

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS

TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika- matematika fakulteti

“Matematik fizika va analiz” kafedrası

Jamilova Mahliyo Bahodirovna

**Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'quvchilari orasida o'tkaziladigan
olimpiada testlari va masalalari.**

5460100-“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr

darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoya qilishga

Ilmiy rahbar_____

ruxsat berildi”

katta o'qituvchi Z. N. Hamdamov

Kafedra mudiri

“___” _____2012 yil

_____ f-m. f. n. G'. I. Botirov

Taqrizchi_____dots.R.T.Muxitdinov

“___” _____2012 yil

“___” _____2012 yil

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani_____SH. M. Mirzayev

“___” _____2012 y.

Buxoro-2012

Mundarija

Kirish	3
I BOB. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'quvchilari orasida o'tkaziladigan olimpiada testlari	
1.1. Olimpiada tarixi.....	13
1.2. Olimpiada testlari va ularning yechimlari.....	18
1.3. Mustaqil yechish uchun testlar.....	31
I bobning xulosasi.	34
II BOB. Olimpiada masalalari	
2.1. Olimpiada masalalari va ularning yechimlari.....	36
2.2. Mustaqil yechish uchun masalalar.....	79
II bobning xulosasi.....	82
Xotima	83
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati	84

Kirish.

Yoshlarga milliy vatanparvarlik
ruhida ta'lim-tarbiya berish bugungi
kunning jiddiy vazifalaridan
hisoblanadi”.

I. A. Karimov.

Barkamol avlod tarbiyalash insoniyatning eng yorqin orzusi bo'lib kelgan. Barcha mamlakatlar, millatlar shunga intilgan. Bizning vatanimizda ham bu borada ancha samarali ishlar bajarilmoqda. Bunga yaqqol misol qilib, 1997-yilda qabul qilingan (yangi tahriri) “Ta'lim to'g'risida”gi qonun va “Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dastur”ini aytish mumkin.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»haqida hukumat darajasidagi quyidagi fikrni O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Vazirlar Mahkamasi-ning “O'zbekistonning 1996-yildagi ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyoti yakunlari hamda 1997-yildagi iqtisodiy islohotlarning ustuvor yo'nalishlari”ga bag'ishlangan majlisidagi nutqida bayon etdi:

“1997-yilda biz yaxshi, zamonaviy talablarga javob beradigan kadrlar tayyorlash masalasiga alohida e'tibor berishimiz kerak.

Ta'lim tizimini tubdan qayta ko'rib chiqish vaqti yetdi, professional bilimlarni egallash imkoniyatlarini kengaytirish, ma'mur-menejrlarni tayyorlashni yo'lga qo'yish, yangi sharoitlarda, yangi zamonaviy texnologiyalarda ishlashga qobil ishchi va mutaxassislarni tayyorlashni yo'lga qo'yish lozim”. (“Ma'rifat”gazetasi, 1997-yil 1-mart).

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I. A. Karimov Oliy Majlisning to'qqizinchi sessiyasida kadrlar tayyorlash milliy dasturi va butun ta'lim tizimining islohoti haqida "...hayotimizmi hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta'lim-tarbiya tizimini tubdan o'zgartirish, uni yangi zamon talabi darajasiga ko'tarish, barkamol avlodimiz kelajagiga daxldor qonun loyihalari ham bor", -degan edi.

Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi inson omiliga juda katta ma'no, buyuk ma'no beradi: maqsad va vazifalar strategiyasidan tortib to ta'lim-tarbiya jarayonini hamma qirralariga oid aniq dasturlar majmuasicha har biri negizida inson asosiy omil hisoblanadi. Kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh sub'ekt sifatida ko'riladi, u bir vaqtning o'zida ta'limiy xizmatlarning ham iste'molchisi, ham yaratuvchisi deb qaraladi. Jamiyat va davlat, ishlab chiqarish, fan va uzluksiz ta'lim barkamol, ijodkor shaxsning shakllanishida kafolat hisoblanadi.

Shaxsning o'qimishliligi va uning yaratuvchanlik malakasi milliy dasturni amalga oshirishning asosiy natijasi bo'lmog'i darkor. Prezident I. Karimov milliy dastur to'g'risidagi o'z nutqida: "Faqatgina chinakam ma'rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatidagi o'ziga munosib obro'li o'rin egallashi uchun fidoiylilik bilan kurashishi mumkin", -deb ta'kidlagandi.

Barchamizga ayonki, inson qalbiga yo'l avvalo ta'lim-tarbiyadan boshlanadi. Shuning uchun qachonki bu haqda gap ketsa, ajdodlarimiz qoldirgan bebaho me'rosni eslash bilan birga, ota-onalarimiz qatori biz uchun eng yaqin bo'lgan yana bir buyuk zot o'qituvchi va murabbiylarning olijanob mehnatini hurmat bilan tilga olamiz.

Biz Navoiy, Bobur, Xorazmiy, Beruniy, Zamaxshariy, Motirudiy, Farobiy, Imom Buxoriy, Koshg'ariy, Ulug'bek, Umar Xayyom, Ibn Sino avlodlari har tomonlama yetuk, barkamol bo'lib yetishimiz uchun keng imkoniyatlar yaratilib,

Prezidentimiz Islom Abdugʻaniyevich Karimov yosh avlod tarbiyasiga juda katta eʼtibor berib, kelajakda iqtidorli, kuchli salohiyatli, izlanuvchan, yaratuvchan kadrlar, qobiliyatli mutaxassislar tayyorlash borasida koʻplab sayi harakatlar amalga oshirilmoqda. Jumladan, “Asosiy vazifamiz–vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz faravonligini yanada kuchaytirishdir” nomli 2009-yilning asosiy yakunlari va 2010-yilda Oʻzbekistonni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustivor yoʻnalishlariga bagʻishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi maʼruzasida “Biz farzandlarimizning nafaqat jismoniy va maʼnaviy sogʻlom oʻsishi, balki ularning eng zamonaviy, intellektual bilimlarga ega boʻlgan uygʻun rivojlangan insonlar boʻlib XXI asr talabalariga toʻliq javob beradigan barkamol avlod boʻlib voyaga yetish uchun zarur barcha imkonoyatlarimizni safarbar etishni koʻzda tutadi”-deganlar. Taʼlim tizimini isloh qilish bilan bir qatorda, taʼlim jarayoning mazmunini uning shakli tuzilmasi va unga qoʻyilgan talablar ham koʻrinishga oʻtmoqdagi, u endi oʻzining oldingi, yaʼni sobiq tizimi davridagi qotib qolgan maʼmuriy, pedagogik tizimdan tubdan farq qilishi bilan xarakterlanadi.

Biz yurtimizda yangi avlod, yangi tafakkur sohib va sohibalarini tarbiyalashdek maʼsuliyatli vazifani ado etishda birinchi galda ana shu kasb egalariga suyanamiz va tayanamiz, ertaga oʻrnimizga keladigan yoshlarning maʼnaviy dunyosini shakllantirishda ularning xizmati naqadar beqiyos ekanini oʻzimizga yaxshi tasavvur qilamiz.

“Agar bolalar erkin fikrlashni oʻrgamasa berilgan taʼlim samarasi past boʻlishi muqarrar”. Islom Abdugʻaniyevich Karimov.

Milliy dasturda inson omili sistemaviy yondashuv usulida koʻrilgan. Bu usulda bir maqsadda faol qatnashuvchi oʻzicha mustaqil va ayni paytda oʻzaro taʼsir doirasida uzviy bogʻlangan bir necha tuzulmalar yagona sistema deb qaraladi.

Jamiyatning har bir sohasi kabi ta'limda ham islohotlar amalga oshirildi. Mustaqillikka erishishimizning birinchi yilida(1992-yil) mustaqil O'zbekistonimizning "Ta'lim to'g'risida"gi birinchi qonuni qabul qilindi. Mazkur qonun avvalo, O'zbekiston ta'limida ilgari erishilgan muvaffaqiyatlarni saqlab qolishga xizmat qildi. Bu qonun o'sha davr uchun juda zarur edi. Axir jamiyat qonunsiz yashasa, vujudga keladigan bo'shliqni bir tasavur qiling. Ayniqsa ta'lim sohasida bunday hol juda salbiy oqibatlarga olib kelishi tajribalarda ko'p sinalgan. Mazkur qonunning yana bir muhim tomoni shunda ediki, u eski tuzum salqitlarini ko'rsatib berishga xizmat qildi. Demak, to'plangan ijobiy jihatlarni saqlab qolgan illatlarni anglab olishimizga xizmat qilgan, aniqrog'i eski tizimdan yangisiga o'tishga ko'prik vazifasini o'tagan qonunning ahamiyati ulkandir.

Shu bilan birga 1992-yilda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi qonun yaratgan imkoniyatlar sabab, ta'lim yizimiga qator yangiliklar kirib keldi. Ularning asosiysini izohlab o'tsak arziydi. Oliy va o'rta maxsus o'quv yurtlariga adolat mezoni hisoblangan test tizimi joriy etilgan.

"Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»—orzuimizga erishishning qonun bilan himoyalangan hujjatidir.

Yurtboshimiz olg'a surgan O'zbekiston ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishining beshta tamoyilini yaxshi bilamiz, albatta. Ularning birida islohotlarni bosqichma-bosqich amalgam oshirish belgilangan. "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"ni ham mazkur prinspga asosan uch bosqichda amalga oshirish mo'ljallangan. Har bir bosqichning o'z oldiga qo'ygan aniq vazifalari bor. Ularning sifatli bajarilishi keyingi bosqichning muvaffaqiyatiga sabab bo'ladi.

Prezident Islom Abdug`niyevich Karimov, "Barkamol avlod O'zbekiston tarqqiyotining poydevori»ma`ruzasida yana quyidagilarga to`xtalib o`tgan edi:

Umumlashtirilgan holda kadrlar tayyorlash tizimining shakllanishi va faoliyat ko'rsatishining asosiy tamoyillari, mening nazarimda quyidagi vazifalarni o'z ichiga oladi:

- barcha xil va turdagi ta'lim muassalarida yuqori malakali mutaxassislar uchun uzliksiz ta'lim, fan va ishlab chiqarish salohiyatidan samarali foydalanish;

- davlat ta'lim standartlarini joriy etish va ularning faoliyat ko'rsatish mexanizmini ishlab chiqish;

- ixtisosliklar, malaka darajasiga ko'ra mutaxasislarga bo'lgan umumdavlat va mintaqaviy talablarning istiqbolini aniqlash;

- ta'lim tizimini tuzilish va mazmun jihatidan isloh qilish uchun o'qtuvchilarni va murabbiylarni qayta tayyorlash;

- davlat va ijtimoiy muassasalarning kasbga yo'naltirish bo'yicha faoliyatini takomillashtirish. Bunda kasb tanlashning bozor ehtiyojlari va imkoniyatlarini e'tiborga olish zarur, toki har bir shaxs o'ziga mos kasbni egallay olsun;

Shuningdek, "Barkamol avlod yili" davlat dasturi to'g'risida O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarorida "Ta'lim jarayonida yangi axborot kommunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni elektiron darsliklar, multimediya vositalarini keng joriy etish orqali mamlakatimiz maktablarida, kasb-hunar kollejlari, litseylar va oliy o'quv yurtlarida o'qitish sifatini tubdan yaxshilash, ilm-fanni yanada rivojlantirish, iqtidorli va qobiliyatli yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish, ularning o'z ijodiy va intellectual salohiyatini ro'yobga chiqarishga sharoit yaratishga doir kompleks chora tadbirlarni ishlab chiqish; ko'zda tutilgan vazifalardan biri hisoblanar ekan, darslarda Yangi Pedagogik Texnologiyalardan foydalanish, ta'lim samaradorligini oshirish, Prezidentimiz Islom Abdug'anovich Karimov takidlagan "erkin fikrlashni"ni o'rganish uchun ayni muddao bo'ladi.

Yurtimizning“Barkamol avlod–O`zbekiston taraqqiyotining poydevori” asarlarida quyidagi shartlarni o`qishimiz mumkin.”Mamlakatimizni istiqlol yo`lidagi birinchi qadamlaridanoq buyuk mamalakatimizni tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta`lim–tarbiya tizimini takomillashtirish, uning milliy zamini mustahkamlash, zamon talablar bilan uyg`unlashtirish asosida jahon andozalari va ko`nikmalari darajasiga chiqarish maqsadida katta ahamiyat berib kelinmoqda”.

Jumladan, “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”da ta`kidlaganidek,”Ta`lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o`tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to`la xolos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yuksak ma`naviy va axloqi talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash milliy tizimini tashkil etadi”.

-o`quvchi yoshlarni Vatanga sadoqat, yuksak axloqiy, ma`naviyat va ma`rifat, mehnatga vijdonan munosabatda bo`lish ruhida tarbiyalash;

-ta`lim muassasalarini, birinchi navbatda umumta`lim maktablarini davlat tomonidan moliyaviy va moddiy-texnikaviy to`liq ta`minlash me`yorlarini oshirish va uning mexanizmini takomillashtirish;

-kadrlar tayyorlash tizimi iste`molchilari-korxonalar, muassasalar, firmalar, hissadorlikjamiatlari, banklar va boshqa tuzilmalarning imkoniyatlaridan, birinchi navbatda, o`rta maxsus o`quv yurtlari va oily o`quv yurtlarining moddiy va moliyaviy bazasini mustahkamlash uchun mumkin qadar kengroq foydalanish;

-kadrlar tayyorlash va ta`lim sohasiga chet el sarmoyalarini, xalqaro donorlik tashkilotlari va jamg`rmalarining mablag`larini lalb etish;

-qonun doirasida o`quv rejalari, dasturlari va o`qitish yo`riqlarini, ta`limiy xizmatlarni belgilashda ta`lim muassasalariga, birinchi navbatda, oliy o`quv yurtlariga mustaqillik berish va o`zini o`zi boshqarish usullarini joriy etish.

Tabiiyki, bunday murakkab vazifalarni amalga oshirishda davlat va jamiyatning mas'uliyati alohida ahamiyat kasb etadi.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo'lishi zarur. Ular yuqori malakali, raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ta'lim muassasalarinig faoliyatini uygunlashtirish lozim.

Barchamaizga ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Abdug'aniyevich Karimov tomonidan 2012-yil "Mustahkam oila" yili deb e'lon qilindi. Oila jamiyatning eng kichik bo'g'ini bo'lib hisoblanib ta'lim va tarbiyaning asosi oiladan boshlanadi albatta. Yilning quyidagicha nomlanishining asosiy sababi ham shunda deb o'ylayman va oilalarning qay darajada mustahkam, tinch va barcha havas qiladigan oila bo'lishi ma'lum ma'noda yoshlar tarbiyasi, ularning ilmga chanqoqligi, bilim darajasining mukammal va yuqori darajada bo'lishiga mustahkam asos, ya'ni poydevor sifatida xizmat qiladi.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi:Respublikamiz mustaqillikka erishgandan keyin bizning o'zbek yigit-qizlari jahon arenalarida sport va ilm-fanning turli sohalarida yutuqlarga erishib yurtimiz sharafigini himoya qilishmoqda. Ularga o'z sohasini mukammal biladigan mutaxassislar bo'lib yetishishi uchun jahon standartlari darajasida bilim berish, fanlarni chuqur o'rgatish, fanning ishlab chiqarish bilan aloqasini mustahkamlash bugungi kunning muhim vazifalaridan biridir. Shuning uchun bu bitiruv malakaviy ishimda o'quvchi yoshlarning faol matematik tushunchalarini rivojlantirish, mustaqil fikrlash jarayonini o'stirish uslubiyotini ishlab chiqishga harakat qildim.

Keyingi paytlarda respublikamiz hukumati tomonidan akademik litsey va kasb-hunar kollejlariga katta e'tibor qaratilmoqda. Unda o'quvchi yoshlarning bilim darajasini yanada yuksaltirish, ularning fan olimpiadalarida faol ishtirokini ta'minlash va sovrinli o'rinlarni egallashlariga imkon darajasida yordam berish,

jahon miqyosidagi ilmiy salohiyati yuqori yoshlar qatoridan joy egallashlariga ko'maklashish masalalarini eng asosiy va dolzarb masalalardandir. Ularning moddiy texnika bazasi kuchaytirish, o'qituvchilarning ilmiy va uslubiy salohiyati yuksaltirish orqali yuqori malakali, xalqaro standartlar talablariga javob bera oladigan kadrlar tayyorlash, talabalarga yangi pedagogik va ta'lim texnologiyalaridan foydalanib zamonaviy bilim berish, shu maqsadda o'qituvchilarning malakasini oshirish va qayta tayyorlash, ularni eng so'nggi zamonaviy bilimlar bilan qurollantirish masalasi dolzarb bo'lib turibdi.

Tadqiqot ob'ekti va predmeti:maktab, Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'quvchilari va oliy o'quv yurtlari talabalari o'rtasida yillar davomida bo'lib o'tgan olimpiada masalalari, misollari va testlaridan iborat.

Shuni ta'kidlab o'tish joizki, mustaqil O'zbekiston Respublikasining kelajagi yoshlar qo'lida ekan, bizlar "Mustaqillik bizga nima berdi?" deb emas, balki "Biz mustaqillikka nima berdik?" degan savol bilan o'zimizga murojaat qilgan holda yashashimiz kerak, albatta. Biz yurtimiz va uning kelajagi uchun faqatgina o'zimizning intilishimiz, shijoatimiz, kuchli bilimimiz, bukilmas irodamiz, bilagimizdagi kuchimiz va ularni o'z o'rnida qo'llay olish yo'li orqali yuqori natijalarga erishib, o'zimizning natijalarimiz bilan butun dunyoni lol qoldirib ilmfan, texnika-texnologiya, axborot-kommunikatsiya, sport va sog'lomlashtirish sohalaridagi o'zimizning yutuqlarimiz bilan bevosita va bilvosita yordam bera olamiz.

Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi va vazifalari:

1.Turli yillardagi olimpiada masalalari va testlarini yig'ish va olimpiadalarda foydalanilishi mumkin bo'lgan testlar, misollar va masalalarni to'plash.

