

**Н.М.Жабборов, Э.О.Аликулов, Қ.С.Ахмедова**

## **ОЛИЙ МАТЕМАТИКА**

(олий математика ўқитиладиган олий ўқув юртлари  
талабалари учун маърузалар матни)

**Қарши –2010**

# 1-МАЪРУЗА

## Ҳақиқий сонлар Ҳақиқий сонлар тўплами. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати

Сон тушунчаси математиканинг муҳим тушунчаларидан бири.  
Улар

- 1) натурал сонлар  $(1, 2, 3, \dots)$ ,
- 2) бутун сонлар  $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ ,
- 3) каср сонлар (оддий ва ўнли касрлар),
- 4) ҳақиқий сонлар

бўлиши мумкин. Бундай сонлар, улар устида бажариладиган амаллар, амалларнинг бажарилиш қоидалари ўқувчига мактаб, коллеж ва лицейларда ўқитиладиган математика фанидан маълум.

Олий математика курси давомида кўп ҳолларда ҳақиқий сонларга дуч келамиз. Шунинг учун ҳақиқий сонлар ҳақидаги асосий маълумотларни қисқача баён этамиз.

### 1.1. Рационал ва иррационал сонлар

Маълумки,  $\frac{p}{q}$  кўринишида ифодаланиладиган сон рационал сон дейилади, бунда  $p$  - бутун сон,  $q$ -эса натурал сон бўлиб, улар ўзаро туб, яъни  $(p, q) = 1$ . Равшанки, оддий касрлар рационал сон бўлади.

Агар  $\frac{p}{q}$  касрнинг махражи 10, 100, умуман 10 нинг натурал даражалари ( $10^n$ ) бўлса, бундай оддий каср ўнли каср дейилади. Масалан,

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{17}, \frac{23}{11}, -\frac{8}{9} - \text{оддий касрлар,}$$
$$\frac{7}{10} = 0,7, \frac{112}{10} = 11,2, \frac{23}{100} = 0,23 - \text{ўнли касрлар бўлади.}$$

$\frac{p}{q}$  рационал сон – оддий каср берилган бўлсин. Бўлиш қоидасидан фойдаланиб  $p$  бутун сонни  $q$  натурал сонга бўламиз. Агар бўлиш жараёнида бирор қадамдан кейин қолдиқ нолга тенг бўлса, у ҳолда

бўлиш жараёни тўхтаб,  $\frac{p}{q}$  каср ўнли касрга айланади. Одатда, бундай ўнли каср чекли ўнли каср дейилади.

$p$  ни  $q$  га бўлиш жараёни чексиз давом этиб, маълум қадамдан кейин юқорида айтилган қолдиқлардан бири яна бир марта учраши, сўнг ундан олдинги рақамлар мос равишда такрорланиши мумкин. Одатда, бундай ўнли каср чексиз даврий ўнли каср дейилади. Такрорланадиган рақамлар (рақамлар бирлашмаси) ўнли касрнинг даври дейилади.

Масалан,  $\frac{53}{36}$  рационал сон  $1,4722... = 1,47(2)$  ўнли касрга келади.

Бу чексиз даврий ўнли каср бўлиб, унинг даври 2 га тенг:  $\frac{53}{36} = 1,47(2)$ .

Демак, ҳар қандай  $\frac{p}{q}$  рационал сон чекли ўнли каср ёки чексиз даврий ўнли каср орқали ифодаланади.

Аксинча, ҳар қандай чекли ўнли касрни ёки чексиз даврий ўнли касрни  $\frac{p}{q}$  кўринишида ифодалаш мумкин.

Масалан,

$$1,03 = 1\frac{3}{100} = \frac{103}{100},$$

$$0,(3) = 0,3333... = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

(бунда чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланилди) бўлади.

Демак, ҳар қандай чекли ёки чексиз даврий ўнли каср рационал сон орқали ифодаланилади.

Шундай қилиб, ихтиёрий рационал сон чекли ёки чексиз даврий ўнли каср орқали ва аксинча ихтиёрий чекли ёки чексиз даврий ўнли каср рационал сон орқали ифодаланади.

Аммо чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар ҳам мавжуд. Масалан,

$$1,1010010001..., \quad 1,4142135..., \quad 2,7182818...$$

сонлар чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар бўлади (бу сонлардан иккинчиси  $\sqrt{2}$  ни, учинчиси эса  $e$  сонини ифодалайди). Равшанки, бу сонлар рационал сонлар бўлмайди.

**Таъриф.** Чексиз даврий бўлмаган ўнли каср иррационал сон дейилади. Масалан,

$$1,4142135... = \sqrt{2}, \quad 3,141583... = \pi, \quad 2,718281... = e$$

сонлар иррационал сонлардир.

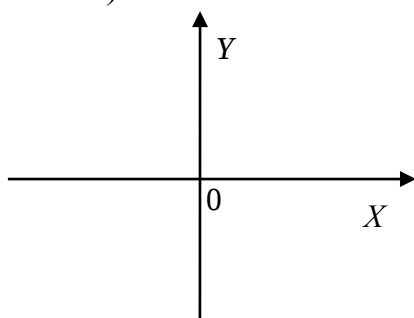
## 3-МАЪРУЗА

### Текисликда Декарт ва қутб координаталари системаси

#### 3.1. Декарт координаталари системаси

Текисликда иккита ўзаро перпендикуляр  $OX$  ва  $OY$  тўғри чизиқларни (ўқларни, уларнинг мусбат йўналишлари 1-чизмада кўрсатилган) олайлик.

