

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ  
TA'LIM VAZIRLIGI**

**A. QODIRIY NOMIDAGI JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA  
INSTITUTI FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI**

**UMUMIY MATEMATIKA KAFEDRASI**

Himoya qilishga ruhsat beraman

Fizika–matematika fakulteti

dekani \_\_\_\_\_ dots **B. Ergashev**

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2011 yil

**Fizika – matematika fakulteti**

**B 5140100 Matematika – informatika ta'lim yo'nalishi  
bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun**

**“Qo'shmalik printsiplari va uning tadbirlari” mavzusidagi**

**BITIRUV MALAKAVIY ISHI**

Bajaruvchi: JDPI „matematika va informatika“ ta'lim yo'nalishi  
bitiruvchisi: \_\_\_\_\_ Qo'ysinov O'.

Ilmiy rahbar: \_\_\_\_\_ kat.o'qt. **Qurbonov E.**

BMI “Umumiy matematika” kafedrası yig'ilishi qarori bilan

(Qaror № \_\_\_\_\_ “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2011 yil) himoyaga tavsiya etildi

Kafedra mudiri: dots. **A. Shamsiyev**

\_\_\_\_\_

**Jizzax – 2011**

**Fizika – matematika fakulteti “Matematika va Informatika ” talim  
yo’nalishi bitiruvchi bosqich talabasi Qo’ysinov O’lmasning “Qo’shmalik  
printsipi va uning tadbirlari” mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishiga  
TAQRIZ**

Asosiy geometrik tushunchalarni bir birlari bilan muntazam bog’liqligi yangi geometrik tushunchalarning kelib hciqishiga yoki ular bilan bog’liq jummalarni isbotlashga katta imkon beradi. Bu bog’liqlik haqida munozara qilishimizdan oldin evklidning quyidagi akseomalari sistemasini keltiraylik.

Parallel to’g’ri chiziqlarning mavjudligi bu akseomalarni buzadi. Bundan esa evklidlar akseomalari sistemasida nuqta so’zini to’g’ri chiziq, to’g’ri chiziq so’zini nuqta so’zi bilan almashtirish natijasida hosil bo’lgan akseoma to’g’ri bo’lavermas ekan degan xulosa kelib chiqadi [5].

Biroq, yarim yevklid tekisligida parallel nuqta tushunchasi mavjud. Agar nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo’lsayu ular ustma ust tushmasalar, bunday nuqtalar parallel nuqtalar deb ataladi. Shunga o’xshash galiley tekisligida nuqtalar orasidagi masofa va to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak xoxlaganicha katta qiymatalariga erishishi mumkin. 1.1. paragrafda bu haqida batafsil ma’lumotlar keltirilgan. Agar vparallel to’g’ri chiziqlar tushunchasi mavjud bo’lmasa yevklid geometriyasi uchun nuqta va to’g’ri chiziqlar bir xil xossalarga ega bo’lar edi. Sodaroq qilib aytganda yevklid tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga ega bo’lgan har qanday xossaga shu tekislikning har bir to’g’ri chizig’I ega bo’ladi.

Shunga o’xshash yarim yevklid tekisligida nuqta va to’g’ri chiziqlarning masofa va burchak bilan bog’liq xossalari ham batamom o’xshashdir. Nuqtalar orasidagi masofani xoxlaganicha kattalashtirish mumkin bo’lgani kabi har qanday ikki to’g’ri chiziq orasidagi burchakni istaganicha kattalashtirish mumkin [6].. Yarim yevklid tekisligida nuqta va to’g’ri chiziqlari burchak va masofa tushunchalari bir xil masofaga ega ekanliklari ko’pgina yangi tushunchalarni keltirib chiqaradi. Yarim yevklid tekisligida berilgan biror akseoma ta’rif yoki teoremda qatnasgan nuqta so’zini to’g’ri chiziq bilan, masofa so’zini burchak so’zi bilan almashtirsak. Birinchidan bu ta’rif yoki teorema mazmuni o’zgartmaydi. Ikkinchidan agar bu so’zlar o’rinlari almashtirishdan oldingisi to’g’ri bo’lsa, yangi teorema ham albatta to’g’ri bo’ladi Yangi tenglama hosil bo’lsada berilgan tenglama yechimini hosil qiishi mumkin. Yarim yevklid tekisligiga nisbatan kiritilgan bu tasdiq geometriyada qo’shnilik prinsipi deb ataladi. [5]. Shuningdek yuqoroidagi almashtirishlar yordamida hosil qilingan teoremlar, ta’riflar o’zoro qo’shma teorema va ta’riflar deb ataladi.

Talaba Qo’ysinov O’lmas tomonidan **“Qo’shmalik printsipi va uning tadbirlari”** mavzusida tayyorlangan BMI oliy o’quv yurtlarida bajariladigan BMI nizomi talablariga mos keladi. Shuning uchun, uni DAH huzurida himoyaga tavsiya etaman.

**f.m.f.n. dots.**

**A.Kamolov.**

**Fizika – matematika fakulteti “Matematika va Informatika ” talim yo’nalishi bitiruvchi bosqich talabasi Qo’ysinov O’lmas tomonidan “Qo’shmalik printsipli va uning tadbiqlari” mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishiga**

**TAQRIZ**

Bitiruv malakaviy ishida Evklid va yarim Evklid geometriyalari paralel keltirilgan. Bu bilan qo’yilgan masalani oldindan tasavvur qilish va echish osonlashdi.

Ishning 1.1 paragrafida yarim evklid tekisligi va uning asosiy tushunchalariga ta’riflar [9] keltirilgan xamda tegishli ifodalar isbotlangan. Shuningdek bu paragrafda qo’yilgan masalani echish uchun zaruriy tushunchalar to’liq keltirilgan.

Ma’lumki [4], yevklid geometriyasida to’g’ri chiziq xossalari ko’pincha nuqtalar xossalarini eslatadi. Masalan, ikki nuqta orqali yagona to’g’ri chiziq o’tadi. Shuningdek ikki to’g’ri chiziq yagona nuqtada kesishishi mumkin. Uchburchakka bir to’g’ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va ularni tutashtiruvchi uchta oddiy kesmalar to’plami deb ta’rif berish mumkin bo’lsa, ikkinchi tomondan uchburchakni bir nuqtada kesishmagan uchta to’g’ri chiziq va ular hosil qilgan uchta burchaklardan tashkil topgan to’plam deb ham hisoblash mumkin.

Asosiy geometrik tushunchalarni bir birlari bilan muntazam bog’liqligi yangi geometrik tushunchalarning kelib chiqishiga yoki ular bilan bog’liq jummalarni isbotlashga katta imkon beradi. Bu bog’liqlik haqida munozara qilishimizdan oldin evklidning quyidagi akseomalari sistemasini keltiraylik.

Parallel to’g’ri chiziqlarning mavjudligi bu akseomalarni buzadi. Bundan esa evklidlar akseomalari sistemasida nuqta so’zini to’g’ri chiziq, to’g’ri chiziq so’zini nuqta so’zi bilan almashtirish natijasida hosil bo’lgan akseoma to’g’ri bo’lavermas ekan degan xulosa kelib chiqadi [5].

Biroq, yarim yevklid tekisligida parallel nuqta tushunchasi mavjud. Agar nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo’lsayu ular ustma ust tushmasalar, bunday nuqtalar parallel nuqtalar deb ataladi. Shunga o’xshash galiley tekisligida nuqtalar orasidagi masofa va to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak xoxlaganicha katta qiymatalariga erishishi mumkin. 1.1. paragrafda bu haqida batafsil ma’lumotlar keltirilgan. Agar parallel to’g’ri chiziqlar tushunchasi mavjud bo’lmasa yevklid geometriyasi uchun nuqta va to’g’ri chiziqlar bir xil xossalarga ega bo’lar edi. Sodaroq qilib aytganda yevklid tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga ega bo’lgan har qanday xossaga shu tekislikning har bir to’g’ri chizig’i ega bo’ladi. Talaba Qo’ysinov O’lmas tomonidan **“Qo’shmalik printsipli va uning tadbiqlari”** mavzusida tayyorlangan BMI oliy o’quv yurtlarida bajariladigan BMI nizomi talablariga mos keladi. Shuning uchun, uni DAH huzurida himoyaga tavsiya etaman.

**f.m.f.n. dots.**

**S.Sidiyarov**

## **MUNDARIJA**

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Kirish.....</b>                                                                                         | <b>3</b>  |
| <br><b>I BOB. YARIM EVKLID TEKISLIGIDAGI ASOSIY<br/>TUSHUNCHALAR, TA'RIFLAR VA METRIK MUNOSABATLAR.</b>    |           |
| <b>1.1-§. Nuqtalar orasida masofa va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.....</b>                          | <b>5</b>  |
| <b>1.2-§. Evklid aksiomalar sistemasida nuqta va to'g'ri chiziqlarning o'zaro<br/>munosabatlari .....</b>  | <b>17</b> |
| <br><b>II BOB. QO'SHMALIK PRINTSIPINING MOHIYATI.</b>                                                      |           |
| <b>2.1-§. Yarim yevklid tekisligida nuqta va to'g'ri chiziqlarning o'xshash<br/>xossalari haqida .....</b> | <b>30</b> |
| <b>2.2-§. Yarim yevklid tekisligida qo'shmalik prinsipi va uning tadbirlari...</b>                         | <b>37</b> |
| <br><b>Xulosa.....</b>                                                                                     |           |
| <b>Adabiyotlar.....</b>                                                                                    | <b>35</b> |

## Kirish

Mamlakatimiz ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishining joriy va istiqbaldagi chora tadbirlari belgilangan. Jahon moliyaviy inqirozi oqibatlari tasirini har tomonlama hisobga olish, iqtisodiy rivojlanish dasturlarini ushbu jarayonlar nuqtaiy nazaridan shakillantirish va ularni izchil amalga oshirish davr talabidir. Bu boradagi chora tadbirlar prezident I.A.Karimovning “Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O‘zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo‘llari va choralari” asarida batafsil bayon etilgan [6].

Ma‘lumki [4], yevklid geometriyasida to‘g‘ri chiziq xossalari ko‘pincha nuqtalar xossalarini eslatadi. Masalan, ikki nuqta orqali yagona to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Shuningdek ikki to‘g‘ri chiziq yagona nuqtada kesishishi mumkin. Uchburchakka bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va ularni tutashtiruvchi uchta oddiy kesmalar to‘plami deb ta‘rif berish mumkin bo‘lsa, ikkinchi tomondan uchburchakni bir nuqtada kesishmagan uchta to‘g‘ri chiziq va ular hosil qilgan uchta burchaklardan tashkil topgan to‘plam deb ham hisoblash mumkin.

Asosiy tushunchalarni bir birlari bilan muntazam bog‘liqligi yangi geometrik tushunchalarning kelib chiqishiga yoki ular bilan bog‘liq jumalarni isbotlashga katta imkon beradi. Bu bog‘liqlik haqida munozara qilishimizdan oldin evklidning quyidagi akseomalari sistemasini keltiraylik.

Har qanday ikkita nuqta orqali bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligi haqidagi akseomada nuqta so‘zini to‘g‘ri chiziq so‘zi bilan almashtirsak, har qanday ikkita to‘g‘ri chiziq yagona nuqtada kesishadi degan akseoma paydo bo‘ladi.

Parallel to‘g‘ri chiziqlarning mavjudligi bu akseomalarni buzadi. Bundan esa evklidlar akseomalari sistemasida nuqta so‘zini to‘g‘ri chiziq, to‘g‘ri chiziq so‘zini nuqta so‘zi bilan almashtirish natijasida hosil bo‘lgan akseoma to‘g‘ri bo‘laversa ekan degan xulosa kelib chiqadi [5].

Biroq, yarim yevklid tekisligida parallel nuqta tushunchasi mavjud. Agar nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo‘lsay u ular ustma ust tushmasalar, bunday nuqtalar parallel nuqtalar deb ataladi. Shunga o‘xshash galiley tekisligida nuqtalar orasidagi masofa va to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak xoxlaganicha katta qiymatalariga erishishi mumkin. 1.1. paragrafda bu haqida batafsil ma‘lumotlar keltirilgan. Agar vparallel to‘g‘ri chiziqlar tushunchasi mavjud bo‘lmasa yevklid geometriyasi uchun nuqta va to‘g‘ri chiziqlar bir xil xossalarga ega bo‘lar edi. Sodaroq qilib aytganda yevklid tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga ega bo‘lgan har qanday xossaga shu tekislikning har bir to‘g‘ri chizig‘i ega bo‘ladi.

