi: $u_1 = u_1 \cdot 1$, $u_2 = u_1 \cdot e$, $u_3 = u_1 \cdot e^2$.

Bu holda (1.3.7) ga binoan v noma'lumning mos qiymatlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi, ya'ni

$$v_1 = -\frac{1}{3u_1}; \quad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = \frac{p}{3u_1 e} = e^2 \left(-\frac{p}{3u_1} \right) =$$

$$= e^2 v_1; \quad v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3u_1 e^2} = e \left(-\frac{p}{3u_1} \right) = e v_1$$

Demak, (1.3.3) tenglamaning ildizlari:

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = e u_1 + e^2 v_1, \quad y_3 = e^2 u_1 + e v_1$$

ko'rinishni oladi. Bunda mos ravishda e va e^2 larning qiymatlarini quyib, ushbu y_1, y_2, y_3 ifodalari hosil qilamiz:

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1).$$

Bularga va (1.3.2) – ga asosan, (1.3.1) biz izlayotgan tenglamaning ildizlari

$$x_1 = u_1 + v_1 - \frac{a}{3},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}, \quad (1.3.11)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3},$$

bo'ladi. Natijada biz uchinchi darajali bir noma'lumli tenglamaning Kardano usuli yordamida yechib, uning barcha noma'lumlarini topib oldik. Endi biz uchinchi darajali, algebraik tenglamalarni Kardano usuli yordamida yechishga misol keltiraylik.

Misol.1. Tenglamani yechamiz: bunda $a = 3, b = 15, c = 13$ bo'lib, (1.3.4) ga va (1.3.10) ga asosan topamiz:

$$p = 12, q = 0$$

$$u = \sqrt[3]{0 + \sqrt{0 + \frac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8}$$

Agar $u_1 = 2$ ni olsak, $v_1 = -\frac{12}{3\sqrt[3]{2}} = -2$ bo'ladi. Demak, (1.3.11) ga

muvofig ushbuni hosil qilamiz:

$$x_1 = 2 - 2 - 1 = -1,$$

$$x_2 = i\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2) - 1 = 2\sqrt{3}i - 1,$$

$$x_3 = -i\frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2) - 1 = 2\sqrt{3}i + 1.$$

4-§. TO'RTINCHI DARAJALI TENGLAMALAR

Endi biz bu paragrafda algebraik tenglamalarning ko'rinishlaridan biri to'rtinchi darajali tenglamalar va ularni yechish xususida fikr yuritamiz, bizga k kompleks sonlar maydonida to'rtinchi darajali tenglamaning ikki tomonini bosh koeffitsiyentga bo'lib, uni

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1.4.1)$$

ko'rishga keltiramiz. To'rtinchi darajali algebraik tenglamalarni yechishning bir necha usullari bor. Biz ulardan bittasini, ya'ni Ferrari usuli bilan tanishib o'tamiz. Buning uchun (1.4.1) tenglamaning keyingi uchta hadini uning o'ng tomoniga o'tkazib, so'ngra ikki tomonga $\frac{a^2x^2}{4}$ ni qo'ysak,

$$\frac{3}{4}x^4 + \frac{ax}{2}x^2 = \frac{3a^2}{4} - bx^2 - cx - d$$

hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan bu so'nggi tenglamaning ikki tomoniga

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{ax}{2}x + \frac{y^2}{4}$ ni qo'yib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}x = \frac{3a^2}{4} - b + yx^2 + \frac{3ay}{2} - cx + \frac{3y^2}{4} - d \quad (1.4.2)$$

bunda y - yangi noma'lumlar.

Biz yangi noma'lumli esa (1.4.2) tenglamaning o'ng tomoni to'liq kvadratdan iborat bo'ladigan qilib aniqlaymiz. Buning uchun

$$A = \frac{a^2}{4} - b + y, \quad B = \frac{ay}{2} - C, \quad C = \frac{y^2}{4} - d \quad (1.4.3)$$

deb olamiz. (1.4.2) ning o'ng tomoni to'la kvadrat bo'lishi uchun elementar matematika kursidan ma'lum bo'lgan $B^2 = 4AC$ shartga asosan, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\frac{a^2}{4} - b + y = \frac{ay^2}{4} - d = \frac{ay}{2} - c$$

yoki

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2 - 4b)c = 0 \quad (1.4.4)$$

Agar biz (1.4.4) tenglama ildizlaridan birini y_0 desak, (1.4.3) dan

$$A = \frac{a^2}{4} - b + y_0, \quad B = \frac{ay_0}{4} - c, \quad c = \frac{y_0^2}{4} - d$$

hosil bo'lib, (1.4.2) tenglama

$$x^2 + \frac{a_1}{2} + \frac{y_0}{2} = (ax + b)^2$$

yoki

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \pm (ax + b)$$

ko'rinishni oladi, bunda $a = \sqrt{A}$ va $b = \frac{B}{2\sqrt{A}}$. Demak, berilgan to'rtinchi

darajali algebraik tenglama ikkita

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} &= ax + b \\ x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} &= -ax - b \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

kvadrat tenglama ko'paytmasiga yoyiladi. Bularni ketma – ket yechib (1.4.1) tenglamaning biz izlayotgan to'rtta ildizini topib olamiz.

To'rtinchi darajali algebraik tenglamani yuqorida ko'rsatilgan Ferrari metodi bo'yicha ildizlarini topib olgan quyidagi to'rtinchi darajali algebraik tenglamaga misol keltirishimiz mumkin.

Misol. $x^4 + 3x^3 - 5x - 3 = 0$. Bunda $a = 3, b = 0, c = -5, d = -3$.