2. To'plangan testlar va masalalardan keyingi olimpiadalarda qatnashish istagida yurgan o'quvchi va talaba yoshlarni olimpiadalarga kuchli tayyorgarlik

ko'rishlari uchun hamda ularni tayyorlashda o'qituvchilar uchun qaysidir ma'noda qo'llanma sifatida foydalansa bo'ladigan masalalar, misollar va testlar jamlanmasini imkon qadar yaratish.

3.Olimpiada ishtirokchilariga ushbu bitiruv malakaviy ish vositasida sharaflari o'rinlarni egallashlariga yordam berish.

Tadqiqot usuli va uslubiyoti: matematika fanining asosiy bo'limlari algebra, matematik analiz va geometriya usullaridan foydalanildi.

Olingan asosiy natijalar: Olimpiada masalalari, misollari va testlari, ularning qiyinlik darajasi, nozik va murakkab tomonlarini o'rgandik hamda testlar yechishda o'quvchi xatolikka yo'l qo'yishi mumkin bo'lgan nuqtalari ko'rsatilgan.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati:bu bitiruv malakaviy ishi metodik xarakterga ega bo'lib hisoblanadi. BMTning amaliy ahamiyati olimpiadalarning qay darajada keng qamrovli ekanligi va ularda foydalaniladigan masala va misollarning mukammallik darajalari ko'rsatilgan.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi.Qo'llanish sohasi. Xulosa va takliflar.Olingan natija matematika fan olimpiadalarida qatnashish istagida bo'lgan o'quvchi va talaba yoshlar uchun muhim qo'llanma sifatida qo'llinishi mumkin. Nafaqat olimpiada masalalarini balki murakkablik darajasi ancha yuqori bo'lgan bir qancha masalalarni yechishda amaliy asos sifatida foydalanish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishida Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari va maktablar fan olimpiadalarida foydalanilgan va foydalaniladigan masalalar va misollar imkon qadar o'rganildi. Ularni yechishda nazariy asos vazifasini o'tovchi ta'rif va teoremlar o'rganilib chiqildi. Noziklik va murakkablik darajasiga qarab masalalar va testlar saralab olindi va shunga o'xshash bir nechta masalalar va bir qancha testlar o'quvchi va talaba yoshlarga mustaqil yechish uchun keltirilgan.

Yangidan tuzilgan masalalar esa bitiruv malakaviy ishining asosiy qismini kengaytirishga yordam berdi.

Bitiruv malakaviy ishning hajmi va tuzilishi: BMI kirish, ikki bob, beshta paragraf, ikki bobning xulosasi,xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I BOB. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'quvchilari orasida o'tkaziladigan olimpiada testlari

1.1.Olimpiada tarixi.

Yunonistonning eng baland tog'lari tizmasi Olimp deb ataladi. Tizmadagi eng baland cho'qqi 2917 metrgacha boradi. Qadimgi yunon mifologiyasida Olimp Zevs(xudolar otasi) boshchiligidagi xudolarning makoni hisoblangan. Shu yerda joylashgan Olimpiya shahrida eramizdan avvalgi 776-yildan boshlab har 4 yilda Zevs sharafiga Umumyunon tantanalari va musobaqalari o'tkazib turilgan va olimpiada o'yinlari deb nomlangan. Eramizning 394-yiligacha davom etgan bu an'ana, 1896-yildan boshlab har 4 yilda o'tkaziladigan umumjahon sport musobaqalari ham olimpiada o'yinlari deb atala boshlangan.

Matematik turnirlar va musobaqalar uzoq yillik tarixga ega. Masalan, kub tenglamalarni yechish uchun Tartalya-Kardano formulasi kashf etilishi tarixi shunday turnirlar bilan bog'liq.

Maktab o'quvchilari musobaqalarini muntazam o'tkazib turishda birinchilik, Vengriyaga tegishli, bu yerda matematik olimpiadalar 1894-yildan " Vestnik opitnoy fiziki i elementarnoy matematiki " jurnali chiqa boshlagan, unda o'quvchilarga va boshqa jurnalxonlarga " konkurs " uchun matematik masalalar taklif qilingan. Ular sirtqi olimpiadalar edi, deyish mumkin.

Masalalar yechishni, musobaqalashishni yaxshi ko'radigan, ammo zamonaviy matematika cho'qqilarini hali zabt eta olmaydigan nima qilishlari kerak?

Ular uchun matematik olimlar, oliy o'quv yurtining o'qituvchilari va talabalari har yili yangi masalalar o'ylab topishadi va olimpiadalarga taklif etishadi.

Matematika bo'yicha birinchi shahar olimpiadalari bundan bir necha yil ilgari, 1934-yilda Leningrad va Tbilisida bo'lib o'tgan. Ularni o'tkazishning tashabbuskorlaridan biri ajoyib geometr B. N. Delone edi. 1935-yil Moskvada

matematika olimpiadasi bo'lib o'tdi. Birinchi Moskva matematika olimpiadasi tashkiliy komitetning raisi, akademik P. S. Aleksandrov bo'ldi, tashkiliy kamitet a'zolari MDU ning matematik professorlari edilar.

Birinchi olimpiadalarda ularni o'tkazish an'analarga asos solindi. Matematik olimpiadalar turli avlod matematiklar, o'quvchilar, yaqindagina olimpiada qatnashchilari bo'lgan studentlar, to'garak rahbarlari, muallimlar va yosh olimlar, oliy o'quv yurtlarining o'qituvchilari va professorlarining birgalikdagi bayrami bo'lib qoldi. Olimpiadadan ancha avval hayot a'zolari masalalarni to'play va o'ylay boshlaydilar. Odatda olimpiadada uning qatnashchilariga 3–5 soatda yechish uchun mazmuni va qulaylik darajasi turlicha 3–5 masala taklif etiladi, bu masalalar maktab dasturidagi materiallarni bilishdan ham ko'proq fikrlashning qulay yo'lini topishdagi mahorat, odatdan tashqari holatda mantiqan aniq mulohazalar yuritish qobiliyatini talab qiladi. Ishlar tekshirib bo'lingach, masalalar muhokama qilinadi, eng yaxshi yechimlar va xarakterli xatolar tahlil etiladi. Bu jarayon, odatda, ma'ruza tarzida o'tadi. Har bir qatnashchi o'z ishini hayot a'zolari bilan muhokama qilishi, o'zi yo'l qo'ygan kamchiliklarni aniqlashtirib olishi mumkin. Olimpiada mukofot va yorliqlarni topshirish bilan yakunlanadi.

Olimpiadaning asosiy maqsadi birgina g'oliblarni aniqlash bo'lib qolmay, balki barcha qatnashchilarni masalalar bilan qiziqtirish qatnashchilarni matematik to'garaklar mashg'ulotlariga muntazam qatnashishga, ma'ruzalar eshitishga, kitob bilan mustaqil ishlashga jalb qilishdir.

O'tgan yillar davomida matematik olimpiadalar geografiyasi nihoyatda kengaydi, uning qatnashchilari soni beqiyos ortib bordi. Olimpiadalar boshqa mamlakatlarda ham o'tkazila boshlandi. Mazkur olimpiadalar Butun ittifoq olimpiadalari deb nomlana boshlandi. Butun ittifoq olimpiadasi beshta bosqichdan iborat:

Birinchi bosqich—maktabda bo'lib o'tadigan matematik musobaqalar;

Ikkinchi bosqich—tuman va shahar olimpiadalari;

Uchinchi bosqich–viloyat olimpiadalari;

To'rtinchi bosqich–Respublika olimpiadalari: Moskva va Leningrad(hozirgi Sankt Peterburg) shaharlaridagi olimpiadalar;

Beshinchi(yakunlovchi) bosqich-Butun ittifoq olimpiadasi.

Maktab va nohiya yoki shahar olimpiadalarida hamma xoxlovchilar qatnashishi mumkin bo'lsa, keying bosqichlar uchun avvalgi bosqichlardagi g'oliblardan guruhlar tuzuladi.

Respublika olimpiadalarida “Kvant“ jurnali o'tkazadigan sirtqi musobaqaning bir necha g'oliblari, ba'zi maxsus fizika-matematika maktab internatlarining guruhlari ishtirok etishgan.

Matematika “olimpiya shohsupasi“ning eng yuqori pog'onasiga chiqishga ozchilikgina muvaffaq bo'la olishi barchaga ma'lum albatta. Bu muvaffaqiyat nafaqat alohida qobiliyatdan, balki ham tirishqoqlik, ham yangi masalaga tezda kirisha olish, fikrini sozlay olishdan dalolatdir. Olimpiadaning hamma chempionlari ham kelgusida yirik matematik bo'lishmagan, ammo, ham bizning matematikada, ham chet ellarda mashhur bo'lgan qator olimlarni sanash mumkin-ki, ularning fan yo'lidagi birinchi qadamlari olimpiada mukofotlari bilan yo'g'rilgan. Ular orasida turli avlodga mansub bo'lgan uch matematik: B.U.Arnold, Yu.U.Matichevskiy, B.M.Xarlamov bor. Ularning har biri XIX–XX asr bo'sag'asida qo'yilgan “Gilbert muammolari“dan birini yechish bilan shuhrat qozongan edi.

Oradan yillar o'tib, zamon rivojlandi, ta'lim sohasida turli o'zgarishlar yuz berdi. Shu o'zgarish va rivojlanishlar bilan bir qatorda, olimpiadalar va ularni o'tkazish tartibida ham sezilarli o'zgarishlar yuz berdi. Jannatmakon, kelajagi buyuk yurtimiz mustaqillikka erishgach bizdagi ta'lim sohasida ham tub islohotlar o'tkazildi va O'zbekistonda uzluksiz ta'lim tizimi quyidagi bosqichlarda olib boriladigan bo'ldi:

-maktabgacha ta'lim;

- umumiy o'rta ta'lim;
- o'rta maxsus ta'lim;
- kasb-hunar ta'limi;
- oliy ta'lim;
- oliydan keying ta'lim;
- kadrlar malakasini noshirish va qayta tayyorlash;
- maktabdan tashqari ta'lim.

Ta'limni rivojlantirish ishlari ham mazkur tartib asosida bosqichma–bosqich amalga oshirish ko'zda tutilgan va guvohi bo'layotganimizdek, xuddi shunday qilinmoqda ham.

Mustaqillikdan so'ng asrimiz texnika–texnologiyalar asri bo'lganligi, axborot kommunikatsiya sohasidagi rivojlanishning yuqori darajada ekanligini e'tibordan chetda qoldirmagan holda maktablar, Akademik litseylar va kasb hunar kollejlari, oliy o'quv yurtlarini kompyuterlashtirish va kompyuter savodxonligini oshirish masalalariga e'tibor qaratilmoqda. Qolaversa, internetda ishlash, jahonda yuz berayotgan ilm–fan sohasidagi yangiliklar bilan tanishish, turli olimlarning turli sohasidagi ilmiy izlanishlari va yutuqlari bilan tanishib chiqish imkoniyatlarini kengaytirish masalasiga ham urg'u berilmoqda.

Olimpiadalar va ularni o'tkazish tartibidagi o'zgarishlar haqida to'xtalib o'tadigan bo'lsak, avvallari matematika fanidan olimpiadalar yozma ish tarzida o'tkaziladigan bo'lsa, hozirgi kunda ikki bosqichda o'tkaziladigan bo'ldi. Birinchi bosqich yozma ish tarzida, ikkinchi bosqich test tarzida o'tkaziladi.

Yozma ishda olimpiada ishtirokchilariga ikki variantdagi 5 ta masaladan tuzilgan bilet beriladi. Misol va masalalarning uchitasi algebra ikkitasi esa geometriya fanidan bo'ladi. Ularni yechish uchun ma'lum vaqt ajratiladi.

Test sinovida esa ishtirokchilarga qiyinlik darajasi yozma ishdagiga nisbatan ancha oson, ammo chalkashtiruvchi, nozik tomonlari mavjud bo'lgan 30 ta test

savoli va variantlarga ega bo'lmagan 10 ta misol beriladi. Bu testlarni yechib kalitlarni tayyorlash uchun vaqt ajratiladi.

Qatnashchilar matematik savodxonligi, topqirligi va zukkoligi, sinchkovligi, masalalar yechishdagi mantiqiy fikr yuritish qobiliyatini inobatga olgan holda baholanadilar va keying bosqichlarga imkoniyatni qo'lga kiritadilar.

Olimpiadalar birinchi navbatda maktab ichida o'quvchilar orasida " Bilimlar sinovi" bo'lib o'tadi. Ikkinchi, tuman yoki shahar olimpiadalari, uchinchi, viloyat olimpiadalari, to'rtinchi, respublika olimpiadasi, beshinchi, jahon olimpiadasi. Olimpiadada yutganlar mukofotlar, faxriy yorliqlar, turli o'quv muassasalariga yo'llanmalar bilan taqdirlanadilar.

Olimpiada ishtirokchilarini muntazam tayyorlab borish, ularni olimpiada masala va misollari bilan tanishtirib turish va savodxonliklarini yanada oshirish uchun maxsus adabiyotlar, misol va masalalar to'plamlari mavjud.

Olimpiada keng qamrovli bo'lganligi va hozirda uning ahamiyati juda katta bo'lganligi sababli men o'zimning bitiruv malakaviy ishimni " Akademik litsey va kasb-hunar kollej o'quvchilar orasida o'tkaziladigan olimpiada testlari va masalalari" mavzusida olib borishga qaror qildim.

Adabiyotlar ro'yxatida keltirilgan adabiyotlarni topib, ulardan o'zimizni qiziqtirgan va hozirda barcha matematiklar e'tiborini torta oladigan, kelajakda olimpiadalarda ishtirok etib, sovrinli o'rinlarni egallash va ilm cho'qqilarini zabt etish istagida yurgan maktab, Akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'quvchilari diqqatini tortib ular uchun zaruriy qo'llanma vazifasini bajara oladigan masalalarni va testlarni yig'ib, ularni o'qituvchilar olimpiada ishtirokchilarini tayyorlab, ularni dunyoqarashini, matematika faniga bo'lgan qiziqishlarini orttirish uchun xizmat qiladigan to'plam sifatida B. M. I ni yoritib berishga harakat qildim. Va rahbarim bilan birgalikda B. M. I ni " Olimpiada testlari " va " Olimpiada masalalari " deb nomlangan ikki bobda tashkil qilish fikri bizga ma'qul keldi.

Avvaliga, matematika fanidan olimpiada testlarini yig'dim. Yig'ish jarayonida bir necha yillar davomida olimpiadalarda olinib kelingan testlardan samarali foydalandim. Yig'ilgan testlarni imkon qadar ko'rib chiqib, ularni yechib javob variantlarini topishga harakat qildim. Bir nechta testlarni yechimlari bilan, so'ngra esa mustaqil yechish uchun testlarni keltirdim. Bu bobning oxirini o'zimiz tuzgan testlarni kiritish bilan yakunlashga qaror qildim.

Xuddi shunday, olimpiada masalalarini yechimlari bilan yig'ib, ularni saralab, bir nechtasini keltirib o'ttim. Undan so'ng olimpiadaga tayyorgarlik ko'radigan o'quvchilarga musataqil yechish uchun bir qancha masalalarni keltirdim. Bitiruv malakaviy ishimni tayyorlash jarayonida yechimsiz keltirilgan masalalarni yechishga va shularga o'xshagan masalalarni tuzib ko'rish maqsadi bizda paydo bo'ldi va tuzilgan masalalarni bir nechtasini keltirdim.

O'ylaymanki, mening bitiruv malakaviy ishim barcha matematika faniga qiziquvchi yoshlar uchun qo'llanma bo'la oladi va xizmat qiladi. O'z fikrlarimni isboti sifatida olimpiada testlari va masalalaridan ba'zi namunalar keltiraman.

1.2.Olimpiada testlari va ularning yechimlari

1.2.1. $4^x = 125$, $8^y = 5$ bo'lsa, $\frac{2x-y}{y}$ ni toping?

A) 8 **B)** -6 **C)** 1 **D)** 6

Yechish: $4^x = 125$

$$x = \log_4 125 = \frac{3}{2} \log_2 5$$

$$8^y = 5$$

$$y = \log_8 5 = \frac{1}{3} \log_2 5$$

$$\frac{2x-y}{y} = \frac{2x}{y} - 1 = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \log_2 5}{\frac{1}{3} \log_2 5} - 1 = 9 - 1 = 8.$$

1.2.2. Hisoblang? $\frac{10^{n+1} - 10^{n-1}}{10^{n+1} + 10^n}$

A) $\frac{99}{100}$ B) $\frac{9}{100}$ C) $\frac{11}{9}$ **D)** $\frac{9}{10}$

Yechish: $\frac{10^{n+1} - 10^{n-1}}{10^{n+1} + 10^n} = \frac{10^{n-1}(10^2 - 1)}{10^n(10 + 1)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{99}{11} = \frac{9}{10}$

1.2.3. Natural m va n sonlar uchun $\frac{m}{4} + n = 8$ bo'lsa, m qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ichida eng kattasini toping?

A) 16 B) 20 C) 24 **D)** 28

Yechish: m eng katta qiymatni qabul qilishi uchun n eng kichik natural qiymatni qabul qilishi kerak. $\frac{m}{4} + 1 = 8$, $\frac{m}{4} = 7$, $m = 28$

1.2.4. $133^2 - 129^2 = 2x$ bo'lsa, x ni toping?

A) 131 B) 262 C) 346 **D)** 524

Yechish: $133^2 - 129^2 = (133 - 129)(133 + 129) = 4 \cdot 262 = 2x$; $x = 524$

1.2.5. $x^2 + px + 6 = 0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvadrati 40 ga teng. p ning qiymatini toping?

A) -8;8 B) 8 C) -8 D) 4

Yechish: $x^2 + px + 6 = 0$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6$$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 40$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = p^2$$

$$x_1 + x_2 = p^2 - 12$$

$$p^2 - 12 - 12 = 40$$

$$p^2 = 64$$

$$p = \pm 8$$

1.2.6. Agar $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{15-x^2} = 2$ bo'lsa, $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2}$ yig'indi nimaga teng?

