

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

қўлёзма ҳуқуқида
УДК 519.2

Кенжаев Ойбек Азаматжонович

**ҲОСИЛ ҚИЛУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР УСУЛИНИНГ
ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ БАЪЗИ
МАСАЛАЛАРИГА ТАТБИҚИ**

5A460104-Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика

МАГИСТР

Академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

**Илмий раҳбар
ф.-м.ф.д., проф.
Т.М.Зупаров**

Тошкент – 2011

мундарижа

Кириш.....	3
1-Боб. Ҳосил қилувчи функциялар таърифи ва уларнинг асосий хоссалари.....	4
1.1-§. Ҳосил қилувчи функциянинг таърифи ва баъзи хоссалари.....	4
1.2- §.Ҳосил қилувчи функцияларни ҳисоблаш ва улар ёрдамида мос тақсимотларни аниқлаш.....	17
2-Боб. Ҳосил қилувчи функциялар ёрдамида масалалар ечиш.....	20
2.1-§.Заррачанинг тўғри чизикда ва текисликда изғиши масаласида ҳосил қилувчи функциянинг ишлатилиши.....	20
2.2-§. Ҳосил қилувчи функциянинг тармоқланувчи жараён масаласида ишлатиш.....	23
3-Боб. Ҳосил қилувчи функциянинг суғурта жарёнининг масалаларида ишлатиш.....	29
3.1-§. Моментлар ҳосил қилувчи функциялари ва уларнинг асосий хоссалари.....	29
3.2-§. Суғурта жараёнида энг кўп учрайдиган тақсимотлар.....	33
3.3-§. Суғурта тўловларининг жамғарма қийматлари.....	41
Хулоса.....	45
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.....	46

Кириш.

Ушбу магистирлик диссертацияси ҳосил қилувчи функциялар усулини эҳтимоллар назариясининг баъзи масалаларига тадбиқига бағишланади. Ҳосил қилувчи функцияларни биринчи маротаба Муавр ва Лаплас ишлатган. Аввал эҳтимоллар назариясининг баъзи бир масалаларини ечишда ишлатилган ҳосил қилувчи функциялар кейинчалик алгебрада

инвариантлар назариясини ўрганишда, аналитик сонлар назариясида, комбинаторикада кенг қўламда ишлатилган. Ҳосил қилувчи функциялар сонли кетма-кетликлар учун ҳам ишлатилган бўлиши билан бирга у функционал кетма-кетликлар учун ҳам ишлатилган.

Тавсия этилаётган ушбу магистрлик диссертация иши ҳосил қилувчи функцияларнинг хоссаларини ўрганиш ва уларни эҳтимоллар назариясининг баъзи масалаларини ечиш учун қўллашга бағишланган бўлиб, у кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

Диссертациянинг биринчи боби ҳосил қилувчи функциянинг таърифи ва унинг асосий хоссаларига бағишланган. Шу билан бирга бу бобда эҳтимоллар назариясида кўп қўламда ишлатиладиган асосий тақсимотларга мос келган ҳосил қилувчи функциялар ҳисобланган ва улар ёрдамида бу тақсимотларнинг сонли характеристикалари топилган. Диссертациянинг иккинчи бобида ҳосил қилувчи функциялар назарияси заррачани тўғри чизиқда ва текислиқда санғиши масаласини ўрганишга, ҳамда Гальтон – Ватсон тармоқланувчи жараёнининг баъзи масалаларини ечишга татбиқ этилган. Диссертациянинг учинчи боби суғурта жараёнининг масалаларига бағишланган бўлиб, унда суғурта воқеаларининг сони N , айрим тўловлар миқдори X_i ва жамғарма тўловлар миқдори $S_N = X_1 + \dots + X_N$ ни ҳисоблаш учун ҳосил қилувчи функциялар назариясидан фойдаланилган ҳамда олинган натижалар ёрдамида суғурта жараёнини бошқариш учун керакли хулосалар чиқарилган.

1-Боб. Ҳосил қилувчи функциялар таърифи ва уларнинг асосий хоссалари

§1.1 Ҳосил қилувчи функциянинг таърифи ва баъзи хоссалари

Дискрет тасодифий миқдорлар орасида фақат бутун $n = 0, 1, 2, \dots$ қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлар муҳим ҳисобланади. Бундай тасодифий миқдорларни ўрганишда энг умумий ва қулай усул бу ҳосил қилувчи функциялар усулидан иборат. Бу усул эҳтимоллар назариясининг кўп масалаларини ечиш учун асос бўлади. Эҳтимоллар назариясида ҳосил қилувчи функциялар Муавр ва Лаплас замонидан бошлаб ишлатиб келинишига қарамай, унинг имкониятлари кенг қўламда жуда кам ишлатилган.

Биз қўйида ҳосил қилувчи функциянинг таърифини келтирамиз.

1-Таъриф. X -тасодифий миқдор $n = 0, 1, 2, \dots$ бутун қийматларни $p_n = P\{X = n\}$ эҳтимоллар билан қабул қилсин. $|z| \leq 1$ оралиқда аниқланган

$$P(z) = p_0 + p_1 \cdot z + p_2 \cdot z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot z^n \quad (1.1)$$

функцияга X тасодифий миқдорнинг ҳосил қилувчи функцияси дейилади. Ҳосил қилувчи функцияни умуман ихтиёрий $\{a_n; n \geq 0\}$ кетма-кетлик учун

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad (1.2)$$

кўринишида ифодалаш мумкин.

(1.2) ифоданинг ўнг томонидаги даражали қатор комплекс сонлар текислигининг маркази

0 нуқтада ва радиуси эса ушбу $r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ формула билан аниқланувчи доирада яқинлашади.

$$p_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(0); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

тенглик ўринли бўлгани учун (1.1) ва (1.3) формулалар X тасодифий миқдорнинг $\{p_n\}$ - таксимот қонуни билан $P(z)$ - ҳосил қилувчи функцияси орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади.

Фараз қилайлик X - тасодифий миқдор $0, 1, 2, \dots$ бутун қийматларни қабул қилсин. X - тасодифий миқдорнинг таксимои учун ҳам ва унинг “думлари” учун ҳам алоҳида белгилашларни киритиш қулай. Уларни қўйидагича белгилаймиз.

$$P\{X = j\} = p_j, \quad P\{X > j\} = q_j \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

у ҳолда

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + \dots \quad k \geq 0 \quad (1.5)$$

бўлади.

$\{p_j\}, \{q_k\}$ кетма-кетликларнинг ҳосил қилувчи функцияси ушбу

$$P(z) = p_0 + p_1 \cdot z + p_2 \cdot z^2 + \dots \quad (1.6)$$

$$Q(z) = q_0 + q_1 \cdot z + q_2 \cdot z^2 + \dots \quad (1.7)$$

формулалар оркали ифодаланади. $P(1) = 1$ тенглик ўринли бўлгани учун (1.6) қатор ҳеч бўлмаганда $-1 \leq z \leq 1$ оралиқда абсолют яқинлашади. (1.7) қатор коэффисентлари 1 дан кичик шунинг учун у ҳеч бўлмаганда $-1 < z < 1$ оралиқда яқинлашади.

1-Теорема. $-1 < z < 1$ оралиқда

$$Q(z) = \frac{1 - P(z)}{1 - z} \quad (1.8)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Агар $n \geq 1$ бўлса z^n олдида турган коэффицент $q_n - q_{n-1} = -p_n$ $(1 - z) \cdot Q(z)$ ни ёйилмасидан ҳосил бўлади ва агар $n = 0$ да $q_0 = p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1 - p_0$ га тенг бўлгани учун. $(1 - z) \cdot Q(z) = (1 - P(z))$ теоремадаги тенглик ўринли бўлади.

Энди баъзи энг кўп ишлатиладиган тасодифий миқдорларнинг ҳосил қилувчи функцияларини ҳисоблаймиз.

1-Мисол. (n, p) параметрли биномиал қонун бўйича тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$p_n(k) = b(k, n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$$

бўлгани учун

$$P_\xi(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (q + pz)^n$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ҳосил қилувчи функция $q + pz$ биномнинг n даражасига тенг эканлиги $\{b(k, n, p)\}$ тақсимот μ қўшилувчининг ҳар бири 0 ва 1 қийматларини мос равишда q ва p эҳтимоллар билан қабул қилувчи ва n та боғлиқсиз тасодифий миқдорлар $\mu(n) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ йиғиндисининг тақсимотидан иборат бўлади.