Avval (1.4.4) tenglamani tuzib, ushbuni topamiz:

$$y^3 - 3y + 2 = 0$$

Bu tenglamani yechamiz: $u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1-1}} = \sqrt[3]{-1}$, bundan $u_1 = -1, v_1 = -\frac{-3}{3(-1)} = -1$ demak, $y_0 = -1 - 1 = -2$.

Endi (1.4.3) dan $A = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{2}$; $a = \pm \frac{1}{2}$ Masalan, $a = \frac{1}{2}$ ni olsak, $B = \frac{3(-2)}{2} + 5 = 2$ dan $b = \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, (1.4.5) tenglamalar

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{2}x - 1 &= \frac{1}{2}x + 2 \\ x^2 + \frac{3}{2}x - 1 &= -\frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bularni yechib, berilgan tenglamaning to‘rtta ildizini hosil qilamiz:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$
$$x_3 = x_4 = -1$$

Shunday qilib biz to‘rtinchi darajali algebraik tenglamani yechib uning to‘rtta ildizini topib oldik.

II BOB. YUQORI DARAJALI ALGEBRAIK TENGLAMALAR VA ULARNING YECHIMLARI

1-§. BESHINCHI VA UNDA YUQORI DARAJALI ALGEBRAIK TENGLAMALAR XUSUSIDA

Biz bu bitiruv malakaviy ishning birinchi bobida algebraik tenglamalar va ularning turlari bo'lgan ayniqsa uchinchi darajali, to'rtinchi darajali tenglamalar va ularni yechish ularni yechish usullari haqida batafsil to'xtalib o'tdik. Endi biz quyida yuqori darajali algebraik tenglamalar ayniqsa to'rtinchi darajadan yuqori bo'lgan algebraik tenglamalarni yechimlari xususida fikr yuritamiz.

Bizga ma'lumki, kvadrat tenglamalarning yechish usullari hatto qadimgi yunonlarga ham ma'lum bo'lgan bir vaqtda uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalar yechishni yuqorida bayon qilingan usullarining kashf etilishi XVI asrda taaluqlidir. Bundan so'ng navbatdagi qadamni qo'yish, ya'ni har qanday beshinchi darajali tenglamaning ildizlarini uning koeffitsiyentlari orqali radikallar yordamida ifodalaydigan formulalarni topish uchun befoyda urinishlar deyarli uch asr davom etdi. Bunday urinishlar o'tgan asrning yigirmanchi yillarida buyuk matematik Abel bunday formulalar ixtiyoriy $n \geq 5$ da n - darajali tenglamalar uchun umuman topilmasligini isbotlagandan so'nggina tugadi.

Ammo Abelning bu natijasi koeffitsiyentlari sonlardan iborat bo'lgan aniq ko'phadning ildizlari har holda birorta usul bilan radikallarning ba'zi kombinasiyalari yordamida koeffitsiyentlar orqali ifodalanishi mumkinligini ya'ni odatda aytilishicha, har qanday tenglama radikallarda yechilishi mumkinligini istisno qilmas edi. Berilgan tenglamaning qanday

shartlar bajarilganda radikallarda yechilishga ega ekanligi haqidagi masala o'tgan asrning o'ttizinchi yillarida buyuk matematik Galua tomonidan to'liq tekshirildi. $n = 5$ dan boshlab, har qanday n uchun radikallarda yechilmaydigan, hatto butun koeffitsiyentli n - darajali tenglamalarni ko'rsatish mumkin.

Bunga misol qilib ushbu quyidagi tenglamani misol keltirish mumkin.

Masalan: $x^5 - 4x - 2 = 0$.

2-§. ALGEBRAIK TENGLAMALAR CHEGARALARI

Yuqorida biz ko'rib o'tganimizdek yuqori darajali algebraik tenglamalarni radikallarda yechib bo'lmasa ham bunday tenglamalarning uning ildizlari chegaralari haqida fikr yuritishimiz mumkin.

Bizga ma'lumki, koeffitsiyentlari sonlardan iborat bo'lgan ko'phad ildizlarining aniq qiymatlarini topish metodlari mavjud bo'lmasa ham shunga qaramasdan mexanika, fizika va texnikaning turli tarmoqlarida uchraydigan hilma – xil muammolarni hal qilish ko'phadlarning ildizlari haqidagi masalaga keltiriladi. Shu bilan birga bu ko'phadlarning darajalari ba'zan ancha katta bo'ladi. Bu hol koeffitsiyentlari sonlardan iborat bo'lgan ko'phadlarning ildizlari to'g'risida, bu ildizlarning aniq qiymatlarini bilmay turib u yoki bu mulohazalarni bayon qilish maqsadida olib borilgan juda ko'p tekshirishlar uchun sabab bo'ldi. Masalan, ildizlarning kompleks tekislikda joylashishi haqidagi masala o'rganildi (qanday shartlar bajarilganda, barcha ildizlar birlik doira ichida yotadi, ya'ni qachon ularning modullari birdan kichik yoki qachon barcha ildizlar chap yarim tekislikda yotadi, ya'ni haqiqiy qismlari manfiy sonlardan iborat bo'ladi va h.k). Haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar uchun ularning haqiqiy ildizlarining sonini aniqlash metodlari ishlab chiqildi, bu ildiz joylashgan oraliqlarning chegaralari izlab topildi.

Nihoyat, juda ko'p tekshirishlar ildizlarni taqribiy hisoblash metodlariga bag'ishlanadi; texnik tatbiqlarga bag'ishlandi; texnik tadbiqlarda odatda ildizlarning avvaldan berilgan aniqlikda taqribiy qiymatini bilishgina yetarli bo'ladi, hatto ko'phad ildizlarini, masalan,

radikallarda ifoda etilgan taqdirda ham, bu radikallar baribir ularning taqribiy qiymatlari bilan almashtiriladi.