A) -5 **B)** 3 **C)** 5 **D)** $\frac{2}{3}$

Yechish: $\sqrt{25-x^2} = 2 + \sqrt{15-x^2}$

$$25 - x^2 = 4 + 4\sqrt{15-x^2} + 15 - x^2$$

$$6 = 4\sqrt{15-x^2}$$

$$3 = 2\sqrt{15-x^2}$$

$$9 = 4(15-x^2)$$

$$\frac{9}{4} = 15 - x^2 \quad x^2 = 15 - \frac{9}{4} \quad x^2 = \frac{51}{4}$$

$$\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2} = \sqrt{25-\frac{51}{4}} + \sqrt{15-\frac{51}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

1.2.7. Berilgan to'rtta sonning har biri uchni qo'shib, so'ngra ularning har birini ikkiga ko'paytirib chiqqach, hosil bo'lgan sonlar yig'indisi 70 ga teng bo'lgan. Berilgan sonlar yig'indisi nechaga teng?

- A) 18 B) 19 C) 23 D) 21

Yechish: x, y, z, k

$$2(x+3) + 2(y+3) + 2(z+3) + 2(k+3) = 70$$

$$x + y + z + k + 12 = 35$$

$$x + y + z + k = 23$$

1.2.8. $\sqrt{9-x}(x^2 - 21x + 110) = 0$ tenglamaning ildizi nechta?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

Yechish: $\sqrt{9-x} = 0$ $9-x = 0$ $x = 9$

$$x^2 - 21x + 110 = 0$$

$$D = 441 - 440 = 1$$

$$x_1 = 11 \quad x_2 = 10$$

1.2.9. $tg \alpha = 8$ bo'lsa, $\frac{-7 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}{-6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$ ni hisoblang?

- A) $-\frac{71}{34}$ B) $\frac{71}{.34}$ C) $-\frac{34}{71}$ D) $\frac{34}{71}$

Yechish: $\frac{-7 \sin \alpha - 8 \cos \alpha}{-6 \sin \alpha + 5 \cos \alpha} = \frac{-7 - 8tg \alpha}{-6 + 5ctg \alpha} = \frac{-7 - 8 \cdot 8}{-6 + 5 \cdot 8} = -\frac{71}{34}$

1.2.10. Romb dioganallarining tomonlari bilan hosil qilgan burchaklari kattaliklarining nisbati $2:7$ gat eng. Rombning kichik burchaklarini toping?

A) 40^0 B) 20^0 C) 30^0 D) 60^0

Yechish: $2x + 7x = 90^0$

$$9x = 90^0$$

$$x = 10^0$$

$$\alpha = 20^0$$

$$2\alpha = 40^0$$

1.2.11. O'tkir burchakli uchburchakning ikki tomoni 5 sm va 6 sm . Agar uchburchakning yuzi 12 sm^2 bo'lsa, u holda uchburchakning uchinchi tomonini toping?

A) 4,5 B) 3 C) 5 D) 4

Yechish: $12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} = 25$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5$$

1.2.12. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga parallel o'rta chizig'i uni perimetrlari 6 va 11 sonlariga proporsional bo'lgan ikkita ko'pburchakka ajratadi. Katetlari nisbatini toping?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{4}$

Yechish: $\frac{a+b+c}{2} = 6x$ $\frac{a+b+c}{2} + c = 11x$ $6x + c = 11x$

$c = 5x$ $a : b = 3 : 4$

1.2.13. Parallelogrammning o'tkir burchagini sinusi $\frac{3}{5}$ gat eng. Shu parallelogrammni o'tmas burchagi kosinusini toping?

A) 2 B) $\pm \frac{4}{5}$ C) $-\frac{4}{5}$ D) -2

Yechish: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

1.2.14. Agar $\sqrt{5} = a$ bo'lsa $\sqrt{9,8}$ ni toping?

A) $2a$ B) $7a$ C) $\frac{7}{a}$ D) $\frac{2}{a}$

Yechish: $\sqrt{9,8} = \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{5}} = \frac{7}{a}$

1.2.15. $4x^2 - 9x + a = 0$ tenglamaning ildizlari ko'paytmasi eng katta bo'lishi uchun a qanday bo'lishi kerak.

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{81}{16}$ C) $\frac{81}{4}$ D) $\frac{48}{81}$

Yechish: $x_1 = x_2$

$D = 0$

$D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot a = 0$

$16a = 81$

$$a = \frac{81}{16}$$

1.2.16. Agar 20^x ni 20 % i $2^6 \cdot 5^a$ bo'lsa, a ni toping?

- A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5

Yechish: Agar $20^x \leftrightarrow 100$
 $2^6 \cdot 5^a \leftrightarrow 20$

$$2^6 \cdot 5^a \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 2^{2x} \cdot 5^x$$

$$2^8 \cdot 5^{a+2} = 2^{2(1+x)} \cdot 5^{x+1}$$

$$2 + 2x = 8$$

$$x = 3$$

$$a + 2 = 4$$

$$a = 2$$

1.2.17. Agar $a > 0, b > 0, c > 0$ bo'lsa, $\frac{a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}}{\sqrt{abc}}$ ifodani

soddalashtiring?

- A)** $\sqrt{a+b+c}$ **B)** $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$ **C)** $\sqrt{abc}$ **D)** $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Yechish: $\frac{\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{\sqrt{abc}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

1.2.18. Agar $m + \frac{6}{n} = 11$ va $m - \frac{6}{n} = 5$ bo'lsa, n ni toping?

- A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6

Yechish: $m + \frac{6}{n} = 11$

$$m - \frac{6}{n} = 5$$

$$\frac{12}{n} = 6$$

$$n = 2$$

1.2.19. a, b va c manfiy sonlar bo'lib, $ab = \frac{5}{4}$, $bc = \frac{6}{5}$, $ca = \frac{7}{6}$ bo'lsa, ularni o'sish tartibida joylashtiring?

A) $a < b < c$ **B)** $a < c < b$ **C)** $c < a < b$ **D)** $c < b < a$

1.2.20. $\sin x + \cos x = 2a$ bo'lsa, u holda $\sin 2x$ ni toping?

A) $2a^2 - 1$ **B)** $2a^2 + 1$ **C)** $4a^2 - 1$ **D)** $4a^2 + 1$

Yechish: $(\sin x + \cos x)^2 = 4a^2$

$$1 + 2\sin x \cos x = 4a^2 \quad \sin 2x = 4a^2 - 1$$

1.2.21. Onaning yoshi qiznikidan uch marta katta. O'n yildan keyin qiznikidan ikki marta katta bo'ladi. Onaning yoshi o'n yildan keyingi yoshini toping?

A) 25 **B)** 30 **C)** 35 **D)** 40

Yechish: Ona $3x$

Qiz x

$$3x + 10 = 2(x + 10)$$

$$x = 10$$

1.2.22. $\begin{cases} -\frac{a}{5} = \frac{4}{b} = c \\ a+b+c=0 \end{cases}$ bo'lsa, c^2 ni toping?

- A) 1 B) 0 C) $-\frac{5}{4}$ D) $\sqrt{2}$

Yechish: $-5c + \frac{4}{c} + c = 0$

$$-5c^2 + 4 + c^2 = 0$$

$$4c^2 = 4$$

$$c^2 = 1$$

1.2.23. Agar $0 \leq m \leq 6$ va $3 \leq n \leq 9$ bo'lsa, $\frac{m-n}{m+n}$ ning eng kichik qiymatini toping?

- A) -3 B) -1 C) $-\frac{1}{4}$ D) 0

1.2.24. Arifmetik progressiyada $a_1 = 4$, $a_2 = 7$ bo'lsa a_9 ni toping?

- A) 22 B) 24 C) 25 D) 28

Yechish: $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

$$a_9 = a_1 + 8d = 4 + 8 \cdot 3 = 28$$

1.2.25. a ning qanday qiymatlarida $\begin{cases} 3|x| + y = 2 \\ |x| + 2y = a \end{cases}$ yagona yechimga ega.

- A) 0 B) 4 C) 2 D) -2

Yechish: $|x|$ bo'lgani sababli $x > 0$, $x < 0$ qiymatlarni qabul qiladi. Yagona yechim so'ralyapti shu sababli $x = 0$ deb olsak $a = 4$

1.2.26.150 dan katta bo'lmagan 7 ga karrali barcha natural sonlarning yig'indisini toping?

- A) 1228 B) 1617 C) 1423 D) 1512

Yechish: $a_1 = 7, a_2 = 14, \dots, a_n = 147$

$$d = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$147 = 7 + 7n - 7$$

$$7n = 147$$

$$n = 21$$

$$S_{21} = \frac{2a_1 + 20 \cdot d}{2} \cdot 21 = (7 + 70) \cdot 21 = 77 \cdot 21 = 1617$$

1.2.27. α birinchi chorak burchagi bo'lib, $\sin \alpha = \frac{20}{29}$ ekanligi ma'lum bo'lsa,

$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ ni toping?

- A) $-\frac{400}{841}$ B) $\frac{400}{841}$ C) $-\frac{400}{441}$ D) $\frac{400}{441}$

$$\textbf{Yechish: } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{400}{841}}{1 - \frac{400}{841}} = \frac{400}{441}$$

1.2.28. Uchburchakning o'rta chizig'i 5 sm, balandligi 4 sm. Uchburchakning yuzasini toping?

- A) 15 B) 20 C) 25 D) 30

Yechish: $a = 2l = 2 \cdot 5 = 10$

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$$

1.2.29. x, y, z sonlar ko'rsatilgan tartibda geometrik progressiyani, $x+y, y+z, z+x$ -sonlari esa arifmetik progressiyani tashkil qilsa, geometrik progressiyaning maxrajini toping.

A) -3; 1

B) -2; 1

C) 2,3

D) -2; -1

Yechish: $y^2 = x \cdot z$ $z = \frac{y^2}{x}$ $\frac{y}{x} = q = ?$

$$x + y = a$$

$$x + z = a + d$$

$$y + x = a + 2d$$

$$2(y + z) = x + y + z + x$$

$$2y + 2z = 2x + y + z$$

$$y + z = 2x$$

$$y + \frac{y^2}{x} = 2x$$

$$xy + y^2 = 2x^2$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 2 = 0$$

$$\frac{y}{x} = 1 \quad \frac{y}{x} = -2$$

1.2.30. Agar $a = \frac{59}{66} + \frac{71}{77} + \frac{81}{88} + \frac{92}{99}$ bo'lsa, $\frac{7}{66} + \frac{6}{77} + \frac{7}{88} + \frac{7}{99} = ?$

- A) $7a-6$ B) $a-4$ C) $4-a$ D) $6a-7$

Yechish: $\frac{7}{66} + \frac{6}{77} + \frac{7}{88} + \frac{7}{99} = \frac{66}{66} - \frac{59}{66} + \frac{77}{77} - \frac{71}{77} + \frac{88}{88} - \frac{81}{88} + \frac{99}{99} - \frac{92}{99} = 4 - a$

1.2.31. $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}; \operatorname{tg}^2 2\alpha = ?$

- A) $\frac{112}{9}$ B) $\frac{112}{11}$ C) $\frac{26}{11}$ D) $\frac{114}{11}$

Yechish: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{11}} = \sqrt{\frac{7}{11}}$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{7}}{11}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{3}{11}$$

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{16 \cdot \frac{7}{121}}{\frac{9}{121}} = \frac{112}{9}$$

1.2.32. $|\bar{a}| = 4, |\bar{b}| = 8$ va $|\bar{a} - \bar{b}| = 10$ bo'lsa, $|\bar{a} + \bar{b}|$ ning qiymatini toping.

- A) $\sqrt{26}$ B) $\sqrt{39}$ C) $2\sqrt{15}$ D) $2\sqrt{19}$

Yechish: $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 = 16 - 2ab + 64 = 100$

$$2ab = -20$$

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 = 80 - 20 = 60$$

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

1.2.33. Soddashtiring: $\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha$

A) $8 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ **B)** $2 \sin^2 2\alpha$ **C)** $8 \sin^2 \alpha$ **D)** $8 \cos^2 2\alpha$

Yechish:

$$\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 5\alpha = \cos \alpha - \frac{1}{2} (\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) = \cos \alpha - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 4\alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$\cos \alpha (1 - \cos 4\alpha) = \cos \alpha (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = \cos \alpha \sin^2 2\alpha =$$

$$= 2 \cos \alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 8 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

1.2.34. Agar $\lg 2 = m$, $\lg 5 = n$, $\lg 1400 = p$ bo'lsa, $\lg 7$ ni hisoblang.

A) $p + 3m + 2n$ **B)** $p - 3m - 2n$ **C)** $p - 2m - 3n$ **D)** $p + 2m + 3n$

Yechish: $\lg 1400 = \lg 7 \cdot 200 = \lg 7 + \lg 200 = p$

$$\lg 7 = p - \lg 200 = p - \lg 8 \cdot 25 = p - \lg 2^3 + \lg 5^2 = p - 3m + 2n$$

1.2.35. Uzunliklari $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ bo'lsa, $|\vec{c}| = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.

A) $\sqrt{217}$ **B)** 12 **C)** $\sqrt{221}$ **D)** 13

Yechish: $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos \varphi$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{12} = \frac{1}{2} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 217$$

$$|\vec{c}|^2 = 217, \quad |\vec{c}| = \sqrt{217}$$

1.3.MUSTAQIL YECHISH UCHUN TESTLAR.

1.3.1. BE kesma ABC uchburchakni o'xshashlik koeffitsienti $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan ikkita o'xshash uchburchaklarga ajratsa, B burchakni toping.

- A) 60° B) 30° C) 90° D) 45°

1.3.2. $ABCD$ parallelogrammning A o'tkir burchagidan BC va CD tomonlarga mos ravishda AH_1 va AH_2 perpendikulyarlar o'tkazilgan. Agar $\angle H_1AH_2 = 130^\circ$ bo'lsa, A burchakni toping.

- A) 40° B) 45° C) 50° D) 55°

1.3.3. $\sin x = \frac{x}{100}$ tenglamaning nechta haqiqiy ildizi bor?

- A) 63 B) 57 C) 48 D) 43

1.3.4. $a = 3^{100} + 4^{100}$ va $b = 5^{100}$ sonlari orasidagi munosabatni aniqlang.

- A) $a = b + 2^{100}$ B) $a < b$ C) $a > b$ D) $a \geq b + 1$

1.3.5. Tomoni a ga eng bo'lgan $ABCD$ kvadrat berilgan. BC va CD tomonlarda M va N nuqtalar mos ravishda shunday olinganki, bunda AMN uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusini toping.

- A) $\frac{3a}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{3a}{2(2+\sqrt{13})}$ C) $\frac{3a}{2(5+\sqrt{13})}$ D) $\frac{3a}{2(5-\sqrt{13})}$

1.3.6. $y = \frac{9}{\pi} \arccos \frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}$ funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

- A) $[0; 3)$ B) $[0; 1; 3)$ C) $[0; 3]$ D) $[0; 1)$

1.3.7. $x - 2 = \sqrt{2(b-1)x+1}$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladigan b ning barcha qiymatlarini toping.

- A) $b \in (0; +\infty)$ B) $b \in (1; +\infty)$ C) $b \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ D) $b \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

1.3.8. Hisoblang: $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

- A) 0 B) 1 C) -1 D) 3

1.3.9. Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1; 2]$ dan iborat bo'lsa, $y = f(2x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

- A) $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ B) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ C) $[0; 1]$ D) $[-1; 2]$

1.3.10. Hisoblang: $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$

- A) $\sin 7^\circ$ B) $\cos 7^\circ$ C) $\tan 7^\circ$ D) 0

1.3.11. Ushbu $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30$ tenglamani qanoatlantiruvchi (x, y, z) butun sonlar uchliklari nechta.

- A) 3 B) 4 C) 2 D) 0

1.3.12. a ni ng qanday qiymatlarida $2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$ tenglama to'rtta haqiqiy yechimga ega bo'ladi?

- A) $\left[0; \frac{1}{8}\right]$ B) $\left(0; \frac{1}{8}\right)$ C) $(1; 3)$ D) $[1; 3]$

1.3.13. Muntazam $ABCDEF$ oltiburchakning tomoni 6 ga teng. Oltiburchakning C uchidan AE diagonalgacha bo'lgan masofani toping.

- A) 8 B) 9 C) 12 D) 7

1.3.14. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi 2 ga teng bo'lsa, shu uchburchak medianalari kvadratlari yig'indisining eng katta qiymatini toping.

- A) 24 B) 4 C) 16 D) 27

1.3.15. $3^{32} + 2^{41} - 5$ sonini 11 ga bo'lgandagi qoldiqni toping.

- A) 6 B) 4 C) 2 D) 0

1.3.16. $y = -4 - \frac{1}{4 + 3^{\sin x}}$ funksiyaning maksimal qiymatini toping.

- A) $-\frac{55}{13}$ B) $-\frac{29}{7}$ C) $-\frac{21}{5}$ D) -1

1.3.17. $\sin b = -3t - 2, b \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bo'lgandan t -ning qiymatlarini toping.

A) $\left[-\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}\right]$ **B)** $\left[-\frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right]$ **C)** $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]$ **D)** $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

1.3.18. Arifmetik progressiyada $S_3 = 6, S_6 = -42$ bo'lsa, S_9 ni toping.

A)-288 **B)**-144 **C)**-171 **D)**-285

1.3.19. Parametr a ning qanday qiymatida $y = ax^2 + 3$ funksiya $(4; -5)$ nuqtadan o'tadi?

A) 0.5 **B)** 0.25 **C)** -0.5 **D)** 0.04

1.3.20. $4(0.1x + 1) - (-4)(1 - 2x) = 4$ tenglamani yeching.

A) $\frac{120}{76}$ **B)** $\frac{40}{76}$ **C)** $-\frac{120}{76}$ **D)** $\frac{40}{19}$

1.3.21. Qanday a lar uchun $\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{a-x} = 2a$ tenglama ildizlarga ega?

A) $a > 0$ **B)** $a = 0$ **C)** $a < 0$ **D)** $a \in R$

1.3.22. $3 - 2n - (5n - 26) > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar topilsin.

