

**O'ZBEKSTAN RESPUBLİKASI JOQARI HA'M ORTA ARNAWLI
BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ**

**BERDAQ ATINDAG'I QARAQALPAQ MA'MLEKETLİK
UNİVERSİTETİ**

Magistratura basqışı

Qol jazba huqıqında

UDK 517.98

Abdikadirov Anvar

«Dol'bo kompleksi ushin Koshi ma'selesı»

5A460101 Matematikalıq analiz qa'nigeligi boyınsha

Magistr

akademiyalıq da'rejesin alıw ushin jazılǵ'an

D İ S S E R T A T s İ Y a

Magistrlik dissertatsiya matematika-lıq İlimiy basshı: _____

analiz kafedrasında ko'rip shıǵ'ıldı ha'm f.-m.i.d. Qosbergenov S.

qorg'awg'a usınıldı. Kafedra baslıǵ'ı:

f.-m.i.k. Tlewмурatov S. _____

« » _____ 2012 jıl

NO'KIS 2012

Mazmunı

Kirisiw	3
I-bap. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesi.....	6
§1.1. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesinin' qoyılıwı.....	6
§1.2. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesinin' birden birligi	8
§1.3. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesi sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli sha'rtleri.....	10
§1.4. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesi sheshimge iye bolıwının' jetkilikli sha'rtleri	12
§1.5. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesinin' sharda sheshimge iye bolıwı sha'rtleri.....	17
§1.6. Qos ortogonalı bazisler.....	21
I-bap boyınsha juwmaq	32
II – bap. Ko'p o'lsheмли Karleman formulaları.....	33
§ 2.1. Karleman – Goluzin – Kırılov formulası.....	33
§ 2.2. Ayzenberg formulası.....	39
§ 2.3. Koshi ma'selesi sheshimge iye bolıw sha'rtleri	43
§ 2.4. Qos ortogonalı bazislerge tiykarlang'an Karleman formulası.....	46
§ 2.5. Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'selesi.....	49
II-bap boyınsha juwmaq	54
Juwmaqlaw	55
Paydalanılǵ'an a'debiyatlar	57

Kirisiw

Matematikanın ko'plegen tarawlarında, a'sirese matematikalıq-fizika ha'm differentsial ten'lemeler teoriyasında Koshi ma'sesele o'zinin a'meliy ha'm teoriyalıq jaqtan qollanılıwı boyınsha ju'da ku'shli a'hmiyetke iye bolıp esaplanadı. Bul ma'sele tek g'ana ayılğ'an tarawlarda g'ana emes, al ba'lkim bir ha'm ko'p kompleks o'zgeriwshili funktsiyalar teoriyasında da ko'plegen qollanılıwılarg'a iye. Ma'selen, Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'sesele, Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele ha'm tag'ı basqalar. Sonnı aytıp o'tiw kerek, Koshi-Riman operatorı ushın Koshi ma'sesele tek g'ana funktsiyalar ushın emes, sonın menen birge differentsial formalar ushın da qaraw mu'mkin. Bunnan tisqari, qos ortogonallıqqa iye bazislerden paydalanıp Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele qarastırıp, bunda kompleksler ushın Koshi ma'sesele sheshimge iye bolıwının za'ru'rli ha'm jetkilikli sha'rtleri tabıladı. Bul na'tiyjeler CR-funktsiyalar teoriyasına jaqın bolıp, olardıń tiykarg'ıları N.N. Tarxanov ha'm A.A. Shlapunovlarg'a tiyisli([1]).

Koshi-Riman sisteması ushın shegaralıq ma'selenin biri bolğ'an golomorf funktsiyalar ushın Koshi ma'sesele qarastıraraq, bul ma'sele barlıq standart funktsional ken'islikler ushın korrekt bolmaydı, lekin sonın menen birge onı regulyarizatsiya metodı ja'rdeminde sheshiw mu'mkin.

Biraq, operatorlı ten'lemelerdi u'yreniw ushın regulyarizatsiya metodının kemshilik ta'repi $A * A$ operatordın menshikli funktsiyaların tabıw kerek. Bazı bir ken'isliklerde bazı bir operatorlar ushın olardı tabıwdın konstruktiv metodları bar Biraq sheksiz o'lsheмли ken'isliklerde spektral ma'sele (menschikli funktsiyalar ha'm menschikli ma'selelerdi tabıw) ju'da qıyın. A'llette, Gilbert-Shmidt teoreması menschikli funktsiyalar ha'm menschikli ma'nislardi tabıw algoritmin beredi. Biraq a'llette bul teorema tek g'ana shekli sandag'ı bazis vektrlardi tabıw ushın qollanıladı. Tilekke qarsı, Joqarıda ayılğ'annan $Au = f$ operatorlı ten'leme

korrekt emes ma'selege alıp keletug'ınlıg'ı ko'rinedi. Sonlıqtan biz kerekli anıqlıqqa shekem approksimatsiyalaw ushın qansha vektor kerekligin ayta alamız.

D oblastta golomorf funktsiyalar olardıń tek ∂D dag'ı shegaralıq ma'nisleri menen anıqlanadı. Biraq birden – birlik teoremasınan (teorema 1.1) golomorf funktsiyanı bir ma'nisli anıqlaw ushın onı ∂D shegaranın' qa'legen ashıq bos emes baylamlı Γ bo'leginde biliw jetkilikli.

Tegis oblast shegarasının' bo'legindegi shegaralıq ma'nis boyınsha golomorf funktsiyanı an'latıw formulasın birinshi bolıp T. Karleman usındı. Keyin ala C da bunday formulalardı du'ziwdin' ha'r qıylı metodları payda boldı.

Temanın' aktualıg'ı. İzzertlew taqırıbına tiyisli birinshi na'tiyjeler N.N. Tarxanov ha'm A.A. Shlapunovlar ta'repinen alıng'an bolıp, onda Koshi-Riman ten'lemesi ushın ha'm Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'seleleri u'yrenilgen.

Maqseti. Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'seleleri sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli ha'm jetkilikli sha'rtlerin izzertlew.

Wazıypaları. Ko'p o'lsheмли Karleman formulalarınan paydalanıp, Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'seleleri sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli ha'm jetkilikli sha'rtlerin tabıw.

İzzertlew obekti. İzzertlew obekti ko'p kompleks o'zgeriwshili funktsiyalar bolıp tabıladı.

İzzertlewdi alıp barıw usılları. Magistrlik jumısta ko'p o'lsheмли kompleks analizdegi Koshi-Riman ten'lemesi, ko'p o'lsheмли Karleman formulaları ha'm Dolbo kompleksi qollanıladı.

İzzertlewdiń a'meliy a'hmiyeti. Dissertatsiyada keltirilgen na'tiyje-ler ha'm usıllar ko'p o'lsheмли kompleks analizde o'z qollanılıwlarına iye boladı.

Jumıstın' ko'lemi ha'm du'zilisi. Magistrlik dissertatsiya jumısı kirisiw, eki bap, on bir paragraf, juwmaqlaw ha'm paydalanılǵ'an a'debiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi bapta Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'sesei qaralıp, bul ma'selenin' sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli ha'm jeterli sha'rtleri keltirilgen.

Ekinshi bapta ko'p o'lsheмли Karleman formulaları qaraladı. Bunnan tısqarı Karleman – Goluzin – Krılov formulası ha'm Ayzenberg formulaları keltirilip o'tilgen. Bap son'ında Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesei berilgen.

I-BAP

KOSHI-RİMAN TEN'LEMESİ UŞIN KOSHI MA'SELESİ

Bul bapta Koshi-Riman operatori ushın Koshi ma'selesi tek g'ana funktsiyalar ushın emes, sonın' menen birge differentsial formalar ushın da qaralg'an. Bunnan tısqarı, bapta qos ortogonallıqqa iye bazisler haqqında so'z etiledi. Bul na'tiyjeler CR-funktsiyalar teoriyasına jaqın bolıp, olardıń tiykarg'ıları N.N. Tarxanov ha'm A.A. Shlapunovlarg'a tiyisli([1]).

§1.1. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesinin' qoyılıwı

Bul paragrafta Koshi-Riman sisteması ushın shegaralıq ma'selenin' biri bolg'an golomorf funktsiyalar ushın Koshi ma'selesin qarastıramız. Bul ma'sele barlıq standart funktsional ken'islikler ushın korrekt bolmaydı, lekin sonın' menen birge onı regulyarizatsiya metodı ja'rdeminde sheshiw mu'mkin.

U'zliksiz funktsiyalar ken'isliginde Koshi ma'selesin qarastırayıq.

Ma'sele 1.1 (Koshi). *Meyli $D \subset C^n$ de shegaralang'an sıypaq ∂D shegaralı oblast ha'm $\Gamma \subset \partial D$ da bo'lekli-sıypaq $\partial \Gamma$ shegaralı ashıq baylamlı ko'plik. Eger Γ da $F = F_0$ bolsa, berilgen $F_0 \in C(\bar{\Gamma})$ funktsiya ushın D da golomorf ha'm $C(\bar{D} \cup \Gamma)$ klassqa tiyisli f funktsiyanı tabın' (eger mu'mkin bolsa).*

Bul ma'sele $n = 1$ jag'dayda ta'biyiy ra'wishte gidrodinamikada payda boladı. Haqıyqatında da, meyli $G \subset R^3$ ken'islikte $((x, y, t))$ koordinatalı tsilindrli oblast, tsilindr $z = (x, y)$ koordinatalı shegaralang'an $D \subset R^2 = C$ oblast. Aytayıq G da suyıqlıq ag'ımı bar bolsın, bunda ag'ım xOy tegislikke parallel bolg'an barlıq tegisliklerde birdey dep esaplanadı. Sonlıqtan ag'ımdı D

aniqlang'an $F = (F_1, F_2)$ tegis vektor maydan arqali aniqlaw mu'mkin. Meyli ag'im kelesi sha'rtlerdi qanaatlansin:

(1) G tsilindrde suyuqliq derekleri joq, yag'niy qa'legen tuyiq betlik boyinsha ag'im nolge ten';

(1) G tsilindrde suyuqliq iyirimleri joq.

Bizge analiz kurslarinan belgi li (1) sha'rt G da

$$\operatorname{div} F = 0$$

al (2) sha'rt G da

$$\operatorname{rot} F = 0$$

ten'lemesine ten' ku'shli boladi.

Uyg'arivimiz boyinsha F maydan t dan g'a'rezli emes. Sonliqtan bizler D da kelesi eki ten'lemege iye bolamiz:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0.$$

Onda $f = F_2 + iF_1$ funktsiya D da golomorf ha'm ma'sele 1.1 kelesi ma'selege alip keledi:

G tsilindrdin' D ultaninin' ∂D shegarasinin' bo'legi Γ da aniqlang'an f_0 ushin $f|_{\Gamma} = f_0$ bolg'an funktsiyani f funktsiyani D da tabin'. Golomorf funktsiyalar ushin Koshi ma'selesini $n > 1$ jag'dayda elektr signallar teoriyasinda kelip shig'adi.