Biz bu bitiruv malakaviy ishda bu sohaga kiruvchi natijalarning juda kichik bir qisminigina qaraymiz, shu bilan birga tatbiqlarning eng zarur ehtiyojlarini hisobga olib, ba'zan bu chegaradan bir oz chetga chiqib bo'lsa ham, haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar va ularning haqiqiy ildizlarini tekshirish bilangina chegaralanamiz. Shu bilan birga haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ ko'phadni biz haqiqiy qiymatlarinigina qabul qiluvchi, haqiqiy o'zgaruvchining (uzluksiz) funksiyasi deb sistematik analizning natijalari va metodlarini qo'llaymiz.

Bizga haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ ko'phadning ildizlarini tekshirishni bu ko'phadning grafigini ko'rishdan boshlash foydali: ko'p hadning haqiqiy ildizlari bu ko'phad grafigining x o'qi bilan kesishish nuqtalarining absissalaridan va faqat shulardagina iborat ekanligi ravshan. Masalan quyidagi, beshinchi darajali

$$k(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

ko'phadni qaraylik. Bu ko'phadning ildizlari to'g'risida quyidagilarni aytish mumkin: uning darajasi toq sondan iborat bo'lgani uchun $k(x)$ kamida bitta haqiqiy ildizga ega, agar uning haqiqiy ildizlari soni birdan katta bo'lsa, kompleks ildizlar o'zaro qo'shma bo'lgani sababli haqiqiy ildizlar soni yoki uchga yoki beshga teng bo'ladi. $k(x)$ ko'phadning grafigini tekshirish uchun uning ildizlari to'g'risida ko'proq fikrni aytishga imkon beradi.

Hosil qilgan bu grafigimizni x ning faqat butun qiymatlarigina olib va ularga mos kelgan $h(x)$ ning qiymatlarini, masalan, Gorners sxemasi orqali hisoblab chizaylik.

x	$h(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-4	-39
-3	144
-2	83
-1	18
0	-3
1	-4
2	39
$\vdots$	$\vdots$



Bu grafikda biz $h(x)$ ko'phad uchta haqiqiy ildizga – musbat a_1 ildizga va 2 ta manfiy a_2 va a_3 ildizlarga ega ekanligini ko'ramiz. Shu bilan birga

$$1 < a < 2, \quad -1 < a_2 < 0 \\ -4 < a_3 < -3$$

ko'rinib turibdiki (haqiqiy) ildizlari haqida uning grafigini qarashdan chiqadigan ma'lumotlar amaliy jihatdan ancha qoniqarli bo'ladi. Ammo bizga har gal barcha ildizlar haqiqatan ham topildimikin degan shubha

qoladi. Masalan, yuqorida ko'rilgan misolda biz $x = 2$ nuqtadan o'ngda va $x = -4$ nuqtadan chapda ko'phadning ildizlari yo'q ekanligini ko'rsatganimiz yo'q.

Buning ustida biz x ning faqat butun qiymatlarigina olganimiz uchun biz chizgan grafik $h(x)$ funksiyaning haqiqiy holatini tasvirlab bermaydi, uning ancha kichikroq tebranishlarini hisobga olganimiz sababli, balki ba'zi ildizlar bizning nazarimizdan chetda qolgan bo'lishi mumkin deb faraz qilishimiz mumkin.

Albatta, biz grafikni chizayotganimizda x ning faqat butun qiymatlarigina olmay, balki 0,1 yoki 0,01 aniqlikdagi qiymatlarini ham olishimiz mumkin edi. Ammo bu bilan $h(x)$ ning qiymatlarini hisoblash juda ham murakkablashib ketishiga qaramay, yuqorida qayd qilingan shubhalarimizga barham berilmay qolaverar edi. Ikkinchi tomondan matematik analizdagi metodlar yordamida $k(x)$ funksiyaning maksimumini va minimumini tekshirib, shu yo'l bilan grafigimizni funksiyaning haqiqiy holati bilan solishtirish mumkin, biroq bu o'z navbatida $h'(x)$ hosilaning ildizlarini hisoblash masalasiga, ya'ni biz shug'ullanayotgan masalaga o'xshash masalaga olib keladi.

Bundan haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadning haqiqiy ildizlari joylashgan oraliqning chegaralarini izlash uchun va bu ildizlarining sonini aniqlab berish uchun xizmat qiladigan ancha mukammal metodlarga ehtiyoj tug'iladi.

Endi biz istalgan ko'phad musbat ildizlarining yuqori chegaralarinigina topish masalasiga to'xtalib o'tamiz. n - darajali $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lib, bunda N_0 uning musbat ildizlarining yuqori chegarasi desak. Biz ushbu

$$j_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$j_2(x) = f(-x),$$

$$j_3(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ko'phadlarni ko'ramiz va bularning musbat ildizlarining chegaralarini topamiz; ular mos ravishda $N_1 N_2$ sonlardan iborat bo'lish. U holda $\frac{1}{N_1}$ son $f(x)$ ko'phad musbat ildizlarining quyi chegarasidan iborat bo'ladi; agar a son $f(x)$ ning musbat ildizi bo'lsa, $\frac{1}{a}$ son $j_1(x)$ ning musbat ildizi bo'ladi va $\frac{1}{a} < N_1$ tengsizlikdan $a > \frac{1}{N_1}$ kelib chiqadi.