Айтайлик,  $OX$  ўқи горизонтал,  $OY$  ўқи вертикал жойлашсин (1-чизма)

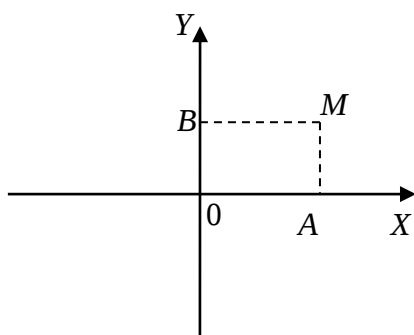


1-чизма

$OX$  ва  $OY$  тўғри чизиқлар координата ўқлари ( $OX$  - абсциссалар ўқи,  $OY$  - ординаталар ўқи), уларнинг кесишган  $O$  нуқта координата боши дейилади.

Бу иккала ўқ учун бир хил бўлган ўлчов бирлиги-масштаб бирлиги (узунлиги 1 га тенг кесма) ни оламиз. Натижада,  $OX$ ,  $OY$  координата ўқлари ва уларда тайинлаган масштаб бирлигидан иборат система ҳосил бўлади. Бу система текисликда Декарт координаталари системаси дейилади.

Энди текисликда ихтиёрий  $M$  нуқтани олайлик. (2-чизма)



2-чизма

$M$  нуқтадан абсцисса ўқи  $OX$  га  $MA$ , ордината ўқи  $OY$  га  $MB$  перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикуляр  $OX$  ўқидан  $OA$ ,  $OY$  ўқидан  $OB$  кесмаларни ажратади. Ҳосил бўлган  $OA$  ва  $OB$  кесмаларнинг узунликларини қандай ишора билан олинишини қуйидаги қоида аниқлаб беради:

1) агар  $A$  нуқта  $OX$  ўқидан  $O$  нуқтадан

ўнг томонда жойлашса, унда  $OA$  кесманинг узунлиги "+" ишора билан,  $O$  нуқтадан чапда жойлашса, унда  $OA$  кесманинг узунлиги "-" ишора билан олинади.

2) агар  $B$  нукта  $OY$  ўқида  $O$  нуктадан юқорида жойлашса, унда  $OB$  кесманинг узунлиги "+" ишора билан,  $O$  нуктадан пастда жойлашса, унда  $OB$  кесманинг узунлиги "-" ишора билан олинади.

Ишоралари келтирилган қоидага кўра олинган  $OA$  ва  $OB$  кесмаларнинг узунликларини мос равишда  $x$  ва  $y$  орқали белгилаймиз:

$$x = OA, \quad y = OB.$$

Одатда,  $x$  га  $M$  нуктанинг абсциссаси,  $y$  га эса  $M$  нуктанинг ординатаси, умуман  $x$  ва  $y$  га  $M$  нуктанинг координаталари дейилади.  $M$  нукта координаталар орқали  $M(x, y)$  каби ёзилади.

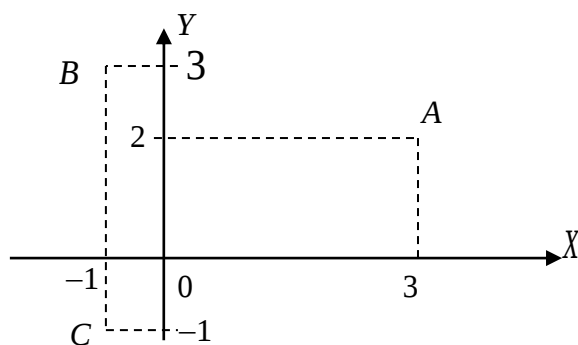
Демак, текисликдаги ихтиёрий нукта ўзининг координаталари  $x$  ва  $y$  лардан тузилган  $(x, y)$  жуфтлик билан тўла аниқланади.

Айтайлик  $x$  ва  $y$  ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Текисликда координаталари шу  $x$  ва  $y$  бўлган нукта қуйидагича топилади:  $OX$  ўқида  $x$  ҳақиқий сон,  $OY$  ўқида  $y$  ҳақиқий сон жойлаштирилиб, шу нукталардан мос равишда  $OX$  ва  $OY$  ўқларига перпендикуляр ўтказилади. Бу перпендикулярнинг кесишиш нуктаси изланаётган нуктани аниқлайди.

Масалан,

$$A(3, 2), \quad B(-1, 3), \quad C(-1, -1)$$

нукталарнинг текисликдаги тасвирлари 3-чизмада кўрсатилган.



3-чизма

**Эслатма.** Абсцисса ўқида жойлашган барча нукталарнинг ординаталари, ордината ўқида жойлашган барча нукталарнинг абсциссалари нол бўлади. Координаталар бошининг координаталари  $(0, 0)$  бўлади:  $O(0, 0)$ .

Юқорида айтилганлардан қуйидаги хулоса келиб чиқади:

текисликдаги ихтиёрий нуктага  $x$  ва  $y$  ҳақиқий сонлардан тузилган битта  $(x, y)$  жуфтлик мос келади. Аксинча, ихтиёрий  $x$  ва  $y$  ҳақиқий сонлардан тузилган  $(x, y)$  жуфтлик текисликда битта нуктани ифодалайди.

## 2-МАЪРУЗА

## Тенгламалар ва тенгсизликлар

Олий математиканинг турли соҳаларидаги масалалари, кўп ҳолларда тенглама ва тенгсизликларни ечиш билан ҳал қилинади.