A) 1,2 **B)** 1,2,4 **C)** 1,2,3,4 **D)** 1,2,3

1.3.23. $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega

bo'ladigan a ning barcha qiymatlari yig'indisini toping.

A) 3 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 9.

1.3.24. $|x - 1| \leq -6$ tengsizlikni yeching.

A) $\emptyset$ **B)** $[1; \infty)$ **C)** $(-\infty; -6) \cup (6; \infty)$ **D)** $(-\infty; \infty)$

1.3.25. $3 - 2n - (5n - 26) > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar nechta?

A) $\emptyset$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

1.3.26. Ushbu $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})^3$ ko'phadning yoyilmasidagi x^{100} oldidagi koeffitsientni toping.

A) 5151 B) 3218 C) 3131 D) 1028

1.3.27. Agar $1 + \frac{20}{1 + \frac{20}{1 + \frac{20}{\vdots}}} = x$ bo'lsa, x ning qiymatini toping.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

1.3.28. x_1 va x_2 sonlar $x^2 - 11x - 15 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari bo'lsa, $\frac{x_1}{x_1 - 3x_2} + \frac{x_2}{x_2 - 3x_1}$ ifodani qiymatini toping.

A) $\frac{161}{169}$ B) $\frac{121}{169}$ C) $\frac{121}{225}$ D) $\frac{161}{201}$

1.3.29. Tomonlarining uzunliklari 39,65 va 52 bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ichki chizilgan aylana markazi orasidagi masofani toping.

A) $\frac{13}{2}\sqrt{5}$ B) $\frac{15}{2}\sqrt{5}$ C) 4 D) $\frac{\sqrt{845}}{3}$

1.3.30. $y = \log_{0,2} \frac{80}{13 + \log_5(125 + x^4)}$ funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.

A) $[-1; +\infty)$ B) $[0,1; +\infty)$ C) $[1; +\infty)$ D) $(-\infty; +\infty)$.

I bobning xulosasi

Bugungi kunda ta'lim sohasida test sinovlariga katta e'tibor qaratilmoqda. Shu sababli mening bitiruv malakaviy ishimning birinchi bobi Akademik litsey va kasb hunar kollejlari o'quvchilari orasida o'tkaziladigan olimpiadalarning ikkinchi bosqichida olinadigan testlarga bag'ishlangan bo'lib, ishni quyidagi tartibda boshlashimizdan asosiy maqsadimiz har bir ishda osondan qiyinga qarab boorish foydaliroq ekanligidadir. Biz bilamizki testlarning qiyinlik darajasi olimpiada masalalarining qiyinlik darajasiga nisbatan bir muncha past, ya'ni osonroqdir.

Ushbu bob uch qismdan iborat bo'lib, unda olimpiada tarixi, olimpiada testlari va ularning yechimlari va mustaqil yechish uchun masalalar o'rin olgan.

O'z bitiruv malakaviy ishimning birinchi bobini tayyorlash jarayonida mingga yaqin testlarni yig'dim va ularni imkon darajasida yechishga harakat qildim. Yig'ilgan testlarni yechimlari bilan keltirdim va olimpiadalarga tayyorgarlik ko'radigan yoshlarga mustaqil yechish uchun test savollaridan bir nechta keltirib o'ttim. Testlar orasida o'zimning tuzgan testlarimdan ba'zilarini keltirdim.

Birinchi bobning xulosasi sifatida shuni aytish mumkinki, test sinovlari o'quvchi va talaba yoshlarni tezkorlikka, fikrni avvalo jamlab olishga, so'ngra esa uni to'g'ri taqsimlay olishga xizmat qiluvchi bilimdonlik sinovlaridan biri bo'lib hisoblanadi. Har bir misol yoki masalani yechishning bir necha xil usuli mavjud bo'lib, matematik testlarni yechish va to'g'ri javobni tanlab lish paytida o'quvchilardan birinchi navbatda talab qilinadigan narsa bu albatta masala yoki misolni yechishning eng qulay va yechimga tez olib boradigan, kam vaqt sarflab qisqa vaqt ichida aniq javobga ega bo'lish talab etiladi. Shu sababli ham olimpiadalarda o'quvchilarga masalalar yechishga nisbatan testlar yechishga kam vaqt ajratiladi. Shunday ekan, o'quvchi va talaba yoshlarni nafaqat kuchli bilimli bo'lishga o'rgatish, balki tafakkurini kengaytirish va diqqatni to'g'ri taqsimlay olishga, sinchkovlikka va ziyraklikka, chaqqonlik va tezkorlikka o'rgatish kerak deb o'ylayman.

II BOB. Olimpiada masalalari

2.1. Olimpiada masalalari va ularning yechimlari.

2.1.1. $x_{n+1} = \lambda x_n + y_n$, $y_{n+1} = \lambda y_n - x_n$ $\lambda \neq 0$ bo'lsin, agar $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$

bo'lsa, u holda $x_n^2 + y_n^2 \rightarrow \infty$ ekanligini isbotlang.

$$\text{Isbot: } \begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n + y_n \\ y_{n+1} = \lambda y_n - x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1}^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + y_n^2 \\ y_{n+1}^2 = \lambda^2 y_n^2 - 2\lambda x_n y_n + x_n^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \lambda^2 (x_n^2 + y_n^2) + x_n^2 + y_n^2$$

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (x_n^2 + y_n^2)(\lambda^2 + 1)$$

bu yerdan

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 > x_n^2 + y_n^2 \text{ ekanligi ko'rinadi.}$$

Aytaylik, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n^2 + y_n^2) = a$ bo'lsin. U holda .

$a = a(\lambda^2 + 1)$; $\lambda^2 + 1 = 1$; $\lambda = 0$ bo'lar edi. Lekin bu $\lambda \neq 0$ shartga zid. Demak,

$$x_n^2 + y_n^2 \rightarrow \infty.$$

2.1.2. Tekislikda qizil rangli $A_1, A_2, \dots, A_n$ va ko'k rangli $B_1, B_2, \dots, B_n$ nuqtalar berilgan. Ixtoyoriy ikkita ko'k rangli nuqta orasidagi masofa d sonidan kichik emas, bunda $d > 0$ $A_i B_j < \frac{1}{3}d$ shartni qanoatlantiruvchi A_i va B_j kesmalar soni n dan katta emasligini isbotlang.

Isbot. $A_i B_j < \frac{1}{3}d$ shartni qanoatlantiruvchi A_i qizil rangli nuqtalar soni 1 tadan ko'p emas.

Aytaylik, $A_i B_j < \frac{1}{3}d$, $A_i B_n < \frac{1}{3}d$ bo'lsin. U holda $A_i B_j + A_i B_n < \frac{2}{3}d$

bo'ladi. A_i, B_j, B_n nuqtalar tekislikda uchburchak tashkil qiladi.

$A_i B_j + A_i B_n > B_j B_n$. Demak,

$$B_j B_n < \frac{2}{3} d < d.$$

Ammo bu shartga zid. Chunki istalgan ikkita ko'k rangli nuqta orasidagi masofa d dan kichik emas. Demak,

$A_i B_j < \frac{1}{3} d$ shartni qanoatlantiruvchi A_i nuqta ko'pi bilan bitta, ammo,

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ bo'lishi mumkin. Bundan esa, masala sharti kelib chiqadi.

2.1.3. Tenglamani yeching: $x = \{x\} \cdot [x]$.

Yechish: $x = \{x\} + [x]$

$$\{x\} + [x] = \{x\} \cdot [x]$$

$$[x] = \{x\} \cdot [x] - \{x\} \quad \{x\} = [x] \cdot \{x\} - [x]$$

$$[x] = \{x\} \cdot ([x] - 1) \quad \{x\} = [x] \cdot (\{x\} - 1)$$

$$\{x\} = \frac{[x]}{[x] - 1} \quad [x] = \frac{\{x\}}{\{x\} - 1}$$

Bizga ma'lumki $\{x\} - 1 < 0$. Demak, $[x] < 0$. $[x] = -N$ bo'lsin.

Hisoblashda davom etsak:

$$-N = \frac{\{x\}}{\{x\} - 1}$$

$$N - N \cdot \{x\} = \{x\}, \quad N = \{x\} \cdot (N + 1)$$

$$\{x\} = \frac{N}{N + 1} \text{ va } x = \{x\} + [x] \text{ ekanligidan}$$

$$x = -N + \frac{N}{N + 1} = -\frac{N^2}{N + 1} \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Javob: $x = \frac{N^2}{N+1}$.

2.1.4. Nollardan va birlardan iborat ketma–ketlikda toq o’rinda turgan barcha hadlar o’chirildi. Natijada dastlabki ketma–ketlik bilan bir xil ketma–ketlik hosil bo’ldi. Shunday xususiyatli ketma–ketliklarning barchasini toping.

Yechish: Agar ketma–ketlik faqat nollardan yoki faqat birlardan iborat ketma–ketlik bo’lsa, shart bajariladi. Ammo bizda bir ketma–ketlikda 0 va 1 raqami uchrashi lozim. Aytaylik bu ketma–ketlikning birinchi hadi 0 bo’lsin. U holda bu ketma–ketlikning ikkinchi hadi ham nol bo’ladi. Chgunki agar ikkinchi hadi 1 bo’lsa edi, biz bu ketma–ketlikning barcha toq hadlarini o’chirsak, oldingi ketma–ketlik bilan bir xil ketma–ketlik hosil bo’lmaydi. Demak, ketma–ketlikning birinchi ikkita hadi 0. U holda bu ketma–ketlikning uchinchi hadi ham 0 bo’lishi shart. Agar 1 bo’lsa edi, birinchi ketma–ketlik 0, 0 bilan, ikkinchi ketma–ketlik 0, 1 bilan boshlanadi. Demak biz bu ketma–ketlikning barcha hadi nolga tengligini shu mulohazani davom ettirib isbotlaymiz.

Birinchi hadi 1 bilasn boshlansa ham shu mulohazani yuritishimiz mumkin. Bundan shartda keltirilgan xususiyatga ega 0 va 1 lasrdan iborat ketma–ketlik mavjud emasligi kelib chiqadi.

Javob: Bunday xususiyatli ketma–ketlik mavjud emas.

2.1.5. To’g’ri burchakli uchburchakning to’g’ri burchak bissektrisasi gipotenuzani $1 \div 2$ nisbatda bo’ladi. To’g’ri burchakdan tushirilgan balandlik gipotenuzani qanday nisbatda bo’ladi?

Yechish: $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{CA_1}{AC} = \frac{BA_1}{AB} \cdot \quad \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2};$

$$CD = AC \cdot \cos \alpha \quad BD = AB \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{BD} = \frac{CD}{BD} \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{CD}{BD}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{CD}; \quad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{BD}{CD}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{BD}{CD}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{BD}{CD}}} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{1}{4}$$

Javob: $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{4}.$

2.1.6. $ABCD$ qavariq to'rtburchakning diagonallari O nuqtada kesishadi . To'rtburchak tomonlari kvadratlarining yig'indisi O nuqtadan to'rtburchak uchlarigacha masofalar kvadratlarini yig'indisidan ikki marta katta. U holda diagonallar o'zaro perpendikulyar bo'lishini yoki O nuqtada diagonallarining kamida bittasi teng ikkiga bo'linishini isbotlang.

Yechish: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2 \cdot (OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$

$$\angle BOC = \alpha$$

$$BO^2 + OC^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha = BC^2$$

$$AO^2 + BO^2 + 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha = AB^2$$

$$OC^2 + OD^2 + 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos\alpha = CD^2$$

$$AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos\alpha = AD^2$$

$$2 \cdot (OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) + 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\alpha - 2 \cdot BO \cdot OC \cdot \cos\alpha + \\ + 2 \cdot OC \cdot OD \cdot \cos\alpha - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos\alpha = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

$$\cos\alpha (BO(AO - OC) - OD(AO - OC)) = 0$$

$$\cos\alpha (BO - OD)(AO - OC) = 0$$

Bundan $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ va $BO = OD$ yoki $AO = OC$ ekanligi kelib chiqadi.

2.1.7. Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right), (n \in \mathbb{N}).$$

Isbot: $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 1$ ligi kelib chiqadi.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$2n+1 = 1 + 2(k-1) \quad 2n = 2 + 2(m-1); m = n$$

$$k = n+1$$

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \text{ da } n \text{ ta qo'shiluvchi bor.}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ da ham } n \text{ ta qo'shiluvchi bor.}$$

S_1 dagi k-qo'shiluvchi kasr maxrajidagi son.

S_2 dagi k-qo'shiluvchi kasr maxrajidagi sondan bitta kam, bu yerda $k=1, 2, \dots, n$.

dagi k-qo'shiluvchi kasr maxrajidagi son.

$$\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{4n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)(n+1)} - \frac{1}{2n^2} \right) + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{n-1}{2n(n+1)} + \frac{n-3}{4n \cdot 3(n+1)} + \dots + \frac{1-n}{2n(2n-1)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ deb olamiz.}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}; \left(S_{2n} - \frac{1}{2} S_n \right) \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n} \cdot \frac{d}{2} S_n;$$

$$S_1 = S_{2n} - \frac{1}{2} S_n; S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} \cdot S_n;$$

$$S_{2n} - \frac{1}{2} S_n > \frac{n+1}{2n} \cdot S_n; S_{2n} - S_n > \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right) S_n;$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} > \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{2n^2}$$

Tengsizlik to'la isbotlandi.

2.1.8. $ABCD$ qavariq to'rtburchakning diagonalari o'zaro perpendikulyar. AB va AD tomonlari o'rtalarining qarama-qarshi tomonlarga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Bu ikki to'g'ri chiziq AC ustida kesishishini isbotlang.

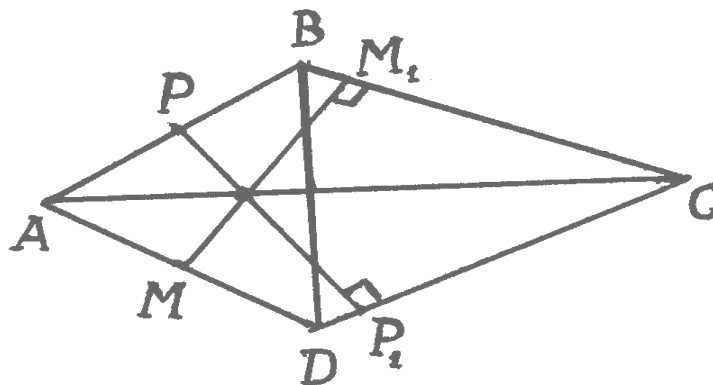
Isbot:

K nuqta AC to'g'ri chiziqning o'rtasi bo'lsin.

$$MK = \frac{1}{2}CD; MP = \frac{1}{2}BD; PK = \frac{1}{2}BC;$$

$$AK \perp BD, BD \parallel MP, MP \perp AK, MM_1 \perp BC, BC \parallel PK,$$

$$PK \perp MM_1, PP_1 \perp CD, CD \parallel MK$$

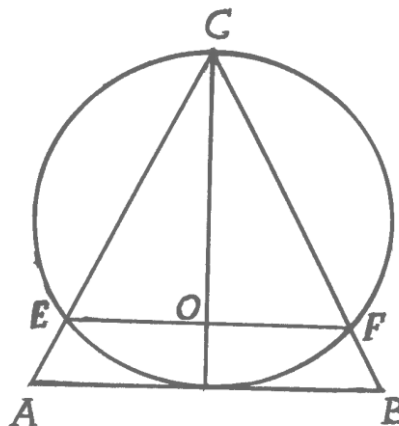


2.1.1-chizma ($ABCD$ qavariq to'rtburchak)

Demak, PP_1, MM_1, AC to'g'ri chiziqlar $\triangle MPK$ ning balandliklari mos ravishda o'z ichiga oladi. Uchburchak balandliklari bir nuqtada kesishadi. Demak PP_1 va MM_1 lar diagonal ustida kesishadi.

2.1.9. ABC uchburchakda CH balandlik tushirilgan hamda AC va BC tomonlariga mos ravishda HE va HF perpendikulyar o'tkazilgan. Agar CH balandlik EF kesmani teng ikkijiga bo'lsa, u holda ABC teng yonli uchburchak ekanligini isbotlang.

Isbot: $CH \perp AB$ $EO = OF$



2.1.2-chizma (ABC muntazam uchburchak)

$$\angle CAB = \beta \quad \angle CBH = \alpha$$

$$\angle ACH = 90^\circ - \beta \quad \angle BCH = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle AHE = 90^\circ - \beta \quad \angle EHO = \beta$$

$$\angle CEH + \angle CFH = 180^\circ$$

Demak, $CEHF$ ga tashqi aylana chizish mumkin.

$$\angle HCF = \angle FEH = 90^\circ - \beta$$

$$\angle EOH = \angle COH = \angle COE = \angle FOH = 90^\circ$$

$$\alpha = \beta$$

2.1.10. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagiga o'tkazilgan bissektrisa gipotenuzaga o'tkazilgan medianaga va balandlik orasidagi burchakni teng ikkiga bo'lishini isbotlang.