2-Мисол. λ -параметрли Пуассон тақсимотиға эга бўлган ξ – тасодифий миқдорнинг ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$p_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad n=0,1,2,\dots$$

бўлгани сабабли

$$P_{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{\lambda(z-1)}$$

га тенг.

3-Мисол. p - параметрли геометрик тақсимотга эга бўлган ξ тасодифий миқдорнинг ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$p_n = q^n p, \quad n=0,1,2,\dots$$

бўлгани учун ξ нинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n p z^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (qz)^n = \frac{p}{1-qz}$$

га тенг.

Бернулли тажрибалар кетма-кетлигида n -та "ютқизишдан кейин биринчи марта ютук чиқиш" эҳтимоли $q^n p$ га тенг бўлгани учун ξ тасодифий миқдори биринчи марта ютук чиқишини кутиш вақти деб талқин қилиш мумкин.

4-Мисол. ξ - тасодифий миқдор $0,1,\dots,N$ қийматларни $\frac{1}{N+1}$ эҳтимоллар билан қабул қилсин. ($\xi \in [0, N]$ ораликда текис тақсимланган бутун қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор), унинг ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$P_{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N+1} z^n = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{(N+1)(1-z)}.$$

Энди (1) тенгликнинг ҳар иккала томонидан ҳосила оламиз.

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n \cdot z^{n-1} \quad (1.9)$$

бу ерда қатор ҳеч бўлмаганда $-1 < z < 1$ ораликда яқинлашади. (1.9) ифоданинг ўнг қисми $z = 1$ да формал равишда $\sum n \cdot p_n = M(X)$ га тенг бўлади.

Агар математик кутилма мавжуд бўлса, $P'(z)$ ҳосила $-1 \leq z \leq 1$ ораликда узлуксиз бўлади. Агар $\sum n \cdot p_n$ қатор узоклашса, у ҳолда $z \rightarrow 1$ да $P'(z) \rightarrow \infty$ бўлади. Бу ҳолда биз X - чексиз математик кутилмага эга деймиз ва $P'(1) = M(X) = \infty$ деб ёзамиз. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани (1.8) нисбатнинг ўнг қисмидаги қасрнинг суратига қўллаб $Q(z) = P'(\sigma)$ тенгликни оламиз, бу ерда $\sigma = z$ ва 1 орасидаги қандайдир сон, иккала функция ҳам монотон ўсгани учун бундан келиб чиқадики $P'(z)$ ва $Q(z)$ бир хил чекли ёки чексиз лимитга эга ва уларни биз $P'(1)$ ёки $Q(z)$ орқали белгилаймиз.

2-Теорема. $M(X)$ математик кутилма

$$M(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \quad (1.10)$$

муносабатни қаноатлантиради, ёки ҳосил қилувчи функциялар тилида

$$M(X) = P'(1) = Q(1) \quad (1.11)$$

тенглик ўринли.

(9) тенгликни дифференциаллаб ва $P'(z) = Q(z) - (1-z)Q'(z)$

муносабатни қўллаб шу усул билан

$$M(X(X-1)) = \sum n(n-1)p_k = P''(1) = 2Q'(1) \quad (1.12)$$

ни топамиз. X тасодикий миқдорни дисперсиясини топиш учун бу ифодага $M(X) - M^2(X)$ ни қўшишимиз керак, бу эса кейинги теоремага олиб келади.

3-Теорема. X -тасодикий миқдор дисперсияси учун қуйидаги

$$D(X) = P''(1) + P'(1) - P'^2(1) = 2Q'(1) + Q(1) - Q^2(1) \quad (1.13)$$

тенглик ўринли. Агар дисперсия чексиз бўлса, у ҳолда $z \rightarrow 1$ да $P''(z) \rightarrow \infty$ бўлади.

ва (1.13) формулалар $M(X)$ ва $D(X)$ ҳисоблашда оддий усулни беради.

Энди биз учун аҳамиятга эга бўлган свёртка тушунчасини келтирамиз.

Свёртка

Агар X тасодифий миқдор фақат манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилса, унда Z^X янги тасодифий миқдор бўлади, ва X миқдорнинг тақсимооти учун ҳосил қилувчи функцияни оддийгина $M(z^X)$ кўринишда ёзиш мумкин.

Агар X ва Y боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда Z^X ва Z^Y тасодифий миқдорлар ҳам боғлиқ бўлмайди, шунинг учун

$$M(z^{X+Y}) = M(z^X)M(z^Y)$$

тенглик ўринли бўлади. Бизга фойдали умумлашмани берувчи бошқа исботни ҳам келтирамиз.

X ва Y мос равишда $P\{X = j\} = a_j$ ва $P\{Y = j\} = e_j$ эҳтимоллар тақсимоотига эга, манфий бўлмаган боғлиқсиз тасодифий миқдорлар бўлсин. У ҳолда $\{X = j, Y = k\}$ ҳодиса $a_j e_k$ эҳтимолларга эга бўлади. $S = X + Y$ йиғинди янги тасодифий миқдор ва $S=r$ ҳодиса ушбу

$$(X = 0, Y = r), (X = 1, Y = r - 1), \dots, (X = r, Y = 0)$$

биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг бирлашмасидан иборат. Шунинг учун

$$c_r = P\{S = r\} \text{ тақсимоот}$$

$$c_r = a_0 e_r + a_1 e_{r-1} + \dots + a_{r-1} e_1 + a_r e_0 \quad (1.14)$$

формула орқали ифодаланади. Биз куйида свёртканинг таърифини келтирамиз.

2-Тариф. Айтайлик $\{a_k\}$ ва $\{e_k\}$ иккита ихтиёрий сонлар кетма-кетлиги (Эҳтимоллар тақсимооти бўлиши шарт эмас) бўлсин. (1.14) формула билан аниқланувчи янги $\{c_k\}$ кетма-кетлик $\{a_k\}$ ва $\{e_k\}$ кетма-кетликнинг свёрткаси дейилади.

ва

$$\{c_k\} = \{a_k\} * \{e_k\} \quad (1.15)$$

деб белгиланади.

5-Мисоллар. а) Агар ихтиёрий $k \geq 0$ учун $\{a_k\} = \{e_k\} = 1$ бўлса унда $\{c_k\} = k + 1$ бўлади.

в) Агар $\{a_k\} = k$, $\{e_k\} = 1$ бўлса унда $c_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ бўлади, ва нихоят агар

ихтиёрий $k \geq 2$ учун $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ бўлса унда $c_k = \frac{(e_k + e_{k+1})}{2}$ ва ҳаказо.

Айтайлик $\{a_k\}$ ва $\{b_k\}$ кетма-кетликлар мос равишда $A(z) = \sum a_k z^k$ $B(z) = \sum b_k z^k$ ҳосил қилувчи функцияларга эга бўлсин. $A(z)B(z)$ кўпайтманинг $A(z)$ ва $B(z)$ учун даражали қаторларни бўлаклаб кўпайтирган ҳолда олиш мумкин. z нинг бир хил даражадаги ҳадларни йиғиб кўрамизки z^x олдидаги C_r коэффисцент (1.14) формула орқали берилади. Шундай қилиб ушбу теорема ўринли.

4-Теорема. Агар $\{a_k\}$ ва $\{b_k\}$ - $A(z)$ ва $B(z)$ ҳосил қилувчи функцияли кетма-кетлик, ва $\{c_k\}$ эса уларнинг свёрткаси бўлса унда

$$C(z) = \sum c_k z^k$$

ҳосил қилувчи функция

$$C(z) = A(z)B(z) \quad (1.16)$$

кўпайтмага тенг. Агар X ва Y - $A(z)$ ва $B(z)$ ҳосил қилувчи функцияга эга манфий бўлмаган бутун сонли тасодифий миқдор бўлса, унда уларнинг $X+Y$ йиғиндиси $A(z)B(z)$ ҳосил қилувчи функцияга эга.

Айтайлик энди $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}, \{d_k\}, \dots$ қандайдир кетма-кетликлар бўлсин. Биз энди $\{a_k\} * \{b_k\}$ свёртка ҳосил қилишимиз мумкин, кейин бу янги кетма-кетлик ва $\{c_k\}$ кетма-кетликнинг свёрткасини ва ҳаказо. $\{a_k\} * \{b_k\} * \{c_k\} * \{d_k\}$ нинг ҳосил қилувчи функцияси $A(z)B(z)C(z)D(z)$ га тенг, бундан келиб чиқадики свёрткалар ҳосил бўлиши тартиби аҳамиятсиз. Масалан $\{a_k\} * \{b_k\} * \{c_k\} = \{c_k\} * \{b_k\} * \{a_k\}$ ва ҳаказо. Шундай қилиб свёртка ассоциативлик ва коммутативлик хоссасига эга (ҳудди тасодифий миқдорлар қўшилишидагидек).