Одатда, берилган тенглама ва тенгсизликлар, уларга тенг кучли, айти пайтда соддароқ бўлган тенглама ва тенгсизликлар билан алмаштирилади. Уларни ечиб, берилган тенглама ва тенгсизликларнинг ечимлари топилади.

### 2.1. Чизиқли ва квадрат тенгламалар

Маълумки, номаълумга нисбатан биринчи даражада бўлган тенглама чизиқли тенглама дейилади. Бу тенглама содда ҳолда ушбу

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

кўринишда бўлади, бунда  $a$  ва  $b$  берилган сонлар.

(1) тенглама:

1)  $a \neq 0$  бўлганда ягона  $x = -\frac{b}{a}$  ечимга эга бўлади,

2)  $a = 0$ ,  $b = 0$  бўлганда ечимлари чексиз кўп (ихтиёрий сон тенгламанинг ечими) бўлади.

3)  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  бўлганда ечимга эга бўлмайди.

**1-мисол.** Ушбу

$$\frac{2x-5}{4} + \frac{2x+1}{3} + x = \frac{x}{4} + 2$$

тенглама ечилсин.

◀Бу тенгламанинг ҳар икки томонини 4 ва 3 сонларининг энг кичик умумий карралиси 12 га кўпайтириб

$$12 \cdot \frac{2x-5}{4} + 12 \cdot \frac{2x+1}{3} + 12x = 12 \cdot \frac{x}{4} + 24,$$

яъни

$$3(2x-5) + 4(2x+1) + 12x = 3x + 24$$

бўлишини топамиз.

Соддалаштириш натижасида кейинги тенглик қуйидаги

$$6x - 15 + 8x + 4 + 12x = 3x + 24,$$

яъни

$$23x = 35$$

кўринишга келади. Равшанки, бу тенглама берилган тенгламага тенг

кучли бўлиб, унинг ечими  $x = \frac{35}{23}$  бўлади. ▶

Маълумки, номаълумга нисбатан иккинчи даражада бўлган тенглама квадрат тенглама дейилади. Бу тенглама содда ҳолда ушбу

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

кўринишда бўлади. Бунда  $a, b, c$  берилган сонлар бўлиб, квадрат тенгламанинг коэффицентлари дейилади. (2) тенгламанинг ечими, унинг дискриминанти

$$D = b^2 - 4ac$$

га боғлиқ:

- 1) агар  $D > 0$  бўлса, (2) тенглама иккита ҳақиқий ечимга эга бўлиб,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

бўлади;

- 2) агар  $D = 0$  бўлса, (2) тенглама битта ҳақиқий ечимга эга бўлиб,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

бўлади;

- 3) агар  $D < 0$  бўлса, (2) тенглама ҳақиқий ечимга эга бўлмайди.

**2-мисол.** Ушбу

$$1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$$

тенглама ечилсин.

◀Равшанки,  $2x^2 + 7x - 4 = (x+4)(2x-1)$ . Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини ( $x \neq -4$ ,  $x \neq \frac{1}{2}$  деб)  $(x+4)(2x-1)$  га кўпайтириб топамиз:

$$2x^2 + 7x - 4 + \frac{2x}{x+4} \cdot (x+4)(2x-1) + \frac{27(2x^2 + 7x - 4)}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1} (x+4)(2x-1).$$

Натижада

$$2x^2 + 7x - 4 + 4x^2 - 2x + 27 = 6x + 24$$

бўлиб,

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

бўлади. Бу тенгламани ечиб

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12},$$

$x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$  бўлишини топамиз. Бироқ,  $x = \frac{1}{2}$  да қаралаётган тенглама маънога эга эмас. Демак, берилган тенгламанинг ечими  $x = -\frac{1}{3}$  бўлади. ►

## 53-МАЪРУЗА

### Узлуксиз тасодифий миқдорлар ва уларнинг тақсимот функциялари. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси

#### 53.1. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги, математик кутилиши ва дисперсияси

Маълумки, тасодифий миқдор узлуксиз бўлса, бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари бирор  $(a, b)$  оралиқни ташкил этади. Равшанки, бу ҳолда тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни каби жадвал шаклида ёзиб бўлмайди.

Фараз қилайлик  $F(x)$  функция узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлсин.

**1-таъриф.** Айтайлик,  $\xi$  тасодифий миқдор,  $F(x)$  эса унинг тақсимот функцияси бўлсин.

Агар  $F(x)$  функция дифференциалланувчи бўлса, унинг  $F(x)$  ҳосиласи  $\xi$  тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги дейилади ва  $p(x)$  каби белгиланади:

$$p(x) = F'(x).$$

Энди тасодифий миқдор зичлик функцияси  $p(x)$  нинг хоссаларини келтирамиз.

**1-хосса.** Ихтиёрий  $x$  учун

$$p(x) \geq 0, \quad P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (1)$$

бўлади.

◄ Тақсимот функцияси  $F(x)$  ўсувчи бўлгани учун  $F'(x) \geq 0$  бўлиб, ундан  $p(x) \geq 0$ , бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Иккинчи томондан Ньютон-Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1).$$

бўлади.

Юқоридаги тенгликлардан

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

бўлишини топамиз. ►

**2-хосса.** Агар  $p(x)$  тасодифий миқдорнинг зичлик эҳтимоли бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

бўлади.

◄Равшанки,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow -\infty}} \int_v^u p(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow -\infty}} \int_v^u F'(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(u) - F(v) = 1 - 0 = 1. \quad \blacktriangleright$$

**3-хосса.** Агар  $\xi$  тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси  $F(x)$  зичлик эҳтимоли  $p(x)$  бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

бўлади.