Isbot: AN -bissektrisa, $AB = a$

AK -medianaga, $AC = b$

AM -balandlik. $BC = c$

$$\angle ANK = \alpha \quad \angle KAN = \beta$$

$$\frac{AK}{\sin \alpha} = \frac{KN}{\sin \beta}; \sin \beta = \frac{KN \cdot \sin \alpha}{AK}; \angle AKM = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{AM}{AN}$$

$$\sin \beta = \frac{KN \cdot AM}{AK \cdot AN}$$

$$\angle NAM = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ$$

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \frac{AM}{AN}; \quad \sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{MN}{AN};$$

$$\sin \alpha = \frac{AM}{AN}; \quad \sin(\alpha - 90^\circ) = \sin \beta \text{ ekanligini isbotlaymiz.}$$

$$\frac{KN \cdot AM}{AK \cdot AN} = \frac{MN}{AN} \quad KN \cdot AM = MN \cdot AK$$

$$\frac{BN}{AB} = \frac{BC - BN}{AC}; \quad \frac{BN}{a} = \frac{c - BN}{b}; \quad BN = \frac{ac}{a+b};$$

$$BM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2}} = a \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}; \quad \frac{BM}{BA} = \frac{AB}{BC}; \quad BM = \frac{a^2}{c}; \quad MN = \frac{a^2}{c} - \frac{ac}{a+b};$$

$$\frac{c(a-b)}{2(a+b)} \cdot \frac{ab}{c} = a \left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a+b} \right) \cdot \frac{c}{2};$$

$$\frac{(a-b)b}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a+b} \Rightarrow \sin \angle KAN = \sin \angle NAM \Rightarrow \angle KAN = \angle NAM.$$

2.1.11. Moskva-Leningrad poyezdida Ivanov, Petrov va Sidorov familiyasi yo'lovchilar ketmoqdalar. Shunday familiyalarga poyezd mashinisti, kochegari va konduktori ham ega. Quyidagilar ma'lum:

1. Yo'lovchi Ivanov Moskvada yashaydi;
 2. Konduktor Moskva-Leningrad yo'lining yarmida yashaydi;
 3. Konduktor bilan bir xil familiyasi yo'lovchi Leningradda yashaydi;
 4. Yo'lovchilardan konduktorga yaqin joyda yashaydigan yo'lovchi bir oyda konduktordan uch marta ko'p ish haqi oladi;
 5. Yo'lovchi Petrov 2000 so'm oladi;
 6. Poyezd brigadasidan Sidorov kochegarni tennisda yutdi.
- Mashinistning familiyasini toping.

Yechish: 6-shartdan kochegar Sidorov emasligi kelib chiqadi. Konduktorga yaqin joyda Petrov yashamaydi. Chunki, $2000/3 \notin N$.

1-va3-shartlardan konduktor Ivanov emasligi kelib chiqadi. Konduktorga eng yaqin yo'lovchi Ivanov emas. Chunki, konduktor uyidan Moskvagacha bo'lgan masofa, konduktor uyidan Leningradgacha bo'lgan masofaga teng.

Demak, konduktorga yaqin joyda Sidorov yashaydi. Bundan konduktor Sidorov emasligi kelib chiqadi. Chunki Sidorov Leningradda yashamaydi. Bundan konduktor Petrov ekanligi kelib chiqadi. Kochegar Sidorov emas, demak u Ivanov. Bundan mashinist Sidorov ekanligi kelib chiqadi.

2.1.12. Agar a, b, c -musbat sonlar bo'lsa, $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ ekanligini isbotlang.

Isbot: $f(a) = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2}$ funksiyani $(0; +\infty)$ oraliqda tekshiramiz.

$a \geq b \geq c$ bo'lsin.

$$f'(a) = \left(\frac{a^2}{b+c} \right)' + \left(\frac{b^2}{a+c} \right)' + \left(\frac{c^2}{a+b} \right)' - \left(\frac{a+b+c}{2} \right)'$$

$(0; +\infty)$ da

$$f''(a) = \frac{2}{(b+c)^4} - \frac{b^2(2a+2c)}{(a+c)^4} - \frac{c^2(2a+2b)}{(a+b)^4}$$

$f''(a) \geq 0$, $2b \leq a+c$ bo'lsin.

$$f'(a) = \left(\frac{a}{b+c} - \frac{b^2}{(a+c)^2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{a}{b+c} - \frac{c^2}{(a+b)^2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{a}{b+c} > \frac{b^2}{(a+c)^2} + \frac{1}{4}$$

$$4a(a+c)^2 > (b+c)(4b^2 + (a+c)^2)$$

$$\begin{cases} 2a > b+c \\ 2(a+c)^2 > 4b^2 + (a+c)^2 \end{cases} \text{ dan kelib chiqadi.}$$

$$\text{Demak, } f'(a) > 0, f(0) = \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} - \frac{b+c}{2}$$

$f(a)$ o'suvchi.

$$(b^3 + c^3)2 > (b+c)bc; (b+c)(2b^2 - 2bc + 2c^2) > 0$$

Demak, $f'(a) > 0$ bo'lgani uchun $f(a)$ funksiya $(0; +\infty)$ da o'suvchi. $f(a) > 0$.

$$2b > a + c$$

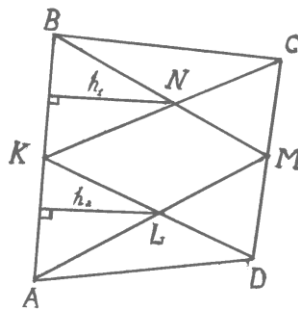
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\frac{a+c}{2} + a+c}{2}$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+c}{2}$$

$$2a^2(a+b) + 2c^2(b+c) \geq (a+c)(b+c)(a+b).$$

2.1.13. $ABCD$ qavariq to'rtburchakning AB va CD tomonlarida mos ravishda K va M nuqtalar olingan. MA va KD kesmalar kesishish nuqtasi L , KC va BM kesmalar kesishish nuqtasi N bo'lsin. K va M nuqtalar AB va CD kesmalarning o'rtasi bo'lsa, $S_{KLMN} < \frac{1}{3} S_{ABCD}$ ekanligini isbotlang.

Isbot: $S_{KBMD} < \frac{1}{2} S_{ABCD}$



2.1.3-chizma ($ABCD$ qavariq to'rtburchak)

$$S_{KLMN} < \frac{1}{2} S_{ABCD} - (S_{CMN} + S_{AKL})$$

$$2S_{KLMN} < S_{ABCD} - 2(S_{CMN} + S_{AKL})$$

$$S_{CMN} + S_{AKL} = S_{BKN} + S_{MLD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(S_{CMN} + S_{AKL}) = S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD}$$

$$2S_{KLMN} = S_{ABCD} - (S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD})$$

$$S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD} = S_{ABCD} - S_{KLMN} - S_{BNC} - S_{ALD}$$

$$2S_{KLMN} = S_{ABCD} - S_{ABCD} + S_{KLMN} + S_{BNC} + S_{ALD}$$

$$S_{KLMN} = S_{BNC} + S_{ALD};$$

$$S_{CMN} + S_{AKL} + S_{BKN} + S_{MLD} > S_{KLMN}$$

$$S_{BKN} = \frac{AB}{4}h_1; S_{AKL} = \frac{AB}{4}h_2$$

$$S_{BKN} + S_{AKL} = \frac{AB}{4}(h_1 + h_2) \Rightarrow S_{ABCD} > 3S_{KLMN}$$

Masala shartida tengsizlikning to'g'riligini isbotlash talab qilingan edi.
Tengsizlik isbotlandi.

2.1.14. 1984(10) Jumhuriyat

Tengsizlikni isbotlang?

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5$$

Yechish:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 &= \frac{x_1^2}{4} - x_1x_2 + x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_3 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_4 + \\ &+ x_4^2 + \frac{x_1^2}{4} - x_1x_5 + x_5^2 = \left(\frac{x_1}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_3\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_4\right)^2 + \left(\frac{x_1}{2} - x_5\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.15. Parametr k ning qanday qiymatlarida

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1984}^2 = k \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{1994}^3 = k \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{1984}^4 = k \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasi

- 1) 1ta yechimga;
- 2) 1984 ta yechimga
- 3) Yechimga ega bo'lmaydi. 1984(10)

Yechish: Sistemaning 1- va 3- tenglamalarini o'zaro qo'shib, undan ikkinchi tenglamaning ikkilanganligini ayiramiz.

$$(x_1^4 - 2x_1^3 + x_1^2) + (x_2^4 - 2x_2^3 + x_2^2) + \dots + (x_{1984}^4 - 2x_{1984}^3 + x_{1984}^2) = 0$$

$$x_1^2(x_1^2 - 2x_1 + 1) + x_2^2(x_2^2 - 2x_2 + 1) + \dots + x_{1984}^2(x_{1984}^2 - 2x_{1984} + 1) = 0$$

$$x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2(x_2 - 1)^2 + \dots + x_{1984}^2(x_{1984} - 1)^2 = 0$$

Oxirgi tenglamadan barcha x_i lar uchun 1 yoki 0 ekanligi kelib chiqadi.

Javob:

A) $k \in \{0; 1984\}$

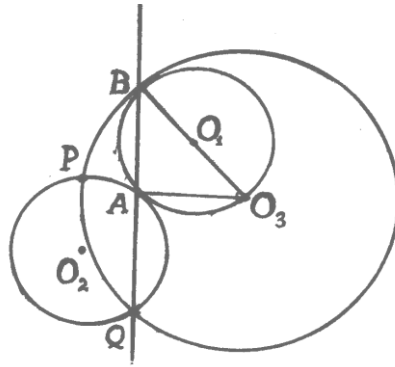
B) $k \in \{1; 1984\}$

V) $k < 0$ va $k > 1984$

2.1.16. (1984) (10)

Ikkita teng aylana A nuqtada urinadi. Radiusi ikki barobar katta aylana bu aylanalarning birini o'z ichiga olib, u bilan B nuqtada urinadi, ikkinchi aylana bilan esa P va Q nuqtalarda kesishadi. AB to'g'ri chiziqning yoki P yoki Q nuqtadan o'tishini isbotlang?

Yechish: O_1, O_2 -kichik aylanalarning, O_3 -katta aylananing markazi bilan masalaning shartidan O_3B kesma O_1 markazli aylananing diametric ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\angle BAO_3 = 90^\circ$. Birinchidan $O_3A \perp AB$ bo'lganligi uchun B nuqtaga O_3A to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqta O_3 markazi aylanada yotadi.



2.1.4-chizma (O_1, O_2, O_3 markazli aylanalar)

Ikkinchidan, O_1, O_2 markazli aylanalar A nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun B nuqtaga A markazga nisbatan simmetrik nuqta O_2 markazli aylanada yotadi.

Demak, bu nuqta O_2 va O_3 markazli aylanalarning kesishish nuqtasi ekan.

2.1.17. (1984) (9) Agar $x \neq 0$, $y \neq 0$ bo'lsa, $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$ tengsizlikni isbotlang?

$$\begin{aligned} \text{Yechish: } \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 &= \frac{x^8 - x^6 y^2 - x^2 y^4 + y^8}{x^2 y^2} = \frac{x^6(x^2 - y^2) - y^6(x^2 - y^2)}{x^2 y^2} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)(x^6 - y^6)}{x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)(x^4 + x^2 y^2 + y^4)}{x^2 y^2} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)^2(x^4 + x^2 y^2 + y^4)}{x^2 y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

2.1.18. 1983 (9) Viloyat.

Shunday n natural sonni topingki, u shu songacha bo'lgan toq sonlarning yig'indisidan 50 marta kichik bo'lsin.

Yechish: a) $n = 2k$, $k \in N$ bo'lsa, u holda shartga ko'ra

$$2k = \frac{1}{50}(1+3+5+\dots+(2k-1)) \text{ yoki } 100k = \frac{1+(2k-1)}{2} \cdot k, \text{ ya'ni } k^2 - 100k = 0.$$

Bundan $k_1 = 0$, $k_2 = 100$ $k \in N$ bo'lgani uchun $n = 2 \cdot 100 = 200$. Demak, izlangan natural son 200 bo'ladi

b) $n = 2k - 1$, $k \in N$ bo'lsa, u holda masala shartiga ko'ra

$$2k - 1 = \frac{1}{50}(1+3+5+\dots+(2k-1))$$

$$50(2k - 1) = k^2$$

$$k^2 - 100k + 50 = 0$$

Bu tenglamaning $k \in N$ bo'ladigan yechimlari yo'q. Shunday qilib $n=200$ masala shartini qanoatlantiradigan yagona natural son bo'lar ekan.

2.1.19. 1983. (9-11).

Ixtiyoriy natural a, b, c sonlar uchun $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

yig'indi $a + b + c$ ga karrali ekanligini isbotlang ?

Yechish: 1-usul. $p = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$ deb belgilaymiz, u holda

$$p = ab^3 - ac^3 + bc^3 - ba^3 + ca^3 - cb^3 = a^3(c - b) - a(c^3 - b^3) + bc(c^2 - b^2) =$$

$$= a^3(c - b) - a(c - b)(c^2 + cb + b^2) + bc(c - b)(c + b) =$$

$$= (c - b) - (a^3 - a(c^2 + cb + b^2) + bc(c + b)) = (c - b)(a(a^2 - c^2) - cb(a - c) - b^2(a - c)) =$$

$$= (c - b)(a - c)(a(a + c) - bc - b^2) = (c - b)(a - c)(a^2 - b^2 + ac - bc) =$$

$$= (c - b)(a - c)((a - b)(a + b) + c(a - b)) = (c - b)(a - c)(a - b)(a + b + c)$$

Demak, p yig'indi $a+b+c$ ga karrali ekan.

2-usul. $p = a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)$ shaklida yozib olamiz, u holda

$$\begin{aligned} p &= a^3(c-b) + a^2(c^2-b^2) + b^3(a-c) + b^2(a^2-c^2) + c^3(b-a) + c^2(b^2-a^2) = \\ &= a^2(c-b)(a+b+c) + b^2(a-c)(b+a+c) + c^2(b-a)(c+b+a) = \\ &= (a+b+c)(a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)) \end{aligned}$$

Ya'ni p yig'indi $a+b+c$ ga karrali ekan. Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

2.1.20. 1983. (10)

Ushbu

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0$$

Tenglamani yechimi mavjudmi ?

Yechish: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = z \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = z^2 - 2, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^3 - 3z$ lar hosil

bo'ladi. ravshanki, x va y lar noldan farqli

$$z + z^2 - 2 + z^3 - 3z = 0 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

$$(z+1)(z^2-2) = 0$$

bu yerda

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = -\sqrt{2}$$

$$z_3 = \sqrt{2}$$

larni topamiz.

$$a > 0 \text{ da } a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ va } a < 0 \text{ da esa } a + \frac{1}{a} \leq -2 \text{ larga ega bo'lamiz ya'ni}$$
$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2$$

$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ bo'lgani uchun $|z| \geq 2$, ya'ni $z \leq -2$, $z \geq 2$ bo'lishi mumkin. Shuning uchun $z_1 = -1$, $z_2 = -\sqrt{2}$, $z_3 = \sqrt{2}$ lar yechim bo'la olmaydi.

2.1.21. (1983) (11)

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ bo'lsin, u holda $f(f(f(x))) = x$ tenglama $x = 1$ yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

Yechish: Faraz qilaylik, $x = 1$ dan ham boshqa yechimi mavjud bo'lsin. Ravshanki, $x \leq 0$ shartni qanoatlantiradigan yechimlar bo'lishi mumkin emas.

a) $x > 1$ shartni qanoatlantiradigan yechimi x_0 bo'lsin. U holda $f(x_0) = \sqrt{x_0^2 - x_0 + 1} < x_0$ ga ega bo'lamiz.

$x_1 = f(x_0)$ desak $x_1 < x_0$ va $x_1 > 1$ bo'lishi kerak. $f(x_1) = \sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} < x_1$ bo'ladi, chunki $x_1 > 1$ bo'lgani uchun $x_2 = f(x_1)$ bo'lganda $x_2 < x_1$ bo'ladi

$$f(x_2) = \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} < x_2 \text{ chunki } f(f(f(x_0))) = x_0 \text{ bo'lgani uchun}$$

$$x_0 = f(x_2) < x_2 < x_1 < x_0 \text{ ya'ni } x_0 < x_0 \text{ zidlikka kelamiz.}$$

b) Xuddi shuningdek, $0 < x < 1$ shartni bajaruvchi yechimi bor deb faraz qilamiz. Uni $\bar{x}_0$ deb belgilaylik, u holda

$$f(\bar{x}_0) = \sqrt{\bar{x}_0^2 - \bar{x}_0 + 1} > \bar{x}_0$$

bo'lishi ravshan.

$$\overline{x_1} = f(\overline{x_0}) > \overline{x_0} \text{ va } x_0 < 1 \text{ bo'lgani uchun } 0 < \overline{x_1} < 1,$$

$$f(\overline{x_1}) = \sqrt{\overline{x_1}^2 - \overline{x_1} + 1} > \overline{x_1}$$

bo'ladi.

$$\overline{x_2} = f(\overline{x_1}) > \overline{x_1} \text{ ya'ni } \overline{x_2} > \overline{x_1}$$

$$f(\overline{x_2}) = \sqrt{\overline{x_2}^2 - \overline{x_2} + 1} > \overline{x_2}, \quad 0 < \overline{x_2} < 1$$

$$\overline{x_0} = f(\overline{x_2}) > \overline{x_2} > \overline{x_1} > \overline{x_0}, \text{ bundan } \overline{x_0} > \overline{x_0}$$

zidlikka kelimiz. Yuqorida yuritilgan mulohazalardan ko'rinadiki, haqiqatdan ham berilgan tenglama uchun $x=1$ yagona yechim bo'lar ekan.

2.1.22. (1984) (11)

Sinfda 42 ta o'quvchi o'qiydi. A_1 o'quvchi qiz 7 ta o'g'il bola bilan do'stlashgan, A_2 - 8 ta o'g'il bola bilan, A_3 - 9 ta o'g'il bola bilan va hokazo, A_k o'quvchi qiz sinfdagi barcha o'g'il bolalar bilan do'stlashgan. Bu sinfda nechta o'quvchi qiz bor?

Yechish: A_1 -7, ya'ni 6+1 o'g'il bola bilan

A_2 - 8, ya'ni 6+2 o'g'il bola bilan

A_3 - 9, ya'ni 6+3 o'g'il bola bilan

.....

A_k -, 6+k o'g'il bola bilan do'stlashgan.

Demak, sinfda $6+k$ ta o'gil bola, qiz bolalar soni esa k ta. Demak, o'g'il bolalar $42-k$ ta tenglama tuzamiz. $42-k=6+k$; $k=18$ ta qiz.

2.1.23. (1985) (9)

Hech bir natural n va m larda

$$x^2 + 1983^n \cdot x + 1985^m = 0$$

kvadrat tenglama butun ildizlarga ega emasligini isbotlang?

Yechish: Viyet teoremasiga binoan x_1 va x_2 ildizlar

$$x_1 + x_2 = -1983^n$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1985^m$$

munosabatlar bilan bog'langan.