Shunga o‘xshash yarim yevklid tekisligida nuqta va to‘g‘ri chiziqlarning masofa va burchak bilan bog‘liq xossalari ham batamom o‘xshashdir. Nuqtalar orasidagi masofani xoxlaganicha kattalashtirish mumkin bo‘lgani kabi har qanday ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni istaganicha kattalashtirish

mumkin [6]. Biroq evklid tekisligidagi to'g'ri chiziqni  $180^0$  ga bursak u yana o'zining dastlabki holatini oladi. Yarim yevklid tekisligida nuqta va to'g'ri chiziqlari burchak va masofa tushunchalari bir xil masofaga ega ekanliklari ko'pgina yangi tushunchalarni keltirib chiqaradi. Yarim yevklid tekisligida berilgan biror akseoma ta'rif yoki teoremda qatnasgan nuqta so'zini to'g'ri chiziq bilan, masofa so'zini burchak so'zi bilan almashtirsak. Birinchidan bu ta'rif yoki teorema mazmuni o'zgartmaydi. Ikkinchidan agar bu so'zlar o'rinlari almashtirishdan oldingisi to'g'ri bo'lsa, yangi teorema ham albatta to'g'ri bo'ladi. Bu narsani differensiallanuvchi tenglama kursida  $y'_x$ -ga nisbatan yechilgan biror differensial tenglamada o'zgaruvchilarni ajratish qiyin bo'lsa, tenglama  $x'_y$ -ga nisbatan yechilgach tenglama ko'rinishi ancha soddalashadi. Yangi tenglama hosil bo'lsada berilgan tenglama yechimini hosil qiishi mumkin. Yarim yevklid tekisligiga nisbatan kiritilgan bu tasdiq geometriyada qo'shnilik prinsipi deb ataladi. [5]. Shuningdek yuqoroidagi almashtirishlar yordamida hosil qilingan teoremlar, ta'riflar o'zoro qo'shma teorema va ta'riflar deb ataladi.

Ma'lumki [7], uchburchaklarga doir metrik munosabatlar umumiy ta'lim maktablaridan batafsil o'rganilgan. Ushbu bitiruv malakaviy ishida uchburchak komonlari va burchaklari orasidagi metrik munosabatlar yarim evklid tekisligida o'rganilgan, aniqroq qilib aytganda elementar geometriyaning uchburchaklarga doir metrik munosabatlari sinuslar teoremasi, kosineslar teoremlarining yarim evklid tekslikdagi ko'rinishlari keltirib chiqarilgan.

Bitiruv malakaviy ishida Evklid va yarim Evklid geometriyalari paralel keltirilgan. Bu bilan qo'yilgan masalani oldindan tasavvur qilish va echish osonlashdi.

Ishning 1.1 paragrafida yarim evklid tekisligi va uning asosiy tushunchalariga ta'riflar [9] keltirilgan xamda tegishli ifodalar isbotlangan. Shuningdek bu paragrafda qo'yilgan masalani echish uchun zaruriy tushunchalar to'liq keltirilgan.

1.2 Paragrafida yarim evklid tekisligining aksiyomalari sistemasini yaxshiroq tasavvur qilish maqsadida ularning evklid tekisligidagi ko'rinishlari va ulardan kelib chiqadigan ko'pgina natijalar isbotlari bilan o'rganish uchun keltirilgan [3].

Ishning II bobi asosiy bob xisoblanib, unda qo'yilgan masala to'liq echimini topgan. 2.1 paragrafda yarim evklid teksligidagi ixtiyoriy uchburchak tomonlari va burchaklari orasidagi asosiy munosabatlar [5], Pifagor teoremasi, uchburchaklar uchun sinuslar teoremasi, kosinuslar teoremasining ko'rinishlari hamda yarim evklid teksliklardagi uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalar xaqidagi ma'lumotlar [12] batafsil keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishi II bob, 4 ta paragrafni o'z ichiga olgan jami 45 betdan iborat.

## **I BOB. YARIM YEUKLID GALILEY TEKISLIGIDAGI ASOSIY TUSHUNCHALAR, TA'RIFLAR VA METRIK MUNOSABATLAR.**

### **1.1.§ Nuqtalar orasida masofa va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.**

Tekislikda  $\bar{a}(x_1, y_1)$   $\bar{b}(x_2, y_2)$  vektorlar berilgan bo'lsin.

1.1.1- ta'rif.  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi  $(\bar{a} \cdot \bar{b})_1 = x_1 \cdot x_2$   
 $(\bar{a} \cdot \bar{b})_2 = y_1 \cdot y_2$  agar  $x_1 \cdot x_2 = 0$  bo'lsa ko'rinishda aniqlanadigan affin tekislikka Galiley tekisligi deyiladi. Ko'pgina adabiyotlarda Galiley tekisligi yarim yevkilid tekisligi ham deb ataladi. Buning sababi vektorlarning skalyar ko'paytmasi Yevklid tekisligidagi vektorlar skalyar ko'paytmasining yarmi ko'rinishida ekanligidir.

Yevklid tekisligidagi kabi yarim Yevklid mtekisligining ham harakatlari mavjud.

1.1.2-ta'rif. Galiley tekisligidagi nuqtalarning koordinatalarini almashtiruvchi

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (1.1.1.)$$

Tenglamalar sistemasiga Galiley tekisligidagi harakat deb ataladi. (1.1.1) harakatni

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = vx + y \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Ko'rinishidagi Oy o'q yo'nalishidagi siljish va

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Parallel ko'rinishilarga ajratish mumkin.

1.1.1-teorema: (1.1.1) harakat Galiley tekisligidagi har qanday to'g'ri chiziqni yana to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqni o'ziga parallel to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

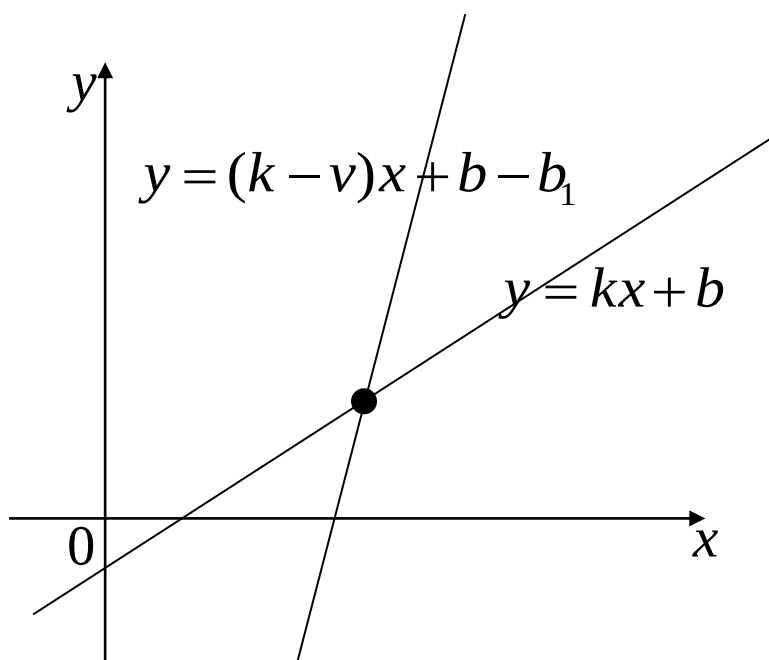
Isbiot:  $y=k_1x+b_1$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin, u holda  $vx+y+b=k_1(x+a)+b_1$  yoki  $y=(k_1-v)x+b_1-b$  tenglama yana to'g'ri chiziq tenglamasini ifoda etadi.

$y=kx+b_1$  va  $y=kx+b_2$  o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin, u holda

$$\begin{cases} vx+y+b=k(x+a)+b_1 \\ vx+y+b=k(x+a)+b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=(k-v)x+b_1-b \\ y=(k-v)x+b_2-b \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasi  $k-v=k-v$  ekanligidan parallel to'g'ri chiziqlarni ifoda etadi. Teorema isbot bo'ldi.

Ushbu teoremaning isbotini 1-qismida keltirilganlarni chizmamda quyidagicha keltirish mumkin.



Demak, (1.1.1) harakat yarim Yevkled tikesligi uchun burish va parallel ko'rinishdan iborat ekan.

Ta'rifdan kelib chiqqan holda  $M(x_1;y_1)$  va  $N(x_2;y_2)$  nuqtalar oxiridagi masofani

$$|MN| = |x_2 - x_1| \quad (1.1.4)$$

Ko'rinishida aniqlash mumkin.

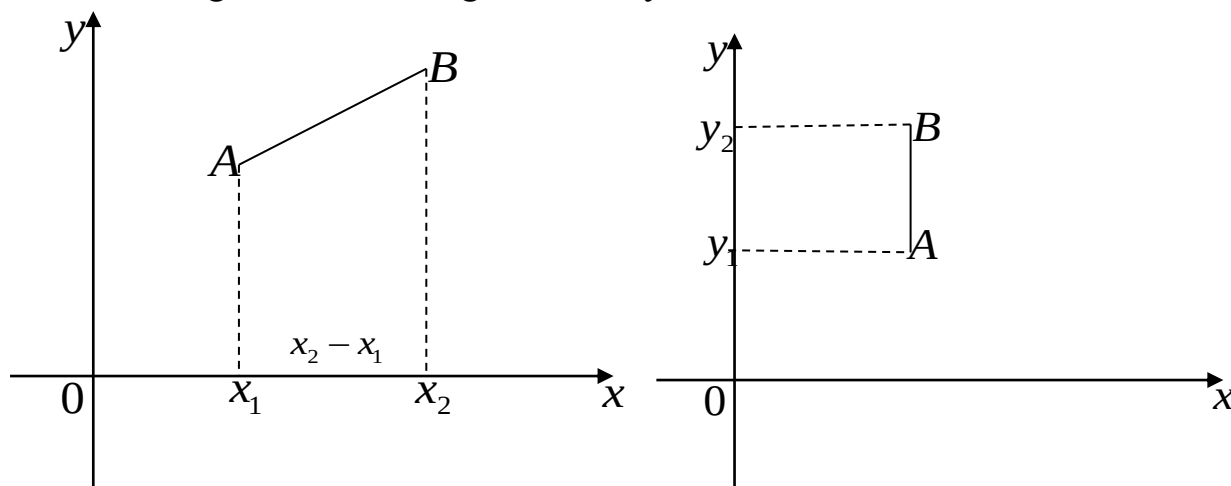
Agar  $x_1=x_2$  bo'lsa,  $M$  va  $N$  nuqtalar orasidagi masofa 0 ga teng bo'ladi. Bunday hollarda nuqtalar orasidagi ikkinchi masofa



$$|MN| = |y_2 - y_1| \quad (1.1.4)$$

ga teng bo'ladi. Shuning uchun yarim Yevklid tekisliklari bo'ingan material tekisliklar deb ataladi. Bularga asoslanib, nuqtalar orasidagi masofani quyidagi ko'rinishlarda belgilash mumkin.

Yarim Yevklid ma'nosidagi  $|MN|_1$ -birinchi,  $|MN|_2$ - masofalar.  $|MN|_1$  masofa  $[MN]$  kesmaning Ox o'qidagi proyeksiyasini ifoda qilsa,  $|MN|_2$  masofa Yevklid ma'nosidamgi kesma uzunligini ifodalaydi.



Nuqtalar orasidagi masofa (1.1.1) harakatda invariant ekanligini ko'rish mumkin.  $A(x,y)$  va  $B(x_1,y_1)$  nuqtalar berilgan bo'lsin. (1.1.1) harakatda bu nuqtalarning obrazlari  $A'(x',y')$  va  $B'(x'_1,y'_1)$  lar bo'lsin.

U holda  $x' = vx_1 + y_1 + b$  va  $y' = vx + y + b$ ,  $y'_1 = vx + y_1 + b$  bo'ladi. Bundan  $y'_1 - y' = (x + y_1 + b) - (vx + y + b) = y_1 - y$  kelib chiqadi.