◄Равшанки,

$$\int_{-\infty}^x p(x) dx = \lim_{v \rightarrow -\infty} \int_v^x p(x) dx = \lim_{v \rightarrow -\infty} [F(x) - F(v)] = F(x) - \lim_{v \rightarrow -\infty} F(v) = F(x) - 0 = F(x).$$

►

**4-хосса.** Агар  $\xi$  тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси  $F(x)$   $x_1$  нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$P\{\xi = x_1\} = 0$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq \xi < x_2\} &= P\{x_1 < \xi < x_2\}, \\ P\{x_1 < \xi < x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

бўлади.

**1-мисол.** Агар  $\xi$  тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

бўлса, бу тасодифий миқдорнинг  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  оралиқдаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоли топилсин.

◀(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$P\left\{\frac{1}{2} < \xi < 1\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^1 p(x) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4}. \quad \blacktriangleright$$

Айтайлик,  $\xi$  тасодифий миқдор,  $p(x)$  эса унинг эҳтимол зичлиги бўлсин.

**2-таъриф.** Агар ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$$

хосмас интеграл мавжуд бўлса, бу интеграл  $\xi$  тасодифий миқдорнинг математик қутилиши дейилади. Демак,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \quad (2)$$

## Мундарижа

|                                                                                                 |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Сўз боши.....</b>                                                                            | <b>3</b> |
| 1-маъруза. Ҳақиқий сонлар. Ҳақиқий сонлар тўплами Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати.....          | 5        |
| 1-§. Рационал ва иррационал сонлар.....                                                         | 5        |
| 2-§. Ҳақиқий сон. Ҳақиқий сонлар тўплами ва унинг хоссалари.....                                | 6        |
| 3-§. Сонлар ўқи. Сонларни геометрик тасвирлаш.....                                              | 9        |
| 4-§. Соннинг абсолют қиймати ва унинг хоссалари.....                                            | 11       |
| 5-§. Математик белгилар.....                                                                    | 12       |
| Машқлар.....                                                                                    | 13       |
| 2-маъруза. Тенгламалар ва тенгсизликлар.....                                                    | 14       |
| 1-§. Чизикли ва квадрат тенгламалар.....                                                        | 14       |
| 2-§. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари.....                                                  | 16       |
| 3-§. Детерминантларни ҳисоблаш.....                                                             | 20       |
| 4-§. Чизикли тенгламалар системаси. Крамер усули.....                                           | 22       |
| 5-§. Чизикли ва квадрат тенгсизликлар.....                                                      | 27       |
| Машқлар.....                                                                                    | 30       |
| 3 -маъруза.Текисликда Декарт ва қутб координаталари системаси.....                              | 31       |
| 1-§. Декарт координаталари системаси .....                                                      | 31       |
| 2-§. Қутб координаталари системаси.....                                                         | 32       |
| 3-§. Икки нуқта орасидаги масофа ва кесмани берилган нисбатда бўлиш                             | 34       |
| Машқлар.....                                                                                    | 36       |
| 4-маъруза. Векторлар.....                                                                       | 38       |
| 1-§. Вектор тушунчаси ва векторлар устида амаллар .....                                         | 38       |
| 2-§. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва векторларнинг координаталари.....                       | 40       |
| Машқлар.....                                                                                    | 43       |
| 5-маъруза. Комплекс сонлар. Комплекс сон тушунчаси.....                                         | 44       |
| 1-§. Комплекс сонлар устида амаллар.....                                                        | 44       |
| 2-§. Комплекс сонни геометрик тасвирлаш.....                                                    | 46       |
| 3-§. Комплекс соннинг тригонометрик шакли (кўриниши). Комплекс соннинг модули ва аргументи..... | 48       |
| Машқлар.....                                                                                    | 51       |
| 6-маъруза. Юқори даражали тенгламалар.....                                                      | 52       |
| 1-§. Кўпхадлар ва алгебранинг асосий теоремаси .....                                            | 52       |
| 2-§. Юқори даражали тенгламаларни ечиш.....                                                     | 54       |
| Машқлар.....                                                                                    | 60       |
| 7-маъруза.Текисликда тўғри чизик ва унинг турли тенгламалари.....                               | 61       |
| 1-§. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси.....                                                     | 61       |
| 2-§. Тўғри чизикқа оид масалалар.....                                                           | 66       |
| Машқлар.....                                                                                    | 71       |
| 8 -маъруза.Текисликда иккинчи тартибли эгри чизиклар.....                                       | 72       |
| 1-§. Айлана.....                                                                                | 72       |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2-§. Эллипс.....                                                                              | 73  |
| 3-§. Гипербола.....                                                                           | 76  |
| 4-§. Парабола.....                                                                            | 79  |
| 5-§. Иккинчи тартибли эгри чизикларнинг умумий тенгламаси.....                                | 80  |
| Машқлар.....                                                                                  | 83  |
| 9-маъруза.Функция тушунчаси.....                                                              | 85  |
| 1-§. Функция таърифи. Функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари (тўпламлари).....             | 85  |
| 2-§. Функция графиги.....                                                                     | 87  |
| 3-§. Чегараланган ва монотон функциялар .....                                                 | 88  |
| 4-§. Жуфт, тоқ ва даврий функциялар .....                                                     | 91  |
| 5-§. Мураккаб ва тескари функция.....                                                         | 93  |
| Машқлар.....                                                                                  | 95  |
| 10 -маъруза.Содда функциялар ва уларнинг графиклари.....                                      | 96  |
| 1-§. Бутун рационал функция .....                                                             | 96  |
| 2-§. Каср рационал функция .....                                                              | 97  |
| 3-§. Тригонометрик функциялар.....                                                            | 101 |
| 4-§. Тескари тригонометрик функциялар .....                                                   | 103 |
| Машқлар.....                                                                                  | 104 |
| 11 -маъруза.Натурал аргументли функция (сонлар кетма-кетлиги) ва унинг лимити.....            | 105 |
| 1-§. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси.....                                                      | 105 |
| 2-§. Сонлар кетма-кетлигининг лимити.....                                                     | 107 |
| 3-§. Кетма-кетликлар устида амаллар. Чексиз кичик миқдорлар ҳақида леммалар.....              | 110 |
| 4-§. Яқинлашувчи кетма-кетликлар ва уларнинг хоссалари.....                                   | 111 |
| 5-§. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги .....                                                 | 113 |
| 6-§. Мухим лимит ( $e$ - сони) ва кетма-кетлик лимитини ҳисоблаш .....                        | 114 |
| Машқлар.....                                                                                  | 117 |
| 12 -маъруза. Функция лимити.....                                                              | 118 |
| 1-§. Функция лимити таърифи.....                                                              | 118 |
| 2-§. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар.....                                             | 120 |
| 3-§. Чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари.....                                   | 121 |
| 4-§. Функция лимитининг мавжудлиги.....                                                       | 123 |
| 5-§. Мухим лимитлар ва функция лимитини ҳисоблаш .....                                        | 124 |
| Машқлар.....                                                                                  | 130 |
| 13 -маъруза. Функциянинг узлуксизлиги. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари.....                 | 131 |
| 1-§. Функциянинг узлуксизлик тушунчаси.....                                                   | 131 |
| 2-§. Узлуксиз функциялар устида амаллар. Мураккаб ва тескари функцияларнинг узлуксизлиги..... | 132 |
| 3-§. Функциянинг узилиши ва узилишнинг турлари.....                                           | 135 |
| 4-§. Сегментда узлуксиз бўлган функциялар ҳақида теоремалар.....                              | 137 |
| Машқлар.....                                                                                  | 138 |