$x_1 \cdot x_2 = 1985^m$ dan ko'rinadiki, x_1 va x_2 lar toq sonlar bo'lishi kerak, lekin $x_1 + x_2 = -1983^n$ ning o'ng tomoni toq son chap tomoni esa juft son. Ziddiyatga keldik, demak berilgan kvadrat tenglama n va m natural son bo'lganda butun yechimlarga ega emas.

2.1.24. (1985) (10)

Agar $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ekanligi ma'lum bo'lsa, u holda $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$ ekanligini isbotlang?

Yechish: Berilgan tengsizlikni

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Shaklida yozish mumkin. Chunki, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca$$

$$-a^2 - b^2 - c^2 \leq 2ab + 2bc + 2ca$$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0$ ligi kelib chiqadi. Bundan esa

$(a + b + c)^2 \geq 0$. Demak, chap tengsizlik isbotlandi.

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Tengsizlikni isbotlaymiz. Uni ikkiga ko'paytirib quyidagicha yozib olamiz.

$$2ab + 2bc + 2ca \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \text{ yoki}$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0, (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0$$

Bo'lgani uchun ko'rsatilgan tengsizlik o'rinlidir. Berilgan tengsizlik to'la isbotlandi.

2.1.25. (1985)(11)

Ixtoyoriy tub sonni 30 ga bo'lganda qoldiq yana tub son yoki bir bo'lishini isbotlang?

Yechish: Natural sonni 30 ga bo'lishdan chiqqan r qolidiq 30 dan kichik. Agar u murakkab son bo'lganda edi, u holda uning bo'luvchilari orasida 2, 3, 5 sonlaridan kamida bittasi mavjud bo'lar edi. Haqiqatdan, 30 dan kichik son 5 dan katta tub bo'luvchilarga ega bo'lishi mumkin emas, ya'ni 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 bo'luvchilarga ega bo'lishi mumkin emas va bunda 2, 3, 5 sonlaridan kamida bittasiga karrali. $Q = PD + r$ ekanligi ma'lum. Bu tenglikdan bo'luvchi 30 bilan qoldiqning ikkalasi 2 ga yoki 3 ga yoki 5 ga bo'linsa, u holda bo'linuvchi ham 2 ga

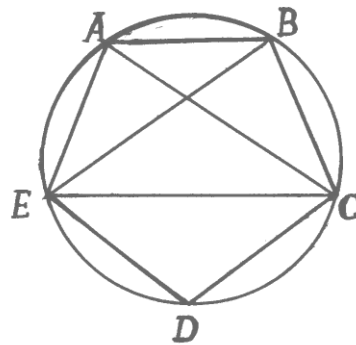
yoki 3 ga yoki 5 ga bo'linishi kelib chiqadi, bu esa shartga zid. (Q -tub son). Demak, r tub son yoki 1 deb qabul qilish kerak.

2.1.26. (1985) (11)

Agar aylanaga barcha burchaklari o'zaro teng bo'lgan qavariq beshburchak ichki chizilgan bo'lsa uning muntazam beshburchak ekanligini isbotlang?

Yechish: $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA$

bo'lganligidan beshburchakning barcha dioganallari o'zaro teng bo'lishi kelib chiqadi. (teng ichki chizilgan burchaklar, mos vatarlar teng bo'ladi)



2.1.5-chizma (Aylanaga ichki chizilgan muntazam beshburchak)

$$BE = AC = BD = CE = DA, \angle BCA = \angle AEB,$$

$\angle EAB = \angle ABC$ ligidan $\angle ABC = \angle ABE$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $AB = BC = CD = DE = EA$ bo'lishi kelib chiqadi. U holda beshburchak barcha ichki burchaklari va barcha tomonlari o'zaro tengligiga binoan muntazamdir.

2.1.27. (1986) (9)

Dioganallari o'zaro perpendikulyar bo'lgan trapetsiyaning balandligi 4 ga

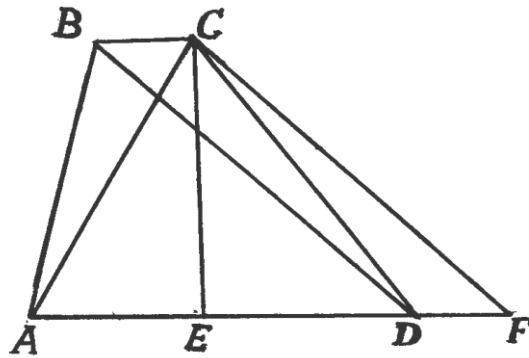
teng. Agar bu trapetsiyaning dioganallaridan birining uzunligi 5 ga teng bo'lsa, uning yuzini toping?

Yechish: $ABCD$ trapetsiyada $AC = 5$, CE -balandlik $BD \parallel CF$.

$ABCD$ trapetsiya yuzi ACF uchburchak yuziga teng ekanligi ravshan.

$\triangle ACF$ va $\triangle ACE$ lar o'xshash bo'lgani uchun

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} \text{ yoki } AF = \frac{AC^2}{AE}$$



2.1.6-chizma ($ABCD$ trapetsiya)

Pifagor teoremasiga ko'ra $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$$\left. \begin{array}{l} AC = 5 \\ CE = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow AE = 3$$

Shunday qilib, $AF = \frac{25}{3}$;

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot 4 = \frac{50}{3} \Rightarrow S_{mp} = S_{\triangle ACF} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

Ya'ni $S_{mp} = 16\frac{2}{3}$

Javob: $S_{tr} = 16\frac{2}{3}$.

2.1.28. (1987)(10)

Tengsizlikni isbotlang?

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < 5$$

Bu yerda ildizlar 1987 ta

Yechish: $\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$ bo'lganligidan

$$\sqrt{20 + \sqrt{20}} < \sqrt{20 + 5} = 5 \text{ ekanligi kelib chiqadi, u holda}$$

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20 + \sqrt{25}}} = 5$$

2.1.29. (1987) (11)

Agar uchburchak tomonlarining uzunliklari a, b, c va yarim premetri p bo'lsa

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq p$$

ekanligini isbotlang?

Yechish: $x \geq 0, y \geq 0$ da $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{2p-a-b}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}$$

Bu yerda $2p = a + b + c$

$$\text{Demak, } \sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = p$$

2.1.30. (1989)(10)

2^{p^2} sonini 13 ga bo'lgandagi qoldiqni toping? Bu yerda p - tub son

Yechish: $p > 3$ bo'lsa $p^2 - 1$ ning 12 ga bo'linishini ko'rsatish mumkin. U holda $2^{p^2} = 2^{p^2-1} \cdot 2 = 2^{12n} \cdot 2 = 4096^n \cdot 2 = (13 \cdot 315 + 1)^n \cdot 2 = 13m + 2$

Shunday qilib, $p > 3$ bo'lsa, qoldiq 2 ga teng bo'lar ekan. Undan tashqari $p = 2$ va $p = 3$ bo'lsa, mos ravishda 3 va 5 qoldiqlar hosil bo'ladi.

2.1.31. (1989)(10)

Agar $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ va $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ bo'lsa, u holda

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ bo'lishini isbotlang? (α, β, γ - lar musbat bo'lishi shart emas).

Yechish: $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \beta - \alpha) = \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$ bo'lgani uchun

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = k \quad \text{dan}$$

$$\sin \alpha = ka, \quad \sin \beta = kb, \quad \sin \gamma = kc$$

$$ka = kb \cdot \cos \gamma + \cos \beta \cdot kc \quad \text{bundan}$$

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$$

$$b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha$$

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha$$

Hosil qilingan munosabatlardan birinchisini a ga, ikkinchisini $(-b)$ ga, uchinchisini $(-c)$ ga ko'paytirib qo'shamiz.

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos \alpha \text{ ya'ni}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha .$$

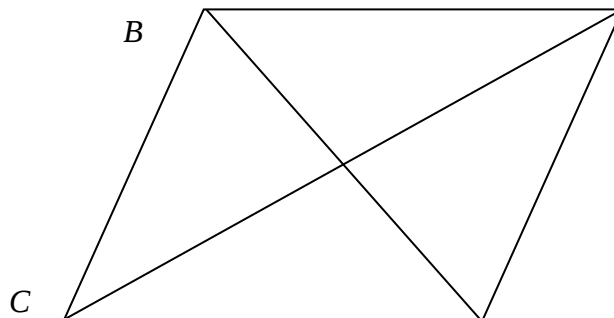
2.1.32. (1989)(11)

Agar a, b, c lar musbat sonlar bo'lsa,

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2} \text{ tengsizlikni isbotlang?}$$

Yechish: Masalaning geometrik yechimini ko'rsatamiz.

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c .$$



2.1.7-chizma (Ixtiyoriy to'rtburchak)

$$\angle AOB = 60^\circ, \angle BOC = 60^\circ \text{ unda } \angle AOC = 120^\circ \text{ bo'ladi.}$$

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$ va $\triangle OAC$ uchlarining kosinuslar teoremasiga binoan quyidagilarni hosil qilamiz.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab$$

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos 120^\circ = a^2 + c^2 + ac$$

$$AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

$$BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

$$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

$\triangle ABC$ dan $AB + BC > AC$. Lekin B nuqta AC ustida bo'lib qolishi ham mumkin, u holda tenglik ro'y beradi.

Demak, $AB + BC \geq AC$. Yuqorida topilganlarni o'rniga qo'ysak,

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

hosil bo'ladi.

2.1.33. (1989) (11)

Tenglamani yeching?

$$(x^2 - 2x)^3 + x\sqrt{x(x-2)^3} = 2.$$

Yechish: Agar $x \geq 0$ bo'lsa, u holda $(x^2 - 2x)^3 + x\sqrt{x(x-2)^3} = 2$ bo'ladi.

$$\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = y \text{ desak, u holda } y^2 + y - 2 = 0 \text{ bundan } y_1 = 1, y_2 = -2 \text{ lekin } y \geq 0$$

bo'lgani uchun $y_1 = 1$ ni olamiz. Bu holda $\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = 1$ yoki $(x^2 - 2x)^3 = 1$

$$x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Ammo $x \geq 0$, unda $x = 1 + \sqrt{2}$

Berilgan tenglamaning yo'l qo'yiladigan qiymatlari to'plami x ning $x(x-2)^3 \geq 0$ ni qanoatlantiradigan qiymatlari to'plamidan iborat. Bu $x \leq 0$ va $x \geq 2$ ya'ni

$x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ dan iborat. Demak, $x = 1 + \sqrt{2}$ bu tenglamada yechim bo'ladi. Agar $x < 0$ bo'lsa, u holda $(x^2 - 2x)^3 p - x\sqrt{x(x-2)^3} = 2$ (bu yerda $x = -(-x) = -\sqrt{(-x)^2} = -\sqrt{x^2}$ yozuvidan foydalaniladi)

$\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = z$ desak, u holda $z^2 - z - 2 = 0$ hosil bo'ladi. ($z \geq 0$)

$z_1 = 2$, $z_2 = -1$ ni topamiz. Lekin, $z \geq 0$ shuning uchun $z_1 = 2$ ni olamiz.

$\sqrt{(x^2 - 2x)^3} = 2$. Bundan esa

$$(x^2 - 2x)^3 = 4$$

$$(x^2 - 2x) = \sqrt[3]{4}$$

$$x^2 - 2x - \sqrt[3]{4} = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$$

$$x < 0 \text{ bo'lgani uchun } x = 1 - \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$$

$$\textbf{Javob: } x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$$

2.1.34. (1979) (9) Jumhuriyat.

To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi $\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2)$ kvadrat birlikka teng.

Uning burchaklarini aniqlang? Bunda a va b lar uchburchakning tomonlari.

Yechish: $CB = a, AC = b, AB = c$ belgilashlar kiritamiz.

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C \text{ . Masala shartiga ko'ra}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2) \Rightarrow \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + 3b^2)$$

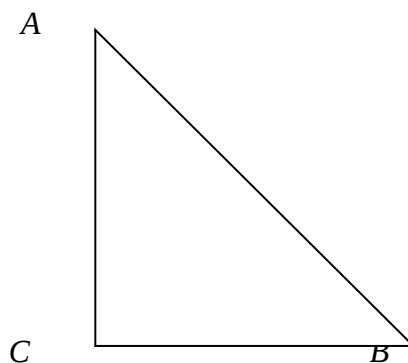
$$6ab \cdot \sin C = \sqrt{3}(a^2 + 3b^2)$$

$$2\sqrt{3} \cdot ab \cdot \sin C = a^2 + 3b^2$$

$$\sin C = \frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab}$$

$$(a + \sqrt{3}b)^2 = a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab} \geq 1$$



2.1.8-chizma (To'g'ri burchakli uchburchak)

$$\text{Lekin } -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2 + 3b^2}{2\sqrt{3}ab} = 1$$

$$a^2 + 3b^2 = 2\sqrt{3}ab \quad \text{Kvadratga oshiramiz. (} \sin C = 1, C = 90^\circ \text{)}$$

$$a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4 = 12a^2b^2 \quad \Rightarrow a^4 + 9b^4 - 6a^2b^2 = 0$$

$$(a^2 - 3b^2)^2 = 0, \quad a^2 - 3b^2 = 0, \quad a^2 = 3b^2 \Rightarrow a = 1; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = c \cdot \sin A \quad \sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Javob: $C = 90^0$; $A = 60^0$; $B = 30^0$

2.1.35. (1989)(9)

Uchburchak tomonlari a, b, c va yuzi S bo'lsa, $S < \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{abc}$ tengsizlikni isbotlang?

Yechish: r va R uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari γ esa c tomon qarshisidagi burchak bo'lsin. U holda

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c), \quad c = 2R \sin \gamma, \quad S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma \quad \text{formulalardan foydalanib,}$$
$$a+b+c = \frac{2S}{r}, \quad abc = 4RS$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bularni hamisha o'rinli $1 < \sqrt{\frac{R}{2}}$ tengsizlikka qo'yib, $S < \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{abc}$ tengsizlikni hosil qilamiz.

2.1.36. (1980) (9)

$2^{99} + 2^9$ sonning 41 ga bo'linishini ko'rsating?

Yechish: $2^{99} + 2^9$ sonning 41 ga bo'linishini isbotlaymiz.

$$2^{99} + 2^9 = (2^{33})^3 + (2^3)^3 = (2^{33} + 2^3)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) = ((2^{11})^3 + 2^3)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) =$$
$$= (2^{11} + 2)(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6)$$

$$2^{99} + 2^9 = (2^{11} + 2)(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6) = 2050(2^{22} - 2^{12} + 2^2)(2^{66} - 2^{36} + 2^6)$$

2.1.37. (1980) (11)

$\left[\frac{1^2}{1980}\right]; \left[\frac{2^2}{1980}\right]; \left[\frac{3^2}{1980}\right]; \dots; \left[\frac{1980^2}{1980}\right]$ ketma-ketlikda turlicha natural sonlar

uchraydi, bu yerda $[x] - x$ ning butun qismi.

Yechish: Ixtiyoriy k uchun

$$(n-1)1980 \leq k^2 < n \cdot 1980 \quad (2.1.1)$$

$$(k+1)^2 < (n+1)1980 \quad (2.1.2)$$

(2) va (1) dan quyidagi kelib chiqadi.

$$k < 990, a = 990 \quad a^2 = 980100$$

$$\left[\frac{a^2}{1980}\right] = 495 \quad b = 991 \quad b^2 = 982081$$

$$b^2 - a^2 > 1980 \quad c = 989 \quad c^2 - a^2 < 1980$$

$$(n+1)^2 - n^2 > n^2 - (n-1)^2 \quad 2n+1 > 2n-1$$

U holda 495 gacha bo'lgan barcha butun sonlar ketma-ketlik bo'ladi. Har bir $k > 990$ ga bittadan butun son mos keladi. Barcha turlicha natural sonlar

$$C = 1 + 495 + 990 = 1486 \text{ ta uchraydi.}$$

2.1.38. (1980) (11)

S yuzli uchburchak bisektirislari l_a, l_b, l_c bo'lsin. $S \geq \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{p}$ ni isbotlang?

Bu yerda p yarim perimetr. Qanday uchburchaklar uchun tenglik o'rinli?

Yechish: Bissektisasini hisoblash formulasiga ko'ra:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{p(p-a)}$$

$$l_b = \frac{\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{(a+c)^2 - b^2} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-b)}$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{(a+b)^2 - c^2} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \cdot \sqrt{p(p-c)}$$

Ixtiyoriy musbat x va y sonlari uchun $2\sqrt{xy} \leq x+y$ tengsizlik o'rinli. Shuning uchun $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$, $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$, $l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$ tengsizliklar o'rinli. U holda oxirgi tengsizliklarni hadma-had ko'paytirib

$$l_a \cdot l_b \cdot l_c \leq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot S$$

munosabatni hosil qilamiz. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

$$S \geq \frac{l_a \cdot l_b \cdot l_c}{p}$$

2.1.39. (1985) (11)

Muntazam uchburchak tomonlari kichikroq 5 ta bir xil muntazam uchburchaklar bilan qoplangan bo'lsa, u holda shu uchburchakni ulardan to'rttasi bilan ham qoplash mumkinligini isbotlang?

Yechish: Teng tomonli uchburchaklarning 6 ta nuqtasini uchlarini va tomonlarining o'rtalarini belgilaylik. Qoplaydigan uchburchaklar 5 ta bo'lgani uchun ularning kamida bittasi 2 ta nuqtani qoplaydi. Shuning uchun o'sha uchburchakning tomoni katta uchburchak tomonining yarmidan kichik emas. Bunday uchburchaklardan to'rttasi bilan katta uchburchakni qoplash mumkin.

2.1.40. (1986) (10)

Barcha butun koeffitsientli $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ ko'rinishidagi va $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ ayniyat o'rinli bo'lgan ko'phadlarni toping?

Yechish: Agar $x = 0$ bo'lsa, u holda $a_3 = -a_1 a_2 a_3$ ligi kelib chiqadi.