Боғлиқ бўлмаган X_n тасодифий миқдорларни ўрганишда бу миқдорларнинг бир хил тақсимотга эга бўлган хусусий ҳолларига кўпроқ эътибор берилади.

Агар $\{a_j\}$ - X_n миқдорларининг эҳтимоллар умумий тақсимоти бўлса унда $S_n = X_1 + \dots + X_n$ йиғинди тақсимотини

$$\{a_j\}^{n*}$$

орқали белгилаймиз. Шундай қилиб

$$\{a_j\}^{2*} = \{a_j\} \{a_j\}, \{a_j\}^{3*} = \{a_j\}^{2*} \{a_j\}, \dots \quad (1.17)$$

ва умуман

$$\{a_j\}^{n*} = \{a_j\}^{(n-1)*} * \{a_j\} \quad (1.18)$$

бўлади.

Бошқа сўз билан айтганда $\{a_j\}^{n*} A^n(z)$ ҳосил қилувчи функцияга эга сонлар кетма-кетлиги. Хусусан $\{a_j\}^{1*}$, $\{a_j\}^*$ мос келади, $\{a_j\}^{0*}$ эса $A^0(z) = 1$ ҳосил қилувчи функцияга эга кетма-кетлик деб аниқланади демак $(1, 0, 0, \dots)$ кетма-кетлик.

6-Мисоллар. а) $p_n(k) = v(k, n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}$ биномиал тақсимотнинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k (pz) q^{n-k} = (q + pz)^n \quad (1.19)$$

га тенг.

Бу ҳосил қилувчи функция $q + p \cdot z$ биномнинг n чи даражаси эканлигини билдирадики $\{b(k; n; p)\}$ $S = X_1 + \dots + X_n$ бир хил $q + p \cdot z$ ҳосил қилувчи функцияга эга n та боғлиқсиз тасодифий миқдор йиғиндиси тақсимоти ҳар бир миқдор q эҳтимол билан нол қийматга ва p эҳтимол билан 1 қийматга эга. Шундай қилиб

$$\{b(k; n; p)\} = \{b(k; 1; p)\}^{n*} \quad (1.20)$$

Аввалги фикрлашни бином тақсимоти янги хулосаси учун қўллаш мумкин.

$$(q + p \cdot z)^m \cdot (q + p \cdot z)^n = (q + p \cdot z)^{m+n}$$

мультипликативлик хоссасидан

$$\{b(k; m, p)\} * \{b(k; n, p)\} = \{b(k; m + n, p)\}$$

тенглик келиб чиқади. $(q + p \cdot z)^n$ ҳосил қилувчи функцияни дифференциаллаб $M(S_n) = n \cdot p$ ва $D(S_n) = n \cdot p \cdot q$ нинг исботини осон топиш мумкин.

в) Пуассон тақсимоти. $P(k; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ тақсимотнинг ҳосил қилувчи функцияси

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda + \lambda z} \quad (1.21)$$

келиб чиқадики бундан

$$\{P(k; \lambda)\} * \{P(k; \mu)\} = P\{k; \lambda + \mu\} \quad (1.22)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан келиб чиқадики, λ ва μ параметрли Пуассон тақсимотининг свёртки параметри $\lambda + \mu$ бўлган Пуассон тақсимотига тенг.

Факториал моментлар

X тасодифий миқдор бутун (манфий бўлмаган) қийматларни қабул қилса, у ҳолда MX^r моментлар ўрнига ушбу $MX^{[r]} = MX(X-1)\dots(X-r+1)$ факториал моментлар билан иш олиб бориш қулайроқ. $MX^{[r]}$ факториал моментларни MX^r моментлар орқали ифодалаш мумкин ва аксинча. Масалан, биринчи факториал момент математик кутилмага тенг, MX^2 эса

$$MX^2 = MX^{[2]} + MX$$

бўлади ва демак $DX = MX^{[2]} + MX - (MX)^2$ тенгликлар ўринли.

Факториал моментлар ҳосил қилувчи функцияларнинг ҳосилаларини $z = 1$ нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланади. Ихтиёрий бутун мусбат r учун

$$MX^{[r]} = P_X^{(r)}(1) \quad (1.25)$$

тенглик ўринли.

Агар $P(z)$ ни аниқловчи (1) қатор қандайдир $z > 1$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда, уни $z = 1$ нуқтада ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин ва натижада биз

$$P^{(r)}(1) = \sum_n p_n n^{[r]} \quad (1.26)$$

тенгликга эга бўламиз.

Акс ҳолда $P_X^{(r)}(1)$ ни биз $\lim_{z \uparrow 1} P^{(r)}(z)$ орқали ифодалаймиз ва яна

(1.26) тенгликга келамиз.

$$MX^{[r]} = \sum_n n^{[r]} p_n$$

бўлганги сабабли, (1.26) тенглик (1.25) ни исботлайди.

(1.25) тенгликнинг ҳар иккала томони ҳам чексиз бўлиб қолиши мумкин.

Шундай қилиб MX ва DX ларни $P_X(z)$ орқали қуйдагича ифодалаш мумкин.

$$MX = P_X'(1) \quad (1.27)$$

$$DX = P_X''(1) + P_X'(1) - [P_X'(1)]^2 \quad (1.28)$$

Юқорида биз ҳосил қилувчи функцияларнинг мультипликативлик хоссасини исботлаган эдик. Бунини биз қўйидаги теорема шаклида ифодалаймиз.

5-Теорема. Агар $X_1, X_2, \dots, X_n$ - манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилувчи боғлиқсиз тасодифий миқдорлар бўлиб

$$P_{X_k}(z), k = 1, 2, \dots, n$$

мис равишда уларнинг ҳосил қилувчи функциялари бўлса, у ҳолда

$$P_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}(z) = \prod_{k=1}^n P_{X_k}(z) \quad (1.29)$$

тенглик ўринли.

$X_1, X_2, \dots$ - боғлиқ бўлмаган бир хил тақсимланган, манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги $P_X(z)$ ҳосил қилувчи функцияга эга бўлсин ва V уларга $(\{\xi_k\})$ кетма-кетликга) боғлиқ бўлмаган қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлсин. $S_0 = 0$ ва $v \geq 1$ учун

$$S_v = X_1 + X_2 + \dots + X_v$$

тасодифий сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси бўлсин. Қуйдаги теоремада S_v тасодифий миқдорларнинг ҳосил қилувчи функцияси топилган.

6-Теорема. $P_{S_v}(z)$ ҳосил қилувчи функция ушбу

$$P_{S_v}(z) = P_v(P_X(z)) \quad (1.30)$$

суперпозицияга тенг.

Исбот. $P_{S_v}(z) = Mz^{S_v}$ ҳосил қилувчи функцияни,

$$\{Mz^{X_1+X_2+\dots+X_\nu} / \nu = n\} = Mz^{X_1+X_2+\dots+X_\nu} = [P_X(z)]^n$$

тенгликни ишлатиб, шартли математик кутилма ёрдамида топамиз.

$$P_{S_\nu}(z) = Mz^{S_\nu} = M[z^{S_\nu} / \nu] = M[P_X(z)]^\nu = P_\nu(P_X(z))$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди. (1.30) , (1.27) ва (1.28) формулалар ёрдамида S_ν тасодифий миқдор математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз.

$$P_{S_\nu}'(z) = P_\nu'(P_X(z))P_X'(z)$$

$$P_{S_\nu}'(1) = P_\nu'(1)P_X'(1)$$

$$P_{S_\nu}''(z) = P_\nu''(P_X(z))[P_X'(z)]^2 + P_\nu'(P_X(z))P_X''(z),$$

$$P_{S_\nu}''(1) = P_\nu''(1)[P_X'(1)]^2 + P_\nu'(1)P_X''(1)$$

Демак

$$MS_\nu = M\nu \cdot MX_1$$

$$\begin{aligned} DS_\nu &= P_\nu''(1)[P_X'(1)]^2 + P_\nu'(1)P_X''(1) + MS_\nu - (MS_\nu)^2 = \\ &= (M\nu^2 - M\nu) \cdot (MX_1)^2 + M\nu \cdot (MX_1^2 - MX_1) + M\nu \cdot MX_1 - (M\nu)^2 \cdot (MX_1)^2 = \\ &= D\nu(MX)^2 + M\nu D\xi \end{aligned}$$

шундай қилиб

$$MS_\nu = M\nu \cdot MX_1$$

$$DS_\nu = D\nu(MX_1)^2 + M\nu DX.$$

Юқорида MS_ν ва DS_ν учун келтирилган тенгликларга Вальд айниятлари дейилади ва улар эҳтимоллар назариясининг кўп масалаларида кенг қўламли тадбиқларга эга.