Yarim Yevklid tekisligiga berilgan ta'rifdan va nuqtalar orasidagi masofadan foydalanib, aylanaga ta'rif beramiz.

1.1.2-ta'rif: Berilgan nuqtalardan bir xil masofada yotgan nuqtalar to'plamiga aylana deb ataladi.

$M(x,y)$  aylananing ixtiyoriy nuqtasi  $O(a,b)$  esa berilgan nuqta bo'lsin. U holda (1.1.4) ga ko'ra

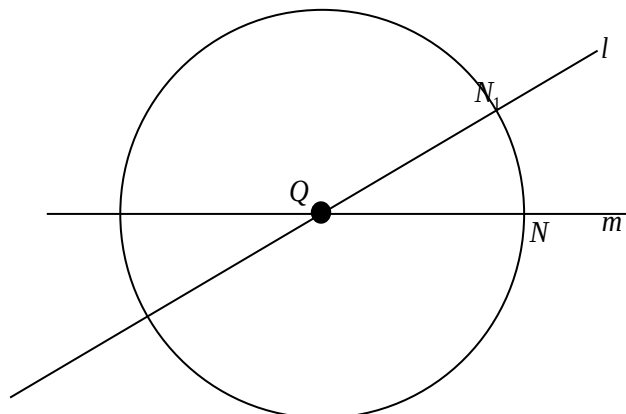
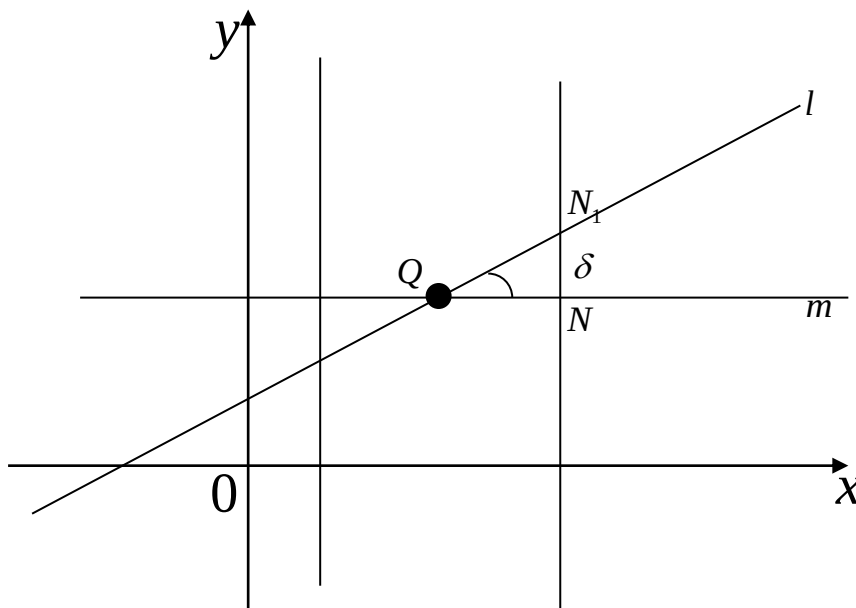
$$|OM| = x - a = R^2 \text{ yoki } x = \sqrt{R^2 + a} \quad (1.1.7)$$

(1.1.7) tenglama Yevklid tekisligida ikkita o'zaro parallel to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Demak  $x=\pm a$  ko'rinishidagi ikkita to'g'ri chiziq yarim Yevklid tekisligi uchun markazi  $O(a,b)$  nuqtada bo'lgan aylananing tenglamasi ekan.

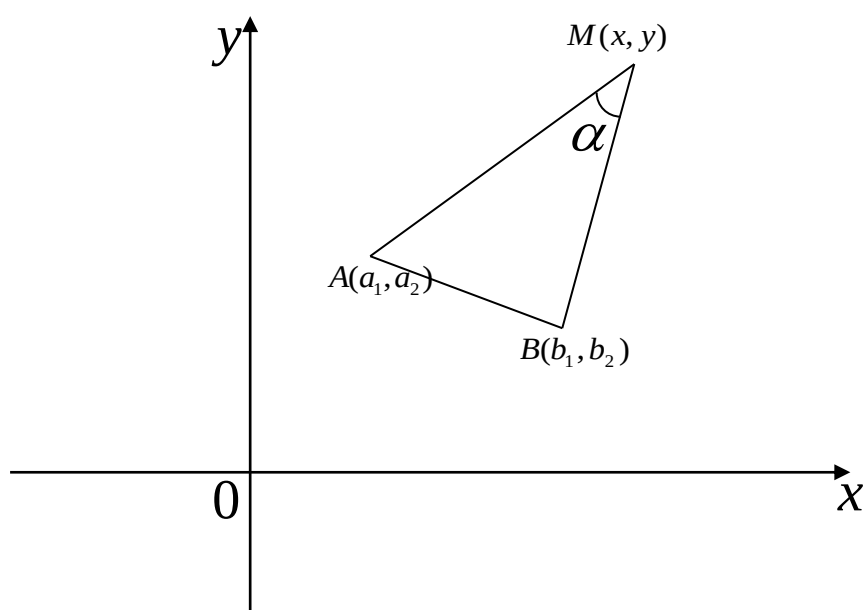
Ma'lumki  $[a,b]$  Yevklid tekisligida ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb markazi shu to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtalari bo'lgan birlik aylananing to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ,yoyning uzunligiga teng. Bu tushunchani yarim Yevklid tekisligidagi ko'rinishi oddiy Yevklid ma'nosidagi kesma uzunligi bo'ladi. Shuning uchun  $y=k_1x+b_1$ ,  $y=k_2x+b_2$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\delta = k_2 - k_1 \quad (1.1.8)$$

ga teng bo'ladi.



Ma'lumki, [ 5 ] Yevklid tekisligidagi aylanaga mturli xil ta'riflar berish mumkin. Masalan, berilgan nuqtadan bir xil masofada yotgan nuqtalar to'plami yoki berilgan kesma faqat to'g'ri burchak ostida ko'rinuvchi nuqtalar to'plamiga aylana deb ataladi. Keltirilgan ta'rifning 1-qismi Yarim yevklid tekisligida ikkita parallel to'g'ri chiziq ekanligini 1.1§ da ko'rib chiqdik. Endi shu ta'rifning ikkinchi qismining yarim Yevklid tekisligidagi ko'rinishidagi ko'rinishini aniqlaylik. Berilgan kesma uchlari  $A(a_1, a_2)$   $B(b_1, b_2)$  ko'rinishidagi koordinatalarga ega bo'lsin.  $M(x, y)$  esa  $[A, B]$  kesma o'zgarmas burchak ostida ko'rinaligan nuqtalar to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.



(AM) va (BM) to'g'ri chiziqlar  $y=kx+b$  va  $y=k_1x+b_1$  ko'rinishdagi tenglamalarga ega bo'lsin. Bu tenglamalarni Yevklid tekisligidagi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamsidan ham hosil qilish mumkin [ ]. Bu yerda

$$K = \frac{y - a_2}{x - a_1} \quad \text{va} \quad K_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

bo'lib bu burchakka berilgan ta'rifga asosan

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

bo'ladi. Bu burchak o'zgarmas bo'lganligi uchun

$$\frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1} = \alpha$$

$$\alpha(x-b_1)(x-a_1)-(x-a_1)(y-b_2)+(x-b_1)(y-a_2)=0$$

$$(b_1-a_1)=\alpha x^2+\left[(b_2-a_2)-\alpha(b_1+a_1)\right]x+\alpha a_1b_1-a_1b_2+a_2b_1$$

$$y=\frac{\alpha}{b_1-a_1}x^2+\frac{\left[(b_2-a_2)-\alpha(b_1+a_1)\right]}{b_1-a_1}x+\frac{\alpha a_1b_1-a_1b_2+a_2b_1}{b_1-a_1}$$

bu yerda,  $a=\frac{\alpha}{b_1-a_1}, \quad b=\frac{(b_2-a_2)-\alpha(a_1+b_1)}{b_1-a_1}, \quad c=\frac{\alpha a_1b_1-a_1b_2+a_2b_1}{b_1-a_1}$

ko'rinishidagi belgilashlar kiritsak,

$$y=ax^2+2bx+c \quad (1.2.1)$$

Hosil bo'ladi. Bu esa Yevklid tekisligidagi parabola tenglamasidir.

Yarim Yevklid tekisligida biror affin koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari (1.2.1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga sikl deb ataladi. Ma'lumki, [ ] Yevklid tekisligidagi aylananing har bir nuqtasidagi egriligi o'zgarmas songa  $1/R$  ga teng. Agar (1.2.1) parabolaning egriligini hisoblasak u ham o'zgarmas songa teng bo'ladi.

(1.1.1) § dagi yarim yevklid tekisligidagi harakatda sikl yana siklga o'tinshini ko'rsataylik. Harakat tenglamasini

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (1.2.2)$$

ko'rinishida olaylik. (1.2.2) ni parabola tenglamasiga qo'ysak

$$vx + y = ax_1^2 + 2bx_1 + c \quad y = ax_1^2 + (2b-v)x_1 - c$$

yana sikl tenglamasi hosil bo'ladi.

Demak, sikl yarim yevklid geometriyamsi tushunnchalaridan biri ekan, chunki u galiley harakatiga nisbatan invariantdir.

Agar harakat tenglama,sini

$$\begin{cases} x' = x + \frac{v}{2a} \\ y' = vx + y + \frac{v^2}{4a} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Ko'rinishida olsak bu harakat parabola nuqtalarini yana shu parabola nuqtalariga akslantiradi. Yevkiled tekisligida har bir nuqtasidagi egriligi

o'zgarmas bo'lgan chiziqlar aylana va to'g'ri chiziq bo'lsa, yarim yevklid tekisligida bunday xossaga ega bo'lgan chiziqlar sikl bilan to'g'ri chiziqdir.

Yevklid tekisligidagi aylananing biror yo'nalishga parallel bo'lgan vatarlariuning o'rtalari bitta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqning aylana bilan chegaralangan bo'lagi dastlabki vatarlarga qo'shma vatar deb ataladi [ ]. Shunga o'xshash biror sikl berilgan bo'lsa, maxsus yo'nalishga parallel bo'lmagan biror to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar to'plami siklni parallel vatarlarini hosil qiladi. Bu parallel vatarlarning o'rtalari bitta to'g'ri chiziqda yotadi. Aylana unga tegishli bo'lmagan nuqtadan o'tkazilgan urinmalarining uzunligi o'zaro teng. Shunga o'xshash siklga unga tegishli bo'lmagan biror nuqtadan o'tkazilgan urinmalarning uzunliklari o'zaro teng bo'ladi.

Yarim yevklid tekisligining aksiomalari sistemasiga to'xtashdan oldin yevklid geometriyasi aksiomalarini va ulardan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni keltiraylik.

#### **1.2.§. Evklid geometriyasining asosiy tushunchalarini bog'lovchi munosabatlar haqida.**

Bog'liklik aksiomalarida nukta, tugri chizik va tekisliklarni uzaro joylashishi xossalari xakida suz yuritiladi va «tegishli» suzi bilan ifodalaniladi.

Bunda «a nukta a tugri chizikka tegishli», «a nukta a tugri chizikda yotadi» va «a tugri chizik a nuqtadan utadi» kabi jumlar tent kuchli, «a nukta a tekislikka tegishli», «a nukta a tekislikda yotadi» va «a tekislik a nuqtadan utadi» kabi jumlar tent kuchli deb xisoblanadi. Agar C nukta a va b tugri chiziklarga tegishli bulsa, a va b to'g'ri chiziklar C nuqtada kesishadi deyiladi. a tugri chizikning barcha nuktalari a tekislikka tegishli bulsa a tugri chizik tekislikda yotadi yoki a tekislik a tugri chizik orkali utadi deb ataladi.

Q va P tekisliklarning xar biri a tugri chizik orkali utsa, Q va P tekisliklar a tugri chizik buyicha kesishadi deyiladi.

Birinchi gurux kuyidagi sakkizta aksiomalardan tashkil toptan:

I<sub>1</sub> aksioma. II va B nuktar kandy bulmasin, bu nuktarlarning xar biridan utuvchi c tugri chizik mavjud.