Shuning singari $-N_2$ va $-\frac{1}{N_3}$ sonlar $f(x)$ ko'phad manfiy ildizlarining mos ravishda quyi va yuqori chegaralaridan iborat bo'ladi. Shunday qilib, $f(x)$ ko'phad barcha musbat ildizlari $\frac{1}{N_1} < x < N_0$ tengsizliklarni, barcha manfiy ildizlari $-N_2 < x < -\frac{1}{N_3}$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Endi musbat ildizlarining yuqori chegaralarini topish uchun quyidagi metodni ishlatish mumkin. Koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'phad berilgan va $a_0 > 0$ bo'lsin. a_k ($k \leq n$) manfiy koeffitsiyentlar ichida birinchisi bo'lishi agar bunday koeffitsiyentlar bo'lmaganda edi, u holda

$f(x)$ ko'phad umuman musbat ildizlarga ega bo'lmagan bo'lar edi. Nihoyat manfiy koeffitsiyentlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi B bo'lsin. U holda

$$1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

son $f(x)$ ko'phad musbat ildizlarining yuqori chegarasi vazifasini o'taydi.

Haqiqatan ham, $x > 1$ deb faraz qilib, $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ koeffitsiyentlarning har birini nol soni bilan almashtirib, $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ larning har birini esa B son bilan almashtirsak, ko'phadning qiymatini faqatgina kamaytirishimiz mumkin, ya'ni

$$\begin{aligned} f(x) &\leq a_0 x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + x + 1) = \\ &= a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}, \end{aligned}$$

ya'ni $x > 1$ tengsizlikka asosan

$$f(x) < a_0 x^n - \frac{Bx^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1} (a_0 x^{k-1} (x-1) - B) \quad (2.2.1)$$

Agar

$$x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \quad (2.2.2)$$

bo'lsa, u holda

$$a_0 x^{k-1} (x-1) - B \leq a_0 (x-1)^k - B$$

bo'lgani uchun (2.2.1) formulaga kvadrat qavs ichidagi ifoda musbat bo'ladi, ya'ni (2.2.1) ga asosan $f(x)$ ning qiymati qat'iy musbat bo'ladi. Shunday qilib, x ning (2.2.2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlari $f(x)$ ko'phadning ildizlari vazifasini bajara olmaydi. Demak, biz xuddi shuni isbotladik. Bundan ko'rinadiki, bu metod yuqorida ko'rilgan $k(x)$ ko'phad musbat ildizlarining yuqori chegarasi sifatida $k = 2$ va $B = 7$ bo'lgani sababli $1 + \sqrt{7}$ sonini olish mumkinligini ko'rsatadi. Bu chegarani unga eng yaqin turuvchi hamda katta bo'lgan butun son bilan almashtirish mumkin.

Endi biz yuqori chegarani izlashning boshqa ko'pgina metodlaridan biri Nyuton metodi bilan tanishib chiqamiz. Bu metod yuqorida bayon qilingan metodga nisbatan odatda yaxshi natijada beradi.

Bizga yuqori koeffitsiyentli a_0 musbat sondan iborat bo'lgan haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin. Agar $f(x)$ ko'phad va uning barcha ketma – ket $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalari $x = C$ da musbat qiymatlarini qabul qilsa, u holda C son musbat ildizlarning yuqori chegarasi vazifasini bajaradi.

Haqiqatan ham, Teylor formulasiga binoan:

$$f(x) = f(C) + (x - C)f'(C) + (x - C)^2 \frac{f''(C)}{2!} + \dots + (x - C)^n \frac{f^{(n)}(C)}{n!}$$

Agar $x \leq C$ bo'lsa, u holda o'ngda qat'iy musbat son turadi, ya'ni x ning bunday qiymatlari $f(x)$ ning ildizlari vazifasini bajara olmaydi.

Berilgan $f(x)$ ko'phad uchun unga mos keluvchi C sonni izlashda quyidagicha ish tutish foydaladir.

$f^{(n)}(x) = n! a_0$ hosila musbat son bo'lgani uchun $f^{(n-1)}(x)$ ko'phad x ning o'suvchi funksiyasidan iborat. Demak, shunday c_1 son topiladiki $x \in c_1$ bo'lganda $f^{(n-1)}(x)$ hosila musbat bo'ladi. Bundan esa $f^{(n-2)}(x)$ hosila x ning o'suvchi funksiyaidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Shunga ko'ra shunday $c_2 (c_2 \in c_1)$ son mavjudki, $x \in c_2$ bo'lgandan $f^{(n-2)}(x)$ hosila ham o'z navbatida musbat bo'ladi. Bu prosessni davom ettirib, nihoyat izlanayotgan C songa yetib kelamiz.

Nyuton metodini yuqorida ko'rilgan $h(x)$ ko'phadga qo'llab, topamiz:

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,$$

$$h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,$$

$$h''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 30x + 16,$$

$$h'''(x) = 60x^2 + 48x - 30,$$

$$h^{(IV)}(x) = 120x + 48,$$

$$h^{(V)}(x) = 120,$$

$x = 2$ bo'lganda bu ko'phadlarning hammasi ham musbat ekanligini (juda bo'lmasa Gerner metodi bilan) osongina tekshirish mumkin. Shunday qilib, 2 soni $h(x)$ ko'phad musbat ildizlarining yuqori chegarasi vazifasini bajarar ekan. Bu natija yuqorida boshqa metodlar yordamida olingan natijalarga nisbatan ancha aniqdir.