§1.2. Koshi-Riman ten'lemesi ushin Koshi ma'selesinin' birden birligi

Teorema 1.1. *Koshi ma'selesi (ma'sele 1.1) birden ko'p sheshimge iye emes.*

Da'lilleniwi. Meyli $f \in O(D) \cap C(D \cup \Gamma)$ funktsiya Γ da nolge ten' bolsin ha'm $z_0 \in \Gamma$ noqatta fiksirleyemiz. Γ -ashiq bos emes ko'plik bolg'anliqtan, sonday $r > 0$ san tabiladi ha'm $\Gamma_1 = \overline{\Gamma \cap B(z_0, r)} \subset \Gamma$. Onda sıypaq shegaralı sonday $G \subset D$ oblast tabiladi. ha'm $\partial G \cap \partial D \subset \overline{\Gamma \cap B(z_0, r)}$. Bunnan $f \in O(G) \cap C(G)$ ha'm G oblast ushin Boxner-Martinelli formulası boyınsha

$$\int_{\partial G \setminus \Gamma_1} f(\zeta) U(\zeta, z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cap B(z_0, r), \\ 0, & z \in B(z_0, r) \setminus \overline{G}, \end{cases} \quad (1.1)$$

(1.1) ten'liktin' shep ta'repindegi Boxner-Martinelli integralı $C^n \setminus \Gamma_1$ de garmonikalıq funktsiya bolliqtan

$$\phi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cap B(z_0, r), \\ 0, & z \in B(z_0, r) \setminus \overline{G} \end{cases}$$

funktsiya da $B(z_0, r)$ de garmonikalıq boladı. Endi garmonikalıq funktsiyalar ushin birden birlik teoremasınan $B(z_0, r)$ de $\phi \equiv 0$ ekenligi kelip shıg'adı. Dara jag'dayda bul $G \cap B(z_0, r)$ de $f = 0$ ekenligi anıqlanadı. Sonlıqtan golomorf funktsiyalar ushin birden birlik teoremasınan D da $f = 0$ ekenligi kelip shıg'adı.

Sonlıqta eger f ha'm $\tilde{f}$ Koshi ma'selesinin' (ma'sele 1.1) f_0 baslang'ısh sha'rt penen bermlgen eki sheshimi, onda $f - \tilde{f}$ ayırma $O(D) \cap C(D \cup \Gamma)$ ken'islikke tiyisli ha'm Γ da nolge ten'. Joqarıda qaralg'anday, bul ayırma D da nolge birdeylik ten' yag'nıy Koshi maa'selesi (ma'sele 1.1) jalg'ız sheshimge iye.

§1.3. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'sesei sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli sha'rtleri

Sonnı aytıw kerek Koshi ma'sesei barlıq jerde sheshimge iye bolmaslıg'ı mu'mkin. Haqıyqatında da, meyli $\Gamma = \partial D$ bolsın. Onda Eger koshi ma'sesei (ma'sele 1.1) sheshimge iye bolsa, Boxner-Martinelli formulası boyınsha

$$\int_{\partial D} f_0(\zeta) U(\zeta, z) = 0, \quad z \notin \bar{D}$$

Mısal 1.1. Eger $n = 1$ ha'm D -birlik do'n'gelek, onda Koshi ma'sesei (ma'sele 1.1) $f_0 = \bar{z}$ baslang'ısh sha'rt ushın sheshimge iye emes, sebebi sheshim (eger bar bolsa) Koshi integral arqalı beriledi

$$\int_{\partial D} f_0(\zeta) U(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta|=1\}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} = 0, \quad z \in D$$

biraz nollik emes baslang'ısh sha'rt penen berilgen Koshi ma'sesei sheshimi nolge ten' bolıwı mu'mkin emes.

Eger $n > 1$ bolsa, jag'day ele de quramalı. Birinshiden, bull jag'dayda baslang'ısh sha'rt f_0 Koshi-Rimannın' urınba ten'lemelerin Γ da qanaatlandırıwı sha'rt, yag'nıy $\bar{\partial}_b f_0 = 0$ ha'm koeffitsientleri $D(D \cup \Gamma)$ klassqa tiyisli $(n, n-2)$ tiptegi barlıq w differentsial formalar ushın

$$\int_{\Gamma} f_0(\zeta) \bar{\partial} w = 0.$$

Haqqatında, eger Koshi ma'selesı (ma'sele 1.1) sheshimge iye bolsa, onda Stoks formulası boyınsha koeffitsientleri $D(D \cup \Gamma)$ klasqa tiyisli $(n, n-2)$ tiptegi barlıq w differentsial formalar ushın

$$\int_{\Gamma} f_0(\zeta) \bar{\partial} w = \int_{\partial D} f(\zeta) \bar{\partial} w = \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \bar{\partial} w - \int_D f(\zeta) \bar{\partial} \bar{\partial} w = 0$$

sebebi f funksiya D da golomorf ha'm $\bar{\partial}^2 = 0$. Bul $f_0 \in C^1(\Gamma)$ ushın, Γ da $|dp| \neq 0$ sha'rt penen Γ giperbetlik anıqlawshı qa'legen $p \in C^1$ ha'm $f = f_0$ sha'rt penen berilgen barlıq $f \in C^1(D \cup \Gamma)$ funksiya ushın $\bar{\partial} f \wedge \bar{\partial} p = 0$ ekenligin anıqlaydı.

Eger $n = 1$ bolsa Γ da qa'legen u'zliksiz funksiya Koshi-Riman urınba ten'lemelerin qanaatlandıratug'ını anıq([2]). Koshi-Rimannın' urınba ten'lemeleri qanaatlandırıwshı funksiya CR -funksiya dep ataladı.

§1.4. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesı sheshimge iye bolıwınnıń jetkilikli sha'rtleri

Boxner-Martinelli tipindegi integrardı qarastırayıq

$$(M_{\Gamma}f_0)(z) = \int_{\Gamma} f_0(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \notin \Gamma.$$

Bunda $(M_{\Gamma}f_0)$ funksiya $C^n \setminus \Gamma$ da garmonikalıq boladı. C^n da bo'lekli sıypaq shegarag'a iye shegaralang'an oblast bolatug'ınday shegaralang'an D^- oblasttı qarastıramız. Meyli $D^+ = D$ ha'm $(M_{\Gamma}f_0)^{\pm}$ lar $M_{\Gamma}f_0$ dın' $D^{\pm}$ lerge sa'ykes qısılıwları bolsın. Onda $(M_{\Gamma}f_0)^{\pm}$ sa'ykes tu'rde $D^{\pm}$ lerge garmonikalıq boladı. A'piwayılıq ushın $C^1(D \cup \Gamma)$ klassta Koshi ma'selesinin' sheshimge iye bolıwın qarastıramız.

Teorema 1.2. Eger $f_0 \in C^1(\Gamma)$ bolsa, onda Koshi ma'selesı (ma'sele 1.1) $C^1(D \cup \Gamma)$ klassta sheshimge iye bolıwı ushın

(1) f_0 funksiya Γ da CR-funktsiya ;

(2) Ω da sonday garmonikalıq F funksiya bar ha'm D^- de $F^- = (M_{\Gamma}f_0)^-$ bolsa za'ru'rli ha'm jetkilikli.

Da'lilleniwi. Za'ru'rli: (1) sha'rttin' za'ru'rli: aldın da'lillengen. Meyli f - Koshi ma'selesinin' (ma'sele 1.1) sheshimi bolsın. Onda ∂G oblast tabıladı, Boxner-Martinelli formulası boyınsha to'mendegige iye bolamız

$$\int_{\partial G} f(\zeta)U(\zeta, z) = \begin{cases} f(z), & z \in G, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \quad (1.2)$$

Eger

$$\int_{\partial G} f(\zeta)U(\zeta, z) = (M_{\Gamma}f_0)(z) + \int_{\partial G \setminus \Gamma} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \notin \partial G \quad (1.3)$$

ekenligin esapqa alsaq

$$(M_{\Gamma}f_0)^-(z) = \int_{\partial G \setminus \Gamma} f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \in D^-$$

Dara jag'dayda bul, $(M_{\Gamma}f_0)^-$ integraldın' $D^- \cup \Gamma \cup G$ g'a garmonikalıq dawam etiwın anıqlaydı. Ha'r bir $z \in D$ ushın ayılğ'an qa'siyetlerge iye G oblast bar bolg'anlıqtan $(M_{\Gamma}f_0)^-$ tın' $D^- \cup \Gamma \cup D = \Omega$ da garmonikalıq ekenligin ko'riw mu'mkin([3]). Bunnan tısqarı, (1.2) ha'm (1.3) boyınsha

$$F(z) = \begin{cases} (M_{\Gamma}f_0)^-(z), & z \in D^-, \\ (M_{\Gamma}f_0)^+(z) - f(z), & z \in D \end{cases} \quad (1.4)$$

Jetkilikligi: Meyli teoremadagı (1) ha'm (2) sha'rtler orınlı bolsın. Onda

$$f(z) = (M_{\Gamma}f_0)^+(z) - F(z), \quad z \in D \quad (1.5)$$

O'zinin' anıqlanıwı boyınsha f funksiya D da garmonikalıq. Onın' Koshi ma'selesı (ma'sele 1.1) sheshimi ekenlginin da'lillew ushın bizge to'mendegi lemmalar kerek.

Lemma 1.1. *Eger $(M_{\Gamma}f_0)^{\mp}$ funksiya $D^{\mp} \cup \Gamma$ g'a u'zliksiz dawam etetug'in bolas, onda $(M_{\Gamma}f_0)^{\mp}$ funksiya $D^{\mp} \cup \Gamma$ g'a u'zliksiz dawam etedi.*

Lemme 1.2. Eger $(M_\Gamma f_0)^\mp$ tuwindı $D^\mp \cup \Gamma$ g'a u'zliksiz dawam etetug'in bolsa, onda $(M_\Gamma f_0)^\mp$ tuwindı $D^\mp \cup \Gamma$ g'a u'zliksiz dawam etedi.