1<sub>2</sub> aksioma. Turli a va V nuktar kandy bulmasin, bu nuktarlarning utuvchi bittadan ortik bulmagan tugri chizik mavjud.

Bu ikki aksiomani kuyidagicha ifodalash mumkin: Istalgan ikkita turli nuktar bu nuktarlarning utuvchi bitta va fakat bitta tugri chizikni aniklaydi.

I<sub>3</sub> aksioma. ) gar bir tugri chizikda kamida ikkita nukta yotadi. Bir tugri chizikda yotmaydigan kamida uchta nukta mavjud.

1<sub>4</sub> aksioma,  $a, b, C$  nuktalar qanday bulmasin, bu nuqtalarning xar biridan utuvchi  $\pi$  tekislik mavjud. Har bir tekislikda kamida bitta nuqta yotadi.

1<sub>5</sub> aksioma. Bir tugri chizikda yotmaydigan  $a, b, C$  nuktalar kanday bulmasin, bu nuqtalarning xar biridan utuvchi bittadan ortik bulmagan tekislik mavjud.

1<sub>6</sub> aksioma,  $d$  to'g'ri chizikning  $A$  va  $B$  nuqtalari  $\alpha$  tekislikda yotsa,  $d$  tugri chizik ham tekislikda yotadi.

1<sub>7</sub> aksioma,  $Q$  va  $P$  tekisliklar bitta umumiy  $C$  nuktaga ega bulsa (tekisliklarning xar birida yotuvchi nuqta), ularning yana kamida bitta umumiy  $D$  nuktasi mavjud.

1<sub>8</sub> aksioma. Bir tekislikda yotmaydigan kamida turtta nuqta mavjud.

Bog'liklik aksiomalaridan bir necha natijalar kelib chikadi. Bu natijalardan ba'zilarini keltiramiz.

1.3—teorema. Ikkita to'g'pu chizik bittadan ortik bulmagan umumiy nuktaga ega. Ikkita tekislik yoki umumiy nuktaga ega emas yoki umumiy tugri chizikka ega. Tekislik va unda yotmaydigan mo'g'pu chizik bittadan ortiq bulmagan umumiy nuktaga ega.

Isbot. Birinchi tasdikning isboti 1<sub>2</sub> aksiomadan kelib chiqadi. Ya'ni, teskarisini faraz kilamiz.  $a$  va  $b$  tugri chiziklar bir—biridan farkli bulib, umumiy  $C$  nuktdan tashkari  $D$  nuktaga xam ega bulsin.  $U$  xolda,  $C, D$  nuktalar  $a, b$  tugri chiziklarga tegishli ekani kelib chikadi.  $C$  va  $D$  nuktalar  $a, b$  tugri chiziklarga tegishliligidan 1<sub>2</sub> aksiomaga ko'ra  $a$  tugri chizik bilan btugri chizik ustma —ust tushadi. Bu ziddiyat birinchi tasdikni isbotlaydi.

Ikkinchi tasdikni isbotlaylik.  $Q$  va  $R$  tekisliklar umumiy  $P$  nuktaga ega bulsin deb faraz kilaylik. 1<sub>7</sub> aksiomaga kura  $Q$  va  $R$  tekisliklar  $R$  dan farkli umumiy  $Q$  nuktaga ega buladi.  $R$  va  $Q$  nuqtalardan utuvchi tugri chizik  $Q$  va  $R$  tekisliklarning xar birida yotadi. Demak,  $a$  tugri chizik  $Q$  va  $P$  tekisliklarning umumiy nuqtalaridan tashkil toptan ekan. Bundan tashkari,  $a$  tugri chizik  $a$  va  $r$  tekisliklarning barcha umumiy nuqtalarini uz ichiga oladi. Hakikatdan xam  $Q$  va  $P$  tekisliklarning  $a$  tugri chizikda yotmaydigan umumiy  $R$  nuktasi bor deb faraz kilaylik.  $U$  xolda,  $Q$  va  $P$  tekisliklarning bir tugri chizikda yotmaydigan umumiy uchta  $P, Q, R$  nuqtalari mavjud buladi. 1<sub>5</sub> aksiomaga kura  $Q$  va  $P$  tekisliklar ustma —ust tushadi. Shunday kilib,  $Q$  va  $P$  tekisliklar tugri chizik buyicha kesishar ekan. Tasdik isbotlandi.

Uchinchi tasdik esa 1<sub>6</sub> aksiomadan kelib chikadi. Xaqiqatdan xam, tekislik va unda yotmaydigan tugri chizikning ikkita umumiy nuktasi bulsin deb faraz kilsak, 1<sub>6</sub>— aksiomaga kura tugri chizik tekislikda yotishi kelib chikadi. Bu ziddiyat teoremaning uchinchi tasdigini isbotlaydi. 1.3—teorema isbotlandi.

1.4—teorema. To'g'pu chizik va unda yotmaydigan nuqta, hamda ikkita kesishuvchi mo'g'pu chiziklar orkali bitta va fakat bitta tekislik utadi.

Isbot. Birinchi tasdikni isbotlaymiz.  $B$  nuqta  $a$  tugri chizikka tegishli emas deb faraz kilaylik. 1<sub>3</sub> aksiomaga kura  $a$  tugri chizikda kamida ikkita nuqta mavjud.

Bu nuqtalarni  $r$  va  $Q$  deb belgilaylik. 14 aksiomaga kura  $V$ ,  $R$ ,  $Q$  nuqtalardan utuvchi  $l$  tekislik mavjud. 16 aksiomaga kura  $ya$  tekislik  $a$  tugri chizik orkali utadi. 15 aksiomaga kura bir tugri chizikda yotmaydigan  $V$ ,  $R$ ,  $Q$  nuqtalardan utuvchi tekislik yagona ravishda aniklangani

uchun  $a$  to'g'ri chizik va  $B$  nuqtadan utuvchi  $Q$  dan boshka tekislik mavjud emas.

Endi ikkinchi tasdikni isbotlaymiz.  $a$  va  $b$  tugri chiziklar  $S$  nuqtada kesishadi deb faraz kilaylik. 13 aksiomaga kura  $a$  tugri chizikda  $S$  dan farkli  $A$  nuqta,  $b$  tugri chizikda  $S$  dan farkli  $V$  nuqta mavjud.  $A$ ,  $V$ ,  $S$  nuqtalar bir tugri chizikda yotmaydi. 14 aksiomaga kura  $A$ ,  $V$ ,  $S$  larning xar biridan utuvchi  $ya$  tekislik mavjud. 16 aksiomaga kura  $p$  tekislik  $a$  va  $b$  tugri chiziklardan utadi. 15 aksiomaga kura bu tekislik yagona.

1.4 —teorema isbotlandi.

1.5—teorema. Har kanday tekislik bir mo'g'pu chizikda yotmaydigan kamida uchta nuqtani uz ichiga oladi.

Isbot. 18 aksiomaga kura  $Q$  tekislikda yotmaydigan  $V$  nuqta mavjud. 13 aksiomaga kura  $AV$  tugri chizikdan tashkarida  $S$  nuqta mavjud.  $A$  nuqta  $ABC$  va  $ya$  tekisliklarning umumiy nuqtasi ekanidan, 17 aksiomaga kura ularning yana kamida bitta umumiy  $D$  nuqtasi bor. Shunday kilib,  $Q$  tekislikda  $A$  nuqtadan tashkari  $D$  nuqta xam mavjud. 18 aksiomaga kura  $LVP$  tekislikda yotmaydigan  $E$  nuqta mavjud. 14 aksiomaga kura  $ABE$  tekislik mavjud, 17 aksiomaga kura,  $ABE$  va  $Q$  tekisliklar  $A$  dan farkli umumiy  $F$  nuqtaga ega (16 aksiomaga kura  $F$  nuqta  $AV$  tugri chizikda yotmaydi).  $F$  va nuqtalar  $AV$  tugri chizikda yotmasligidan, 1.4— teoremaning ikkinchi tasdigiga kura ular  $ABF$  va  $ABD$  tekisliklarning umumiy nuqtalari bula olmaydi, bu erdan  $D$  va  $F$  nuqtalar xar xil ekani kelib chikadi. Shunday kilib,  $Q$  tekislikda uchta  $A$ ,  $D$ ,  $F$  turlicha nuqtalar mavjud ekan.

1.5 —teorema isbotlandi.

Biz tugri chizikdagi nuqta shu tugri chizikdagi boshga ikkita nuqtaga nisbatan tayin munosabatda «orasida yotadi» deb faraz kilamiz. Bunda quyidagi aksiomalarning shartlari bajarilgan bulishi kerak.

II1 aksioma.  $V$  nuqta  $L$  va  $S$  nuqtalar orasida yotsa, u xolda  $A$ ,  $V$ ,  $S$  bitta tugri chizikning turli nuqtalari bulib,  $V$  nuqta  $S$  va  $A$  nuqtalar orasida xam yotsin.

II2 aksioma.  $A$  va  $S$  nuqtalar kanday bulmasin,  $AS$  tugri chizikda xech bulmaganda bitta  $V$  nuqta mavjud bulib,  $S$  nuqta  $A$  va  $V$  nuqtalar orasida yotsin.

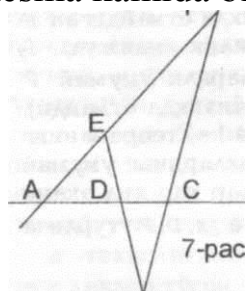
II3 aksioma. Tugri chizikning ixtiyoriy uchta nuqtasi ichidan kolgan ikkitasining orasida yotuvchi bittadan ortiq bulmagan nuqtasi mavjud.

II1 — II3 aksiomalar tartibning chizikli aksiomalari deyiladi.

Ta'rif.  $A$  va  $V$  nuqtalar juftligi kesma deb ataladi va  $AV$  yoki  $VA$  kabi belgilanadi.  $A$  va  $V$  nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalarni  $AV$  kesmaning ichki nuqtalari yoki oddiy kilib  $AV$  kesmaning nuqtalari,  $A$  va  $V$  nuqtalarni esa kesmaning uchlari deyiladi.

II4 aksioma. (Pash aksiomasi)  $A$ ,  $V$ ,  $S$  — bir tugri chizikda yotmaydigan nuqtalar va a  $ABC$  tekisligida yotib,  $A$ ,  $V$ ,  $S$  nuqtalarning birortasidan xam utmaydigan tugri chizik deb faraz kilaylik. Agar a tugri chizik  $LV$  kesmaning biror nuqtasidan utsa, u xolda a tugri chizik  $AS$  va  $VS$  kesmalardan fakat bittasining ichki nuqtasidan utadi.

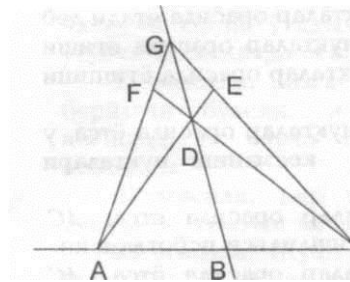
1.6—teorema. Xar kanday  $AS$  kesma kamida bitta  $D$  nuqtani uz ichiga oladi.



Isbot. 13 aksiomaga kura  $AS$  tugri chizikdan tashkarida yotuvchi  $E$  nuqta mavjud. II2 aksiomaga kura  $A$  tugri chizikda shunday  $F$  nuqta mavjudki, bunda  $E$  nuqta  $AF$  kesmaning ichki nuqtasi buladi (7—rasm). P2 aksiomaga kura  $FC$  tugri chizikda shunday  $G$  nuqta mavjudki,  $S$  nuqta  $F$  va  $G$  nuqtalar orasida yotadi. II3 aksiomaga kura  $G$  nuqta  $F$  va  $S$  nuqtalar orasida yotmaydi. II4 aksiomaga kura  $EG$  tugri chizik  $AS$  va  $FC$  kesmalardan bittasining ichki nuqtasidan utadi. Lekin  $EG$  tugri chizik  $FC$  kesmani kesishi mumkin emas, aks xolda Ij va 12 aksiomalarga kura karalayotgan barcha nuqtalar bir tugri chizikda yotishi kelib chikadi.  $A$ ,  $E$ ,  $S$  nuqtalar bir tugri chizikda yotmasligi ma'lum. Bundan esa,  $EG$  tugri chizik kesma bilan biror  $D$  nuqtada kesishishi kelib chikadi. Natijada,  $A$  va  $S$  nuqtalar orasida yotuvchi  $D$  nuqtaning mavjudligi isbotlandi.