Бу параграфнинг охирида $\{p_n\}$ таксимот қонунлари билан ҳосил қилувчи функциялар орасида мослик нафақат ўзаро бир қийматли, шу билан бирга у ўзаро узлуксиз эканлиги ҳақидаги теоремани (исботсиз) келтирамыз.

7-Теорема. $P_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^r \cdot z^n, r = 1, 2, \dots - \{p_n^r\}$ тақсимотга мос

келган ҳосил қилувчи функциялар кетма-кетлиги, $P(z)$ эса $\{p_n\}$ тақсимотнинг ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. Ҳар қандай n учун $\lim_{r \rightarrow \infty} p_n^r(z) = p_n$ муносабатларни ўринли бўлиши учун ихтиёрий $0 \leq z \leq 1$ да

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r(z) = P(z)$$

муносабатни ўринли бўлиши зарур ва етарли.

§1.2. Ҳосил қилувчи функцияларни топиш ва улар ёрдамида тақсимотларни аниқлашга доир масалалар

Ушбу параграфда ҳосил қилувчи функциялар ёрдамида бир неча мисоллар келтирамиз.

7-Мисол. Агар $P(z)$ бутун манфий бўлмаган қийматларни қабул қилувчи ξ тақсимотнинг ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. Ушбу $P\{\xi < n\}$, $P\{\xi \leq n\}$, $P\{\xi > n\}$ кетма – кетликларнинг ҳосил қилувчи функциялари топилсин.

Ечиш. 1) $P\{\xi < n\} = 1 - P\{\xi \geq n\} = 1 - q_{n-1}$, (бу ерда теорема – 1.1 дан фойдаландик)

ва $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$ бўлгани учун $1 - q_{n-1}$; $n = 0, 1, 2, \dots$

кетма – кетликнинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q_{n-1}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} q_{n-1} z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z \cdot P(z)}{1-z} = \frac{z \cdot P_{\xi}(z)}{1-z} \text{ бўлади.}$$

2) $P\{\xi \leq n\} = P\{\xi < n\} - P\{\xi = n\}$ бўлгани учун

$$P_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi \leq n\} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi < n\} \cdot z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi = n\} \cdot z^n = P_1(z) - P_{\xi}(z) = \frac{z \cdot P_{\xi}(z)}{1-z} - P_{\xi}(z) = \frac{2z-1}{1-z} P_{\xi}(z) \text{ бўлади.}$$

3) $P\{\xi > n\} = P\{\xi \geq n\} - P\{\xi = n\}$ тенгликдан фойдаланиб ёзамиз.

$$P_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi > n\} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi \geq n\} \cdot z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot z^n = \frac{1-z \cdot P_{\xi}(z)}{1-z} - P_{\xi}(z) = \frac{1-P_{\xi}(z)}{1-z} \text{ бўлади.}$$

8-Мисол. Қуйида ҳосил қилувчи функцияларга эга бўлган тақсимотлар топилсин.

а) $\frac{1}{4} (1+z)^2$

б) $p(1-p \cdot z)^{-1} \quad p, q > 0, \quad p+q=1$

в) $e^{\lambda(z-1)}$

г) $(p+q \cdot z)^n$

е) $\left(1 - \frac{1-z}{z} \ln(1-z)\right)$

Ечиш. а) $\frac{1}{4} (1+z)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 = p_0 + p_1 z + p_2 z^2$

тенгликлардан фойдаланиб топамиз, бу ерда $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ тақсимот қонунига эга

$$\begin{array}{ccc} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ p & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

б) $p(1 - p \cdot z)^{-1} = p \frac{1}{1 - pz} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n$ ёйилмадан топамиз.

$p(1 - p \cdot z)^{-1}$ ҳосил қилувчи функция $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ қийматлврни $p, pq, \dots, pq^n, \dots$ эҳтимоллар билан қабул қилувчи тасодифий миқдор тақсимотининг ҳосил қилувчи функцияси эканлиги келиб чиқади.

в) $e^{\lambda(z-1)} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}$ ёйилмадан $e^{\lambda(z-1)}$ ҳосил қилувчи

функцияга $\lambda > 0$ параметрли Пуассон тақсимоти мос келиши келиб чиқади.

г) $(p + q \cdot z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} z^{n-k}$ (n, p) параметрли биномиал

тақсимот.

е) $\left(1 - \frac{1-z}{z} \ln(1-z)\right)$ бу масалани ечишда, $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n!}$

ёйилмадан топамиз.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1-z}{z} \ln(1-z) &= 1 + \frac{1}{z} \ln(1-z) - \ln(1-z) = 1 - \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} = \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

демак мос ξ нинг мос тақсимот қонуни

$$\begin{array}{ccc} \xi: & 1 & 2 & \dots n \\ p_{\xi} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array}$$

кўринишига эга.

2-Боб. Ҳосил қилувчи функциялар ёрдамида масалалар ечиш

§2.1. Ҳосил қилувчи функцияни тўғри чизикдаги бир жинсли тасодифий изғиш масаласини ўрганишда ишлатиш

Бу параграфда биз заррачани тўғри чизикнинг бутун нуқталари бўйлаб қўйидаги схема бўйича тасвирланган тасодифий изғишини ўрганамиз.

Заррача вақтнинг бошланғич моментида ($t=0$) $x=0$ нуқтада бўлиб, сўнгра вақтнинг ҳар бир $t=1,2,\dots$ моментида p эҳтимол билан бир бирлик ўнгга ва $q=1-p$ эҳтимол билан чапга сакрайди.

Ушбу эҳтимолларни киритамиз:

$p_n(x)$ - заррача, $x=0$ нуқтадан чиқиб n -қадамда x нуқтага келиш эҳтимоли.

f_n - заррача, $x=0$ нуқтадан чиқиб n -чи қадамда биринчи марта дастлабки (бошланғич) нуқтага қайтиш эҳтимоли.

u_n - заррача n -чи қадамда дастлабки нуқтага қайтиш эҳтимоли.

f_n^+ - заррача $x=0$ нуқтадан чиқиб n -чи қадамда биринчи марта $x=1$ нуқтага келиш эҳтимоли.

f_n^- - заррача $x=0$ нуқтадан чиқиб n -чи қадамда биринчи марта $x=-1$ нуқтага келиш эҳтимоли.

$\{f_n^+\}, \{f_n^-\}, \{f_n\}, \{u_n\}$ -кетма-кетликларнинг ҳосил қилувчи функцияларини топамиз.

$$f_1^+ = p \quad (2.1)$$

эканлиги равшан шу билан бирга

$$f_n^+ = q \sum_{r=0}^{n-1} f_r^+ f_{n-1-r}^+, \quad n > 1 \quad (2.2)$$

чунки $n > 1$ бўлса $x=1$ га келиш кўйидагича бажарилиши мумкин, биринчи қадамда чапга ўтилади (бу ҳодисанинг эҳтимоли q тенг), сўнгга қандайдир k -чи қадамда заррача биринчи марта $x=0$ нуқтага келади ва қолган $n-1-k$ та қадамда $x=1$ нуқтага тушади.

(бу ҳодисанинг эҳтимоли $f_k^+ f_{n-1-k}^+$)

$$F^+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^+ z^k$$

$\{f_k^+\}$ -кетма-кетликнинг ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. У ҳолда (2.1) тенгликни z га, (2.2) тенгликни z^n га кўпайтириб ва барча $n=1,2,\dots$ лар бўйича йиғиб, $F^+(z)$ функция учун ушбу

$$F^+(z) = P(z) + q(z)[F^+(z)]^2 \quad (2.3)$$

квадрат тенгламани ҳосил қиламиз.