$(M_\Gamma f_0)^-$ funksiya Ω g'a garmonikalıq dawam etedi. onda lemma 1.1 boyınsha $(M_\Gamma f_0)^\pm \in C^1(D \cup \Gamma)$ ha'm sonlıqtan $f \in C^1(D \cup \Gamma)$. Bunnan tısqarı, Boxner-Martinelli integralı ushın sekiriwler haqqındag'ı teorema boyınsha $z \notin \Gamma$. ushın

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0 - \nu(z_0)\varepsilon) &= (M_\Gamma f_0)^+(z_0 - \nu(z_0)\varepsilon) - F(z_0 - \nu(z_0)\varepsilon) = \\ &= (M_\Gamma f_0)^+(z_0 - \nu(z_0)\varepsilon) = (M_\Gamma f_0)^-(z_0 - \nu(z_0)\varepsilon) = f_0(z_0) \end{aligned}$$

bunda $\nu(z_0) \partial D$ g'a ju'rgizilgen sırtıqı normal. Onda Γ da $f = f_0$

Da'lillewdi juwmaqlaw ushın f funksiya D da golomorf ekenligin ko'rsetiw kerek. $f \in C^1(D \cup \Gamma)$ ekenliginen $(\bar{\partial} f) \in C(D \cup \Gamma)$ kelip shıg'adı, bunnan tısqarı Boxner-Martinelli integralının' $\bar{\partial}$ -normal boyınsha tuwindısı ushın sekiriwler teoreması boyınsha Γ da $(\bar{\partial}_n f) = 0$. Tag'ı da Γ da $f = f_0$ ha'm $f_0 - CR$ -bolg'anı ushın Γ da

$$\bar{\partial}_\tau f = \bar{\partial}_\tau f_0 = 0$$

Anıqlama boyınsha

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial}_\tau f + \bar{\partial}_n f$$

bolg'anlıqtan Γ da $\bar{\partial} f = 0$.

Eger

$$\phi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D^-, \\ 0, & z \in D^+ \end{cases}$$

dep alsaq, onda φ funksiya Ω da u'zliksiz.

Bunnan tısqarı $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \Lambda^{(n, n-2)})$ ushın Stoks formulası boyınsha([4])

$$\int_{\Omega} \phi(z) \Lambda \bar{\partial} \varphi(z) = \int_D \bar{\partial} f(z) \Lambda \bar{\partial} \varphi(z) = \int_{\Gamma} f(z) \Lambda \bar{\partial} \varphi(z) = 0 \quad (1.6)$$

Γ da $\bar{\partial} f = 0$ bolg'anlıqtan $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ funksiya ushın Stoks formulasın qollansaq

$$\int_{\Omega} * \phi(z) \Lambda \bar{\partial} \varphi(z) = \int_D * \bar{\partial} f(z) \Lambda \bar{\partial} \varphi(z) = \int_{\Gamma} \bar{\partial}_n f(z) \varphi(z) ds(z) = 0 \quad (1.7)$$

(1.6) ha'm (1.7) ten'lemeler $\bar{\partial} \varphi = 0$ ekenligin ha'm D da $\bar{\partial} * \phi$ ku'shsiz ma'niste ekenligin aqlatadı. Eger

$$\Delta = \bar{\partial} * \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial} *$$

ekenligin esapqa alsaq, onda (1.6) ha'm (1.7) ten'liklerden f funksiyanın' D oblastta ku'shsiz ma'nide garmonikalıq ekenligi kelip shıg'adı. Bizge belgili, ku'shsiz ma'nide garmonikalıq funksiya garmonikalıq boladı.

Garmonikalıq funksiya ushın birden-birlik teoreması boyınsha Ω da $\phi \equiv 0$ ha'm D da $\bar{\partial} \varphi = 0$.

Teorema 1.2 teoriyalıq a'hmiyetke iye, sonlıqtan onı tuwrıdan tuwrı qollana almaymız almaymız. Ol tek Koshidin' quramalı bir ma'selesin analitikalıq dawam ettiriwdin' quramalı bir ma'selesine alıp keledi. Biraq biz onı konstruktiv mısıl qurıw ushın qollansaq boladı.

Saldar 1.1. *Eger $n = 1$ ha'm $\Gamma = \partial D$ bolsa, Koshi ma'selesi (ma'sele 1.1) sheshimge iye bolıwı ushın*

$$(M_{\partial D} f_0)^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_0(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0, \quad z \notin \bar{D}. \quad (1.8)$$

bolıwı za'rwrlı ha'm jetkilikli.

Da'lilleniwi. Saldardın' za'ru'rliğı Koshi formulasınan kelip shıg'adı. $(M_{\partial D} f_0)^-(z)$ funktsiya Ω g'a garmonikalıq (nol menen) dawam etedi, yag'nıy koshi ma'selesi sheshimge iye ha'm onın' sheshimi Koshi integralı arqalı beriledi.

Saldar 1.2. *Eger $n > 1$ ha'm $\Gamma = \partial D$ baylamlı bolsa, Koshi ma'selesi (ma'sele 1.1) sheshimge iye bolıwı ushın f_0 funktsiyanın' ∂D da CR-funktsiya bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli.*

Da'lilleniwi. Saldar da'lilleniwi $(M_{\partial D} f_0)^-(z) = 0$ (Boxner-Martinelli yadrosının' tuyıqlang'an) ekenliginen kelip shıg'adı.

Bul $f_0 \in C^1(\partial D)$ funktsiya ushın Gartogs-Boxner teoreması boladı.

§1.5. Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'selesinin' sharda sheshimge iye bolıwı sha'rtleri

Teorema 1.3. *Meyli $n = 1$, $\Omega = B(0, R)$ ha'm $\Gamma - \Omega$ da koordinata basınan o'tpeytug'ın ha'm Ω nı eki D^- ha'm D^+ baylamlı bo'leklerge bo'liwshi sıypaq iymek bolsın. Eger $0 \in D^-$ bolsa, Koshi ma'selesı (ma'sele 1.1) sheshimge iye bolıwı ushın*

$$\overline{\lim_{v \rightarrow +\infty}} \sqrt[v]{c_v} \leq \frac{1}{R},$$

bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli, bunda

$$c_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta) d\zeta}{\zeta^{v+1}}$$

Da'lilleniwi. Eger $n = 1$ bolatug'ın bolsa, onda

$$(M_{\partial D} f_0)^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

$D^- \ni 0 \notin \Gamma$ bolg'anlıqtan $(M_{\Gamma} f_0)^-(z)$ Koshi integralı koordinata basında golomorf boladı. Koshi yadrosının'

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^v}{\zeta^{v+1}}$$

qatarg'a jayılmasın paydalanıp, c_v ler $(M_\Gamma f_0)^-$ funktsiyanın' koordinata basındag'ı Teylor koeffitsientleri ekenligin anıqlaw mu'mkin. Son'ında Teylor qatarının' jıynaqlılıq radiusı ushın Koshi-Adamar formulasınan([5]) $(M_\Gamma f_0)^-$ funktsiyanın' Ω g'a garmonikalıq (golomorf!) dawam ettiriw ushın

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{c_v} \leq \frac{1}{R},$$

bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli ekenligi kelip shıg'adı.

Meyli $\Omega = B_R B(0, R)$, al $\Gamma = B_R$ degi B_R di eki $D^\pm$ oblastlarg'a $0 \in D^-$ sha'rt penen bo'liwshi sıypaq giperbetlik bolsın ha'm $f_0 \in L^1(\Gamma)$ funktsiyanı qarastırıyq. Onda

$$(M_{\partial D} f_0)^-(z) \int_{\Gamma} f_0(\varsigma) U(\varsigma, z) = - \sum_{k,s} \frac{P_{k,s}(z)}{n+k-1} \int_{\Gamma} f(\varsigma) \left[* \partial \frac{\overline{P_{k,s}(\varsigma)}}{|\varsigma|^{2n+2k-2}} \right]$$

(jetkilikli Koshi $|z|$ ler ushın).

Sonda $M_\Gamma^- f_0$ funktsiyanın' $\{P_{k,s}(z)\}$ sistema boyınsha qatarg'a jayılmasındaqı koeffitsientler

$$a_{k,s} = - \frac{1}{n+k-1} \int_{\Gamma} f(\varsigma) \left[* \partial \frac{\overline{P_{k,s}(\varsigma)}}{|\varsigma|^{2n+2k-2}} \right] \quad (1.9)$$

kerisine iye boladı., al

$$(M_{\Gamma}^{-} f_0)(z) = \sum_{k,s} a_{k,s} P_{k,s}(z). \quad (1.10)$$

(1.10) qatar 0 noqattin' bazı bir do'gereginde ten' o'lsheqli jıynaqlı boladı

Qashan (1.10) qatar pu'tkil B_R sharda jıynaqlı boladı? Bul qatar $L^2(\partial B)$ da jıynaqlı bolıwı ushın

$$\sum_{k,s} |a_{k,s}|^2 < \infty$$

bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli, bul jag'dayda (1.10) qatar B_R degi barlıq kompaktlarda ten' o'lsheqli jıynaqlı boladı. Sonlıqtan, eger $M_{\Gamma}^{-} f_0$ funktsiya D^{-} dan B_R ge garmonikalıq dawam etse, onda

$$\sum_{k,s} |a_{k,s}|^2 r^{2k}$$

qatar barlıq $r < R$ ushın jıynaqlı boladı.

Kerisinshe, eger bul jıynaqlılıq orınlı bolsa, onda $M_{\Gamma}^{-} f_0$ funktsiya B_R ge garmonikalıq dawam etedi. Bul jerden ha'm teorema 1.2 den tastıyıqlaw kelip shıg'adı.

Teorema 1.4. *Meyli sıypaq Γ giperbetlik B_R di eki $D^{\pm}, 0 \in D^{-}$ oblastlarg'a bo'lsin, meyli CR-funktsiya $f_0 \in L^1(\Gamma)$ ha'm Γ da u'zliksiz. Onda f_0 funktsiya $D^{\pm}$ da golomorf dawam etiw ushın*

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} \max_s \sqrt[v]{a_{k,s_v}} \leq \frac{1}{R},$$

sha'rt orinlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli, bunda $a_{k,s}$ koeffitsientleri (1.9) formulalar menen anıqlanadı.

Bunda R di sheksizlikke umtıdırsaq, kelesi tastıyqlawg'a iye bolamız.

Tastıyqlaw 1.1. Meyli sıypaq Γ giperbetlik C^n di eki $D^\pm$, $0 \in D^-$ oblastlarg'a bo'lsin, meyli CR-funktsiya $f_0 \in L^1(\Gamma)$ ha'm Γ da u'zliksiz. Onda f_0 funksiya $D^\pm$ da golomorf dawam etiw ushin

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \max_s \sqrt[k]{a_{k,s,v}} = 0,$$

sha'rt orinlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli, bunda $a_{k,s}$ koeffitsientleri (1.9) formulalar menen anıqlanadı.([6])

Eger Γ giperbetlik bolsa, onda $f_0 \in L^1(\Gamma)$ sha'rt ornına f_0 funksiyanın' Γ da shegaralang'an (bul jag'dayda (1.9) integrallar jıynaqlı boladı).