$h(x)$ ko'phad manfiy ildizlarining quyi chegarasini topish uchun $j_2(x) = -k(-x)$ ko'phadni tekshiramiz.

$$j_2(\alpha) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3,$$

$$j_2'(\alpha) = 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7,$$

$$j_2''(\alpha) = 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,$$

$$j_2'''(\alpha) = 60x^2 - 48x - 30,$$

$$j_2^{IV}(\alpha) = 120x - 48,$$

$$j_2^V(\alpha) = 120$$

bo'lgani sababli hamda bu ko'phadlarning barchasi $x = 4$ da musbat ekanligidan (buni osonlikcha tekshirish mumkin) 4 soni $h(\alpha)$ ko'phad musbat ildizlarining yuqori chegarasi vazifasini bajaradi va shunga ko'ra – 4 soni $h(\alpha)$ manfiy ildizlarining quyi chegarasi bo'ladi.

Nihoyat

$$j_1(\alpha) = -x^5 k_{\frac{1}{x}} = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1$$

$$j_3(\alpha) = -x^5 k_{\frac{1}{x}} = 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

ko'phadlarni tekshirib, yana Nyuton metodini qo'llab, ular uchun musbat ildizlarining yuqori chegarasi sifatida mos ravishda 1 va 4 sonlarni olishimiz mumkin, shunga ko'ra $h(\alpha)$ ko'phad musbat ildizlarining quyi chegarasi vazifasini $\frac{1}{1} = 1$ soni, manfiy ildizlarining yuqori chegarasi

vazifasini esa $-\frac{1}{4}$ soni o'ynaydi.

Shunday qilib, $h(x)$ ko'phadning musbat ildizlari 1 va 2 sonlari orasida joylashgan bo'lib, manfiy ildizlari esa -4 va $-\frac{1}{4}$ sonlari orasida joylashgan.

Bu natija yuqoridagi grafikni tekshirishdan kelib chiqadigan natija bilan juda mos keladi.

Endi quyida biz haqiqiy koeffitsiyentli $h(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi sonini topish masalasini qaraymiz. Bunda biz haqiqiy ildizlarning umumiy soni bilan birga alohida musbat ildizlarning soni va alohida manfiy ildizlarning soni bilan ham umuman avvaldan berilgan a va b chegaralar orasidagi ildizlarning soni bilan qiziqamiz. Bilamizki ildizlar sonini aniq topishning bir nechta metodlari mavjud, ammo ularning hammasi ham juda uzundan – uzoq; ular ichida bir muncha qulay bo'lgani Shturm metodir. Quyida ana shu metodni bayon qilishga o'tamiz.

Eng avvallo, keyingi tushunchalarda ishlatiladigan bitta ta'rif kiritamiz: noldan farqi haqiqiy sonlarning birorta tartiblangan chekli sistemasi, masalan,

$$1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1 \quad (2.2.3)$$

berilgan bo'lsin. Bu sonlarning ishoralarini ketma – ket yozib chiqaylik.

$$+, +, -, +, -, -, -, +, + \quad (2.2.4)$$

Biz (2.2.4) ishoralar sistemasida qarama – qarshi ishoralar to'rt marta yonma – yon turganini ko'ramiz. Shu sababli (2.2.3) tartiblangan sistemada to'rt marta ishora o'zgarishi mavjud deyiladi. Noldan farqli haqiqiy sonlarning ixtiyoriy tartiblangan chekli sistemasi uchun ishora o'zgarishlar sonini topish mumkinligi tabiiydir.

Endi haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ ko'phadni tekshiraylik. Bunda $f(x)$ ko'phad karrali ildizga ega emas deb faraz qilamiz, chunki aks holda biz uni o'zi bilan hosilasining eng katta umumiy bo'luvchisiga bo'lib yuborishimiz mumkin edi. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, noldan farqli ko'phadlarning tartiblangan chekli

$$f(x) = f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x) \quad (2.2.5)$$

sistemi $f(x)$ ko'phadning Shturm sistemi deyiladi.

1. (2.2.5) sistemasining qo'shni ko'phadlari umumiy ildizga ega emas;

2. oxirgi $f_s(x)$ ko'phad haqiqiy ildizlarga ega emas;

3. Agar a son (2.2.5) sistemasining oraliq ko'phadlaridan biri bo'lgan $f_k(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa ($1 \leq k \leq s-1$), u holda $f_{k-1}(a)$ va $f_{k+1}(a)$ qarama – qarshi ishoralarga ega bo'ladi.

4. Agar a son $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa u holda x o'sa borib a nuqtadan o'tsada $f(x)f_1(x)$ ko'paytma o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi.

Har qanday ko'phad ham Shturm sistemasiga ega bo'ladimi degan savol keyinroq ko'riladi: hozir esa $f(x)$ bunday sistemaga ega deb faraz qilib, bu sistema yordamida qanday qilib haqiqiy ildizlarning sonini topish mumkinligini qaraylik.

Agar C haqiqiy son berilgan $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizdan iborat bo'lmasa va (2.2.5) bu ko'phad uchun Shturm sistemasidan iborat bo'lsa, u holda haqiqiy sonlarning

$$f_1(\mathbb{C}), f_2(\mathbb{C}), \dots, f_s(\mathbb{C})$$

sistemasini olamiz, undan barcha holda teng bo'lganligini o'chiramiz va $W(\mathbb{C})$ orqali qolgan sistemaning ishora o'zgarishlar sonini belgilaymiz; $W(\mathbb{C})$ ni $f(x)$ ko'phadning (2.2.5) Shturm sistemasida $x = c$ bo'lganda ishora o'zgarishlar soni deyiladi.