Бундан

$$F^+(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pz^2}}{2pz} \quad (2.4)$$

(2.3) квадрат тенгламанинг иккинчи илдизи $z \rightarrow 0$ да чегараланган эмас ва демак у ҳосил қилувчи функция бўла олмайди.

p ва q ларнинг ўрнини алмаштириб $F^{-1}(z)$ ҳосил қилувчи функцияни топиш мумкин, яъни

$$F^-(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pz^2}}{2pz} \quad (2.5)$$

тўла эҳтимол формуласига кўра

$$f_n = p \cdot f_{n-1}^- + q \cdot f_{n-1}^+ \quad (2.6)$$

тенглик ўринли. (2.6) тенгликнинг ҳар иккала томонини z^n га кўпайтириб $n = 1, 2, \dots$ бўйича жамласак

$$F(z) = p \cdot z \cdot F^-(z) + q \cdot z \cdot F^+(z) = 1 - \sqrt{1 - 4p \cdot q \cdot z^2}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $\{u_n\}$ кетма-кетликнинг ҳосил қилувчи функцияси $U(z)$ ни топамиз. $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$

ҳосил қилувчи функцияни топиш учун, ушбу

$$u_n = f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k u_{n-k} = \sum_{n=0}^n f_n u_{n-k}$$

муносабатни ҳисобга олишимиз керак. Бу тенгламанинг ҳар иккала томонини z^n га кўпайтириб барча n лар бўйича йиғсак биз ўнг томонда свёртканинг ҳосил қилувчи функцияси ҳақидаги теоремага асосан $U(z) F(z)$, чапда эса $U(z) - 1$ функцияларни топамиз.

Демак

$$U(z) = \frac{1}{1 - F(z)} = \left(1 - n \cdot p \cdot q \cdot z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Бундан фойдаланиб, заррачани бошланғич нуктага қайтиш эҳтимолини $F(z)$ функциядан топиш мумкин :

$$F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1 - \sqrt{1 - 4pq} = 1 - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} = 1 - |p+q|$$

заррачани бошланғич нуктага қайтиш эҳтимолидан иборат. Бундан, агар $p = q = \frac{1}{2}$ бўлса

(симметрик изғиш) у ҳолда, заррачанинг бошланғич нуктага қайтиш эҳтимоли 1 га тенг, $p \neq q$ бўлса эса заррача бошланғич нуктага қайтмаслигини мусбат эҳтимоли мавжуд.

f^+ -заррача қачондир ўнг қўшни нуктага ўтиш эҳтимоли бўлсин. У ҳолда у ушбу

$$f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ = F^+(1) = \frac{1-|p-q|}{2 \cdot q} = \begin{cases} 1, & \text{агар } p \geq q \\ \frac{p}{q}, & \text{агар } p \leq q \end{cases} \quad \text{тенглик билан}$$

ифодаланади.

Заррача биринчи марта бошланғич нуктага қайтиш қадамлар сонининг математик кутилмаси

$$F'(1) = \frac{4p \cdot q}{|p - q|}$$

тенглик орқали ифодаланади. Демак симметрик тасодифий изғишда ($p = q = \frac{1}{2}$) бошланғич нуктага 1 эҳтимол билан қайтилади, лекин бу нуктага биринчи марта қайтиш учун ўртача чексиз кўп вақт кутиш лозим экан.

Энди $p_n(x)$ - эҳтимолларни топамиз. Бунинг учун аввал ушбу $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ўзаро боғлиқсиз тасодифий миқдорларни киритамиз:

$$\xi_n = \begin{cases} -1, & q \\ 1, & p \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда $p_n(x)$ - эҳтимоллар

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

йиғиндисининг тақсимотидан иборат эканлиги равшан. Шу билан бирга ξ_k нинг ҳосил қилувчи функцияси $P(z) = Mz^{\xi} = z^{-1} \cdot q + z \cdot p = \frac{q + p \cdot z^2}{z}$ га тенг ва S_n n та боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар йиғиндиси бўлгани сабабли, унинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_n(z) = \left(\frac{q + p \cdot z^2}{z} \right)^n$$

га тенг

$$P_n(z) = \frac{(q + p \cdot z^2)^n}{z^n} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} z^{2k-n} =$$

$$= \sum_{l=-n}^n C_n^{\frac{l+n}{2}} p^{\frac{l+n}{2}} q^{n-\frac{l+n}{2}} z^l \quad (2.7)$$

иккинчи томондан S_n тасодикий миқдор $x = -n; \dots -1; 0; 1; \dots, n$ қийматларни

$p_n(l)$ эҳтимоллар билан қабул қилгани учун, унинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_n(z) = \sum_{l=-n}^n p_n(l) \cdot z^l \quad (2.8)$$

га тенг. (2.7) ва (2.8) йиғиндиларни солиштириб

$$p_n(l) = C_n^{\frac{l+n}{2}} p^{\frac{l+n}{2}} q^{n-\frac{l+n}{2}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб

$$p_n(x) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{n-\frac{x+n}{2}}, & \text{агар } \frac{x+n}{2} \text{ бутун, бўлса} \\ 0, & \text{агар } \frac{x+n}{2} \text{ бутун, бўлмаса} \end{cases} \quad (2.9)$$

§2.2. Ҳосил қилувчи функциянинг тармоқланувчи жараён

масаласида ишлатиш

Ҳосил қилувчи функциялар усулини қўлланилишини тармоқланувчи жараён масаласида кўрсатамиз.

Бир типдаги заррачалар мавжуд бўлиб, улар бир-бирларига боғлиқсиз равишда кўпайсин. p_n орқали битта заррача n та заррачага айланиш эҳтимолини белгилаймиз.

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \{p_n\} \text{ тақсимотнинг ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. } \mu(t) - t \text{ чи}$$

авлоддаги заррачалар сони ва $P_t(z) = Mz^{\mu(t)} - \mu(t)$ тасодифий миқдорнинг ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. У ҳолда $\mu(t+1) - t+1$ авлоддаги заррачалар сони бизнинг таърифимизга кўра

$$\mu(t+1) = \xi_{t_1} + \xi_{t_2} + \dots + \xi_{t_{\mu(t)}}$$

тасодифий сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисига тенг бўлиши равшан, бу ерда

$\xi_{t_k} - t$ чи авлоддаги k чи заррачанинг насллар сонидан иборат.

Бундан ҳосил қилувчи функциянинг хоссасига кўра

$$P_{t+1}(z) = P_t(P(z)) \quad (2.10)$$

эканлиги келиб чиқади, яъни $P_2(z) = P(P(z)), P_3(z) = P(P(P(z))), \dots$

$P_t(z) - P(z)$ функциянинг t чи итерациясидан иборат (2.10) тенглик

ёрдамида $M\mu(t) = A(t)$ - математик кутилмани ҳисоблаш мумкин. $P'(1) = A$ бўлсин.

А ни биринчи авлоддаги заррачаларининг математик кутилмси деб талқин қилиш мумкин.

(2.10) ни z бўйича дифференциаллаб $z = 1$ нуқтадаги қийматини топамиз:

$$P'_{t+1}(z) = P'_t(P(z)) P'(z) \quad (2.11)$$

$$P'_{t+1}(1) = P'_t(1) P'(1) \quad \text{ёки}$$

$$A(t) = A(t)A$$

Демак

$$A(t) = A^t \quad (2.12)$$

Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёнининг ҳолати A параметрнинг (A - битта заррачанинг бевосита наслларининг ўрта қиймати) қиймати орқали ифодаланади. (2.12) тенгликдан $t \rightarrow \infty$ да

$$A(t) \rightarrow \begin{cases} 0, \text{ агар } A < 1 \text{ бўлса} \\ \infty, \text{ агар } A > 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

ва $A(t) = 1$, $A = 1$ бўлса муносабатларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Агар $A < 1$, $A > 1$ ёки $A = 1$ бўлса у ҳолда тармоқланувчи жараён мос равишда докритик, надкритик ёки критик жараён дейилади.

Агар $\mu(t) = 0$ бўлса, у ҳолда тармоқланувчи жараёни вақтнинг t моментида “айниб кетган” дейилади. Бу ҳодисанинг эҳтимоли

$$P\{\mu(t) = 0\} = P_t(0)$$

тенглик ёрдамида ифодаланади.

$$\{\mu(t) = 0\} \subseteq \{\mu(t+1) = 0\}$$

бўлгани сабабли $P\{\mu(t) = 0\}$ камаймайди ва $t \rightarrow \infty$ да

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\mu(t) = 0\} = q$$

лимитга эга, бу лимитга биз “айнишнинг эҳтимоли” деб атаймиз.

Лимит эҳтимол q - бу жараён қандайдир авлодда айнашнинг эҳтимолидан иборат.

$P(z) \neq z$ деб фарз қиламиз.