§1.6. Qos ortogonallı bazisler

Meyli H_1 ha'm H_2 sa'ykes $(\cdot, \cdot)_1$ ha'm $(\cdot, \cdot)_2$ skalyar ko'beymeli tolıq evklid (gilbert) ken'islikleri ha'm $A: H_1 \rightarrow H_2$ kompakt (sızıqlı) operator kelesi ma'seleni qarastıramız:

Ma'sele 1.2. Berilgen $f \in H_2$ ushın $Au = f$ ten'lemenı qanaatlandıırıwshı $u \in H_1$ di tabın' (eger mu'mkin bolsa).

Bul ma'sele Adamlar ma'nisinde korrekt dep ataladı, eger:

(1) ol qa'legen on' ta'rep ushın sheshimge iye;

(2) ol jalg'ız sheshimge iye;

(3) sheshim baslanqısh sha'rtlerden u'zliksi g'a'rezli.

Eger A -kompakt operator bolsa, onda bizge jaqsı belgili, kompakt operator u'zliksiz kerı operatorg'a iye bola almaydı. Onda ma'sele 1.2 korrekt emes. Bul, sheshimnin' baslang'ısh sha'rtlerden u'zliksiz g'a'rezsiz ekenligin bildiredi ha'm bunın' saldarı sıpatında sonday baslang'ısh sha'rtler bar bolıp, olar ushın sheshim joq boladı.

Operator A nın' yadrosın $\ker A$ arqalı belgileymiz, yag'nıy

$$\ker A = \{u \in H_1 : Au = 0\}$$

ha'm $\tilde{H}_1 - H_1$ ge $\ker A$ yadrog'a ortogonal tolıqtırıwshı yag'nıy

$$\tilde{H}_1 = (\ker A)^\perp = \{v \in H_1 : (v, u)_1 = 0 \forall u \in \ker A\}$$

Bizge belgili, $\ker A$ ha'm $(\ker A)^\perp - H^\perp$ de tuyıq u'les ken'islikler.

$R(A)$ arqalı A operatorдын' H_2 degi obrazın belgileymiz, yag'nıy

$$\overline{R}(A) = \{g \in H_2 : g = Au, u \in H_1\}.$$

Sol anıq, H_2 ge $R(A)$ sıziqlı u'les ko'plik boladı, biraqta eger A kompakt operator bolsa, onda H_2 ge $R(A)$ tuyıq emes. $\overline{R}(A)$ arqalı bolsa H_2 ge $R(A)$ nın' tuyıqlanıwın belgileymiz.

Gilbert keqn'isligi ma'nisinde A ushın tu'yinles operatorı A^* arqalı belgileymiz, yag'nıy

$$A^* : H_2 \rightarrow H_1$$

operator

$$(Av, g)_2 = (v, A^*g)_1$$

sha'rtti barlıq $v \in H_1, g \in H_2$ ushın qanaatlandıradı. Ol birinshiden bar bolg'an ha'm ekinshiden $\|A^*\| = \|A\|$ norma menen bir ma'nisli anıqlang'an sıziqlı operator boladı.

Onda funksiional analiz teoremları boyınsha $A^*A : H_1 \rightarrow H_1$ kompozitsiya kompakt operator boladı. Sonnı aytıw kerek A^*A operator o'z-o'zine tu'yinles operator boladı, yag'nıy

$$(A^*A) = A^*A$$

Sonlıqtan biz Gilbert-Shmidt Spektral teoremasın qollanıwımız mu'mkin. Bul teoremanı keltirip o'temiz:

Teorema 1.5 (Gilbert Shmidt). *H Gilberd ken'islikte qa'legen o'z o'zine tu'yinles kompakt operator A ushın $A\varphi_v = \lambda\varphi_v$ sha'rtti qanaatlandırıwshi $\{\varphi_v\}$*

ortonormal sistema ha'm $\{\lambda_v\}$ no'llik emes sanlar ko'pligi bar bolip, ha'r bir $u \in H$ element

$$u = \sum_v c_v \varphi_v + u'$$

ko'riniste birden-bir an'latiladi, Bunda $Au' = 0$, ha'mde

$$Au = \sum_v c_v \lambda_v \varphi_v$$

ha'm eger $\{\varphi_v\}$ sheksiz sistema, onda $\lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_v = 0$.

$A^* A : H_1 \rightarrow H_1$ ushin sonday vektorlar izbe-izligin $\{b_v\}$ arqali belgileymiz. Gilbert ken'isliginde qa'legen ortogonal bazisge shekem ken'eytiri liwi mu'mkin, demek H_1 de $\{b_v\} \cup \{b'_\mu\}$ ortogonal bazis bolatug'inday H_1 de $\{b'_\mu\}$ ortogonal sistema bar boladi. Sonni aytiw kerek, barliq μ ushin Gilbert-Shmidt teoremasi boyinsha $Ab'_\mu = 0$ ha'm sonliqtan ker A da $\{b'_\mu\}$ ortogonal bazis boladi([7]).

Teorema 1.6. Meyli A kompakt operator bolsin. Onda $A^* A$ operatoridin' no'llik emes menshikli vektorlaridan du'zilgen $\{b_v\}$ sistema $\tilde{H}_1$ de ortonormal bazis, al $\{Ab_v\}$ sistema $\overline{R}(A)$ da ortogonal bazis boladi.

Da'lilleniwi. Haqiqatinda, eger o'z-o'zine tu'yinles operatoridin' ha'r qiyli menshikli ma'nislerine sa'ykes ekliwshi menshikli vektorlar ortogonal bolsa, onda $\{b_v\}$ sistema H_1 de ortogonal bazis boladi.

Bunnan tısqari

$$(Ab_\nu, Ab_\mu)_2 = (A * Ab_\nu, b_\mu)_1 = \lambda_\nu(b_\nu, b_\mu)_1 = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ \lambda_\nu, & \nu = \mu \end{cases}$$

bolg'anlıqtan $\{Ab_\nu\}$ sistema H_2 de ortogonal boladı ha'm $\{Ab_\nu\} \subset R(A)$ ekenligi anıq.

Basqa ta'repten qarasaq, eger g vektor $\overline{R}(A)$ ge tiyisli bolsa, onda sonday $\{v_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset H_1$ izbe-izlik tabılıp $\lim_{N \rightarrow \infty} Av_N = g$ boladı. Eger

$$H_1 = \ker A \oplus (\ker A)^\perp$$

ekenligin esapqa alsaq, onda $\{v_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \tilde{H}_1$.

Eger $\{b_\nu\}$ sistema $\tilde{H}_1$ da bazis ekenligin paydalansaq, onda barlıq $N \in \mathbb{N}$ ushın

$$x_N = \sum_{\nu=1}^k c_\nu^{(N)} b_\nu$$

$$Ax_N = \sum_{\nu=1}^k c_\nu^{(N)} Ab_\nu$$

boladı. Bul $\{Ab_\nu\}$ sistema sıızıqlı qabıg'ı $\overline{R}(A)$ da tıg'ız ekenligin an'latadı.

Sonlıqtan $\{Ab_\nu\}$ sistema tolıq ha'm ortogonal ekenliginen onın' $\overline{R}(A)$ da ortogonal bazis ekenligi kelip shıg'adı.

Bul teorema usınday bazistin' qos ortogonallıq qa'siyetke iye ekenligin an'latadı.

Saldar 1.3. Elementli forma

$$h(u, v) = (Au, Av)_2$$

$\tilde{H}_1$ da skalyar ko'beyme boladı, al $\{b_v\}$ sistema $(.,.)_1$ ha'm $h(u, v)$ skalyar kbeymelerge qarata ortogonal boladı.

Da'lilleniwi. Eger $(.,.)_2$ skalyar ko'beyme bolsa, onda

$$h(u, v) = (Au, Av)_2$$

bir sıziqlı forma elementli forma boladı, yag'nıy

$$(1) \quad h(u, v) = \overline{h(v, u)}$$

$$(2) \quad h(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha \cdot h(u_1, v) + \beta h(u_2, v);$$

$$(3) \quad h(u, u) \geq 0.$$

$\tilde{H}_1$ da $h(.,.)$ skalyar ko'beyme bolatug'inlig'in da'lillew ushın $u \in \tilde{H}_1$ ushın $h(u, u) = 0$ ten'lik tek $u = 0$ bolg'anda g'ana orınlı ekenligin ko'rsetiw kerek. A'llette $h(0, 0) = 0$ boladı. Kerisi, eger $h(u, u) = 0$ bolsa onda $Au = 0$, sebebi $(.,.)_2$ -skalyar ko'beyme. Onda $u \in \ker A$ ha'm $u \in (\ker A)^\perp$. Bul $(u, u)_1 = 0$ ekenligin an'latadı ha'm sonlıqtan $u = 0$ sebebi $(.,.)_1$ skalyar ko'beyme.

Son'ında $\{b_v\}$ sistemanın' $(.,.)_1$ ha'm $h(.,.)$ skalyar ko'beymelerge qarata ortogonalıg'ı teorema 1.6 dan kelip shıg'adı.

Teorema 1.7. *Meyli A -kompakt operator. Berilgen $f \in H_2$ vektor ushin sonday $u \in H_1$ tabılıp, ol $Au = f$ ten'ligi, qanaatlandırıwı ushin*

$$(1) f \in (\ker A^*)^\perp$$

$$(2) \sum_v \frac{|(f, Ab_v)_1|^2}{\|Ab_v\|_2^2} < \infty$$

sha'rtlerdi orınlawshı za'ru'rli ha'm jetkilikli.

Da'lilleniwi. Eger $Au = f$ ten'likti qanaatlandırıwshı $u \in H_1$ bar bolsa, onda barlıq $g \in \ker A^*$ ushin

$$(f, g)_2 = (Au, g)_2 = (u, A^*g)_1 = 0$$

yag'nıy (1) sha'rt za'ru'r. Bunnan tisqari, Gilbert-Shmidt teoreması boyınsha

$$x = \sum_v c_v b_v + u'$$

$$Au = \sum_v c_v Ab_v$$

bunda $c_v(u, b_v)_1 - \{b_v\}$ sistemag'a qarata u dın' fure koeffitsientleri. Bessel ten'sizligi boyınsha

$$\sum_v |c_v|^2 < \infty$$

Son'ında, teorema 1.6 boyınsha

$$f = \sum_v \frac{(f, Ab_v)_1}{\|Ab_v\|_1^2} Ab_v \quad (1.11)$$

Eger $Au = f$ ekenligin esapqa alsaq, fure koeffitsientlerinin' jalg'ızlǵ'ınan

$$c_v = \frac{(f, Ab_v)_2}{\|Ab_v\|_2^2}$$

ekenligi kelip shıǵ'adı.

Kerisinshe, meyli $f \in (\ker A)^{\perp}$. onda teorema 1.6 boyınsha (1.11) ko'rınis orınlı. Bunnan Riis-Fisher teoreması boyınsha (2) sha'rt

$$u_0 = \sum_v \frac{(f, Ab_v)_2}{\|Ab_v\|_2^2} b_v$$

qatardın' $\tilde{H}_1$ de jıynaqlı ekenligin an'latadı. Onda ol $(\ker A)^{\perp}$ g'a tiyisli, sebebi $\{b_v\}$ usı ken'islikke tiyisli. Son'ında, du'zgenimiz boyınsha $Au_0 = f$.