Ushbu teorema o'rinli:

Shturm teoremasi. Agar a va b ($a < b$) haqiqiy sonlar karrali ildizlarga ega bo'lmagan $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lmasa, u holda $W(a)$ i $W(b)$ va $W(a) - W(b)$ ayirma $f(x)$ ko'phadning a va b orasida joylashgan haqiqiy ildizlari soniga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ ko'phadning a va b orasida joylashgan haqiqiy ildizlari sonini topish uchun ($f(x)$ shartga ko'ra karrali ildizlariga ega emasligini eslataylik) bu ko'phadning Shturm sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni a va b ga o'tishda nechtaga kamayishini aniqlashimiz kifoya ekan.

Teoremani isbotlash uchun x o'sishishi bilan $W(x)$ son qanday o'zgarishini tekshirib ko'raylik. x o'sa borib o'z yo'lida sistemasining birorta kam ko'phadning ildizlarini uchratmasa, bu sistema ko'phadlarining ishorasi o'zgarmaydi, shunga ko'ra $W(x)$ ham o'zgarmay qoladi. Shu sababli, shuningdek Shturm sistemi ta'rifidagi (2.2.4) shartga asosan faqatgina quyidagi ikkita holni ko'rsak kifoya: x ning birorta oraliq $f_k(x)$, ($1 \leq k \leq s-1$) ko'phadning ildizlaridan o'tishi va x ning $f(x)$ ko'phadning o'zning ildizlaridan a son $f_k(x)$, ($1 \leq k \leq s-1$) ko'phadning ildizi bo'lsin. U holda (2.2.3) shartga ko'ra $f_{k-1}(a)$ va $f_{k+1}(a)$

lar noldan farqli. Demak, juda kichik bo'lsa ham shunday ϵ musbat son topish mumkinki, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ oraliqda $f_{k-1}(a)$ va $f_{k+1}(a)$ ko'phadlarning ildizlari mavjud emas va shuning uchun ularning har qaysisi ishora saqlaydi, buning ustiga (2.2.5) ga asosan bu ishoralar qarama – qarshidir. Bunday, ushbu

$$f_{k-1}(a - \epsilon), f_k(a - \epsilon), f_{k+1}(a - \epsilon) \quad (2.2.6)$$

va

$$f_{k-1}(a + \epsilon), f_k(a + \epsilon), f_{k+1}(a + \epsilon) \quad (2.2.7)$$

sonlarning sistemalarining har biri $f_k(a - \epsilon)$ va $f_k(a + \epsilon)$ sonlar qanday ishoraga ega bo'lishidan qat'iy nazar, faqat bittasigina ishora o'zgarishiga ega bo'lishi kelib chiqadi. Masalan $f_{k-1}(x)$ biz ko'rayotgan oraliqda manfiy bo'lib, $f_{k+1}(x)$ esa musbat bo'lsa va agar $f_k(a - \epsilon) > 0$, $f_k(a + \epsilon) < 0$, bo'lsa, u holda (2.2.6) va (2.2.7) sistemalarga ushbu

$$-, +, +, -, -, -, +,$$

ishoralar sistemasi mos keladi. Shunday qilib, x Shturm sistemasidagi birorta oraliq ko'phadning ildizidan o'tganda bu sistemaning ishora o'zgartirish faqat joyini o'zgartirish (surilishi) mumkin bo'lib, yangidan paydo bo'lmaydi va yuqolib ham ketmaydi, shuning uchun ham $W(x)$ son bunday o'tishda o'zgarmaydi.

Ikkinchi tomondan a berilgan $f(x)$ ko'phadning o'zining ildizi bo'lsin. (2.2.5) shartga a ga ko'ra son $f_1(x)$ uchun ildiz bo'lmaydi. Shu sababli, shunday musbat ϵ son topiladiki, $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ oraliq $f_1(x)$ ko'phadning

ildizlarini o'z ichida olmaydi va shuning uchun ham $f_1(x)$ bu oraliqda ishora saqlaydi. Agar bu ishora musbat bo'lsa, u holda x (2.2.6) shartga ko'ra a orqali o'tganda $f(x)$ ko'phadning o'zi ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, ya'ni

$$f(a - \epsilon) < 0, f(a + \epsilon) > 0.$$

Demak,

$$f(a - \epsilon), f_1(a - \epsilon), \text{ va } f(a + \epsilon), f_1(a + \epsilon) \quad (2.2.8)$$

sonlar sistemasiga

$$-, + \text{ va } +, +$$

ishoralar sistemasi mos keladi, boshqacha qilib aytganda Shturm sistemasida bitta ishora o'zgarishi yuqoladi. Agar $f_1(x)$ ning $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ oraliqdagi ishorasi manfiy bo'lsa, yana (2.2.6) shartga ko'ra x a dan o'tganda $f(x)$ ko'phad o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartiradi, ya'ni $f(a - \epsilon) > 0, f(a + \epsilon) < 0$; (2.2.8) sonlar sistemasiga endi

$$-, + \text{ va } -, -$$

ishoralar sistemasi mos keladi, ya'ni Shturm sistemasida yana bitta ishora o'zgarishi yuqoladi.

Shunday qilib, $W(x)$ son (x o'sib borib) $f(x)$ ko'phad ildizlaridan o'tkandagina o'zgaradi, shu bilan birga bu holda u roppa – rosa bittaga kamayadi.