2.2-Теорема $q < 1$ бўлиши учун жараён надкритик бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. (2.10) муносабатни

$$P_{t+1}(z) = P(P_t(z)) \quad (2.13)$$

каби ҳам ёзиш мумкин. (2.13) тенгликдан $z = 0$ деб

$$P_{t+1}(0) = P(P_t(0)) \quad (2.14)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (2.14) дан $t \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб, $q = P(q)$ ни топамиз, чунки $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(0) = q$ шундай қилиб q

$$P(z) = z \quad (2.15)$$

тенгликнинг ечимидан иборат.

Бу тенглама ҳар доим $z = 1$ ечимга эга. Агар $[0,1]$ ораликда унинг бошқа ечими бўлмаса, у ҳолда $q = 1$ бўлади.

$A \leq 1$ бўлса (2.15) тенламанинг $z = 1$ дан бошқа ечими мавжуд эмас, чунки бу ҳолда $0 \leq z < 1$ учун $z < P(z)$ бўлади.

Дарҳақиқат $1 - P(z) = P'(\sigma)(1 - z)$, бу ерда $z < \sigma < 1$, демак $P'(1) = A \leq 1$ бўлса $P'(\sigma) < 1$ эканлиги келиб чиқади ва шунинг учун ҳам

$$1 - P(z) < 1 - z \Rightarrow z < P(z)$$

$0 < z < 1$ учун $P''(z) > 0$ бўлгани туфайли $P(z) = z$ тенглама $[0,1]$ ораликда иккитадан ортиқ илдизга эга эмас.

$P(0) \geq 0$ ва $A > 1$ бўлганда шундай $z_1 < 1$ нукта мавжудки, унинг учун

$P(z_1) < z_1$ тенгсизлик ўринли ва шунинг учун ҳам шундай z_0 илдиз мавжудки

$0 \leq z_0 < 1$ бўлади. Ҳақиқат ҳам $0 < z < z_0$ бўлганда $P(z) > z$ ва $z_0 < z < 1$

бўлганда эса $P(z) < z$ эканлигини кўриш қийин эмас чунки

$$P_{t+1}(0) > P_t(0)$$

бўлгани учун (2.14) дан ихтиёрий t учун

$$P_t(0) < P(P_t(0))$$

эканлиги келиб чиқади, демак

$P_t(0) < z_0$ барча t лар учун ва

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t(0) \leq z_0 < 1$$

шундай қилиб q эҳтимол 1 га тенг бўла олмайди, ва у (2.15) тенгламанинг ечими бўлгани сабабли $q = z_0 < 1$. Теорема исбот бўлди.

3-Боб. Суғурта жараёнининг масалалари

Суғурта жараёнининг асосий масалаларидан бири бўлган суғурта мукофоти ва суғурта тўловларини орасида муносабат ўрнатиш учун вақтнинг t моментигача тушган исклар сони (суғурта воқеаларининг сони) N ва айрим тушган исклар миқдори X ларнинг тақсимооти ва уларнинг сонли характеристикаларини билиш талаб қилинади.

Бу бобнинг иккинчи параграфида суғурта жараёнида кўп ишлатиладиган N ва X тасодифий миқдорлар келтирилган бўлиб унинг биринчи параграфи моментлар ҳосил қилувчи функциясининг таърифи ва улар ёрдамида 1-§ да келтирилган тақсимоотларнинг асосий хоссалари ўрганилади ва уларнинг сонли характеристикалари топилади. 3 - бобнинг 3-§ да моментлар ҳосил қилувчи функциялар назариясидан фойдаланиб жамғарма тўловлар миқдори S_N нинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси топилади ва турли тақсимоотлар учун S_N тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ҳамда унинг дисперсияси ҳисобланади.

§3.1. Моментлар ҳосил қилувчи функцияси ва уларнинг асосий

хоссалари

$X - (\Omega, A, P)$ эҳтимоллар фазосида аниқланган тасодифий миқдор бўлсин.

1-Таъриф. X тасодифий миқдорнинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси $M_X(t)$ деб

$$M_X(t) = M(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x) \quad (3.1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $M_X(t)$ функцияга айтилади. Бу ерда $F_X(x)$ - X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бўлиб, $M_X(t)$ функция, (3.1) тенгликнинг ўнг томонида турган интеграл чекли бўлган барча t нукталарда аниқланади.

Моментлар ҳосил қилувчи функциясининг умумий таърифидан X - тасодифий миқдор дискрет ва абсолют узлуксиз бўлган хусусий ҳолларидаги таърифларини келтириб чиқариш мумкин.

Агар $X - X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ қийматларни мос равишда $p_0, p_1, \dots, p_i, \dots$ эҳтимоллар билан қабул қилса, яъни

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$$

бўлса у ҳолда унинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i \quad (3.2)$$

Агар X - тасодифий миқдор $p_X(x)$ зичлик функцияга эга бўлган абсолют узлуксиз тасодифий миқдор бўлса унинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} p_X(x) dx \quad (3.3)$$

интеграл орқали ифодаланади.

Моментлар ҳосил қилувчи функциялари ҳам ҳосил қилувчи функциялар каби ушбу хоссаларга эга.

Ҳар қандай тасодифий миқдорнинг

1. $M_X(t)$ функцияси $(-\infty, 0]$ оралиқда аниқланган, $M_X(0) = 1$ бўлади.

Бу хоссанинг исботи $\int_{-\infty}^{+\infty} dF_X(x) = 1$ бўлгани сабабли моментлар ҳосил қилувчи функциясининг таърифидан келиб чиқади.

2. Ихтиёрий a ва b ўзгармас сонлар учун

$$M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{bt}$$

тенглик ўринли.

Исботи.

$$M_{aX+b}(t) = M_X(at)e^{bt} = Me^{t(ax+b)} = Me^{atX}e^{bt} = M_X(at)e^{bt}$$

3. $M_X(t) = P_X(e^t), t \in R$ тенгликлар келиб чиқади.

4. Мультипликативлик хоссаси: агар $X_1, X_2, \dots, X_n$ - боғлиқсиз тасодифий миқдорлар мос равишда $M_{X_k}(t), k = 1, 2, \dots, n$ - моментлар ҳосил қилувчи функцияларига эга бўлса, у ҳолда

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$$

тенглик ўринли.

Исбот. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ белгилаш киритамиз. У ҳолда таърифга кўра

$$MS_n(t) = Me^{tS_n} = Me^{t(X_1 + \dots + X_n)} = M \prod_{k=1}^n e^{tX_k} \quad (3.4)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорларнинг боғлиқсизлигидан $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots, e^{tX_n}$ тасодифий миқдорларнинг ҳам боғлиқсизлиги келиб чиқади. Бундан математик кутилманинг мультипликатив хоссаси ва (3.4) тенгликга кўра

$$MS_n(t) = \prod_{k=1}^n Me^{tX_k} = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t)$$

келиб чиқади.

5-хосса. $M_X(t)$ - X тасодифий миқдорнинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси бўлиб $M_X^{(k)}(t)$ мавжуд бўлса, у ҳолда X тасодифий миқдорнинг k -тартибли моменти мавжуд бўлиб

$$MX^k = M_X^{(k)}(0) \quad (3.5)$$

тенглик ўринли.

Бу хосса (1) тенгликнинг ҳар иккала томонидан ҳосила олиб, сўнггра ҳосил бўлган тенгликда $t=0$ деб исботланади.

3.2-§ Сугурта жараёнида энг кўп ишлатиладиган тақсимотлар.

1.Суғуртада кўп ишлатиладиган тўловлар сонининг тақсимотлари.

1. Пуассон тақсимоти. Агар $N = 0, 1, 2, \dots, k, \dots$ қийматларни

$$P_k = P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

эҳтимоллар билан қабул қилса, у ҳолда N — λ параметрли Пуассон тақсимотига эга дейилади ва бунини $N \approx \Pi(\lambda)$ орқали белгиланади.

Кўпинча N ни, Пуассоннинг лимит теоремасига кўра, “кам” рўй берадиган ҳодисанинг тажриба жуда ҳам кўп такрорланганда рўй беришлар сони деб тасвирлаш мумкин.

Бу тақсимотнинг суғуртада тадбиқи сифатида айрим олинган автомобиллар билан содир бўлган йўл транспорт ҳодисалари сонини мисол тариқасида келтириш мумкин.