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14-маъруза. Функциянинг ҳосиласи. Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари.....                   | 139 |
| 1-§. Функция ҳосиласи тушунчаси .....                                                              | 139 |
| 2-§. Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари.....                                                | 141 |
| 3-§. Ҳосила ҳисоблаш қоидалари.....                                                                | 143 |
| 4-§ . Тесқари функциянинг ҳосиласи.....                                                            | 145 |
| 5-§. Функция ҳосилаларини ҳисоблаш.....                                                            | 145 |
| Машқлар.....                                                                                       | 151 |
| 15-маъруза. Функциянинг дифференциали. Тақрибий формулалар.....                                    | 152 |
| 1-§. Функция дифференциали тушунчаси.....                                                          | 152 |
| 2-§. Функция дифференциалининг геометрик маъноси.....                                              | 153 |
| 3-§. Йиғинди, кўпайтма ва нисбатнинг дифференциали. Мураккаб функциянинг дифференциали.....        | 155 |
| 4-§. Тақрибий формулалар.....                                                                      | 156 |
| Машқлар.....                                                                                       | 157 |
| 16-маъруза. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.....                                          | 158 |
| 1-§. Юқори тартибли ҳосилалар.....                                                                 | 158 |
| 2-§. Содда қоидалар. Лейбниц формуласи.....                                                        | 160 |
| 3-§. Юқори тартибли дифференциаллар.....                                                           | 161 |
| Машқлар.....                                                                                       | 162 |
| 17 -маъруза. Дифференциалланувчи функцияларнинг хоссалари. Тейлор формуласи.....                   | 163 |
| 1-§. Дифференциалланувчи функцияларнинг хоссалари.....                                             | 163 |
| 2-§. Тейлор формуласи.....                                                                         | 166 |
| 3-§. Баъзи функциялар учун Тейлор (Маклорен) формулалар. Тақрибий формулалар.....                  | 168 |
| Машқлар.....                                                                                       | 170 |
| 18 –маъруза. Ҳосилалар ёрдамида функцияларнинг ўсувчи, камаювчи ҳамда экстремумларини аниқлаш..... | 171 |
| 1-§. Функциянинг ўсувчи ҳамда камаювчилиги.....                                                    | 171 |
| 2-§. Функция экстремуми. Функция экстремумга эришишининг зарурий ва етарли шартлари.....           | 173 |
| 3-§. Функциянинг $[a,b]$ сегментдаги энг катта ва энг кичик қийматлари..                           | 178 |
| Машқлар.....                                                                                       | 179 |
| 19-маъруза. Функция графигининг қавариклиги, ботиклиги, эгилиш нуқтаси ва асимптотаси.....         | 180 |
| 1-§. Функция графигининг қаварик ва ботиклиги.....                                                 | 180 |
| 2-§. Функция графигининг эгилиш нуқтаси.....                                                       | 181 |
| 3-§. Функция графигининг асимптотаси.....                                                          | 183 |
| 4-§. Функция графигини яшаш.....                                                                   | 184 |
| Машқлар.....                                                                                       | 187 |
| 20 -маъруза. Параметрик усулда берилган функциялар.....                                            | 188 |
| 1-§. Параметрик усулда берилган функция тушунчаси.....                                             | 188 |