1.7—teorema. Bir mo'g'pu chizikda yotuvchi xar kanday A, V, S nuktalardan har doim kolgan ikkitasining orasida yotuvchi bitta nuqta mavjud.



Isbot. A nuqta S va V nuktalar orasida, S nuqta A va V nuktalar orasida yotmasin deb faraz kilaylik. 13 aksiomaga kura AS tugri chizikdan tashka Rida D nuqta mavjud. D nuktani V nuqta bilan tugri chizik yordamida tutashtiramiz (8—rasm). II2 aksiomaga kura BD tugri chizikda shunday G nuqta mavjudki, D nuqta V va G nuktalar orasida yotadi. BCG uchburchak va AD tugri chizikka P4 (8-rasm) aksiomani

8-rasm kullash natijasida AD va CG tugri chiziklar S va G nuktalar orasida yotuvchi biror E nuktada kesishishi kelib chikadi. Xuddi shunta uxshash, AEG uchburchak va CD tugri chizikka P4 aksiomani kullash natijasida CD va AG tugri chiziklar A va G nuktalar orasida yotuvchi F nuktada kesishishi isbotlanadi. AEG uchburchak va CF tugri chizikka P4 aksiomani kullab, D nuqta A va E nuktalari orasida yotishini, yana shu aksiomani ABS uchburchak va BG tugri chizikka kullab, v nuqta A va S nuktalar orasida yotishini xosil kilamiz. Teorema isbotlandi.

Bir tugri chizikda yotmaydigan A, V, S nuktalar berilgan bulsin. AV, VS, AS kesmalardan tashkil toptan figura uchburchak, A, V, S nuktalar uchburchakning uchlari, A V, VS, AS kesmalar uchburchakning tomonlari deyiladi.

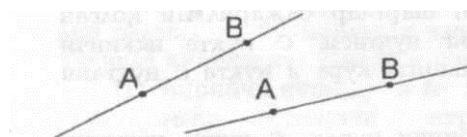
1.1-Ta'rif. Berilgan tugri chizik kesmaning biror ichki nuktasini uz ichiga olsa, tugri chizik; kesmani kesib utadi yoki tugri chizik bilan kesma kesishadi deyiladi.

1.2-Ta'rif. Bizga a tugri chizik va unda yotuvchi turli O va A nuktalar berilgan bulsin. a tugri chizikning O nuktasidan boshlab A nuktasi joylashtan tarafdagi nuktalaridan iborat Kis mi OA nur deb aytiladi, O nuqta esa OA nurning boshi deyiladi.

OA nurdan biror V nuqta olaylik. U xolda OA va OV nurlar ustma — ust tushadi. Ya'ni, OA nurning barcha nuktalari OV nurning nuktalari, OV nurning barcha nuktalari OA nurning nuktalari buladi.

Ma'lumki, a tugri chizikdan olingan O nuqta tugri chizikni boshi umumiy nuktada bulgan ikkita nurga ajratadi. Bundan foydalanib tugri chizikda tartib tushunchasini kiritamiz. Buning uchun tugri chizik nuktalari orasida «ergashtiradi» va «ergashadi» tushunchalarini aniklashimiz kerak. Agar tugri

chizikning bir—biridan farkli  $X, Y$  nuqtalaridan biri ikkinchisini ergashtirsa, u xolda ikkinchisi birinchisiga ergashadi. Bunda tranzitivlik xossasi urinli bulishi kerak, ya'ni ixtiyoriy  $x, u, z$  elementlar uchun  $x, u$  ni ergashtirsa,  $u, g$  ni ergashtirsa,  $u$  xolda  $x, z$  ni ergashtiradi.



9-rasm

kesma

III<sub>3</sub>-aksioma. a tugri chizikda A va V nuqtalar shu tugri chizikda yoki boshka a' tugri chizikda yotuvchi A' nuqta berilgan bulsin, u xolda berilgan A' nuqtaga kura a tugri chizik yunalishida A'V'

AB kesmaga kongruentbuladigan xar doim bitta va fakat bitta V' nuqta topish mumkin.

Kesmalarning kongruentlik munosabati  $AB \sim A'B'$  kabi belgilanadi. Har bir AB kesma uchun  $AB \sim BA$  kongruentligi talab kilinadi.

P12—aksioma. Bitta kesmaga kongruent bulgan kesmalar uzaro kongruent.

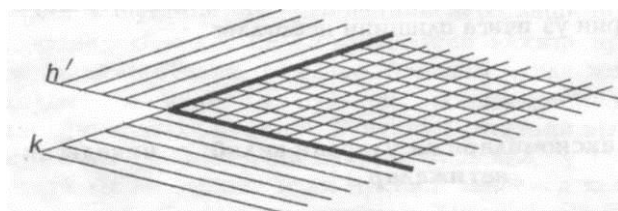
Natija. Xgar bir kesma uziga kongruent.

Sh2— aksiomalardan kongruentlik munosabatining simmetrikligi va tranzitivligi kelib chikadi.

Sh3—aksioma, a tugri chizikda umumiy ichki nuqtalarga ega bulmagan AV va VS kesmalar berilgan bulsin. A'V' va V'S kesmalar shu tugri chizikda yoki boshka a' tugri chizikda yotuvchi va umumiy ichki nuqtalarga ega bulmagan kesmalar bulsin. Agar bunda  $AV \sim A'V'$  va  $VS \sim V'S'$  munosabatlar urinli bulsa, u xolda  $AS \sim A'S'$  munosabat urinli.

1.3-Ta'rif. Bir nuqta (O nuqta)dan chikuvchi ikki h,k nur (bir tugri chizikda yotmaydigan) dan iborat geometrik shakl burchak deyiladi.

L, k nurlar burchak tomonlari, O nuqta burchak uchi deyiladi. Burchak  $z(h,k)$  yoki  $Z(k,h)$  kabi belgilanadi. A va V nuqtalar mos ravishda h va k nurlarning nuqtalari bulsa,  $z(h, k)$  burchak ZAOB yoki ZO kabi xam belgilanadi.



10-rasm

I va k' nurlar mos ravishda h va k nurlarining tugri chizikkacha tuldiruvchilari bulsin deb faraz kilaylik. h va h' nurlar yordamida ajratilgan yarim tekisliklardan k nur j oylashgani, xamda k va k' nurlar yordamida ajratilgan yarim tekisliklardan A nur joylashganining umumiy kismi (kesishmasi) burchakning ichki nuqtalari deyiladi (10—rasm).

Burchakning barcha ichki nuktalari tuplami burchakning ichi deyiladi. Burchak joylashgan tekislikning, burchakning ichidan,  $O$  nuqta,  $k$  va  $L$  nurlardan tashkari gismi burchakning tashkarisi deb ataladi.

1.8—teorema. Boshi burchak uchida bulib, uzi burchak ichida joylashtiruvchi  $I$  nur, uchlari burchakning xar xil tomonlarida bulgan  $AV$  kesmani kesadi va aksincha, burchak uchini uchlari burchak tomonlarida bulgan kesmaning ichki nuqtasi bilan tutashtiruvchi nur burchakning ichida joylashadi.

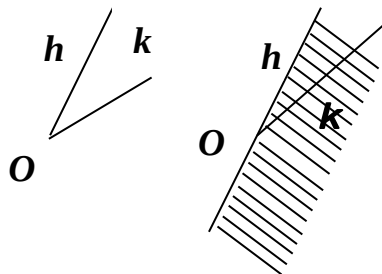
Isbot.  $a$  nuqta  $z(h,k)$  berilgan burchakning  $A$  tomonida,  $v$  nuqta  $Zg'(h,k)$  burchakning  $k$  tomonida,  $G'$  nur bu burchakning uchidan chikib burchak ichida joylashgan deb faraz kilaylik.  $I$  nurning tuldiruvchisi bulgan,  $A'$  nurdan biror  $S$  nuqta olib,  $abc$  uchburchak karaymiz.  $I'$  deb  $G'$  nurning tuldiruvchisini,  $I^*$  deb esa  $I$  va  $I'$  nurlardan tashkil toptan tugri chizikni belgilaylik (11 —rasm).

$P4$  aksiomaga kura  $I^*SV$ ,  $AV$  kesmalardan

bittasi bilan kesishishi kerak.  $I^*$  tugri chizikning  $z(h',k)$  burchak ichida nuktalari yuk, bundan  $I^*AV$  ni kesishi kelib chikadi.  $I'$  nurning  $g(h,k)$  burchak ichida nuktalari yukligidan  $I$  nur  $AV$  kesma  $I$  u bilan kesishishini xosil kilamiz.

Teoremaning birinchi kismi isbotlandi.

Bizga uchi  $O$  nuqtada bulgan, burchak va uchlari shu burchak tomonida joylashgan  $av$  kesma berilgan bulsin. Uchi  $O$  nuqtada bulib,  $av$  kesmaning ichki nuqtasidan utuvchi nur  $z(h,k)$  burchak ichida joylashganligini kursatishimiz kerak.



12-рasm

Teska ris ini faraz kilaylik, uchi  $O$  nuqtada,  $AV$  kesmaning ichki  $S$  nuqtasidan utuvchi  $k$  nur  $z(h,k)$  burchakning ichida tula joylashmasin. Ya'ni  $z(h,k)$  burchakning tashkarisida  $k$  nurning biror  $D$  nuqtasi bor deb faraz kilaylik. Aniklik uchun,  $S$  va  $i$  nuktalar  $h$  va  $I'$  nurlar bilan chegaralangan turli yarim tekisliklarga tegishli bulsin. U xolda  $k$  nur  $h$  nur bilan  $O$  dan farkli, yana bitta umumiy ya'ni,  $h$  nur bilan  $k$  nurning kesishish nuqtasi borligi kelib chikadi. Bu esa  $k$  nur  $AV$  kesmaning ichki nuqtasidan utadi degan farazga zid. Demak,  $k$  nurning  $z(h,k)$  burchak tashkarisida nuqtasi yuk ekan. Teorema isbotlandi.

Endi burchaklar kongruentligi munosabatini kiritamiz.

Sh4— aksioma. Bizga a tekislikda  $Z\{h,k\}$  burchak va shu tekislikda

yoki boshka  $O'$  tekislikda  $a'$  tugri chizik, xamda  $a'$  tugri chizik bilan aniklangan tayin yarim tekislik berilgan bulsin.

$a'$  tugri chizikda boshi  $O'$  nuktada bulgan  $K$  nur karaymiz.

$a'$  tekislikning berilgan yarim tekisligida  $z(h,k)$  burchakka kongruent burchak xosil kiladigan yagona  $k'$  nur topish mumkin va  $Z(h',k')$  burchakning barcha ichki nuktalari  $a'$  bilan aniklangan berilgan yarim tekislikda yotadi. Burchaklarning kongruentligi  $z(h,k)$  q  $Z(h',k')$  kabi belgilanadi.

Xar bir burchak uziga kongruent, ya'ni  $Z(h,k)$  q  $Z(h,k)$  va  $Z(h,k)$  q  $z(k,h)$ .

III5—aksioma. Bir tugri chizikda yotmaydigan  $A,V,S$  va  $A',V',S$  nuktalar berilgan bulsin. Agar  $AV$  q  $A'V'$ ,  $AS$  q  $A'S$  va  $ZBAC$  q  $ZB'A'C$  munosabat urinli ekanidan

$ZABC=ZA'B'C$  va  $ZACB=ZA'C'B'$  munosabatlar urinliligi kelib chikadi.

III aksiomalar fakat kesmalarga tegishli, 4 - aksioma burchaklar kongruentligi bilan Sh5 —aksioma esa kesmalar kongruentligi bilan burchaklar kongruentligini bildiradi.

Agar  $AV$  kesma  $A'V'$  kesmaga kongruent bulsa,  $A'V'$  kesma  $AV$  ga kongruentligi kelib chikadi. Shuning uchun  $AV$  va  $A'V'$  kesmalar uzaro kongruent deyiladi.