Teorema 1.7 nin' da'lilleniwinen A operatorg'a sa'ykes keliwshi «qos ortogonallıq» qa'siyetine iye. $\{b_v\}$ bazisler $Au = f$ ten'lemenin' sheshimin du'ziw ushın qollanıw mu'mkin([9]).

Saldar 1.4. Eger $f \in R(A)$, onda

$$u_0 = \sum_v \frac{(y, Ab_v)_2}{\|Ab_v\|_2^2} b_v$$

qatar H_1 de jıynaqlı, $(\ker A)^\perp$ ge tiyisli ha'm usı ken'islikte $Au = f$ ten'lemenin' jalg'ız sheshimi boladı.

Da'lilleniwi. Teorema 1.7 boyınsha biz sheshimnin' tek jalg'ız ekenligin ko'rsetiwimiz kerek. Biraq eger $Au = f$ ten'lemenin' eki u_1 ha'm u_2 sheshimleri $(\ker A)^\perp$ g'a tiyisli bolsa onda olardıń ayırması $(u_1 - u_2)$ de usı ken'islikke tiyisli boladı. Basqa ta'repten

$$A(u_1 - u_2) = f - f = 0$$

Yag'nıy $(u_1 - u_2)$ ayırma $\ker A$ g'a tiyisli, demek $u_1 = u_2$.

u_0 qatardın' dara qosındıları

$$u_0^{(N)} = \sum_{1 \leq v \leq N} \frac{(f, Ab_v)_2}{\|Ab_v\|_2^2} b_v$$

$Au = f$ ten'leme sheshimin approksimatsiyalawdı.

Sonnı aytıp o'tiw kerek, operatorlı ten'lemelerdi u'yreniw ushın joqarıda qaralg'an metodı a'llette regulyarizatsiya metodı dep ataladı. Onın' kemshilik ta'repi A^*A operatordın' menshikli funktsiyaların tabıw kerek. Bazı bir ken'isliklerde bazı bir operatorlar ushın olardı tabıwdın' konstruktiv metodları bar. Biraq sheksiz o'lshemli ken'isliklerde spektral ma'sele (menschikli funktsiyalar ha'm menschikli ma'selelerdi tabıw) ju'da qıyın. A'llette, Gilbert-Shmidt teoreması menschikli funktsiyalar ha'm menschikli ma'nislardi tabıw algoritmin beredi, Biraq

a'llette bul teorema tek g'ana shekli sandag'ı bazis vektrlardı tabıw ushın qollanıladı. Tilekke qarsı, Joqarıda ayılğ'annan $Au = f$ operatorlı ten'leme korrekt emes ma'selege alıp keletug'ınılıg'ı ko'rinedi. Sonlıqtan biz kerekli anıqlıqqa shekem approksimatsiyalaw ushın qansha vektor kerekligin ayta alamız.

Shegaralang'an $D \subset R^m$ oblastta, $W_2^s(D)$, $s \geq 0$ Sobolov ken'isligindegi garmonikalıq garmonikalıq funktsiyalar ken'isligin $G_2^s(D)$ arqalı belgileymiz, bul gilbert ken'isligi boladı([10]).

Teorema 1.8. *Meyli D_1 ha'm D_2 - R^m de bo'lekli sıypaq shegarag'a iye shegaralang'an oblastlar. Eger $\overline{D_1} \subset D_2$ ha'm $D_2 \setminus \overline{D_1}$ leer baylamlı kompakt komponentlerge iye bolmasa, onda ha'r bir $s \geq 0$ ushın $G_2^s(D_1)$ de $\{b_{v \setminus D_1}\} \subset G_2^s(D_1)$ ortogonal bazis bolatug'ınday $\{b_v\} \subset G_2^s(D_1)$ ortonormal bazis bar boladı.*

Da'lilleniwi. $r : G_2^s(D_2) \rightarrow G_2^s(D_1)$ arqalı qosılıw operatorın belgileymiz, yag'nıy $u \in G_2^s(D_2)$ ushın ru funktsiya u dın' D_1 ge qosılıwı boladı. Bul r sıızıqlı u'zliksiz operator ha'm $\|r\| \leq 1$. Ol gormonikalıq funktsiyalar ushın birden - birlik teoreması boyınsha inektiv boladı. Al gormonikalıq funktsiyalar sheksiz ma'rte differentsiallanıwshı bolg'anlıqtan, ha'r bir $k \in N$ ushın $G_2^s(D_2) \subset W_2^k(D_1)$. Bul jerde Sobolev ken'isligi ushın kompakt jaylasıw haqqındag'ı teorema boyınsha r operator dın' kompakt ekenligi kelip shıg'adı.

Aldın ko'rgenimizdey, $r^* r$ operator dın' $\{b_v\}$ menshikli vektorlar sisteması $G_2^s(D_2)$ de ortonormal bazis boladı (Gilbert – Shmidt teoreması boyınsha), al $\{rb_v = b_v|_{D_1}\}$ sistema $\overline{R}(r) \subset G_2^s(D_1)$ de ortogonal bazis boladı.

Son'ında, eger $D_2 \setminus \overline{D_1}$ baylamli kompakt komponentalarg'a iye bolmasa Mergelyan teoremasi boyınsha $G_2^s(D_2)$ ken'islik $G_2^s(D_1)$ ken'islikte tıg'ız boladı, yag'nıy $\overline{R}(r) = G_2^s(D_1)$.

Mısal 1.2. $\alpha^2(s)$, $k \in Z_+$ de tolıq ortonormallang'an birtekli gormonikalıq $\{P_{k,s}\}$, $s = 1, \dots, \sigma(k)$ ko'pag'zalılar sistemasın ha'm $D_1 = B(0, s_1)$, $D_2 = B(0, s_2)$, lerdi qarastıramız, bunda $0 < s_1 < s_2 < \infty$ ha'm S -orayı koordinata basında bolg'an birlik sfera. $\{P_{k,s}\}$ sistema $G_2^e(D_2)$ ha'm $G_2^e(D_1)$, $e \in Z_+$ ken'isliklerde qos ortogonallıq qa'siyetine iye bazis ekenligin ko'rsetiw an'sat.

Haqıyqatında, Fubini teoremasın sferalıq koordinatalar sistemasında berilgen kelesi integralg'a qollansaq:

$$\begin{aligned} \int_{B(0,s)} P_{k,s}(y) \overline{P}_{m,p}(y) dy &= \int_0^s \int_{\partial B(0,q)} P_{k,s}(y) P_{m,p}(y) ds_q(y) dq = \\ &= \int_0^s q^{k+m} \int_s P_{k,s}(y) \overline{P}_{m,p}(y) ds_1(y) dq = 0, \end{aligned}$$

eger $k \neq m$ yaki $s \neq p$. Bul qa'legen $0 < \rho < \infty$ ushın $\{P_{k,s}\}$ sistemasının' da $G_2^0(B(0,s))$ ortogonal ekenligin an'latadı([11]).

Bug'an qosımsha, gormonikalıq bir tekli ko'pag'zalı tuwındıları gormonikalıq bir tekli ko'pag'zalı bolg'anlıqtan, $\{P_{k,s}\}$ sistema $G_2^1(B(0,s))$ da qa'legen $0 < \rho < \infty$ ushın ortogonal boladı.

Endi bul sistemanın' $G_2^e(B(0,s))$ da qa'legen $0 < \rho < +\infty$ ha'm $e \in Z_+$ ushın ortogonal ekenligin induktsiya boyınsha jen'il da'lillew mu'mkin.

Son'inda, Mergelyan teoreması boyınsha gormonikalıq ko'pag'zalılar qa'legen $0 < \rho < \infty$ ushın $G_2^e(B(0, s))$ da tıg'ız boladı. Bunnan $\{P_{k,s}\}$ sistemasının' $G_2^e(B(0, s))$ da ortogonal ha'm tıg'ız ekenligi kelip shıg'adı, yag'nıy ol bazis boladı([12]).

I-bapqa juwmaqlaw

Matematikanın ko'plegen tarawlarında, a'sirese matematikalıq-fizika h'a'm differentsial ten'lemeler teoriyasında Koshi ma'sesele o'zinin a'meliy h'a'm teoriyalıq jaqtan qollanılıwı boyınsha ju'da' ku'shli a'h'miyetke iye bolıp esaplanadı. Bul ma'sele tek g'ana ayılğ'an tarawlarda g'ana emes, al ba'lkim bir h'a'm ko'p kompleks o'zgeriwshili funktsiyalar teoriyasında da ko'plegen qollanılıwılarg'a iye. Ma'selen, Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'sesele, Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele h'a'm tag'ı basqalar. Sonnı aytıp o'tiw kerek, Koshi-Riman operatorı ushın Koshi ma'sesele tek g'ana funktsiyalar ushın emes, sonın' menen birge differentsial formalar ushın da qaraw mu'mkin. Bunnan tisqari, qos ortogonallıqqa iye bazislerden paydalanıp Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele qarastırıp, bunda kompleksler ushın Koshi ma'sesele sheshimge iye bolıwının' za'ru'rli h'a'm jetkilikli sha'rtleri tabıladı. Bul na'tiyjeler CR-funktsiyalar teoriyasına jaqın bolıp, olardıń tiykarg'ıları N.N. Tarxanov h'a'm A.A. Shlapunovlarg'a tiyisli([1]).

II – BAP

KO'P O'LSHEMLI KARLEMAN FORMULALARI

Bul bapta ko'p o'lsheмли Karleman formulaları qaraladı. Aldın'g'ı bapta ko'rgenimizdey, D oblastta golomorf funktsiyalar olardıń tey ∂D dag'ı shegaralıq ma'nisleri menen anıqlanadı. Biraq birden – birlik teoremasınan (teorema 1.1) golomorf funktsiyanı bir ma'nisli anıqlaw ushın onı ∂D shegaranın' qa'legen ashıq bos emes baylamlı Γ bo'leginde biliw jetkilikli.

Tegis oblast shegarasının' bo'legindegi shegaralıq ma'nis boyınsha golomorf funktsiyanı an'latıw formulasın birinshi bolıp T. Karleman usındı. Keyin ala C da bunday formulalardı du'ziwdin' ha'r qıylı metodları payda boldı.

§ 2.1. Karleman – Goluzin – Krılov formulası

Tegislik ushın a'piwayı mısıl keltiremiz.