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2-§. Параметрик усулда берилган функцияларнинг ҳосилалари.....                                           | 189 |
| 3-§. Параметрик усулда берилган функцияларнинг экстремумлари.....                                        | 191 |
| Машқлар.....                                                                                             | 193 |
| 21 -маъруза. Аниқмас интеграл. Интегралнинг содда хоссалари ва интеграллаш усуллари.....                 | 195 |
| 1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчалари.....                                              | 195 |
| 2-§. Аниқмас интегралнинг содда хоссалари.....                                                           | 197 |
| 3-§. Интеграллаш усуллари.....                                                                           | 199 |
| Машқлар.....                                                                                             | 204 |
| 22 -маъруза. Рационал функцияларни интеграллаш.....                                                      | 205 |
| 1-§. Кўпхад ва унинг илдизлари.....                                                                      | 205 |
| 2-§. Тўғри касрларни содда касрлар йиғиндиси орқали ифодалаш (тўғри касрларни содда касрларга ёйиш)..... | 207 |
| 3-§. Содда касрларни интеграллаш.....                                                                    | 210 |
| 4-§. Рационал функцияларни интеграллаш.....                                                              | 212 |
| Машқлар.....                                                                                             | 214 |
| 23-маъруза. Баъзи иррационал функцияларни ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш.....              | 215 |
| 1-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш.....                                                      | 215 |
| 2-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш .....                                                        | 218 |
| Машқлар.....                                                                                             | 222 |
| 24-маъруза. Аниқ интеграл тушунчаси. Аниқ интегралнинг хоссалари....                                     | 223 |
| 1-§. Масала.....                                                                                         | 223 |
| 2-§. Аниқ интеграл тушунчаси. Интегралнинг мавжудлиги.....                                               | 224 |
| 3-§. Аниқ интегралнинг хоссалари.....                                                                    | 227 |
| Машқлар.....                                                                                             | 229 |
| 25 -маъруза. Аниқ интегрални ҳисоблаш. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш.....                            | 230 |
| 1-§. Аниқ интегралларни ҳисоблаш усуллари.....                                                           | 230 |
| 2-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш.....                                                           | 238 |
| Машқлар.....                                                                                             | 243 |
| 26-маъруза. Аниқ интегралнинг баъзи-бир татбиқлари.....                                                  | 244 |
| 1-§. Текис шаклнинг юзини ҳисоблаш.....                                                                  | 244 |
| 2-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш.....                                                                         | 247 |
| 3-§ . Айланма сиртнинг юзини ҳисоблаш.....                                                               | 251 |
| 4-§. Статик моментлар ва оғирлик марказларини ҳисоблаш.....                                              | 252 |
| Машқлар.....                                                                                             | 255 |
| 27-маъруза. Хосмас интеграллар.....                                                                      | 256 |
| 1-§. Чегаралари чексиз (чексиз оралик бўйича) интеграллар.....                                           | 256 |
| 2-§. Яқинлашувчи хосмас интегралларнинг хоссалари.....                                                   | 259 |
| 3-§. Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Яқинлашиш аломати.....                                         | 260 |
| 4-§. Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги.....                                                    | 263 |
| 5-§. Хосмас интегралларни ҳисоблаш.....                                                                  | 264 |

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6-§. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари.....                                   | 266 |
| Машқлар.....                                                                               | 270 |
| 28-маъруза. Сонли қаторлар.....                                                            | 272 |
| 1-§. Қатор тушунчаси. Қаторнинг яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилиги                         | 272 |
| 2-§ . Яқинлашувчи қаторларнинг содда хоссалари.....                                        | 275 |
| 3-§. Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги.<br>Солиштириш теоремалари.....     | 277 |
| 4-§.Мусбат ҳадли қаторларда яқинлашиш аломатлари.....                                      | 279 |
| 5-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар. Қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги,<br>Лейбниц теоремаси..... | 283 |
| Машқлар.....                                                                               | 287 |
| 29-маъруза. Функционал қаторлар ва уларнинг текис<br>яқинлашувчанлиги.....                 | 289 |
| 1-§. Функционал қатор тушунчаси.....                                                       | 289 |
| 2-§. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги.....                                       | 291 |
| 3-§. Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари.....                              | 293 |
| Машқлар.....                                                                               | 295 |
| 30-маъруза.Даражали қаторлар.....                                                          | 296 |
| 1-§. Даражали қаторлар, уларнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш<br>интервали.....          | 296 |
| 2-§. Даражали қаторнинг хоссалари.....                                                     | 300 |
| 3-§. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш. Тейлор қатори.....                             | 302 |
| 4-§. Баъзи содда функцияларнинг Маклорен қатори.....                                       | 305 |
| 5-§. Даражали қаторларнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқлари.....                          | 307 |
| Машқлар.....                                                                               | 309 |
| 31 -маъруза. Фурье қаторлари ҳақида дастлабки маълумотлар.....                             | 310 |
| Машқлар.....                                                                               | 317 |
| 32-маъруза.Фазода координаталар системаси.....                                             | 318 |
| 1-§. Фазода декарт координаталари системаси.....                                           | 318 |
| 2-§. Фазода икки нукта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда<br>бўлиш.....           | 320 |
| 3-§. Фазодаги нуқтанинг цилиндрик ҳам сферик координаталари.....                           | 321 |
| Машқлар.....                                                                               | 323 |
| 33-маъруза.Фазода текислик ва тўғри чизик.....                                             | 324 |
| 1-§. Фазода текислик ва унинг турли тенгламалари.....                                      | 324 |
| 2-§. Фазода тўғри чизик.....                                                               | 328 |
| 3-§. Фазодаги текислик ҳамда тўғри чизикларга оид муҳим маълумотлар.                       | 332 |
| Машқлар.....                                                                               | 336 |
| 34-маъруза.Иккинчи тартибли сиртлар.....                                                   | 338 |
| 1-§. Сфера .....                                                                           | 338 |
| 2-§. Эллипсоид.....                                                                        | 339 |
| 3-§. Гиперболоидлар.....                                                                   | 341 |
| 4-§. Параболоидлар.....                                                                    | 345 |