Bizga  $a$  tugri chizikda  $A,B,C,...,K,L$  va  $a'$  tugri chizikda  $A',B',C',...,K',L'$  nuktalar berilgan bulsin. Agar  $AV$  va  $A'V'$ ,  $AS$  va  $A'S$ ,  $VS$  va  $B'C'$ ,...,  $KL$  va  $KV$  kesmalar uzaro kongruent bulsa, berilgan ikkala nuktalar tizimi uzaro kongruent deyiladi.

1.9—teorema. Bizga  $A,B,C,D,...,K,L$  va  $A',B',C',D',...,K',L'$  kongruent nuktalar tizimi berilgan bulsin. Agap  $V$  nuktaning bir tarafida  $A$  va ikkinchi tarafda  $C,D,...,K,L$  nuktalar yotsa,  $S$  nuktaning bir tarafida  $A,V$  va ikkinchi tarafida  $D',...,K',L'$  nuktalar yotsa va xokazo, u xolda  $A',V',S',...,K'$  nuktalar ham mos ravishda, ya'ni  $V'$  nuktaning bir tarafida  $A'$  va ikkinchi tarafida  $C',D',...,K',L'$  nuktalar,  $S$  nuktaning bir tarafida  $A',V'$  va ikkinchi tarafida esa  $D',...,K',L'$  nuktalar joylashgan buladi va hokazo.

1.10—teorema, a mo'g'pu chizikda yotuvchi  $A,V,S$  va  $a'$  mo'g'pu chizikda yotuvchi  $A',V',S$  nuktalar berilgan bulib,  $AV=A'V'$  va  $AS=A'S$  munosabat urinli bulsin.

Agap  $V$  nukta  $A$  va  $S$  nuktalar orasida,  $V'$  nukta esa  $a'$  mo'g'pu chizikning  $A'$  nuktadan  $S$  nukta joylashgan tarafida yotsa, u xolda  $V'$  nukta  $A'$  va  $S$  nuktalar orasida yotadi.

Isbot. III, aksiomaga kura  $a$  tutri chizikda shunday  $S^*$  nukta mavjudki,  $V'$  nukta  $A'$  va  $S^*$  nuktalar orasida yotadi va  $V'S^*=VS$ . III3 aksiomaga asosan,  $AS=A'S^*$  munosabatlar urinli. Shunday Kilib,  $AS$  q  $A'S$  va

AS-A'S munosabatlar urinli. S va S\* nuktalar A' nuktadan bir tarafda yotganligi uchun III, aksiomani kullab, S va S\* nuktalarning ustma — ust tushishini xosil kilamiz. Demak, V' nukta A' va S nuktalar orasida yotadi, teorema isbot buldi.

1.4-Ta'rif. ABC va A'V'S uchburchaklar berilgan bulsin. Agar  $AV = A'V'$ ,  $AS = A'S$ ,  $VS = V'S$ ,  $ZA = ZA'$ ,  $ZB = ZB'$ ,  $ZC = ZC'$ , munosabatlar urinli bulsa, ABC va A'V'S uchburchaklar kongruent deyiladi va  $AAVS = AA'V'S$  kabi belgilanadi.

1.11—teorema. (Uchburchaklar kongruentligining birinchi alomati) A,V,S va A',V',S uchburchaklar uchun  $AV = A'V'$ ,  $AS = A'S$  va  $ZA = ZA'$  munosabatlar urinli bulsa, u holda ABC va A'V'S uchburchaklar kongruent buladi.

Isbo.t. III5 aksiomaga kura,  $ZB = ZB'$  va  $ZC = ZC'$  ekanligi kelib chikadi. Endi VS-V'S munosabatni isbotlashimiz kerak.

VS kesma V'S kesmaga kongruent bulmasin deb faraz qilaylik. III5 aksiomaga kura V'S nurda shunday D nukta topiladiki, bu nukta uchun

$BC = B'D'$  munosabat urinli buladi. Farazimizga kura, A'S va A'D' kesmalar xar xil. ABC va A'B'D' uchburchaklar uchun Sh5 aksiomani kullab,  $ZBAC = ZB'A'D'$  munosabat xosil kilamiz. Teorema shartiga kura

$ZBAC = ZB'A'C$  munosabat urinli. Oxirgi ikki munosabat III4 aksiomaga zid. Bu ziddiyatdan teoremaning isboti kelib chikadi.

1.12—teorema. (Uchburchaklar kongruentligining ikkinchi alomati) ABS va uchburchaklar uchun  $AV = A'V'$ ,  $ZA = ZA'$ ,  $ZB = ZB'$  munosabatlar urinli bulsa, ABC va A'V'S uchburchaklar kongruent buladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun VS q V'S ekanini isbotlashimiz etarli. Chunki  $AV = A'V'$  va  $ZB = ZB'$  munosabatlarga VS q V'S munosabat kushilsa, uchburchaklar kongruentligining birinchi alomatiga kura, ABC va A'V'S uchburchaklar kongruent buladi.

Teskarisini faraz kilamiz-  $AV = A'V'$ ,  $ZA = ZA'$ ,  $ZB = ZB'$ , munosabatlar urinli bulib, VS q V'S bulsin. III5 aksiomaga kura, V'S nurda shunday D nukta topiladiki, VS q B'D' munosabat urinli buladi. ABC va A'B'D' uchburchaklar uchun III5 aksiomani kullasak  $VAS = B'A'D'$  munosabat kelib chikadi. A'D va A'S nurlar ustma — ust tushmaydigan nurlar bulgani uchun, Sh4 aksiomaga zid. Ya'ni VAS burchakka teng bulgan V'A'S va ZB'A'D' burchaklar ustma—ust tushmayapti. Bu ziddiyatdan VS q V'S munosabat kelib chikadi. Uchburchaklar kongruentligining birinchi alomatini kullash natijasida, ABC va A'V'S uchburchaklarning kongruentligini xosil kilamiz.

1.5-Ta'rif. Ikki tomoni teng bulgan uchburchak teng yonli uchburchak deyiladi. Uchburchakning teng tomonlari yon tomonlari, uchinchi tomoni esa asos i deyiladi.

1.13—teorema. ABS uchburchakda AS q SV tenglik urinli bulsa, u xolda  $\angle CAB = \angle CBA$  munosabat urinli buladi.

Isbot. ABC va VAS uchburchaklar karaymiz.

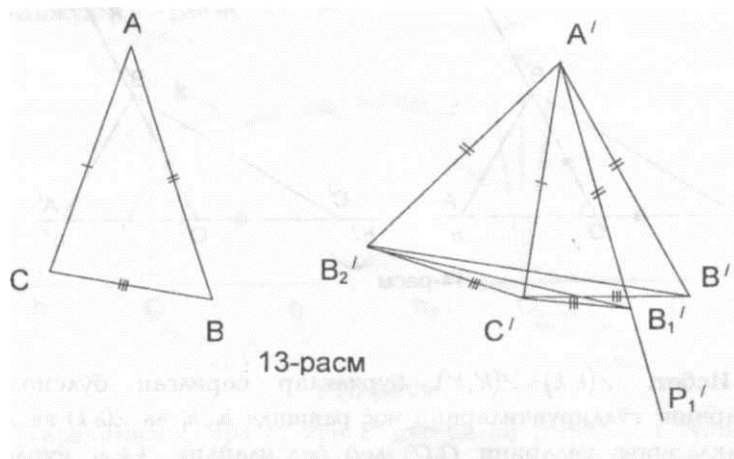
Teorema shartiga kura  $SA = SV$  va  $\angle C$  umumiy ekanidan Sh5 aksiomaga kura,  $\angle CAB$  q  $\angle CBA$  ekanligi kelib chikadi. Teorema isbotlandi.

1.14— teorema. (Uchburchaklar kongruentligining uchinchi alomati). ABC va A'V'S uchburchaklar uchun  $AV = A'V'$ ,  $AS = A'S$ ,  $VS = V'S$  munosabatlar urinli bulsa, ABC va A'V'S uchburchaklar kongruent buladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun  $\angle CAB = \angle C'A'B'$  munosabatni kursatish etarli, chunki teorema shartiga kura  $SA = S'A'$ ,  $AV = A'V'$  tenglik urinli, sungra uchburchaklar

kongruentligining birinchi alomatini kullasak, ABC va A'V'S uchburchaklarning kongruentligi kelib chikadi. Teskarisini faraz kilamiz. U xolda P14 aksiomaga kura A'S tugri chizikdan v' nuqta

joylashgan tarafda shunday A'R{ nur topiladiki,  $\angle CAB = \angle C'A'P$  munosabat urinli buladi. Farazimizga kura, A'R{ nur A'V' nur bilan ustma - ust tushmaydi.



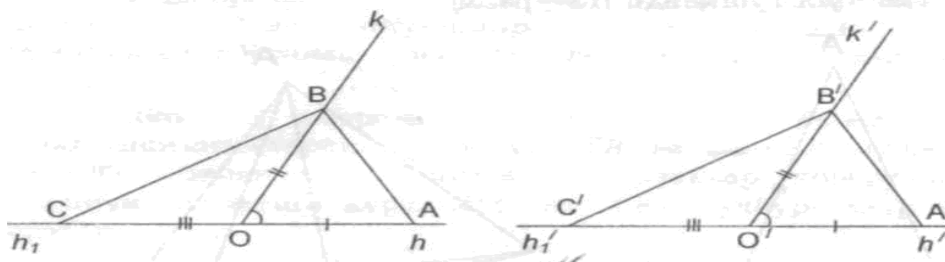
III5aksiomaga kura, A'R nurda shunday V1 nuqta topiladiki,  $AV$  q  $A'V_1$  munosabat urinli buladi. Uchburchaklar kongruentligining

Birinchi alomatga ko'ra  $AV = A'V$ ,  $AS = A'S$  va  $\angle CAB = \angle C'A'B'$  munosabatlardan AAVS va AA'VXS uchburchaklar kongruentligi kelib chiqadi. Bundan esa,  $VS = V'S$  tenglik xosil qilamiz. Kesmalar kongruentligining tranzitivlik va simmetriklik xossaligidan A'VXS uchburchak tomonlari A'V'S uchburchak tomonlariga mos ravishda kongruentligi kelib chikadi. Xuddi shunga uxshash A'S tugri chizikning ikkinchi tarafida A'V'S uchburchak yasash mumkin.

Endi A'V'V' va S'V'V' uchburchaklar karaymiz.

$A'V' = A'V'$ ,  $S'V = SV'$  munosabatlardan  $\angle A'BB' = \angle A'V'V$  tengliklar kelib chikadi. Oxirgi ikki munosabatlardan va teorema kura  $\angle A'BC = \angle A'V'S'$  tenglik xosil kilamiz. Natijada uchburchaklar kongruentligining birinchi alomatiga kura  $A'V'S$  va  $A'V'S'$  uchburchaklarning tengligi va  $\angle C'A'B = \angle C'A'B'$  munosabat kelib chikadi. Xuddi shunday  $\angle C'A'B = \angle C'A'B'$  tenglik isbotlash xMumkin. Oxirgi ikki munosabat aksiomaga zid. Ushbu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

1.6-Ta'rif. Umumiy uchga va gomonga ega bulib, kolgan tomonlari bir — birini tuldiruvchi nurlardan iborat burchaklar kushni deyiladi. Birining tomonlari ikkinchisining tuldiruvchi nurlaridan iborat burchaklar vertikal deyiladi.



#### 14-pacm

1.14-teorema. Kongent burchaklarning qo'shnilari ham kongent bo'ladi.