1. $a_3 \neq 0$ bo'lganda $a_1 \cdot a_2 = -1$ bo'lib, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ yoki, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ largina bo'lishi kelib chiqadi.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ da $x^3 + x^2 - x + a_3 = (x-1)(x+1)(x-a_3)$ tenglik ayniyat bo'lgani uchun

$x = 2$ da $8 + 4 - 2 + a_3 = 1 \cdot 3(2 - a_3)$ bundan $a_3 = -1$ ni topamiz.

Demak, $x^3 + x^2 - x - 1$ ko'phadga ega bo'lamiz.

b) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ da $x^3 + x^2 - x + a_3 = (x+1)(x-1)(x-a_3)$ ayniyatda $x = 2$ desak.

$$8 + 4 - 2 + a_3 = 3 \cdot 1(2 - a_3) \Rightarrow a_3 = 0$$

Biroq $a_3 = 0$ shartlarga binoan bunday bo'lishi mumkin emas.

2. $a_3 = 0$ bo'lsa u holda $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x = (x - a_1)(x - a_2)$

x dan $x^2 + a_1 x + a_2 = (x - a_1)(x - a_2)$ kelib chiqadi. Keyingi ayniyatdan esa

$$\begin{cases} a_1 = -a_1 - a_2 \\ a_2 = a_1 a_2 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ hamda $a_1 = 1$, $a_2 = -2$ yechimlarni topamiz.

Bu holda $x^3 + x^2 - 2x$ va $2x^3$ ko'phadlarga ega bo'lamiz.

Javob: $x^3 + x^2 - 2x$, $x^3 + x^2 - 2x$ va $2x^3$ ko'phadlar

2.1.41. (1986) (11)

Agar a va b musbat sonlar va $a \neq b$ bo'lsa

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

tengsizlikni isbotlang?

Yechish: Umumiylikka putur yetkazmasdan $0 < b < a$ deb hisoblash mumkin.

U holda $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b > 0$.

Berilgan qo'sh tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz.

$$2 \frac{a-b}{a+b} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$$

a) Avvalo chap tomonidagi tengsizlikni isbotlaymiz.

$$2 \frac{a-b}{a+b} < \ln \frac{a}{b}$$

Buning uchun $x = \frac{a}{b}$ desak, u holda $2 \frac{x-1}{x+1} < \ln x$ bunda $x > 1$ bo'ladi.

$x \geq 1$ bo'lganida $f(x) = \ln x - 2 \frac{x-1}{x+1}$ funksiyani qaraylik.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$$

Demak, $f(x)$ funksiya $x \geq 1$ da o'suvchi. U holda

$$f(x) > f(1) = 0$$

b) O'ng tengsizlik $\ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$ ni isbotlash uchun $x^2 = \frac{a}{b} > 1$ deb olamiz va

quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} - \ln \frac{a}{b} = x - \frac{1}{x} - \ln x^2 > 0$$

Faraz qilaylik, $g(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x^2$, u holda

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0 \quad \text{bundan } x > 1. \text{ Demak, } g(x) \text{ funksiya } x \geq 1 \text{ qat'iy}$$

o'suvchi funksiyadir. U holda $g(x) > g(1) = 0$ tengsizlik isbotlandi.

2.1.42. (1987)(9)

Musbat x_1, x_2, y_1, y_2 sonlar $x_1 y_1 < x_2 y_2$, $x_1 \geq y_1$ $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$ shartlarni qanoatlantiradi. Quyidagi tengsizlikni isbotlang?

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$$

Yechish: Tengsizlik shaklini almashtiramiz.

$$\frac{1}{y_1} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_2} - \frac{1}{x_2} \geq 0$$

$$\frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} + \frac{x_2 - y_2}{x_2 y_2} \geq 0$$

$$\frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} - \frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} + \frac{x_2 - y_2}{x_2 y_2} + \frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} \geq 0$$

$$(x_1 - y_1) \left(\frac{1}{x_1 y_1} - \frac{1}{x_2 y_2} \right) + \frac{x_1 + x_2 - (y_1 - y_2)}{x_2 y_2} \geq 0 \quad (1)$$

Lekin shartga ko'ra $\frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{x_2 y_2}$ (1) tengsizlikning chap tomoni manfiy

bo'lmagan ifodalar ustida bajarilgan amallar natijasi bo'lgani uchun (1) tengsizlik o'rinli. Bundan talab qilingan tengsizlik o'rinliligi kelib chiqadi.

2.1.43. (1989) (11)

Agar $x > 0, y > 0, z > 0$ bo'lsa,

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$$

tengsizlikni isbotlang?

Yechish: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ tengsizlikka binoan

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} = \sqrt{\frac{x^2}{x(y+z)}} = \frac{x}{\sqrt{x(y+z)}} \geq \frac{2x}{x+y+z}$$

tenglik $x = y + z$ da bo'ladi.

Xuddi shuningdek,

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z}$$

$$\sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z}$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Bulardan esa

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = 2$$

kelib chiqadi. Tenglik belgisi $x = y + z$, $y = z + x$, $z = x + y$ bo'lgandagina bajariladi. Ularni qo'shsak,

$$x + y + z = 2(x + y + z) \text{ ya'ni } x + y + z = 0$$

Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki musbat sonlar yig'indisi musbat bo'ladi.

$$\text{Demak, } \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$$

2.1.44. (1981)(9) tashqi olimpiada

Ikkita bir xil (8×8) shaxmat taxtasi umumiy markazga ega va biri ikkinchisioga nisbatan markaz atrofida 45° burchakka burilgan holda joylashgan. Agar har bir katak yuzi birga teng bo'lsa, u holda ikkala shaxmat taxtasi qora kataklari kesishmasi yuzidan yig'indisini toping?

Yechish: Yuqorida joylashgan doskaning qora kataklari bilan ostki doska qora kataklari kesishmasining yuzini S_{qq} orqali ustki doskaning qora kataklari bilan

ostki doskaning oq kataklari kesishmasining yuzini S_{qo} orqali belgilaymiz. Xuddi shunday S_{qo} va S_{oo} belgilashlarni kiritamiz. U holda $S_{kk} + S_{qo} + S_{oq} + S_{oo} = S$ bu yerda S shtrixlangan sakkizlikning yuzi. Agar ustki doskani boshlang'ich holatidan markaz atrofida 90° ga bursak u holda qora kataklar oq kataklarga, oq kataklar qora kataklarga o'tadi. Demak, $S_{qq} = S_{oo}$ va $S_{qo} = S_{oq}$. Agar berilgan holatga nisbatan ikkala doskani ham markaz atrofida 90° ga bursak, u holda ikkala doskaga ham qora kataklar oq kataklarga o'tadi. Demak, $S_{qo} = S_{oq}$ va $S_{qq} = S_{oo}$.

Shuning uchun $S_{qq} = \frac{1}{4}S$

Javob: $32(\sqrt{2}-1)$

2.1.45. (1982)(11) Odessa.

a, b, c sonlar $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda yotadi hamda $\cos a = a$, $\sin b = b$, $\cos(\sin c) = c$ tengliklarni qanoatlantiradi. Bu sonlarni o'sish tartibida joylashtiring?

Yechish: $b < a < c$. Ma'lumki, barcha musbat x larda $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x = x$, $\cos x$ esa $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bo'lganda kamayuvchidir. Shuning uchun

$\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$ bo'ladi.

Bu yerdan $b = \sin(\cos b) < \cos b$

$\cos c < \cos(\sin c) = c$ ya'ni

$\cos b - b > 0 = \cos a - a > \cos c - c$

Ammo $y = \cos x - x$ funksiya $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda kamayuvchi. Shuning uchun

$b < a < c$

2.1.46. (1985) (10)

Bir xil kublardan paralleloiped yasali, uning umumiy uchga ega bo'lgan uchta yog'i bo'lgani ma'lum bo'ladi. Bitta yog'i bo'yalgani ma'lum bo'ldi. Nechta kubning yog'i bo'lgan.

Yechish: Kubning yomonlari 1 ga teng deb faraz qilamiz. Paralleloiped $m \times n \times k$ o'lchovlarga ega bo'lsin, bu yerda $m \geq n \geq k$. U holda paralleloipedni tashkil qiluvchi kubiklar soni $\frac{1}{2}mnk$ ga bo'yalmagan kubiklar soni $(m-1)(n-1)(k-1)$ ga

teng. Shartga ko'ra

$mnk = 2(m-1)(n-1)(k-1)$ ko'rinib turibdiki $k > 2$. Bundan tashqari $k \geq 5$ da yuqoridagi tenglik o'rinli emas, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,512 \text{ va } 2(m-1)(n-1)(k-1) = 2mnk\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq 2mnk\left(\frac{4}{5}\right)^3 > mnk$$

$k = 3$ da tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$3mn = 4(m-1)(n-1)$ yoki shakl almashtirsak, $(m-4)(n-1) = 12$ hosil bo'lgan

$$\begin{cases} (m-4)(n-4) = 12 \\ m \geq n \geq 3 \end{cases}$$

sistema yechimlari (16;5), (10;6) va (8;4) bo'ladi.

$k = 4$ da esa

$$\begin{cases} (m-3)(n-3) = 6 \\ m \geq n \geq 4 \end{cases} \quad \text{bu sistemaning yechimlari (9;4), (6;5) bo'ladi. Shunday}$$

qilib bo'yalgan kubiklar soni 60, 72, 84, 90, 120 dan biriga teng bo'ladi.

2.1.47. (1985)(11)

Tenglamani yeching?

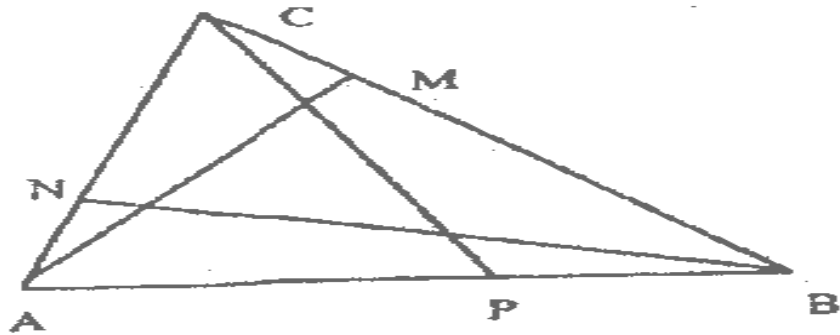
$$\frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}}$$

Yechish: $\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}$ bo'lgani uchun

$x < -1$ da ko'p zanjir kasr $\sqrt{x+1} - 1$ ga aynan teng bo'ladi.

$\sqrt{x+1} - 1 = 1$ tenglamadan $x = 3$ ni topamiz.

2.1.48. ABC uchburchakda M, N, P nuqtalar mos ravishda BC , AC va AB tomonlarda yotsa $p < AM + BN + CP < 3p$ bo'lishini isbotlang? (p - uchburchak yarim perimetri)



2.1.9-chizma (ABC uchburchak)

Yechish:

uchburchak tengsizligiga ko'ra $PC > AC - AP$ va $PC > CB - BP$

Bu tengsizliklarning mos qismlarini qo'shsak,

$$2PC > AC + CB - AP - BP = AC + CB - AB \text{ ya'ni } PC > \frac{1}{2}(AC + CB - AB) \text{ bo'ladi.}$$

Shuningdek, $BN > \frac{1}{2}(AB + CB - AC)$ va $AM > \frac{1}{2}(AC + AB - CB)$ u holda

$$AM + BN + CP > \frac{1}{2}(AC + AB + AB + CB + CB + AC - AB - AC - CB) = \frac{AB + BC + AC}{2} = p$$

CBP uchburchakdan $CP < CB + PB$ va ACP uchburchakdan $CP < AC + AP$.

Bulardan

$$CP < \frac{1}{2}(AC + CB + PB + PA) = \frac{AB + BC + AC}{2}$$

yoki $CP < p$ ni topamiz.

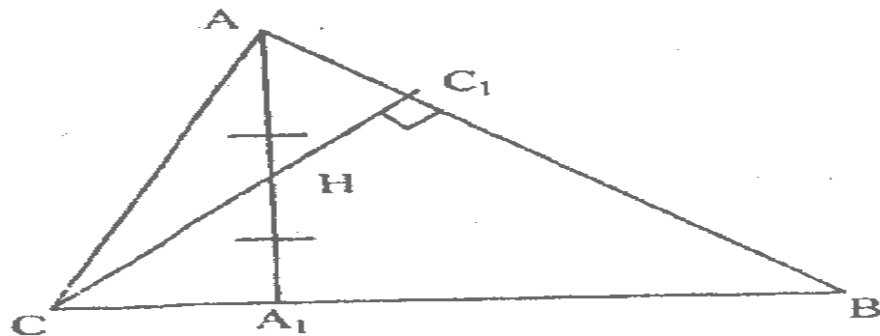
Shuningdek, $BN < p$ va $AM < p$. Ulardan $AM + BN + CP < 3p$ ni keltirib chiqaramiz.

Shunday qilib, $p < AM + BN + CP < 3p$

2.1.49. ABC uchburchakning AA_1 va CC_1 balandliklari uchburchak ichidagi H nuqtada kesishadi. $HA = HA_1$ va $CH = 2HC_1$ ekanligi ma'lum. B burchakni kattasini toping?

Yechish: $\angle HCA_1 = \angle HAC_1$ ga ko'ra $\sin \angle HCA_1 = \frac{HA_1}{CH} = \sin \angle HAC_1 = \frac{C_1H}{AH}$ yoki

$\frac{HA_1}{CH} = \frac{C_1H}{AH}$. U holda berilgan tengliklardan $HA_1 = \sqrt{2}HC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}HC$ tenglikni hosil qilamiz.



2.1.10-chizma (ABC uchburchak)

HCA uchburchakdan $\sin \angle HCA_1 = \frac{HA_1}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ya'ni $\angle HCA_1 = 45^\circ$.

U holda $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

Javob: 45°

2.1.50. Muntazam ABC uchburchakning BC tomonini kesib o'tuvchi AP nurda P nuqta shunday olinganki, $\angle APB = 20^\circ$ va $\angle APC = 80^\circ$ bo'lsa, $\angle BAP$ ni toping.

Yechish: Aytaylik $\angle BAP = x$ bo'lsin, u holda $\triangle APB$ va $\triangle APC$ uchburchaklar uchun Sinuslar teoremasini qo'llaymiz.

$$\frac{AB}{\sin 20^\circ} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - (20^\circ + x))} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 20^\circ} = \frac{AP}{\sin(20^\circ + x)}$$

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - (30^\circ + 60^\circ - x))}$$

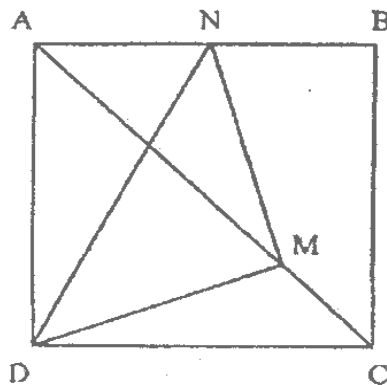
$$2AC = \frac{AP}{\cos x} \text{ bu tengliklarga ko'ra } \frac{AP}{2\cos x} = AC = AB = \frac{AP \cdot \sin 20^\circ}{\sin(20^\circ + x)} \text{ yoki}$$

$$\sin(20^\circ + x) = 2\cos x \sin 20^\circ \quad \sin(20^\circ - x) = 0 \Rightarrow x = 20^\circ$$

Javob: $\angle BAP = 20^\circ$.

2.1.51. N nuqta $ABCD$ kvadrat AB tomonining o'rtasi, AC diagonalning biror M nuqtasi uchun $AC = 4CM$ bo'lsa, u holda $\angle DMN = 90^\circ$ ekanligini isbotlang.

Yechish:



2.1.11-chizma ($ABCD$ kvadrat)

Kvadratning tomoni a bo'lsin. U holda $AC = \sqrt{2}a$. $AM = AC = \frac{AC}{4} = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$

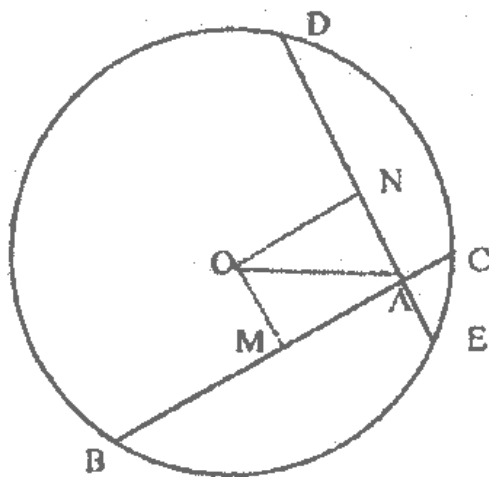
ADM uchburchakda kosinuslar

$$\text{teoremasigako'ra } DM^2 = a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2a \frac{3\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$

Shuningdek, ANM uchburchakda $NM^2 = \frac{5a^2}{8}$, ADN uchburchakda $DN^2 = \frac{5a^2}{4}$
 va. DMN uchburchakda $DM^2 + MN^2 = \frac{5a^2}{8} + \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^2}{4} = DN^2$. Demak, $\angle DMN = 90^\circ$.

2.1.52. Markazi O nuqtada bo'lgan r radiusli aylananing ichida A nuqta ($OA < r$) belgilangan. A nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpendikulyar BC va DE vatarlarning qanday holatida $BC + DE$ yig'indining qiymati eng katta bo'ladi?

Yechish: Aytaylik, M va N nuqtalar mos ravishda BC va DE vatarlarning o'rtalari bo'lsin. U holda $OM \perp BC$ va $ON \perp DE$ bo'ladi.