Пуассон тақсимотининг моментлар қосил қилувчи функциясини ҳисоблаймиз. Бунинг учун (3.2) формулдан фойдаланамиз

$$\begin{aligned} M_N(t) &= M e^{tN} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)} \end{aligned}$$

$$M_N(t) = \lambda(e^t - 1) \quad (3.6)$$

(3.6) тенгликдаги λ - параметрли Пуассон тақсимотининг математик кутилмаси ва дисперсиясини топамиз:

$$MN = M'_N(0) = M'_N(0) = e^{\lambda(e^t - 1)} \cdot \lambda e^t / t = 0 = \lambda$$

DN ни топиш учун $M''_N(z)$ ни ҳисоблаймиз.

$$M''_N(t) = (\lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)})' = \lambda e^{-\lambda} e^t (e^{\lambda e^t} + \lambda e^{\lambda e^t})$$

Бундан (3.5) формулага кўра

$$MN^2 = M''_N(0) = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda(1 + \lambda) = \lambda + \lambda^2$$

Шундай қилиб

$$DN = \lambda$$

Пуассон тақсимоти қуйидаги муҳим хоссага эга

Агар суғурта вакиллари сони N_1 ва N_2 мос равишда λ_1 ва λ_2 параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлиб, у ҳолда $N = N_1 + N_2$ йиғинди ҳам $\lambda_1 + \lambda_2$ параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлади.

Исботи. 1-бобнинг 1-параграфида биз λ - параметрли Пуассон тақсимотининг ҳосил қилувчи функцияни топган эдик,

$$P_{\lambda}(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

формула орқали ифодаланади.

$$N_1 \approx \Pi(\lambda) \Rightarrow P_{\lambda_1}(z) = e^{\lambda_1(z-1)}$$

$$N_2 \approx \Pi(\lambda_2) \Rightarrow P_{\lambda_2}(z) = e^{\lambda_2(z-1)}$$

Муносабатлардан ҳосил қилувчи функциянинг мультипликатив хоссасига кўра

$$P_{N_1+N_2} = P_{\lambda_1}(z) * P_{\lambda_2}(z) = e^{\lambda_1(z-1)} e^{\lambda_2(z-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}$$

Тенглик келиб чиқади, яъни $P_{N_1+N_2}(z) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}$ параметрли Пуассон тақсимотининг ҳосил қилувчи функциядан иборат. Бундан ҳосил қилувчи функциялар тақсимотлар орасидаги ўзаро бир қийматли мосликка кўра

$N_1 + N_2 \approx \Pi(\lambda_1 + \lambda_2)$ келиб чиқади. Шунини исботлаш талаб қилинган эди.

2. Биномиал тақсимот. Суғурта воқеалар сони N кўп ҳолларда (n, p) параметрли биномиал тақсимотига эга бўлади. N тасодифий миқдор (n, p) параметрли биномиал тақсимотга эга эканлигини $N \approx B_i(n, p)$ орқали ифодаланади.

Бундай тақсимотларни суғурта жараёнида қўлланилиши сифатида масалан, n та кишилардан иборат гуруҳдан суғурта компанияси билан суғурта шартномаси тузишган шахсларнинг сонини олиш мумкин. Бунда гуруҳдаги ҳар бир шахс бошқалардан боғлиқсиз равишда p эҳтимол билан компания билан шартнома тузади деб фарз қилинади.

Агар $N \approx B_i(n, p)$ бўлса, у ҳолда унинг ҳосил қилувчи функцияси

$$P_N = (q + pz)^n, q = 1 - p$$

кўринишга эга эканлигини биз 1-бобда кўрсатган эдик.

Бундан

$$MN = np, DN = npq$$

осонгина келиб чиқади.

3. Г- параметрли геометрик тақсимот .

Агар дискрет тасодифий миқдор $N = 1, 2, \dots, n, \dots$ қийматларни мос равишда

$$P_n = P(N = n) = pq^n, 0 < p < 1, q = 1 - p, n = 0, 1, 2, \dots$$

эҳтимоллар билан қабул қилса, у ҳолда N тасодифий миқдор p -параметрли геометрик тақсимотга эга дейилади.

Суғурта жараёнида бундай тақсимот масалан суғурта воқеаси содир бўлганча (ёки биринчи шартнома тузулгунча) ўтган вақтнинг тақсимоми деб, унга мос келган N тасодифий миқдор эса кутиш вақти деб талқин қилинади ва шунинг учун бу тақсимотнинг математик кутилмаси (ўртача кутиш вақти) ҳамда унинг ўртача квадратик четланишини (яъни $\sqrt{DN}$ ни) топиш муҳим ҳисобланади.

Геометрик тақсимотнинг ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$\begin{aligned} P_N(z) &= Mz^N = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} z^n = \\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} (qz)^n = \frac{p}{q} \cdot \frac{zq}{1 - zq} = \frac{pz}{1 - zq} \\ P_N(z) &= \frac{pz}{1 - zq}, |z| < \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Энди геометрик тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз.

$$P'_N(z) = \frac{p}{(1 - qz)^2}, P''_N(z) = \frac{2pq}{(1 - qz)^2}$$

$$MN = P'_N(1) = \frac{1}{p}$$

$$DN = P''_N(1) + P'_N(1) + (P'_N(1))^2 = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Шундай қилиб

$$MN = \frac{1}{p}$$

$$DN = \frac{q}{p^2}$$

2. Тўлов миқдорининг тақсимотлари.

Х орқали айрим тўловнинг миқдори белгилаймиз.

1). Гамма тақсимот

Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$p(x) = p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

формула орқали ифодаланса, бу ерда

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Эйлернинг гамма функцияси, у ҳолда X тасодифий миқдор (λ, α) параметрли гамма тақсимотга эга дейилади ва буни $X \approx \Gamma(\lambda, \alpha)$ кўринишида ифодаланади.

Гамма тақсимотнинг моментлар ҳосил қилувчи функциясини топамиз.

$$\begin{aligned} M_X(z) &= M e^{zX} = \int_0^\infty e^{zx} p_X(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{zx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-z)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\lambda-z)^\alpha} \int_0^\infty ((\lambda-z)t)^{\alpha-1} e^{-(\lambda-z)t} dt (\lambda-z) = \\ &= \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}{(\lambda-z)^\alpha \Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-z} \right)^\alpha \end{aligned}$$

Шундай қилиб

$$M_X(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-z} \right)^\alpha \quad (3.7)$$

Энди гамма тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз. Бунинг учун (3.5) формуладан фойдаланамиз.

$$M_X'(z) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda - z)^{\alpha+1}}, M_X''(z) = \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda - z)^{\alpha+2}}$$

$$MX = M_X'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$MX^2 = M_X''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+2}} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Гамма тақсимотнинг муҳим хоссасини келтирамиз.

Агар X ва Y боғлиқсиз тасодифий миқдорлар бўлиб $X \approx \Gamma(\lambda, \alpha)$ ва $Y \approx \Gamma(\lambda, \beta)$ бўлса, у ҳолда $\{X + Y\} \approx \Gamma(\lambda, \alpha + \beta)$ муносабат ўринли.

Исбот. $M_X(z)$ ва $M_Y(z)$ мос равишда X ва Y тасодифий миқдорларнинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси бўлсин. У ҳолда (3.6) формулага кўра

$$M_X(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^\alpha \quad \text{ва} \quad M_Y(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^\beta$$

Бундан X ва Y боғлиқсиз тасодифий миқдорлар бўлгани сабабли моментлар ҳосил қилувчи функциясининг мультипликативлик хоссасига кўра

$$M_{X+Y}(z) = M_X(z) \cdot M_Y(z) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda - z}\right)^{\alpha+\beta}$$

тенглик ўринли. Бундан $X + Y$ тасодифий миқдорларнинг моментлар ҳосил қилувчи функцияси $(\lambda, \alpha + \beta)$ параметрли гамма тақсимотининг моментлар ҳосил қилувчи функциясидан иборат, бу эса ўз навбатида тақсимотлар ва моментлар ҳосил қилувчи функциялар орасида ўзаро бир қийматли мосликга кўра $X + Y$ тасодифий миқдор $(\lambda, \alpha + \beta)$ параметрли гамма тақсимотига эга эканлигини кўрсатади. Шунини исботлаш талаб қилинган эди.

2). Парето тақсимоти

Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот эҳчилиги

$$p(x) = p_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

формула орқали ифодаланса, у ҳолда X тасодифий миқдор $\alpha > 0, \lambda > 0$ параметрларга эга бўлган Парето тақсимотиға эга дейилади ва бунини $X \approx \text{Par}(\alpha, \lambda)$ орқали белгиланади.