Isbot.  $\angle(h, k)$  q  $\angle(h', k')$  burchaklar berilgan bulsin.  $h, h'$  nurlarning tuldiruvchilarini mos ravishda  $hx, h'$  va  $z(h, k)$  va  $z(h', k')$  burchaklarning uchlarini  $O, O'$  deb belgilaylik.  $h, k, hx$  nurlardan mos ravishda  $A, V, S$  nuktalar olaylik. III, aksiomaga kura  $h', k', h$  nurlarda shunday  $A', V', S$  nuktalar topiladiki,  $OA = O'A'$ ,  $OV = O'V'$  va  $OS = O'S'$  munosabatlar urinli buladi (14—rasm). Sh3 aksiomaga kura  $AS = A'S'$ , Sh5 aksiomaga kura esa  $\angle ZOAB = \angle ZO'A'B'$  (yoki  $\angle CAB = \angle C'A'B'$ ) munosabat kelib chikadi. Uchburchaklar kongruentligining birinchi alomatiga kura  $AV = A'V'$  kongruentligini hosil qilamiz.  $LV = A'V'$ ,  $AS = A'S'$  va  $\angle CAB = \angle C'A'B'$  munosabatlardan 1.13 —teorema kura  $VS = V'S'$  munosabat,  $OV = O'V'$ ,  $OS = O'S'$  va  $VS = V'S'$  munosabatlarga uchburchaklar kongruentligining uchinchi alomatini kullash natijasida  $\angle BOC = \angle B'O'C'$  ya'ni,  $\angle(h, k) = \angle(h', k')$  munosabat kelib chikadi. Teorema isbotlandi.

Yarim yevklid tekisligidagi burchak yevklid ma'nosidagi kesma uzunligiga teng ekanligini 1.1.§ da ko'rib chiqqan edik. Bundan tashqari agar o'zoro ustma-ust tushmagan A va B nuqtalar bitta maxsus to'g'ri chiziqda yotsa ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi. Bunday nuqtalarga parallel nuqtalar deb ataladi. Yarim yevklid tekisligining o'ziga xosligi uning metric

munosabatlaridamdir. Biror jumladagi biror, so'z o'rniga masofa, yoki aksincha to'g'ri chiziq o'rniga nuqta so'zlarini almashtirsak, bu jumla ma'nosini yo'qotmaydi. Bunday xossaga faqat yarim yevklid tekislikgigina egdir. Yevklid tekisligining akseomalaridan ba'zilari uchun bu munosabatlar urinma bo'lishligi mumkin. Lekin ixtiyoriy akseoma teorema yoki ta'rif uchun bu prinsip o'rinli emas.



## **II BOB. QO'SHMALIK PRINTSIPINING MOHIYATI.**

### **2.1-§. Yarim yevklid tekisligida nuqta va to'g'ri chiziqlarning o'xshash xossalari haqida**

Ma'lumki [4], yevklid geometriyasida to'g'ri chiziq xossalari ko'pincha nuqtalar xossalarini eslatadi. Masalan, ikki nuqta orqali yagona to'g'ri chiziq o'tadi. Shuningdek ikki to'g'ri chiziq yagona nuqtada kesishishi mumkin. Uchburchakka bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta va ularni tutashtiruvchi uchta oddiy kesmalar to'plami deb ta'rif berish mumkin bo'lsa, ikkinchi tomondan uchburchakni bir nuqtada kesishmagan uchta to'g'ri chiziq va ular hosil qilgan uchta burchaklardan tashkil topgan to'plam deb ham hisoblash mumkin.

Asosiy geometrik tushunchalarni bir birlari bilan muntazam bog'liqligi yangi geometrik tushunchalarning kelib chiqishiga yoki ular bilan bog'liq jummalarni isbotlashga katta imkon beradi. Bu bog'liqlik haqida munozara qilishimizdan oldin evklidning quyidagi akseomalari sistemasini keltiraylik.

Har qanday ikkita nuqta orqali bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligi haqidagi akseomada nuqta so'zini to'g'ri chiziq so'zi bilan almashtirsak, har qanday ikkita to'g'ri chiziq yagona nuqtada kesishadi degan akseoma paydo bo'ladi.

Parallel to'g'ri chiziqlarning mavjudligi bu akseomalarni buzadi. Bundan esa evklidlar akseomalari sistemasida nuqta so'zini to'g'ri chiziq, to'g'ri chiziq so'zini nuqta so'zi bilan almashtirish natijasida hosil bo'lgan akseoma to'g'ri bo'lavermas ekan degan xulosa kelib chiqadi [5].

Biroq, yarim yevklid tekisligida parallel nuqta tushunchasi mavjud. Agar nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo'lsay u ular ustma ust tushmasalar, bunday nuqtalar parallel nuqtalar deb ataladi. Shunga o'xshash galiley tekisligida nuqtalar orasidagi masofa va to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak xoxlaganicha katta qiymatalariga erishishi mumkin. 1.1. paragrafda bu haqida

batafsil ma'lumotlar keltirilgan. Agar vparallel to'g'ri chiziqlar tushunchasi mavjud bo'lmasa yevklid geometriyasi uchun nuqta va to'g'ri chiziqlar bir xil xossalarga ega bo'lar edi. Sodaroq qilib aytganda yevklid tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga ega bo'lgan har qanday xossaga shu tekislikning har bir to'g'ri chizig'I ega bo'ladi.

Shunga o'xshash yarim yevklid tekisligida nuqta va to'g'ri chiziqlarning masofa va burchak bilan bog'liq xossalari ham batamom o'xshashdir. Nuqtalar orasidagi masofani xoxlagancha kattalashtirish mumkin bo'lgani kabi har qanday ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni istagancha kattalashtirish mumkin [6]. Biroq evklid tekisligidagi to'g'ri chiziqni  $180^0$  ga bursak u yana o'zining dastlabki holatini oladi. Yarim yevklid tekisligida nuqta va to'g'ri chiziqlari burchak va masofa tushunchalari bir xil masofaga ega ekanliklari ko'pgina yangi tushunchalarni keltirib chiqaradi. Yarim yevklid tekisligida berilgan biror akseoma ta'rif yoki teoremada qatnasgan nuqta so'zini to'g'ri chiziq bilan, masofa so'zini burchak so'zi bilan almashtirsak. Birinchidan bu ta'rif yoki teorema mazmuni o'zgartmaydi. Ikkinchidan agar bu so'zlar o'rinlari almashtirishdan oldingisi to'g'ri bo'lsa, yangi teorema ham albatta to'g'ri bo'ladi. Bu narsani differensiallanuvchi tenglama kursida  $y'_x$ -ga nisbatan yechilgan biror differensial tenglamada o'zgaruvchilarni ajratish qiyin bo'lsa, tenglama  $x'_y$ -ga nisbatan yechilgach tenglama ko'rinishi ancha soddalashadi. Yangi tenglama hosil bo'lsada berilgan tenglama yechimini hosil qiishi mumkin. Yarim yevklid tekisligiga nisbatan kiritilgan bu tasdiq geometriyada qo'shnilik prinsipi deb ataladi. [5]. Shuningdek yuqoroidagi almashtirishlar yordamida hosil qilingan teoremlar, ta'riflar o'zoro qo'shma teorema va ta'riflar deb ataladi.

1.1.§ da ko'rdikki, tomonlari a, b, va c bo'lgan uchburchak uchun  $a+b=c$  tenglikka qo'shma bo'lgan

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B &= \angle C \text{ hosil bo'ladi.} \\ a+b &= c \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$A+B=C \quad (2.1.2)$$

Bu munosabatlarni isbotlashda yevklid geometriyasi usullaridan foydalanish mumkin. Masalan, har qanday uchburchakning tashqi burchgiga unga qo'shni bo'lmagan ichki burchaklar yig'indisiga teng degan qoidadan foydalanish mumkin. Shuni ham ta'kidlash lozimki, ba'zi teoremlarning qo'shmasi aynan shu teorema bilan ustma-ast ham tushub qolishi mumkin. Masalan, 1.2.§ dagi sinuslar teoremasi.

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (2.1.3)$$

ning ko'rinishi

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

ko'rinishiga keladi.

Qo'shmalik prinsipining o'ziga xosligi shundaki, biror teoreмага uni tadbiq etish natijasida hosil bo'lgan yangi teorema agar bu prensip yo'q bo'lsa, umuman , aniqrog'i hech qachon kashf etilmay qolishligi mumkin.

Ma'lumki, [7] teng yonli ABC uchburchakning balandliogi va medianasi usma-ust tushadi. Bu tasdiq yarim yevklid tekisligida ham o'rinli ekanligini ,ko'rsatish mumkin. ABC uchburchakning AB tomoniga C uchidan tushurilgan balandlik Oy o'qqa doimo parallel bo'ladi. Shuningdek Oy o'qqa parallel proyeksiyalashda kesma o'rtasi o'zgarmaydi. Ammo ABC uchburchakning C uchidan tushurilgan bissektrisasi yevklid geometriyasidagi kabi balandlik va mediana bilan ustma-ust tushmaydi.

Yarim yevklid tekidligida teng yonli uchburchakning C uchidan tushurilgan bissektrisaasi uning AB asosiga parallel bo'ladi. Qo'shmalik prinsipi haqida to'laroq taasavvurga ega bo'lish uchun yarim yevklid tekisligidagi parallelogramm va trapetsiya xossalari o'rganamiz.

Yevklid tekisligidagi to'rtburchakning qarama qarshi tomonlari parallel va teng bo'lsa, unga parallelogramm deb ataladi.

Bu ta'rif yarim yevklid tekisligida ham o'z kuchini saqlaydi, shuningdek parallelogramm, parallelogrammning diaganallari bir nuqtada kesishadi va

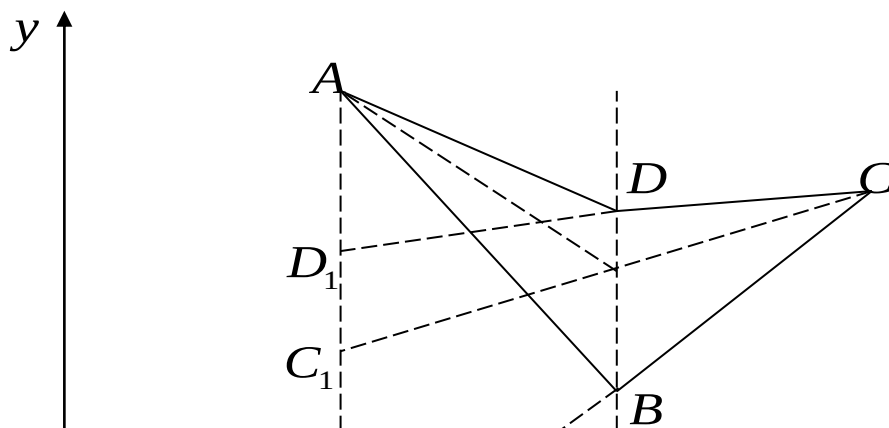


Ta'rif. Qarama-qqarshi tomonlari teng va parallel to'g'ri chiziqlarda

Qarama-qarshi tomonlari teng soʻzi qarama-qarshi burchaklari oʻzaro teng soʻzi bilan qarama qarshi tomonlari parallel toʻgʻri chiziqlarda yotuvchi soʻzi qarama-qarshi uchlari oʻzaro parallel nuqtalardan iborat soʻzi bilan

almashtirishdan berilgan parallelogrammga qo'shma parallelogramni hosil qilish mumkin. Bunda berilgan ABCD parallelogram diagonallari (kesmalarga) qo'shma parallelogramning qarama-qarshi tomonlari va AB hamda CD kesmalarning kesishgan nuqtalari mos keladi. Bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq esa berilgan ABCD parallelogramm dioganallari kesishgan nuqtaga mos keladi. Berilgan parallelogram dioganallarining uzunliklari 1-chizmadagi  $\angle BQC$  va  $\angle BPC$  burchaklarga teng bo'ladi. Ya'ni bir teoremani eslaylik. Ya'ni parallelogramning dioganallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Qo'shma parallelogramnig qarama-qarshi tomonlari kesishgan P va Q nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq, bu tomonlar orasidagi burchakni teng ikkiga bo'ladi.

Yevklid geometriyasida trapetsiya deb, qarama-qarshi tomonlari AB va CD tomonlari o'zaro parallel bo'lgan ABCD to'rtburchakka aytiladi. Berilgan trapetsiyaga qo'shma trapetsiya deb qarama-qarshi uchlari parallel nuqtalarda yotuvchi ABCD to'rtburchakka aytiladi.