Mısıl 1.3. Teorema 1.3 de ko'rilgen jag'daydı qarastıramız, yag'nıy meyli $n = 1$, $\Omega = B(0, R)$ ha'm $\Gamma = \overline{\Omega}$ dag'ı sıypaq iymeklik, bunda $0 \notin \Gamma$, $\Omega = D^- \cup D^+ = D$ ha'm D^-, D^+ - baylanışlı. Eger $0 \in D^-$, onda $C(D \cup \Gamma)$ klasqa tiyisli qa'legen golomorf funktsiya D oblastta

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{\bar{s} - z} \left(\frac{z}{s} \right)^v ds, \quad z \in D$$

boyınsha an'latılıwı mu'mkin.

Haqiqatında, meyli $f \in O(D) \cap C(D \cup \Gamma)$. Onda Koshi ma'selesi (ma'sele 1.1) $f_0 = f|_{\Gamma}$ ushın sheshimge iye ha'm birden – birlik teoremasi (teorema 1.1) boyınsha f funktsiya jalg'ız sheshim boladı. Basqa ta'repten, teorema 1.2 boyınsha sheshim (1.5) formula arqalı beriledi, yag'nıy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)ds}{\bar{s} - z} - F(z), \quad z \in D$$

Bunda $F - (M_{\Gamma} f_0)^{-}$ funktsiyanın' D^{-} dan Ω g'a gormonikalıq dawamı, al

$$(M_{\Gamma} f_0)^{-} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)ds}{\bar{s} - z}, \quad z \in D^{-}$$

Endi teorema 1.3 boyınsha $F(z)$ funktsiyanı to'mendegishe qatar menen an'latıw mu'mkin.

$$F(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v, \quad z \in \Omega,$$

bunda

$$c_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(s)ds}{\bar{s}^{v+1}}.$$

Bunnan $z \in D$ ushın

$$\begin{aligned}
f(z) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(s) \left(\frac{1}{\bar{s} - z} - \frac{1}{\bar{s}} \cdot \sum_{v=0}^N \left(\frac{z}{\bar{s}} \right)^v \right) d_{\bar{s}} = \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(s) \left(\frac{1}{\bar{s} - z} - \frac{1}{\bar{s}} \cdot \frac{1 - (z/\bar{s})^{N+1}}{1 - z/\bar{s}} \right) d_{\bar{s}} = \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{\bar{s} - z} \left(\frac{z}{\bar{s}} \right)^{N+1} d_{\bar{s}},
\end{aligned}$$

bul da'lillewdi juwmaqlaydı.

Karleman – Goluzin – Krilov klassikalıq formulasın qarastramız. Meyli D - C^1 de bo'lekli – sıypaq shegarag'a iye bir baylamlı oblast Eger $M \subset \partial D$ ko'plik on' sıızıqlı Lebeg o'lshe mine iye bolsa, onda bul ko'plik $H^p(D)$ funktsiyalar klassı ushın birden – birlik ko'pligi boladı.

Teorema 1.9 (Karleman, Goluzin, Krilov). Eger $p \geq 1$ ushın $f \in H^p(D)$, onda

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{f(s)}{s - z} e^{k(\varphi(s) - \varphi(z))} ds, \quad z \in D, \quad (1.12)$$

bunda $\varphi \in O(D)$ ha'm $R \in \varphi(z) \rightarrow 1$, eger $z \rightarrow z^0 \in M$ urınba emes jollar boyınsha, al $\operatorname{Re} \varphi(z) \rightarrow 0$, eger $z \rightarrow z^0 \in \partial D \setminus M$. Funktsiya D da garmonikalıq.

Teorema 1.10 (Tarxanov). Meyli $M \subset \partial D$ da on' Lebeg o'lshe mli ko'plik ha'm $p > 1$ ge $f_0 \in L^p(M)$ bolsın, onda $H^p(D)$ dan urınba emes shegaralıq ma'nisler M de f penen sa'ykes keliwshi F funktsiyanın' bar bolıwı ushın, ψ_j funktsiyanın' $\partial D \setminus M$ ge jıynalıwı $\alpha^q(\partial D \setminus M)$ norması boyınsha nolge

umtılıwshı (yag'niy $j \rightarrow \infty$ da, $\|\psi_j\|_{\alpha^q(\partial D \setminus M)} \rightarrow 0$) ha'r bir $\psi_j \in O_p^1(\partial D)$ izbe-izlik ushın

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f \psi_j d\sigma = 0 \quad (1.13)$$

sha'rttin' orınlanıwı za'ru'r ha'm jetkilikli.

Da'lilleniwi. $S = \partial D \setminus M$ dep alamız. Eger $F \in H^p(D)$ funksiyanın' M degi shegaralıq ma'nisleri f bolsa, onda

$$0 = \int_{\partial D} F \psi_j d\sigma = \int_S F \psi_j d\sigma + \int_M F \psi_j d\sigma,$$

ha'm

$$\left| \int_S F \psi_j d\sigma \right| \leq \|F\|_{L^p(S)} \|\psi_j\|_{L^q(S)}$$

Bul jerden (1.13) formula kelip shıg'adı.

Kerisinshe, (1.13) formula orınlı bolsın. $L^q(\partial D)$ ken'islik $L^q(S)$ ha'm $L^q(M)$ u'les ken'isliklerdin' tuwrı qosındısı bolg'anlıqtan, ha'r bir $\psi \in L^q(\partial D)$ funksiya

$$\psi = \chi_M \psi + \chi_S \psi$$

ko'riniske iye boladı, bunda χ_m ha'm χ_s - sa'ykes tu'rde M ha'm S ko'pliklerdin' xarakteristikalıq funksiya. $L^q(\partial D)$ dan $L^q(S)$ ke proektsiyalaw

operatorın Π_S arqalı an'latsaq, onda $\Pi_M + \Pi_S = I$ boladı, bunda I - birdeylik operator. Meyli $f - F \in H^p(D)$ funksiyanın' shegaralıq ma'nisleri ha'm $T - f$ penen anıqlang'an $L^q(M)$ degi sıızıqlı funksiya al, $T_1 - F$ tin' shegaralıq ma'nisleri menen anıqlang'an $L^q(S)$ degi sıızıqlı funksiya. Onda barlıq $\psi \in O_p^\perp(\partial D)$ ushın

$$T_1(\Pi_S(\psi)) + T(\Pi_M(\psi)) = 0 \quad (1.14)$$

sebebi

$$T_1(\Pi_S(\psi)) + T(\Pi_M(\psi)) = \int_S F \varphi dr + \int_M f \varphi dr = \int_{\partial D} f \varphi dr = 0$$

Eger $f \in L^p(M)$ menen anıqlang'an T funksiya ushın barlıq $\varphi \in O_p^\perp(\partial D)$ ushın (1.14) ten'lik orınlı bolatug'ın $T_1 \in [L^q(S)]$ funksiya tapsaq, onda f funksiya $F \in H^p(D)$ funksiya shegaralıq ma'nileri boladı ($O_p^\perp C\partial D$) ken'islik anıqlaması boyınsha. Eger $M - H^p(D)$ ushın birden birlik ko'pligi ekenligin esapqa alsaq F dawamı jalg'ız boladı.

Endi $f \in L^p(M)$ menen anıqlang'an ha'm (1.13) sha'rtti qanaatlardıwshı berilgen T funksiya ushın (1.14) sha'rt orınlanatug'ınday $T_1 \in [L^q(S)]$ funksiya tabıwımız kerek. (1.14) sha'rtti qollanıp $\Pi_S O_p^\perp(\partial D)$ da $C(D \cup \Gamma) \cap L^2(D)$ ti anıqlaymız, yag'nıy barlıq $\varphi \in O_p^\perp(\partial D)$ ushın

$$T_1(\Pi_S(\psi)) = -T(\Pi_M(\psi))$$

dep qoyamiz. Bul ten'lik korrekt anıqlang'an. haqıyqatında, $O_p^\perp(\partial D)$ dan $\Pi_s \varphi_1 = \Pi_s \varphi_2$ ten'likti qanaatlandırıwshı φ_1 ha'm φ_2 eki funksiyanı qarastırayıq, yag'nıy $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ funksiya $\Pi_s \varphi = 0$ sha'rtin qanaatlandıradı. Turaqlı $\{\varphi\}$ izbe-izlikti saylasaq, $\|\varphi\|_{L^q(s)} = 0$ ekenligi kelip shıg'adı, sonlıqtan (1.13) sha'rtten

$$T(\Pi_M(\psi)) = T(\varphi) = \int_M f\varphi dr = 0$$

Bul sonın' menen bir qatar T_1 dın' $\Pi_s(O_p^\perp(\partial D))$ da sıızıqlı funksiional ekenligin an'latadı.

Endi T_1 dın' $\Pi_s(O_p^\perp)$ da u'zliksiz ekenligin ko'rsetemiz. Bunın' ushın no'lge u'zliksizligin ko'rsetiw jetkilikli. Eger $j \rightarrow \infty$ da $L^q(s)$ ken'islikte $\Pi_s(\varphi_j) \rightarrow 0$ bolsa, onda (1.13) den $j \rightarrow \infty$ da

$$T(\Pi_M(\varphi_j)) = \int_M f\varphi_j dr \rightarrow 0$$

bolg'anı, yag'nıy $j \rightarrow \infty$ da $T_1(\Pi_s(\varphi_j)) \rightarrow 0$.

Sonlıqtan T_1 funksiional $\Pi_s(O_p^\perp(\partial D))$ da u'zliksiz sıızıqlı boladı. Xan-Banax teoreması boyınsha ol barlıq $L^q(s)$ ken'islikke dawam etedi ha'm ol ushın (1.14) sha'rt orınlı.

§2.2. Ayzenberg formulasi

Karleman klassikalıq formulası (1.12) ha'm Boxner-Martinelli formulasın biriktirip, Ayzenberg kelesi formulanı aladı.