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5-§. Конус.....                                                                                           | 348 |
| 6-§. Цилиндр.....                                                                                         | 349 |
| Машқлар.....                                                                                              | 350 |
| 35-маъруза. Фазода векторлар ва уларнинг баъзи татбиқлари.....                                            | 352 |
| 1-§. Асосий тушунчалар. Векторлар ҳисобининг асосий формуласи .....                                       | 352 |
| 2-§. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси.....                                                                 | 355 |
| 3-§. Икки векторлар орасидаги бурчак. Икки векторларнинг перпендикулярлик ҳамда параллеллик шартлари..... | 357 |
| 4-§. Векторларнинг вектор кўпайтмаси.....                                                                 | 359 |
| 5-§. Векторларнинг баъзи-бир татбиқлари.....                                                              | 362 |
| Машқлар. ....                                                                                             | 365 |
| 36 – маъруза. Векторлар анализининг элементлари.....                                                      | 366 |
| 1-§. Ўзгарувчи вектор ва вектор-функция тушунчалари. Годограф.....                                        | 366 |
| 2-§. Вектор-функциянинг лимити, узлуксизлиги.....                                                         | 367 |
| 3-§. Вектор-функциянинг ҳосиласи.....                                                                     | 370 |
| 4-§. Вектор-функция ва унинг ҳосилаларининг баъзи татбиқлари.....                                         | 371 |
| Машқлар.....                                                                                              | 376 |
| 37-маъруза. Кўп ўзгарувчили функция ҳамда унинг лимити ва узлуксизлиги.....                               | 377 |
| 1—§. $R^2$ фазода тўпламлар.....                                                                          | 377 |
| 2-§. Икки ўзгарувчили функция ва унинг графиги.....                                                       | 379 |
| 3-§. Икки ўзгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги.....                                             | 382 |
| Машқлар. ....                                                                                             | 388 |
| 38-маъруза. Икки ўзгарувчили функциянинг ҳосила ва дифференциаллари.....                                  | 389 |
| 1-§. Функциянинг хусусий ҳосилалари.....                                                                  | 389 |
| 2-§. Икки ўзгарувчили функциянинг дифференциали.....                                                      | 390 |
| 3-§. Мураккаб функциянинг ҳосилалари.....                                                                 | 394 |
| 4-§. Юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллар.....                                                        | 395 |
| 5-§. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент.....                                                                 | 398 |
| Машқлар.....                                                                                              | 402 |
| 39-маъруза. Икки ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи. Функциянинг экстремумлари.....                 | 404 |
| 1-§. Функциянинг Тейлор формуласи.....                                                                    | 404 |
| 2-§. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремумлари.....                                                      | 407 |
| Машқлар.....                                                                                              | 412 |
| 40-маъруза. Каррали интеграл тушунчаси. Интегралнинг хоссалари ва ҳисоблаш.....                           | 413 |
| 1-§. Икки каррали интеграл тушунчаси.....                                                                 | 413 |
| 2-§. Тўғри тўртбурчак бўйича икки каррали интегралнинг хоссалари ва уни ҳисоблаш.....                     | 416 |
| 3-§. Эгри чизикли трапеция бўйича икки каррали интеграллар.....                                           | 418 |
| 4-§. Содда тўпламларга ажраладиган тўплам бўйича икки каррали интеграллар.....                            | 421 |

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5-§. Икки каррали интегралнинг умумий тушунчаси. Икки каррали интеграллар кутб координаталарда.....                | 424 |
| Машқлар.....                                                                                                       | 426 |
| 41-маъруза.Икки каррали интегралларнинг баъзи татбиқлари.....                                                      | 427 |
| 1-§. Текис шаклнинг юзи.....                                                                                       | 427 |
| 2-§. Фазода жисмнинг ҳажми.....                                                                                    | 428 |
| 3-§. Сиртнинг юзи.....                                                                                             | 430 |
| 4-§. Текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) масаси.....                                                             | 432 |
| 5-§. Текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) оғирлик маркази.....                                                    | 434 |
| 6-§.Текисликдаги шаклнинг (пластинканинг) статик моментлари.....                                                   | 435 |
| Машқлар.....                                                                                                       | 437 |
| 42-маъруза.Уч ўзгарувчили функция, унинг хусусий ҳосилалари ва интеграллари.....                                   | 438 |
| 1-§. Уч ўзгарувчили функция тушунчаси. Функциянинг лимити ва узлуксизлиги.....                                     | 438 |
| 2-§. Функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари.....                                                       | 440 |
| 3-§. Уч ўзгарувчили функциянинг интеграллари. (Уч каррали интеграл).....                                           | 445 |
| 4-§. Уч каррали интегралларнинг баъзи татбиқлари.....                                                              | 449 |
| Машқлар.....                                                                                                       | 452 |
| 43-маъруза.Оддий дифференциал тенгламалар. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар.....                    | 453 |
| 1§. Дифференциал тенглама ва унинг ечими тушунчалари.....                                                          | 453 |
| 2-§. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар.....                                                          | 455 |
| 3-§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.....                                                       | 457 |
| 4-§. Чизикли дифференциал тенгламалар.....                                                                         | 460 |
| 5-§. Тўлиқ дифференциал тенглама.....                                                                              | 464 |
| Машқлар.....                                                                                                       | 467 |
| 44-маъруза.Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар.....                                                    | 468 |
| 1-§. Иккинчи тартибли дифференциал тенглама ва унинг ечими.....                                                    | 468 |
| 2-§. $y'' = F(x, y, y')$ дифференциал тенгламанинг баъзи хусусий ҳоллари ва уларни ечиш.....                       | 470 |
| 3-§. Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар.....                                                        | 475 |
| Машқлар.....                                                                                                       | 478 |
| 45-маъруза.Иккинчи тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.....                           | 480 |
| 1-§. Иккинчи тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама ва унинг ечимининг умумий кўриниши..... | 480 |
| 2-§. Характеристик тенгламанинг илдизига кўра бир жинслик дифференциал тенгламанинг ечимини топиш.....             | 482 |
| 3-§. Бир жинслик дифференциал тенгламанинг умумий ечимлари.....                                                    | 484 |