Парето тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз

$$MX = \int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} x \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} dx = \frac{\lambda}{\alpha-1}$$

$$\begin{aligned} MX^2 &= \int_0^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1} dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} dx = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \end{aligned}$$

$$DX = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} - \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2}$$

3). Экспоненциал тақсимот

Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот эичлиги

$$p(x) = p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

формула орқали ифодаланса, у ҳолда X тасодифий миқдор λ - параметрли экспоненциал тақсимотға эга дейилади ва бунини

$$X \approx \text{Exp}(\lambda)$$

орқали белгиланади.

Экспоненциал тақсимот параметрлари $\left(1; \frac{1}{\lambda}\right)$ бўлган гамма тақсимот

эканлигини кўриш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам $\left(1; \frac{1}{\lambda}\right)$ параметрли гамма тақсимотнинг зичлик функцияси $x \geq 0$

$$p(x) = \frac{x^0 e^{-\lambda x}}{\frac{1}{\lambda} \Gamma(1)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(1)} = \lambda e^{-\lambda x}$$

кўринишига яъни у λ параметрли экспоненциал тақсимотнинг зичлик функциясидан иборат. Шундай қилиб

$$\Gamma(1, \frac{1}{\lambda}) = \text{Exp}(\lambda)$$

Гамма тақсимот учун топилган математик кутилма ва дисперсиянинг ифодасидан $\lambda = 1, \alpha = \frac{1}{\lambda}$ деб олсак экспоненциал тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсияси келиб чиқади.

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.3-§ Суғурта тўловларининг жамғарма қийматлари.

S_N орқали вақтнинг $[0,1]$ орлиқдаги суғурта тўловларнинг жамғарма миқдорини белгилаймиз (Суғурта жараёнида бу оралиқни бир йил деб олинади) у ҳолда

$$S_N = \sum_{j=1}^N X_j,$$

бу ерда $N - [0,1]$ оралиқдаги суғурта воқеалари сонини, $X_j, j = 1, 2, \dots, N$ орқали эса j -чи суғурта тўловининг миқдори белгиланган.

$\{X_j\}, j = 1, 2, \dots$ бир ҳил тақсимланган боғлиқсиз тасодифий миқдорлар бўлиб, улар N га боғлиқсиз деб фараз қиламиз.

Бу параграфда биз S_N тасодифий миқдорлар моментлар ҳосил қилувчи функциясини топамиз ва унинг ёрдамида суғурта тўловларининг жамғарма йиғиндисининг ўрта қиймати ва дисперсиясини ҳисоблаймиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\psi(z) = Me^{Nz} = M_N(z),$$

$$\chi(z) = Me^{X_j z} = M_{X_j}(z),$$

$$\varphi(z) = Me^{S_N z} = M_{S_N}(z),$$

мос равишда суғурта воқеаларининг сонини, айрим олинган (j -чи) искини қийматини, суғурта тўловларининг жамғарма қийматини моментлар ҳосил қилувчи функцияларини белгилаймиз. У ҳолда

$$\varphi(z) = \psi(\log(\chi(z))) \quad (3.7)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Тўла математик кутилма формуласига кўра, топамиз

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= Me^{zS_N} = \sum_{n=0}^{\infty} M(e^{zS_N} / N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) Me^{zS_N} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) M_{X_1 + \dots + X_n} e^{zS_N}(z). \end{aligned}$$

Бундан моментлар ҳосил қилувчи функцияларининг мультипликативлик хоссасига кўра

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \prod_{j=1}^n M_{X_j}(z) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) M_X^n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) (Me^{zX})^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) e^{\log(Me^{zX})^n} = \psi(\log \chi(z))
\end{aligned}$$

шунинг исботлаш талаб қилинган эди.

Энди S_N тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз.

$$\varphi'(z) = \psi'(\log(\chi(z))) \cdot \frac{\chi'(z)}{\chi(z)}$$

$$\varphi''(z) = \psi''(\log(\chi(z))) \cdot \left(\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}\right)^2 + \psi'(\log(\chi(z))) \cdot \frac{\chi''(z)\chi(z)(\chi'(z))^2}{(\chi(z))^2}$$

$$\chi(0) = 1, \chi'(0) = MX_1, \psi'(0) = MN$$

$$\chi''(0) = MX_1, \psi'' = MN^2$$

тенгликларни ҳисобга олиб топамиз.

$$MS_N = \varphi'(0) = \psi'(\log(\chi(0))) \cdot \frac{\chi'(0)}{\chi(0)} = \psi'(0)MX_1 = MN \cdot MX_1$$

$$MS_N^2 = \varphi''(0) =$$

$$= \psi''(\log(\chi(0))) \cdot \left(\frac{\chi'(0)}{\chi(0)}\right)^2 + \psi'(\log(\chi(0))) \cdot \frac{\chi''(0) \cdot \chi(0) - (\chi'(0))^2}{(\chi(0))^2} =$$

$$= MN^2 \cdot MX_1^2 + MN(MX_1^2 - (MX_1)^2) = MN^2 \cdot MX_1^2 + MN \cdot DX_1$$

$$\begin{aligned}
DS_N &= MS_N^2 - (MS_N)^2 = MN^2 \cdot MX_1^2 + MN \cdot DX_1 - MN^2 \cdot MX_1^2 = \\
&= MN \cdot DX_1 + DN(MX_1)^2
\end{aligned}$$

Шундай қилиб

$$MS_N = MN \cdot MX_1 \quad (3.8)$$

$$DS_N = MN \cdot DX_1 + (MX_1)^2 DN \quad (3.9)$$

(3.8) ва (3.9) тенгликларга Вальд айниятлари дейилади.

Бу параграфнинг охирида жамғарма тўловларининг ўртача миқдорини топишга доир масала ечамиз.

Масала. Тошкент шаҳрида 2011 йилда 10000 та “Нексия” автомобили суғурта қилинди. Статистик маълумотларни таҳлил қилиш натижасида “Нексия” автомобили иштирокида бир йил давомида йўл транспорт ҳодисолари сони N уч параметрли Пуассон тақсимотига эга эканлиги ва бунда суғурта компанияси томонидан тўланадиган тўловлар миқдори X - 0,5 параметрли экспоненциал тақсимотга эга эканлиги маълум бўлди. Агар “Нексия” автомобиллини суғурта баҳоси 8000 сўмни ташкил қилса, суғурта компанияси 2011 йилда ўртача неча минг сўм фойда олади.

Ечиш. S_N - орқали ҳар бир автомобилга тўланадиган бир йил давомидаги жамғарма тўловлар миқдорини белгилаймиз. У ҳолда Вальд айниятига кўра

$$MS_n = MN \cdot MX$$

N -уч параметрли Пуассон тақсимоти, X эса 0,5 параметрли экспоненциал тақсимотга эга бўлганлиги сабабли

$$MN = 3, MX = 2$$

ва

$$MS_n = 3 \cdot 2 = 6 \text{ минг сўмни ташкил қилар экан.}$$

Демак суғурта компанияси битта автомобил учун бир йилда ўртача

6 минг сўм сарф қилади. Бундан келиб чиқадики суғурта компанияси ҳар бир автомобилдан ўртача 2000 сўм. Ҳаммаси бўлиб эса $2000 \cdot 10000 = 20000000 = 20$ млн сўм ўртача фойда олиши мумкин.

Хулоса

Магистрлик диссертацияси ҳосил қилувчи функциялар усулини эҳтимоллар назариясининг баъзи масалаларига тадбиқига бағишлангандир. Унинг асосий матни учта бобдан иборат бўлиб, биринчи боб ёрдамчи бўлиб, унда ҳосил қилувчи функцияни аниқлашга оид бир неча хоссалар ва мисоллар ечилган. Иккинчи бобда ҳосил қилувчи функциялар ёрдамида иккита масала ечилган. Учинчи бобда эса суғурта жараёни масалаларини ечишда ҳосил қилувчи функциялардан фойдаланилган. Диссертация натижаларини амалиётда кўпгина масалаларни ечишда қўллаш мумкин.

Фойдалиниланган адабиётлар.

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва “Мир”.1984.,1-том. 278-316 стр.
2. Севастьянов. Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистике. Москва “Наука”.1982.
3. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. “Теории вероятностей и математической статистике”.Киев “В школа”.1979.
5. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. Москва “Наука”.1989.,126-136 стр.
6. Абдушукуров А.А., Азларов Т.А., Жомирзаев А.А. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масала ва мисоллар тўплами. Тошкент 2004.,74-78 бетлар.
7. Кошкин Г.М., Основы актуарной математике. Томск: ТомГУ 2002,116 стр.
8. Зорин В.А., Мухин В.И., Элеманты теории процессов риска. Н Навгород: ННГУ. 2003,25стр.