Meyli $D - C^n$ -de fikserlengen $z \in D$ noqat ha'm bo'lekli sıypaq shegarag'a iye shegaralang'an do'n'es oblast. z noqattan o'tiwshi ha'm $\{\zeta \in C^n : \zeta_1 = z_1\}$ tegislikte jatpytug'ın barlıq kompleks tuwrılar to'mendegi ko'rinite jazılıwı mu'mkin

$$\mu = \mu(b, z) = \{\zeta \in C^n : \zeta_1 = z_1 + t, \zeta_2 = z_2 + b_2 t, \dots, \zeta_n = z_n + b_n t, t \in C^\perp\}$$

$U(\zeta, z)$ yadronı $\zeta_1 = z_1 + t, \zeta_j = z_j + b_j t, j \geq 2$ o'zgeriwshilerge jazsaq, onın' ko'rinishi to'mendegishe boladı:

$$U(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t} \Lambda \lambda(b)$$

bunda

$$\lambda(b) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{d\bar{b}[1] \wedge dv[b]}{(1 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2)^n}$$

$U(\zeta, z)$ di $S(0,1)$ boyınsha t ha'm b koordinatalarda integrallasaq

$$1 = \int_{S(0,1)} U_{\zeta,0} = \int_{S(0,1) \setminus \{\zeta: \zeta_1=0\}} U(\zeta,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t} \int_{C^{n-1}} \lambda(b) = \int_{C^{n-1}} \lambda(b)$$

sonlıqtan

$$\int_{C^{n-1}} \lambda(b) = 1$$

Meyli $M \subset \partial D$ betlik on' Lebek o'lsheimga iye bolsin. $N(z, M)$ orqali $z \in D$ noqat ushin $\mu \cap M$ kesilispe sızıqlı on' Lebeg o'lsheimga iye kompleks $\mu(b, z)$ tuwrılar ko'pligin belgileymiz. Fubini teoremasi boyınsha

$$0 < \int_M U(\zeta, z) = \int_{N(z, M)} \lambda(b) \int_{M \cap \mu(b, z)} \frac{dt}{2\pi i t} \leq \int_{N(z, m)} \lambda(b) \leq 1$$

bunnan

$$0 < \int_{N(z, m)} \lambda(b) \leq 1$$

Ha'r bir $z \in D$ noqat ha'm ha'r bir $\mu(b, z)$ tuwri ushin $D \cap \mu(b, z)$ kesilispe bir baylamli boladı. t o'zgeriwshi $(\partial D \setminus M) \cap \mu(b, z)$ ke umtilg'anda $\operatorname{Re} \varphi_{z, b}(t) \rightarrow 0$ ha'm t o'zgeriwshi $M \cap \mu(b, z)$ ke umtilg'anda $\operatorname{Re} \varphi_{z, b}(t) \rightarrow 1$ bolatug'in $D \cap \mu(b, z)$ tegi golomorf funktsiyanı $\varphi_{z, b}(t)$ orqali belgileymiz.

Eger $M \cap \mu(b, z)$ sızıqlı o'lsheimga iye bolsa, onda (1.12) degi ha'r bir $f \in H^1(D)$ funktsiya ushin

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{M \cap \mu(b, z)} \frac{f(z + bt)}{t} e^{m(\varphi_{z, b}(t) - \varphi_{z, b}(0))} dt.$$

Bul formulaning' eki ta'repin $N(z, M)$ boyinsha integrallasaq

$$f(z) = \frac{1}{\int_{N(z, M)} \lambda(b)} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f(\zeta) U(\zeta, z) e^{m(\varphi_{z,b}(t) - \varphi_{z,b}(0))} \quad (1.15)$$

Endi integral belgisi astında limitke o'tiw mu'mkin ekenligin ko'rsetiw kerek. Haqiqatında,

$$\begin{aligned} & \int_{M \cap \mu(b, z)} \frac{f(z + bt)}{t} e^{m(\varphi_{z,b}(t) - \varphi_{z,b}(0))} dt = 2\pi i(z) - \\ & - \int_{(\partial D \setminus M) \cap \mu(b, z)} \frac{f(z + bt)}{t} e^{m(\varphi_{z,b}(t) - \varphi_{z,b}(0))} dt \end{aligned}$$

biraz

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\partial D \setminus M) \cap \mu(b, z)} \frac{f(z + bt)}{t} e^{m(\varphi_{z,b}(t) - \varphi_{z,b}(0))} dt \right| \leq \\ & \leq \int_{(\partial D \setminus M) \cap \mu(b, z)} \left| \frac{f(z + bt)}{t} \right| e^{-m \operatorname{Re} \varphi_{z,b}(0)} d|t| \leq C \leq \int_{\partial d \cap \mu(z, b)} |f(z + bt)| d|t|, \end{aligned}$$

sebebi

$$\int_{\partial d \cap \mu(z, b)} |f(z + bt)| d|t|$$

$f \in H^1(D)$ ushın b boyınsha integrallanıwshı boladı. Sonlıqtan biz jıynaqlılıq haqqındıg'ı Lebeg teoremasın qollanıwımız mu'mkin, al bul to'mendegi teoremanı da'lilleydi.

Teorema 1. 11 (Ayzenberg). *Eger funksiya $f \in H^1(D)$ bolsa, onda f funksiya ushın (1.15) ten'lik orınlı.*

§ 2.3. Koshi ma'selesini sheshimge iye bolw sha'rtleri

Koshi ma'selesinin' (ma'sele 1.1) to'mendegishe qoyılıwın qarastırımız.

Ma'sele 1.3. Meyli, $D - C^n$ de sıypaq ∂D shegarag'a iye shegaralang'an oblast ha'm Γ bo'lekli sıypaq $\partial \Gamma$ shegarag'a iye ∂D dan aling'an ashıq bos emes baylamlı ko'plik bolsın. Berilgen $f_0 \in C(\bar{\Gamma})$ funktsiya ushın Γ da $f = f_0$ sha'rtti qanaatlandırıwshı, $C(D \cup \Gamma) \cap L^2(D)$ klasqa tiyisli D da golomorf funktsiyanı tabın' (eger mu'mkin bolsa).

Birinshi bapta qaralg'anınday, meyli $D - C^n$ de bo'lekli – sıypaq shegarag'a iye shegaralanbag'an oblast ha'm $\Gamma - \Omega$ aling'an, onı bo'lekli – sıypaq shegarag'a iye eki D^- ha'm D^+ baylamlı bo'leklerge bo'liwshi sıypaq giperbetlik.

Saldar 1.5. Ma'sele 1.3 sheshimge iye bolıwı ushın

(1) f_0 funktsiya Γ da CR funktsiya;

(2) D^+ da $F^- = (M_\Gamma f_0)^-$ ten'lik orınlanatug'ın $F \in G_2^0(\Omega)$ funktsiya tabıladı;

sha'rtler orınlanıwı za'ru'r ha'm jetkilikli.

Lemma 1.3. Eger $f_0 \in C(\bar{\Gamma})$ bolsa, onda $(M_\Gamma f_0)^\pm \in G_2^0(D^\pm)$.

Da'lilleniwi. Haqıyqattan, eger $(M_\Gamma f_0)^\pm$ funktsiya $\bar{\Gamma}$ dan tısqarıda gormonikalıq bolsa, onda $(M_\Gamma f_0)^\pm \in L_{loc}^2(\bar{D}^\pm \bar{\Gamma})$. $D^\pm$ te Γ nın' a'tirapındag'ı bir ta'repleme jolaqshanı

$$S_\varepsilon^\pm = \{z \in D^\pm : dist(\Gamma, z) \leq \varepsilon\}$$

arqalı belgileymiz.

Onda

$$\int_{D^{\pm}} \left| (M_{\Gamma} f_0)^{\pm}(z) \right|^2 dv(z)$$

integraldın' jıynaqlılıg'ı jeterli kishi $\varepsilon > 0$ ushın

$$I_{\varepsilon_0}^{\pm} = \int_{S_{\varepsilon}^{\pm}} \left| (M_{\Gamma} f_0)^{\pm}(z) \right|^2 dv(z)$$

integraldın' jıynaqlılıg'ı menen ekvivalent.

Jetkilikli kishi $\varepsilon > 0$ ushın z noqat $S_{\varepsilon}^{\pm}$ jolaqshag'a tiyisli bolıw ushın sonday jalg'ız $z_0 \in \bar{\Gamma}$ noqat ha'm $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tabılıp,

$$z = z_0 + \varepsilon v(z_0).$$

bolıwı za'ru'r ha'm jetkilikli.

Sonlıqtan, Fubini teoremasın qollanıp

$$I_{\varepsilon_0}^{\pm} = \int_0^{\varepsilon_0} \int_{\omega \in \Gamma} \left| (M_{\Gamma} f_0)^{\pm}(\omega \pm \varepsilon v(\omega)) \right|^2 ds(\omega) d\varepsilon$$

Son'ında, Boxner – Martinelli integralının' shegaralıq tutıwınan $(M_{\Gamma} f_0)^{\pm} \in G_2^0(D^{\pm})$ ekenligi kelip shıg'adı.

Saldardın' da'lilleniwin juwmaqlastırsaq . Eger ma'sele 1.3 sheshimge iye bolsa, onda ma'sele 1.1 de sheshimge iye. Teorema 1.2 den $(M_{\Gamma} f_0)^{\pm}$ funksiyanın' Ω da golomorf dawam etiwı ha'm bul dawam etiw (1.4) formula menen beriletug'ını kelip shıg'adı. Ha'mde $f \in L^2(D)$ ha'm

$(M_{\Gamma} f_0)^{\pm} \in L^2(D^{\pm})$ ekenligin esapqa alsaq, onda F funktsiya $L^2(D^{\pm})$ ken'islikke tiyisli boladı ha'm sonlıqtan $F \in L^2(\Omega)$.

Kerisinshe, eger D^- da $F^- = (M_{\Gamma} f_0)^-$ bolatug'ınday $F \in G_2^0(\Omega)$ funktsiya bar bolsa, onda teorema 1.2 boyınsha ma'sele 1.1 sheshimge iye ha'm onın' sheshimi f funktsiya (1.5) formula menen beriledi. Eger $F \in L^2(\Omega)$ ha'm $(M_{\Gamma} f_0)^+ \in L^2(D)$ bolsa, onda ma'sele 1.3 de sheshimge iye.

§ 2.4 Qos ortogonallı bazislerge tiykarlang'an Karleman formulası

Endi biz ekinshi baptag'ı na'tiyjelerdi Karleman formulasının' basqa analogin alıw ushın paydalanamız. Ω da $\Omega \setminus \omega$ kompakt baylamalı komponentalarg'a iye bolmaytug'ın, bo'lekli – sıypaq shegarag'a iye, D^- da salıstırmalı kompakt ω oblastın alamız. Onda $G_2^0(\omega)$ ken'islikte $\{b_v |_\omega\}$ ortonormal bazis bolatug'ınday $G_2^0(\Omega)$ ken'islikte $\{b_v\}$ ortonormal bazis bar boladı (teorema 1.4).

Saldar 1.6. *Ma'sele 1.3 sheshimge iye bolıwı ushın*

1) f_0 funktsiya Γ da CR - funktsiya

2) $\sum_{v=1}^{\infty} |c_v|^2$ qatar jaynaqlı, bunda

$$c_v = \frac{\left((M_\Gamma f_0)^+, b_v \right)_{0,2,\omega}}{\|b_v\|_{0,2,\omega}^2}.$$

sha'rtler orrinlanıwı za'ru'r ha'm jetkilikli.

Da'lileniwi. Garmonikalıq funktsiyalar ushın birden-birlik teoreması boyınsha F funktsiya $(M_\Gamma f_0)^-$ - funktsiyanın' ω dan Ω g'a dawamı boladı.