Bu bilan ravshanki, Shturm teoremasi isbotlandi. Bu teormani $f(x)$ ko'phad haqiqiy ildizlaridan umumiy soni topishga ishlatish uchun a sifatida manfiy ildizlarning quyi chegarasini b sifatida esa musbat ildizlarning chegarasini olish kifoya. Ammo quyidagicha ish tutish qulaydir, ya'ni shunday N son mavjudki, (bu son juda katta bo'lishi ham mumkin). $|x| > N$ bo'lganda Shturm sistemasidagi barcha ko'phadlarning ishoralari ularning yuqori hadlari ishorasi bilan bir xilda bo'ladi. Boshqacha qilib, aytganda x noma'lumning shunday katta musbat qiymati mavjudki Shturm sistemasidagi barcha ko'phadlarning unga mos keluvchi qiymatlarining ishorali ularning yuqori koeffitsiyentli oldidagi ishorasiga to'g'ri keladi: x ning hisoblash uchun hojati bo'lmagan bu qiymatini shartli ravishda l simvoli bilan belgilanadi. Ikkinchi tomondan, x ning absolyut qiymati jihatidan yetarlicha katta bo'lgan shunday manfiy qiymati mavjudki, Shturm sistemasidagi ko'phadlarning unga mos keluvchi qiymatlarining ishoralari juft darajali ko'phadlar uchun ularning yuqori koeffitsiyentlari oldidagi ishorasi bilan ustma – ust tushadi va toq darajali ko'phadlar uchun esa ularning yuqori koeffitsiyentli oldidagi ishorasiga qarama – qarshi ishoraga ega bo'ladi; x ning bu qiymatini $-l$ orqali belgilaymiz. $(-l', l')$ oraliqda Shturm sistemasidagi barcha ko'phadlarning va xususan $f(x)$ ko'phadning barcha ildizlari yotishi ravshan. Bu oraliqqa Shturm teoremasini qo'llab, biz bu ildizlarning sonini aniqlaymiz. Shturm teoremasining $(-l', 0)$ va $(0, -l')$ oraliqlarda tadbiqu mos ravishda $f(x)$ ko'phadning manfiy ildizlari sonini va manfiy ildizlari sonini beradi.

Endi karrali ildizlarga ega bo'lmagan, haqiqiy koeffitsiyentli har qanday $f(x)$ ko'phad Shturm sistemasiga ega bo'lishini ko'rsatishimiz qoldi xolos. Bunday sistemani tuzishda foydalaniladigan turli metodlar ichidan eng ko'p ishlatiladigan quyidagi metodni bayon qilamiz. $f_1(x) = f'(x)$ deb

olaylik, bu Shturm sistemasi ta'rifidagi (2.2.6) shartlarning bajarilishini ta'minlaydi. Haqiqatan ham agar a son - $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $f'(a) \neq 0$ bo'ladi. Agar $f'(a) > 0$ bo'lsa, u holda a nuqta atrofida $f'(a) > 0$ bo'ladi, va shu sababli x ning qiymati a dan o'tganda $f(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, xuddi shu hol $f_1(x) \nmid f(x)$ ko'paytma uchun ham o'rinli bo'ladi. Xuddi shu kabi mulohazalar $f'(a) < 0$ bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Shundan so'ng $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo'lamiz va bu bo'lishdan qolgan qoldiqni teskari ishora bilan olib, uni $f_2(x)$ deb qabul qilamiz:

$$f(x) = f_1(x) q_1(x) - f_2(x)$$

Umuman agar $f_{k-1}(x)$ va $f_k(x)$ ko'phadlar topilgan bo'lsa, u holda $f_{k+1}(x)$ ko'phad $f_{k-1}(x)$ ni $f_k(x)$ ga bo'linganda qolgan qoldiqning teskari ishora bilan olinganiga teng bo'ladi:

$$f_{k-1}(x) = f_k(x) q_k(x) - f_{k+1}(x) \quad (2.2.9)$$

Bu yerda bayon etilgan metodning $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlarga tadbiq etilgan Yevklid algoritmidan farqi faqat shundan iboratki, har gal qoldiqlar ishora teskarisiga almashtiriladi va keyingi bo'lish amali teskari ishorali xuddi shu qoldiq bilan bajariladi. Eng katta umumiy bo'luvchini topishda ishoralarning bunday almashinishi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun bizning prosesimiz $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lgan birorta $f_s(x)$ da to'xtaydi, shu bilan birga $f(x)$ da karrali ildizlarning mavjud bo'lmaganligidan, ya'ni $f'(x)$ bilan o'zaro tub ekanligidan $f_s(x)$ ning aslida noldan farqli birorta haqiqiy sondan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Bundan biz tuzgan

$$f(x) = f_0(x), \quad f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$$

ko'phadlar sistemasi Shturm sistemasining ta'rifidagi (2.2.4) sharni ham qanoatlantirishi kelib chiqadi. (2.2.5) shartning bajarilishini isbotlash uchun qo'shni $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ ko'phadlar umumiy a ildizga ega deylik. U holda a (2.2.9) ga asosan $f_{k-1}(x)$ ko'phad uchun ham ildiz bo'ladi.

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x)q_{k-1}(x) - f_k(x)$$

tenglikka o'tib, a son $f_{k-2}(a)$ uchun ham ildiz ekanligini hosil qilamiz. Xuddi shu kabi davom etib, a son $f(x)$ va $f'(x)$ lar uchun ham umumiy ildiz ekanligini hosil qilamiz, bu esa farazimizga ziddir. Nihoyat, (2.2.5) shartning bajarilishi bevosita (2.2.9) tenglikdan kelib chiqadi: agar $f_k(a) = 0$ bo'lsa, u holda $f_{k-1}(a) = -f_{k+1}(a)$ bo'ladi.