Berilgan Trapetsiyaning BC va DA yon tomonlariga qo'shma trapetsiyaning C va A uchlari mos kelgan. Yon tomonlarining o'rtalari M va N nuqtalarga (xuddi uchburchakdagidek) C va A burchaklarining CS va AS bissektoralari mos keladi. Shuningdek, berilgan trapetsiyaning o'rta chizig'i MN uning asoslariga parallellligiga esa A va C burchaklar bissektoralari kesishishidan hosil bol'lgan S nuqta qo'shma trapetsiyaning B va D parallel uchlariga parallellligi mos keladi. O'rta chiziq asoslar yig'indisining yarminiga teng degan teorema quyidagi tenglikni keltirish mumkin.

$$\angle mSn = \frac{1}{2} \angle aBb + \frac{1}{2} \angle dDc \quad (2.1.4)$$

Parallelogramm va trapetsiyalarga nisbatan qo'shma parallelogramm va qoshma trapetsiya tushunchalaridn foydalanib, yevklid tekisligidagi uchburchak medianalari kesishishi haqidagi teremaga qo'shma teoremani keltirib chiqaraylik.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, ABC uchburchakning D, E va F o'rta nuqtalariga A, B, va C burchaklarining bissektoralari mos keladi. Ular  $d=AV$ ,  $e=BV$ ,  $f=CV$  shuningdek AD, BE va CF to'g'ri chiziqlarga qo'shma uchburchakdagi U, V, W nuqtalar mos keladi. Bu nuqtalar AD, BE va CF bissektoralarning qarama-qarshi tomonlari bilan kesishgan nuqtalaridir. Shuning uchun medianalar bir nuqtada kesishadi degan teorema qo'shma teorema V, U va W nuqtalar bitta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi degan teorema mos keladi.

Endi qo'shmalik prinsipini ba'zi aksiomalarga tadbqiqini ko'rib chiqaylik.

Planimetriya aksiomalaridan birida shunday deyiladi: Har qanday ikki to'g'ri chiziq ko'pi bilan bitta umumiy buqtaga ega bo'ladi. Bu tasdiqqa qo'shmasi quyidagicha bo'ladi har qanday ikki nuqta orqali bitta to'g'ri chiziq o'tishi mumkin.

Tekislikda to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa parallel bitta va faqat to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Bu aksioma geometriya fanida parallellik aksiomasi nomi bilan yuritiladi unga qo'shma bo'lgan aksioma : Har qanday yarim Evklid ma'nosifagi to'g'ri chiziqda shunday yagona nuqta mavjudki uni shu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan nuqta bilan umumiy ma'nodagi to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirib bo'lmaydi. Oddiyroq qilib aytgan yarim Evklid ma'nosidagi to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta berilgan bo'lsa bu nuqtadan o'tuvchi maxsus to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqni yagona nuqtada kesadi. Agar yarim Evklid tekisligida berilgan biror aksioma , teorema yoki ta'rif to'g'ri bo'lsa unga qo'shma bo'lgan teorema ham albatta to'g'ri bo'ladi.

Ma'lumki, [ 5 ] Yevklid tekisligidagi aylanaga turli xil ta'riflar berish mumkin. Masalan, berilgan nuqtadan bir xil masofada yotgan nuqtalar to'plami yoki berilgan kesma faqat to'g'ri burchak ostida ko'rinuvchi nuqtalar to'plamiga aylana deb ataladi. Keltirilgan ta'rifning 1-qismi Yarim yevklid tekisligida ikkita parallel to'g'ri chiziq ekanligini 1.1§ da ko'rib chiqdik. Endi shu ta'rifning ikkinchi qismining yarim Yevklid tekisligidagi ko'rinishidagi ko'rinishini aniqlaylik. Berilgan kesma uchlari  $A(a_1, a_2)$   $B(b_1, b_2)$  ko'rinishidagi koordinatalarga ega bo'lsin.  $M(x, y)$  esa  $[A, B]$  kesma o'zgarmas burchak ostida ko'rinda, digan nuqtalar to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$(AM)$  va  $(BM)$  to'g'ri chiziqlar  $y=kx+b$  va  $y=k_1x+b_1$  ko'rinishdagi tenglamalarga ega bo'lsin. Bu tenglamalarni Yevklid tekisligidagi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamsidan ham hosil qilish mumkin [ ]. Bu yerda

$$K = \frac{y - a_2}{x - a_1} \quad \text{va} \quad K_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

bo'lib bu rachakka be rilgan ta'rifga asosan

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

bo'ladi. Bu burchak o'zgarimas bo'lganligi uchun

$$\frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1} = \alpha$$

$$\alpha(x - b_1)(x - a_1) - (x - a_1)(y - b_2) + (x - b_1)(y - a_2) = 0$$

$$(b_1 - a_1) = \alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]x + \alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$y = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} x^2 + \frac{[(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]}{b_1 - a_1} x + \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1}$$

bu yerda,  $a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1}, \quad b = \frac{(b_2 - a_2) - \alpha(a_1 + b_1)}{b_1 - a_1}, \quad c = \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1}$

ko'rinishidagi belgilashlar kiritsak,

$$y = ax^2 + 2bx + c \quad (1.2.1)$$

Hosil bo'ladi. Bu esa Yevklid tekisligidagi parabola tenglamasidir.

Yarim Yevklid tekisligida biror affin koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari (1.2.1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga sikl deb ataladi. Ma'lumki, [5] Yevklid tekisligidagi aylananing har bir nuqtasidagi egriligi o'zgarimas songa  $1/R$  ga teng. Agar (1.2.1) parabolaning egriligini hisoblasak u ham o'zgarimas songa teng bo'ladi.

(1.1.1) dagi yarim yevklid tekisligidagi harakatda sikl yana siklga o'tinshini ko'rsataylik. Harakat tenglamasini

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (1.2.2)$$

ko'rinishida olaylik. (1.2.2) ni parabola tenglamasiga qo'ysak

$$vx + y = ax_1^2 + 2bx_1 + c \quad y = ax_1^2 + (2b - v)x_1 - c$$

yana sikl tenglamasi hosil bo'ladi.



Demak, sikl yarim yevklid geometriyamsi tushunnchalaridan biri ekan, chunki u galiley harakatiga nisbatan invariantdir.

Agar harakat tenglama, sini

$$\begin{cases} x' = x + \frac{v}{2a} \\ y' = vx + y + \frac{v^2}{4a} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Ko'rinishida olsak bu harakat parabola nuqtalarini yana shu parabola nuqtalariga akslantiradi. Yevkiled tekisligida har bir nuqtasidagi egriligi o'zgarmas bo'lgan chiziqlar aylana va to'g'ri chiziq bo'lsa, yarim yevklid tekisligida bunday xossaga ega bo'lgan chiziqlar sikl bilan to'g'ri chiziqdir.

Yevklid tekisligidagi aylananing biror yo'nalishga parallel bo'lgan vatarlariuning o'rtalari bitta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqning aylana bilan chegaralangan bo'lagi dastlabki vatarlarga qo'shma vatar deb ataladi [ 7 ]. Shunga o'xshash biror sikl beryl gan bo'lsa, maxsus yo'nalishga parallel bo'lmagan biror to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar to'plami siklni parallel vatarlarini hosil qiladi. Bu parallel vatarlarning o'rtalari bitta to'g'ri chiziqda yotadi. Aylana unga tegishli bo'lmagan nuqtadan o'tkazilgan urinmalarining uzunligi o'zoro teng. Shunga o'xshash siklga unga tegishli bo'lmagan biror nuqtadan o'tkazilgan urinmalarning uzunliklari o'zoro teng bo'ladi.

Yarim yevklid tekisligining aksiomalari sistemasiga to'xtashdan oldin yevklid geometriyasi akseomalarini va ulardan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni keltiraylik.

Fizika – matematika fakulteti “Matematika va Informatika ” talim yo’nalishi bitiruvchi bosqich talabasi Qo’ysinov O’lmas “Qo’shmalik printsiipi va uning tadbirlari” mavzusidagi BMI ga ilmiy rahbar

### XULOSASI

Noevklid geometriya tushunchalari uchun ajratilgan soatlar o’qquv dasturida boshqa tushunchalarga qaraganla kamroq bo’lsada, talaba Artikova Sanobar bu geometriyaning asosiy tushunchalarini yaxshi o’zlashtirganligini ko’rsatdi. Evklid tekisligidagi elementar geometriya tushunchalarni yarim evklid tekisligiga o’tkazishda ularni parallel ravshda keltirgan. Bu bilan qo’yilgan masala echimi haqida oldindan tasavvur xosil qilgani. Ma’lumki [4], yevklid geometriyasida to’g’ri chiziqli xossalari ko’pincha nuqtalar xossalari eslatadi. Masalan, ikki nuqta orqali yagona to’g’ri chiziqli o’tadi. Shuningdek ikki to’g’ri chiziqli yagona nuqtada kesishishi mumkin. Uchburchakka bir to’g’ri chiziqli yotmagan uchta nuqta va ularni tutashtiruvchi uchta oddiy kesmalar to’plami deb ta’rif berish mumkin bo’lsa, ikkinchi tomondan uchburchakni bir nuqtada kesishmagan uchta to’g’ri chiziqli va ular hosil qilgan uchta burchaklardan tashkil topgan to’plam deb ham hisoblash mumkin.

Asosiy tushunchalarni bir birlari bilan muntazam bog’liqligi yangi geometrik tushunchalarning kelib chiqishiga yoki ular bilan bog’liqlik jumalarni isbotlashga katta imkon beradi. Bu bog’liqlik haqida munozara qilishimizdan oldin evklidning quyidagi akseomalari sistemasini keltiraylik.

Har qanday ikkita nuqta orqali bitta to’g’ri chiziqli o’tkazish mumkinligi haqidagi akseomada nuqta so’zini to’g’ri chiziqli so’zi bilan almashtirsak, har qanday ikkita to’g’ri chiziqli yagona nuqtada kesishadi degan akseoma paydo bo’ladi.

Parallel to’g’ri chiziqlarning mavjudligi bu akseomalarni buzadi. Bundan esa evklidlar akseomalari sistemasida nuqta so’zini to’g’ri chiziqli, to’g’ri chiziqli so’zini nuqta so’zi bilan almashtirish natijasida hosil bo’lgan akseoma to’g’ri bo’laversin ekan degan xulosa kelib chiqadi [5].

Biroq, yarim yevklid tekisligida parallel nuqta tushunchasi mavjud. Agar nuqtalar orasidagi masofa nolga teng bo’lsayu ular ustma ust tushmasalar, bunday nuqtalar parallel nuqtalar deb ataladi. Agar vparallel to’g’ri chiziqlar tushunchasi mavjud bo’lmasa yevklid geometriyasi uchun nuqta va to’g’ri chiziqlar bir xil xossalarga ega bo’lar edi. Sodaroq qilib aytganda yevklid tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga ega bo’lgan har qanday xossaga shu tekislikning har bir to’g’ri chiziqli ega bo’ladi.

Talaba Qo’ysinov O’lmas tomondan **“Qo’shmalik printsiipi va uning tadbirlari”** mavzusida tayyorlangan BMI oliy o’quv yurtlarida bajariladigan BMI nizomi talablariga mos keladi. Shuning uchun, uni DAH huzurida himoyaga tavsiya etaman.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- [1] **Aleksandrov P .S.**, Лекции по аналитической геометрии Москва «Наук»1980 г
- [2]. **Dadajonov N.D. , Jurayev M.SH.** Geometriya. 1-qism Toshkent. 1995 y
- [3] **Dadajonov N.D., Yunusmetov R., Abdullayev T.** Geometriya. 2-qism Toshkent 1989 y
- [4]. **Ефимов Н. В.** Высше геометрия. М. «Наука» 1971 г.
- [5] **Latipov X., Tojiyev SH., Rustamov R.** Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent. “O’qituvchi”1993 y
- [6].**Karimov I .A** “Jahon moliyaviy-iqtisodi inqirozi, O’zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo’llari va choralari” Toshkent 2009 y
- [7]. **Normanov A. E.** Geometriya asoslari. T. «O’zMU», 2003 y.
- [8] **Pagarelov A V.** Geometriya. Moskva “Hayk”,1989 y
- [9]. **Яглом. И. М.** Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия Москва 1985 г.
- [10]. **Кори-Ниязий.**, Аналитик геометрия курси, Тошкент. Укитувчи 1975
- [11]. **J.Israilov, Z. Pashayev.** Geomtriya, 1 gism T. 2004.
- [12]. **К.Х. Абдуллаев** и др. Геометрия 1-часть. Т-2002.
- [13]. **А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев,** Геометрия, М., «Наука» 1990 г.