|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Машқлар.....                                                                                                          | 487 |
| 46- маъруза.Эгри чизикли<br>интеграллар.....                                                                          | 489 |
| 1-§. Биринчи тур эгри чизикли интеграл тушунчаси.....                                                                 | 489 |
| 2-§. Биринчи тур эгри чизикли интегралларнинг баъзи татбиқлари.....                                                   | 492 |
| 3-§. Иккинчи тур эгри чизикли интеграл тушунчаси.....                                                                 | 493 |
| 4-§. Иккинчи тур эгри чизикли интегралларни ҳисоблаш ва татбиқлари..                                                  | 496 |
| Машқлар.....                                                                                                          | 498 |
| 47-маъруза. Сирт<br>интеграллари.....                                                                                 | 499 |
| 1-§. Биринчи тур сирт интегралли тушунчаси.....                                                                       | 499 |
| 2-§. Биринчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш.....                                                                    | 500 |
| 3-§. Биринчи тур сирт интегралларининг баъзи татбиқлари.....                                                          | 502 |
| 4-§. Иккинчи тур сирт интегралли тушунчаси.....                                                                       | 504 |
| 5-§. Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш.....                                                                    | 507 |
| Машқлар.....                                                                                                          | 509 |
| 48-маъруза.Майдон назариясининг<br>элементлари.....                                                                   | 510 |
| 1-§.Скаляр ва вектор майдон тушунчалари.....                                                                          | 510 |
| 2-§. Скаляр майдоннинг сатх сирти ва градиенти.....                                                                   | 512 |
| 3-§. Вектор майдоннинг вектор чизиги ва оқими.....                                                                    | 520 |
| Машқлар.....                                                                                                          | 527 |
| 49-маъруза.Вектор майдоннинг дивергенцияси ва<br>ротари.....                                                          | 528 |
| 1-§. Остроградский-Гаусс формуласи. Вектор майдоннинг<br>дивергенцияси.....                                           | 528 |
| 2-§. Вектор майдоннинг циркуляцияси ва ротори.....                                                                    | 532 |
| 3-§. Стокс формуласи.....                                                                                             | 536 |
| Машқлар.....                                                                                                          | 538 |
| 50-маъруза.Математик физиканинг баъзи бир<br>тенгламалари.....                                                        | 540 |
| 1-§. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама тушунчаси.....                                                            | 540 |
| 2-§. Торнинг тебраниши тенгламаси.....                                                                                | 543 |
| 3- §. Тор тебраниши тенгламасини Фурье усули ёрдамида ечиш.....                                                       | 546 |
| 4-§. Иссиқликнинг тарқалиш тенгламаси.....                                                                            | 550 |
| 5-§. Иссиқлик тарқалиш тенгламасини Фурье усули ёрдамида ечиш.....                                                    | 552 |
| Машқлар.....                                                                                                          | 555 |
| 51-маъруза.Эҳтимоллар назариясининг асослари.Ҳодисалар ва<br>уларнинг<br>эҳтимоллари.....                             | 557 |
| 1-§. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари. Тасодифий<br>ҳодиса. Ҳодисалар устида амаллар. Ҳодиса эҳтимоли..... | 557 |
| 2-§. Тасодифий ҳодиса эҳтимоли.....                                                                                   | 559 |
| 3-§. Эҳтимолларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалар.....                                                                 | 562 |

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4-§. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи.....                                                                          | 565 |
| 5-§. Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари.....                                                                   | 566 |
| Машқлар.....                                                                                                               | 573 |
| 52- маъруза.Тасодифий<br>миқдорлар.....                                                                                    | 574 |
| 1-§. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолининг тақсимот қонуни ва<br>тақсимот функцияси.....                                   | 575 |
| 2-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва унинг<br>хоссалари.....                                            | 578 |
| 3-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси ва унинг хоссалари....                                                       | 580 |
| 4-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг асосий тақсимот қонунлари.....                                                           | 583 |
| Машқлар.....                                                                                                               | 587 |
| 53-маъруза.Узлуксиз тасодифий миқдорлар ва уларнинг тақсимот<br>функциялари. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси..... | 588 |
| 1-§. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги, математик<br>кутилиши ва дисперсияси.....                              | 588 |
| 2-§. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг асосий тақсимот қонунлари.....                                                          | 591 |
| 3-§.Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси.....                                                                          | 594 |