Yuqorida biz ko'rgan Shturm metodini avvalgi ko'rilgan

$$k(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

ko'phadga qo'llaymiz. Bunda $f(x)$ karrali ildizlarga ega emasligini oldindan tekshirib o'tirmaymiz, chunki Shturm sistemasini yuqorida bayon etilgan tuzish metodi bir vaqtning o'zida ko'phad bilan uning hosilasining o'zaro tub ekanligini tekshirish uchun ham xizmat qiladi.

Ko'rsatilgan metodni qo'llab, $k(x)$ uchun Shturm sistemasini topamiz. Shu bilan birga bo'lish protsessini biz Yevklid algoritmidan farqli ravishda, faqat ixtiyoriy musbat songagina ko'paytiramiz va bo'lamiz, chunki Shturm metodida qoldiqlarning ishorasi asosiy rol o'ynaydi. Biz ushbu

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,$$

$$h_1(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x^2 - 7,$$

$$h_2(x) = 66x^3 - 150x^2 + 172x + 61,$$

$$h_3(x) = -464x^2 + 1135x + 723,$$

$$h_4(x) = -32599457x - 8486093,$$

$$h_5(x) = -1$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadagi ko'phadlarning $x = -1$ va $x = 1$ dagi ishoralarini aniqlaymiz. Buning uchun yuqorida aytilganga asosan faqat yuqori koeffitsiyentlarning ishoralari va bu ko'phadlarning darajalaridagina e'tibor berish kerak. Ushbu jadvalni hosil qilamiz:

	$k(x)$	$k_1(x)$	$k_2(x)$	$k_3(x)$	$k_4(x)$	$k_5(x)$	Ishora o'zgarishlar soni
-1	-	+	-	-	+	-	4
1	+	+	+	-	-	-	1

Shunday qilib, $x = -1$ dan 1 ga o'zgarganda Shturm sistemasi uchta ishora o'zgarishini yuqotadi. Shunga ko'ra ko'phad roppa – rosa uchta haqiqiy ildizga ega. Bundan ko'rinadiki, bu ko'phadlarning grafigini chizayotib, biz bitta ham ildizni e'tibordan chetda qoldirmagan ekanmiz.

Shturm metodini bir oz soddaroq bo'lgan boshqa ko'phad uchun qo'llaymiz. Ushbu ko'phad bo'lgan bo'lsin:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

Bu ko'phadning grafigini oldindan chizmay turib, uning haqiqiy ildizlarining sonini hamda bu ildizlarning har biri joylashgan oraliqning chegaralarani topamiz.

Ushbu

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$$

$$f_1(x) = 3x^2 + 6x,$$

$$f_2(x) = 2x + 1,$$

$$f_3(x) = 1.$$

sistema $f(x)$ ko'phad uchun Shtrum sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistemada $x = -1$ va $x = 1$ bo'lganda ishora o'zgarishlar sonini topaylik.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora o'zgarishlar soni
-1	-	+	-	+	3
1	+	+	+	+	0

Demak, $f(x)$ ko'phad uchta haqiqiy ildizga ega. Bu ildizlarning o'rnini (joylashishini) aniqroq topish uchun oldingi jadvalni davom ettiramiz:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora o'zgarishlar soni
$x = -3$	-	+	-	+	3
$x = -2$	+	0	-	+	2
$x = -1$	+	-	-	+	2
$x = 0$	-	0	+	+	1
$x = 1$	+	+	+	+	0

Shunday qilib, $f(x)$ ko'phadning Shturm sistemasi x ning -3 dan -2 ga, -1 dan 0 ga va 0 dan 1 ga o'tishda bittadan ishora o'zgartirish yuqotadi. Shuning uchun ham bu ko'phadning a_1, a_2, a_3 , ildizlari ushbu

$$-3 < a_1 < 2, \quad -1 < a_2 < 0, \quad 0 < a_3 < 1$$

tengsizliklarning qanoatlantiradi.

Xulosa

Ushbu bitiruv makaviy ishi algebra va sonlar nazariyasi fanining muhim rivojlanayotgan tarmoqlaridan biri bo'lgan yuqori darajali algebraic tenglamalar sohasiga doir bo'lib ishda asosan quyidagi natijalarga erishilgan:

- 1) Algebraik tenglamalar va ularning b'zi bir xossalari o'rganilgan.
- 2) Yuqori darajali ikki hadli tenglamalar qarab chiqilgan.
- 3) Uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalarni yechish metodlari tahlil qilingan.
- 4) Beshinchi va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar o'rganilgan.

Shunday qilib, ushbu bitiruv malakaviy ishi algebra va sonlar nazariyasi fanining asosiy tarmoqlaridan biri bo'lgan yuqori darajali algebraik tenglamalar va ularning yechimlariga bag'ishlangan bo'lib, bu ish qiziquvchi talaba yoshlar yosh matematik o'qituvchilar, magistrlar, loyihalash va texnik xodimlarning o'z bilimlarini oshirishda yanada xizmat qiladi deb o'ylaymiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. А.И.Кострикин «Введение в алгебру». М. 1977 г. 496 ст.
2. Л.Я.Куликов «Алгебра и теория чисел» М. 1979 г. 423 ст.
3. A.G.Kurosh «Oliy algebra kursi» Т. 1976 у. 396 st.
4. R.N. Nazarov, B.T.Toshpulatov, A.D.Dusumbetov. «Algebra va sonlar nazariyasi» Т. 1996 у. 283 bet
5. Д.К.Фадеев, И.С.Саминский “Сборник задач по высшей алгебра” М. 1977 г. 317 ст.
6. J.X.Xojiyev, A.S.Faynleyb “Algebra va sonlar nazariyasi kursi” Т. 2001 у. 256 b.
7. Internet www.ziyonet.uz.
8. www.algebra.narod.ru .