2.1.12-chizma (Markazi O nuqtada bo'lgan r radiusli aylana)

Ulardan $BC = 2BM = 2\sqrt{r^2 - OM^2}$

$DE = 2DN = 2\sqrt{r^2 - ON^2}$ bu tengliklardan foydalansak,

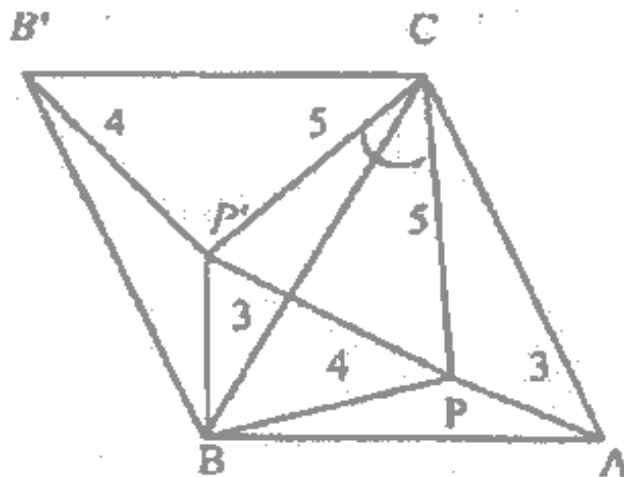
$$\begin{aligned} (BC + DE)^2 + (BC - DE)^2 &= 2(BC^2 + DE^2) = 8(r^2 - OM^2 + r^2 - ON^2) = \\ &= 8(2r^2 - OM^2 - ON^2) = 16r^2 - 8AO^2 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, $(BC + DE)^2 = 16r^2 - 8AO^2 - (BC - DE)^2$.

Bundan AO uzunlik o'zgarmas bo'ganligi uchun $BC + DE$ ifoda o'zining eng katta qiymati $2\sqrt{4r^2 - 2AO^2}$ ga faqatgina $BC - DE = 0$ yoki $BC = DE$ bo'lganda erishishi kelib chiqadi.

2.1.53. Teng yonli uchburchakning ichida olingan nuqtadan uchburchak uchlarigacha bo'lgan masofalar 3,4,5 birlikka ega. Uchburchakning yuzini toping.

Yechish: ABC berigan muntazam uchburchak bo'lsin. P esa uning ichidagi nuqta. $PA=3, PB=4, PC=5$ bo'lsin. ABC uchburchakning C uchi atrofida 60° ga bursak, A nuqta B nuqtaga, P nuqta P' nuqtaga o'tadi. U holda $P'B=PA=3, P'B'=PB=4, P'C=PC=5$ va CPP' uchburchak teng tomonli bo'ladi.



2.1.13-chizma (ABC teng yonli uchburchak)

Demak, BPP' to'g'ri burchakli uchburchak, chunki $PB'^2 + BP^2 = PP'^2$. APB va $BP'B'$ uchburchaklardan $\angle ABP + \angle BAP = \angle ABP + \angle B'BP' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Bundan $\angle APB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Kosinuslar teoremasiga ko'ra,

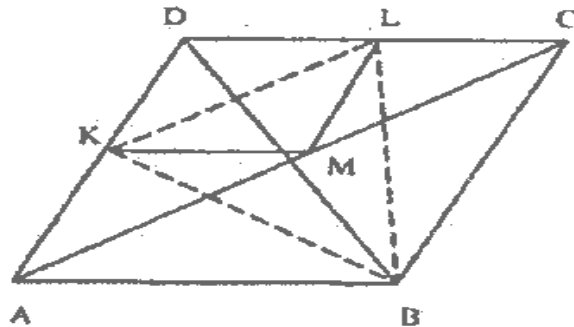
$$AB^2 = BP^2 + PA^2 - 2BP \cdot PA \cdot \cos \angle BPA = 25 + 12\sqrt{3}.$$

U holda $S = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$. **Javob:** $S = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$.

2.1.54. $ABCD$ rombda $\angle DAB = 60^\circ$ bo'lsin. Rombning AD va DC tomonlarida mos ravishda K va L nuqtalar, AC diagonalda esa M nuqta shunday tanlanganki, $KDLM$ parallelogramm bo'ladi. KBL uchburchak teng tomonli ekanligini isbotlang.

Yechish: Shartga ko'ra $ML \parallel AD$ va ADC teng yonli uchburchak bo'lgani uchun $KD = LM = LC$ bo'ladi. Demak, $\angle KBD = \angle LBC$ yoki $BK = BL$ bo'ladi, chunki $\angle KDB = \angle LCB = 60^\circ$, $BD = BC$. Bundan tashqari $\angle KBD = \angle LBC$ va

$\angle KBL + \angle KBD + \angle DBL = \angle LBC + \angle DBL = 60^\circ$. Shunday qilib, KBL -teng tomonli uchburchak.



2.1.14-chizma($ABCD$ romb).

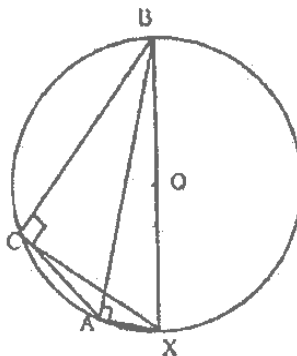
2.1.55. Tomonlari a, b, c va tashqi chizilgan aylana radiusi R bo'lgan uchburchak $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ bo'lganda va faqat shu holdagina to'g'ri burchakli bo'lishini isbotlang. tenglikdan

Yechish: Tomonlari a, b, c bo'lganda ABC uchburchak markazi O nuqtada va radiusi R bo'lgan, BX diametrli aylana ichki chizilgan. $AX = h$ va $CX = k$ bo'lsin. Agar $h = 0$ bo'lsa, agar $k = 0$ bo'lsa $\angle CAB = 90^\circ$ va

$8R^2 = (2R)^2 + (2R)^2 = c^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $k \neq 0$ va $h \neq 0$ bo'lsin. U holda

$\angle BAX = \angle BCX = 90^\circ$ ekanligidan $h^2 + c^2 = 4R^2$ va $k^2 + a^2 = 4R^2$ yoki

$8R^2 = a^2 + c^2 + k^2 + h^2$. Agar $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$ bajarilsa $k^2 + h^2 = b^2$ ham bajariladi. Bu yerdan esa $\angle CXA = 90^\circ$ va $\angle CXA = \angle CBA$ tenglikdan ABC uchburchak to'g'ri burchakli uchburchak ekanligi kelib chiqadi



2.1.15-chizma.(To'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana).

2.2. Mustaqil yechish uchun masalalar

2.2.1. Duskada bir nechta son yozilgan. Ma'lumki, yozilgan sonlar orasidagi ixtiyoriy sonning kvadrati qolgan sonlar orasidagi ixtiyoriy ikkita sonning ko'paytmasidan katta. Duskada ko'pi bilan nechta son yozilgan bo'lishi mumkin?

2.2.2. Uchburchak ABC ning ichida O nuqta shunday olinganki, bunda $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90^\circ$. U holda $AC:OC$ nisbatni hisoblang.

2.2.3. Ma'lumki ushbu $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ kvadrat uchhadlarning ixtiyoriy ikkitasining yig'indisidan tuzilgan kvadrat uchhadlar ildizga ega emas. Yuqoridagi uchala kvadrat uchhadning yig'indisidan tuzilgan kvadrat uchhad ildizga egami?

2.2.4. Haqiqiy a, b, c, d sonlar $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ tenglikni qanoatlantirsa, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$ tengsizlikni isbotlang.

2.2.5. ABC teng yonli bo'lmagan va o'tkir burchakli uchburchak bo'lib, C_0 va B_0 nuqtalar mos ravishda AB va AC tomonlarni o'rtalaridir. O nuqta ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi, H nuqta esa balandliklar kesishgan nuqtadir. BH va OC_0 to'g'ri chiziqlar P nuqtada, CH va OB_0 to'g'ri chiziqlar esa Q nuqtada kesishadi. Agar $OPHQ$ to'rtburchak romb bo'lsa, u holda A, P va Q nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

2.2.6. Ushbu $4x^2 + 4x^2y - 15xy^2 - 18y^2 - 12x^2 + 6xy + 36y^2 + 5x - 10y = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha (x, y) butun sonlar juftliklarini toping.

2.2.7. Uchburchak ABC ning BB_1 va CC_1 bissektrisalari o'tkazilgan. Ma'lumki, uchburchak BB_1C_1 ga tashqi chizilgan aylana markazi AC to'g'ri chiziqda yotadi. ABC uchburchakning C burchagini toping.

2.2.8. Uchta keltirilgan kvadrat tenglamaning diskriminantlari 1, 4, va 9. Bu tenglamalarning har birini bittadan ildizlarini shunday tanlash mumkinligini isbotlangki, bularning ildizlari qolgan ildizlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

2.2.9. a, b, c, d -nomanfiy haqiqiy sonlar bo'lib, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ tenglikni qanoatlantirsa, $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$ tengsizlikni isbotlang.

2.2.10. $ABCD$ qavariq to'rtburchakda $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$ tenglikni isbotlang.

2.2.11. Agar a, b, c -nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

tengsizlikni isbotlang.

2.2.12. ABC uchburchakka ichki chizilgan aylananing O markazidan AO to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tuvchi to'g'ri chiziq BC to'g'ri chiziqni M nuqtadan kesib o'tadi. O nuqtadan AM to'g'ri chiziqqa OD perpendikulyar tushirilgan. A, B, C va D nuqtalar bitta aylanada yotishini isbotlang.

2.2.13. Ushbu $P(x^2) + x(3P(x) + P(-x)) = (P(x))^2 + 2x^2, \forall x \in R$ tenglikni qanoatlantiruvchi, barcha haqiqiy koeffitsientli $P(x)$ ko'phadlarni toping.

2.2.14. x, y -natural sonlar shundayki,

$$\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$$

Kasrlar yig'indisining qiymati butun son bo'ladi. Ko'rsatilgan kasrlarning har birining qiymati butun son bo'lishini isbotlang.

2.2.15. Teng yonli bo'lmagan ABC o'tkir burchakli uchburchakda AA' va CC' balandliklar o'tkazilgan. H balandliklarning kesishish nuqtasi, O -tashqi chizilgan aylana markazi, B_0 - AC tomonning o'rtasi. BO to'g'ri chiziq AC tomonni P nuqtada kesib o'tadi, BH va A_1C_1 to'g'ri chiziqlar esa Q nuqtada kesishadi. HB_0 va PQ to'g'ri chiziqlar parallel ekanligini isbotlang.

2.2.16. Rombning tomoni diagonalларining o'rta geometrigiga teng bo'lsa, rombning o'tkir burchagini toping.

2.2.17. Yig'indini hisoblang: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!}, (n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n).$

2.2.18. a ning eng katta qiymatini toping, bunda $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ tenglama butun koeffitsientli, uchta turli haqiqiy ildizga ega va bu ildizlardan biri -2 bo'lsin.

2.2.19. To'g'ri burchakli uchburchakning a, b, c tomonlari geometric progressiya tashkil qiladi va $abc = 1$. Uchburchak tomonlarini toping.

2.2.20. Tengsizlikni isbotlang: $x^{10} + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$.

2.2.21. a sonining arifmetik progressiya tashkil qiluvchi 4 ta haqiqiy ildizlarga ega bo'ladigan barch qiymatlarini toping.

2.2.22. Agar $x > -1, y > -1$ va $z > -1$ bo'lsa, u holda

$$S = \frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2 \text{ tengsizlikni isbotlang.}$$

2.2.23. Tenglamaning barcha yechimlarini toping:

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

2.2.24. Musbat a, b, c haqiqiy sonlar $ab + bc + ca = 3$ tenglikni qanoatlantirsa

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}.$$

2.2.25. $ABCD$ trapetsiyada ($BC \parallel AD$), $2AB = CD$, $BC < AD$, $\angle BAD + \angle CDA = 120^\circ$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, trapetsiyalarning burchaklarini hisoblang.

2.2.26. Yuzasi S_1 va perimetri P_1 bo'lgan uchburchakning ichida yuzasi S_2 va perimetri P_2 bo'lgan boshqa uchburchak joylashgan. Ushbu $2 \cdot \frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}$ tengsizlikni isbotlang.

2.2.27. $\{a_n\}$ -ketma-ketlik $\forall n \in N, n \geq 1$ uchun $a_1 = 1$ va $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ tengliklarni qanoatlantiradi. U holda a_{1001} ni hisoblang.

2.2.28. Funksiyaning eng kichik qiymatini toping:

$$f(x, y) = |x - y| + \sqrt{(x + y)^2 + (y - 4)^2}.$$

2.2.29. Markazi O nuqtada bo'lgan aylanada AB va CD O 'zaro perpendikulyar vatarlar E nuqtada kesishadi. N va T nuqtalar mos ravishda AC va

BD kesmalarning o'rtalari bo'lsa, $ENOT$ to'rtburchak parallelogram ekanligini isbotlang.

2.2.30. Yig'indini hisoblang: $\frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots + \frac{n(n+2)!}{3^n}$.

II bobning xulosasi

Bitiruv malakaviy ishimning ikkinchi bobi olimpiada masalalariga bag'ishlangan bo'lib unda bir necha yillar davomida olimpiadalarda foydalanib kelingan masalalar yuzlab to'plandi va ular saralanib bir nechta ushbu bobdan o'rin olgan Ushbu bob ikki qismdan iborat bo'lib, unda olimpiada masalalari va ularning yechimlari va mustaqil yechish uchun masalalar keltirilgan.

Olimpiada masalalari olimpiada testlariga nisbatan birmuncha murakkab va fikr-mulohazalar yuritishga majbur qiladigan, yechish uchun ancha vaqt talab qiyadigan misol va masalalardan iborat bo'ladi. Olimpiada masalalarini yechishda eng avvalo kuchli bilim va bundan tashqari keng dunyoqarash hamda o'tkir zehn, diqqat-e'tibor talab etiladi. Oddiygina masalalar yechishda masala shartini tushunish eng katta ahamiyatga ega bo'lib hisoblanadi. Kimki masala shartini to'g'ri tushuna olsa, o'sha o'quvchi masalani ellik foizga yecha olgan hisoblanadi. Matematik olimpiadalarda yozma ishlarni tekshirishda har bir to'g'ri qo'yilgan qadam uchun ballar beriladi. Olimpiadada yozma ish masalalarini yechishda ham, test savollarini yechishda ham to'g'ri javobni topish talab etiladi. Ammo, testda faqat to'g'ri javob inobatga olinadi, masalalar yechishda esa to'g'ri javob topilmagan bo'lsada har bir to'g'ri va aniq keltirilgan fikr, formula, teorema yoki ta'riflar uchun ballar beriladi. Bu esa ishtirokchilarning bilim saviyasini aniqlashning eng samarali usulidir. Lekin, matematika fani aniqlikni yoqlaydigan fandir. Shu sababli men masalalarni yig'ishda aniqlikdan uzoqlashmagan holda aniq yechim yoki isbotni talab etuvchi masalalarni to'plashga harakat qildim. Va mening bitiruv malakaviy ishimning ikkinchi bobida matematika fanining turli mavzulariga oid turli-tuman masalalarini o'zida qamrab oldi va bu kelajakka qisman bo'lsada xizmat qila oladigan masalalar to'plami vazifasini o'tay oladi deb o'ylayman.

Xotima.

Matematika qiziqarli va keng qamrovli fandır. Fanlar shohi bo'lmish matematika faniga yangiliklar kiritish mumkin, qaysidir ishni davom ettirish, yangi ta'rif, teorema, aksiomalar kiritish mumkindir lekin uni to'laligicha o'rganishga hozirgacha biror bir olim musharraf bo'lgan emas. Shunday ekan, uning qaysidir bir bo'lagini rivojlantirish uchun o'zimizning ozgina bo'lsada hissamizni qo'shish biz yoshlar uchun muhim vazifalardandır. Respublikamiz yoshlarining fan olimpiadalarida ishtiroklari va muvaffaqiyatlari orqali nafaqat ilm-fan sohasining rivojiga, balki, vatanimiz kelajagining yuksalishiga imkon darajasida harakat qilishning yana bir ko'rinishidir. Bitiruv malakaviy ishim olimpiadalarga tayyorgarlik ko'ruvchi yoshlarga qaysidir ma'noda yordam beradi va undan zaruriy qo'llanma sifatida foydalanishsa, fanimiz rivojiga baholiquidrat o'z hissamizni qo'shishga sazovor bo'lardik deb o'ylayman, albatta.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

- 1.Karimov I.A. “Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevori” “Sharq” nashriyoti, Toshkent-1998y.,31-53 betlar.
- 2.Karimov I.A. “Yuksak ma'naviyat-yengilmas kuch”, Toshkent-2008y., 27-45 betlar.
- 3.Karimov I. A. “Barkamol avlod orzusi”, “Sharq” nashriyoti, Toshkent-1999y., 11-29 betlar.
- 4.Ismailov Sh., Qo'chqorov A., Abdurahmonov B. “Tengsizliklar-I” (Isbotlashning klassik usullari), Toshkent-2008y. 17-40 betlar.
- 5.Ismailov Sh., Ibragimov O. “Tengsizliklar-II” (Isbotlashning zamonaviy usullari), Toshkent-2008y. 7-49 betlar.
6. Qo'chqorov A., Rasulov J. “Tengsizliklar-III” (Masalalar to'plami), Toshkent-2008y., 9-55 betlar.
- 7.Yunusov S.A., Afonini S.I., Berdiqulov M.A., Yunusova D.I. “Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari” (Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun), “O'qituvchi” nashriyoti, Toshkent-2007y.,9-37 betlar.
- 8.Ayupov Sh.A., Rxsiyev B.B., Qo'chqorov O.Sh. “Matematika olimpiadalari masalalari” I qism, “Fan” nashriyoti, Toshkent-2004y. 13-42 betlar.
- 9.Ismailov Sh., Axmedov O., Ro'ziboyev M. “Matematikadan olimpiada testlari”, Toshkent-2008y., 17-29 betlar.
- 10.2010-2012 yillard olimpiadalarining viloyat bosqichida matematika fanidan qo'yilgan testlar va masalalar to'plami.

11.1979-1989 yillarda viloyat, jumhuriyat hamda tashqi olimpiadalarda matematika fanidan qo'yilgan masalalar jamlanmasi.

12.Аъзамов А. “ Ёш математик қомусий луғати”, қомуслар бош таҳририяти, Тошкент-1992й. 218 бетлар

13. Аъзамов А.А.,Ҳайдаров Б.К. “Математика сайёраси”, “Ўқитувчи” нашриёти,Тошкент-1993й.,289-301 бетлар.

14. www.mccmi.ru

15. www.intuit.ru

16. www.zn.uz

17. www.math.uz