Eger $(M_\Gamma f_0)^-$ funktsiya D^- da garmonikalıq bolsa, onda ol $G_2^0(\omega)$ ken'islikke tiyisli boladı. Anıqlanıwı boyınsha c_v lar $(M_\Gamma f_0)^-$ funktsiyanın' $\{b_v |_\omega\}$ ortogonal bazislerge qarata Fure koeffitsientleri boladı, al o'z na'wbetinde bul bazisler $G_2^0(\omega)$ ken'islikte ortogonal bazisler boladı, yag'nıy

$$(M_{\Gamma} f_0)^-(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v b_v(z), \quad z \in \omega.$$

Teorema 1.7 boyınsha bul saldardag'ı (2) sha'rt saldar 1.5 degi sha'rtke ekvivalent.

Lemma 1.4.

$$c_v = \int_{\Gamma} f_0(\zeta) V_v(\zeta),$$

bunda

$$V_v(\zeta) = \int_{\omega} \frac{U(\zeta, \omega) \bar{b}_v(\omega)}{\|b_v\|_{0,2,\omega}^2} \frac{d\omega \wedge d\bar{\omega}}{(2i)^n}$$

$U(\zeta, z)$ funktsiyanın' $G_2^0(\omega)$ da ortogonal sistema $\{b_v\}$ boyınsha o'zgeriwshi z boyınsha Fure koeffitsientleri.

Da'lilleniwi. Eger $\omega \in \omega$, $\zeta \in \Gamma$ ha'm $\Gamma \cap \omega$ - bos ko'plik, onda $U(\zeta, \omega) \in C(\bar{\omega} \times \bar{\Gamma})$. Da'lillewdin' dawamı Fubini teoremasınan kelip shıg'adı.

Koshi ma'selesı (ma'sele 1.3) ushın Karleman yadrosın $C_N(\zeta, z)$ arqalı belgilesek,

$$C_N(\zeta, z) = U(\zeta, z) - \sum_{v=1}^N V_v(\zeta) b_v(z)$$

bunda $z \in \Omega$, $\zeta \in C^n \setminus \bar{\omega}$, $z \neq \zeta$.

Lemma 1.5. Ha'r bir $N \in \mathbb{N}$ ushın $C_N(\zeta, z)$ Karleman yadrosı $z \neq \zeta$ o'zgeriwshisi boyınsha garmonikalıq funktsiya boladı ha'm $z \neq \zeta$ o'zgeriwshi boyınsha $(n, n-1)$ tiptegi $\bar{\partial}$ - tuyıq differentsial forma.

Teorema 1.12 (Shlapunov). $C(D \cup \bar{D}) \cap L^2(D)$, klasqa tiyisli D oblastta golomorf qa'legen f funtsiya to'mendegi ko'rinishe iye

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(\zeta) C_N(\zeta, z), \quad z \in D. \quad (3.5)$$

Da'lilleniwi. Haqiyqatında, eger f funktsiya D da golomorf ha'm $C(D \cup \bar{D}) \cap L^2(D)$ klasqa tiyisli bolsa, onda f funktsiya $f_0 = f|_{\Gamma}$ baslang'ish sha'rt penen berilgen ma'sele 1.3 din' jalg'ız sheshimi boladı.

Basqa ta'repten, saldar 1.5 den bul sheshim (1.5) formula menen beriletug'ını kelip shıg'adı, yag'nıy

$$f(z) = (M_{\Gamma} f)^+(z) - F(z), \quad z \in D$$

bunda

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v b_v(z)$$

$(M_{\Gamma} f_0)^-$ funktsiyanın' ω dan Ω g'a garmonikalıq dawamı.

Son'ında, lemma 1.4 ti qollanıp $z \in D$ ushın

$$f(z) = (M_{\Gamma} f)^+(z) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N c_v b_v(z) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(\zeta) C_N(\zeta, z)$$

iye bolamız ha'm bul teorema da'lilleniwin juwmaqlaydı.

2.5. Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'selesı

Meyli $D - C^n$ de C^∞ klassqa tiyisli shegaralang'an oblast bolsın. D oblast ushın qandayda bir anıqlawshı ζ funktsiyanı fiksirleyemiz, yag'nıy ∂D da $|d_s| \neq 0$ sha'rtti qanaatlandırıwshı ha'm

$$D = \{z \in C^n : s^{(z)} < 0\}$$

bolatug'ın sheksiz sıtspaq ha'qıyqıy ma'nisli funktsiya. Tag'ı da, meyli $\Gamma - D$ oblast shegarasının' baylanışlı ashıq (∂D topologiyasında) u'les ko'pligi bolsın. Biz Γ betликтin ∂D shegarasın bo'lekli-sıypaq dep uyg'aramız.

$C_{comp}^\infty(D \cup \Gamma)$ arqalı $D \cup \Gamma$ da kompakt tasıwshıg'a iye bolg'an, $C^\infty(\overline{D})$ klasstag'ı funktsiyalar ko'pligin belgileyemiz. Sobolev ken'isliginin' $W^s(D) = W_2^s(D)$, $S \in N$ ha'm $W_{lok}^s(D \cup \Gamma)$ nı qarastıramız. Eske tu'sirsek, $W_q^s(D)$ arqalı koeffitsientlerdi $W^s(D)$ $0 \leq q \leq n$ nen bolg'an $(0, q)$ tiptegi differentsial formalar ken'isligi.

C^n ken'isliginde Koshi-Riman operatorın $\bar{\partial}$ arqalı belgileyemiz. Bizge belgili, Koshi-Riman operatorı birgelesken differentsial kompleksti anıqlaydı ha'm bul kompleks Dolbo kompleksi dep ataladı.

$W_q^s(D)$ ken'isliktegi barlıq $\bar{\partial}$ -tuyıq formalar ko'pligi $Z_q(W^s(D))$ arqalı belgileyemiz. Belgili bolg'anday, $W^s(D)$, Sobolev klassı funktsiyası ushın D oblast shegarasında izler jaqsı anıqlanadı, bunda $S \in N$.

Γ da koeffitsientlerinin' izi joq bolatug'ın, $W_q^s(D)$ ken'isliktegi barlıq $\bar{\partial}$ -tuyıq formalar ko'pligin $Z_q(W^s(D)\Gamma)$ arqalı belgileyemiz. Sog'an kelisiwimiz kerek

$$Z_q(W^s(D)) = Z_q(W^s(D)).$$

Dawam etsek, $v \in Z_q(W^s(D))$, $q \geq 1$ formanı $\bar{\partial}$ -anıq forma dep aytamız, eger onın' ushın $(0, q-1)$ tiptegi w forma tabılıp,

$$\bar{\partial}w = v$$

ten'likti D dag'ı bo'listiriwler ma'nisinde qanaatlandırsa. $W^s(D, \Lambda^{0,q})$ dag'ı barlıq $\bar{\partial}$ -anıq formalar ko'pligin $B_q(W^s(D))$ arqalı belgileymiz.

Ma'sele 1.4. Berilgen $u_0 \in W_q^s(D)$ ha'm $f \in L_{q+1}^2(D)$ differentsial formalar ushın

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = f, & D \\ u = u_0 & \Gamma \end{cases} \quad \partial a$$

(bunda Γ da differentsial formalardın' ten'ligindegi usı formalardın' barlıq koeffitsientlerinin' Γ da ten'ligi tu'siniledi) sha'rt orınlanatug'ın $u \in W_q^s(D)$ differentsial formanı tabın' (eger mu'mkin bolsa).

Bizge belgili, eger Γ menen ∂D sa'ykes kelmese ha'tteki $q = 0$ jag'dayda bul ma'sele korrekt emes. Eger Γ nın' ishi bos bolmasa, onda $q = 0$ jag'dayda bul ma'sele birden ko'p sheshimge iye bolmaydı.

Endi kompleks da'rejesi on' bolg'anda Koshi ma'ma'selesı sheshimi birden-birligi haqqında sorawdı talıqlaymız. Sol anıq, bul jag'dayda ma'sele 1.3 birden ko'p sheshimge iye bolıwı mu'mkin.

Komplekstin' on' da'rejelerinde kogomologiya ko'z qarasınan qarag'anda birden birlik teoreması $Z_q(W^s(D)\Gamma)$, $q \geq 1$ ken'isliktin' barlıq elementleri $\bar{\partial}$ -

nın' formaları boladı degen tastıyıqlaw bolar edi. Sebebi, [5] de Dolbo kogomologiyası ushın Koshi ma'selesı qaralg'an. Dara jag'dayda, Γ da jog'alıwshı $C^1(\overline{D})$ klassqa tiyisli $\bar{\partial}$ -tuyıq formalar $\partial D \setminus \Gamma$ $\bar{\partial}$ -anıq bolıwının' bazı bir (jetkilikli) sha'rtleri ko'rsetilgen. Mısal ushın, eger D nı o'z ishine alıwshı psevdodo'n'es G oblast shegarasının' bo'legi $\partial D \setminus \Gamma$ bolsa. Psevdodo'n'es oblastlarda $\bar{\partial}$ -ten'leme sheshiliwi haqqındag'ı na'tiyjelerdi [5] esapqa alsaq, bul baqlawlar bizlerdin' jag'dayımızda da orınlı boladı. Haqıyqatında, eger $v \in (W^1(D), \Gamma)$ bolıp, usı formanı G g'a noller menen dawam ettirip $Z_q(W^1(G))$ g'a tiyisli element payda etemiz. Bul element ushın [5] boyınsha koeffitsientleri $W_{loc}^\perp(G)$ dan bolg'an ha'm G da $\bar{\partial}\omega = v$ ten'likti qanaatlandıırıwshı ω forma tabıladı.

Tag'ı da Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'selesı bola alatug'ın eki ta'biyiy ma'seleni qaraştıramız.

Ma'sele 1.5. Berilgen $g \in L_{q+1}^2(D)$ differentsial forma ushın

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = f & \text{в} & D, \\ u = u_0 & \text{на} & \Gamma \end{cases}$$

Bolatug'ın $v \in W_q^1(D)$ differentsial formanı tabın'.

Ma'sele 1.5 ma'sele 1.4 din' dara jag'dayı bolatug'ını anıq. Lekin ma'sele 1.4 di ma'sele 1.5 ge alıp keliw an'sat. Anıg'ıraq aytqanımızda ma'sele 1.4 sheshimge iye bolıwı ushın $g = f - \bar{\partial}u_0$ ushın ma'sele 1.5 sheshimge iye bolıwı za'ru'r ha'm jetkilikli, sonda bul ma'seleler sheshimleri

$$u = u_0 + v$$

ten'lik arqalı baylanısadı.

Ma'sele 1.6. Berilgen $f \in L_{q+1}^2(D)$ differentsial forma ushın

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = f & D \quad \partial a \\ u_\tau = 0 & \Gamma \quad \partial a \end{cases}$$

bolatug'ın $u \in W_q^1(D)$ differentsial formanı tabın', bunda $u_\tau - u$ fomanın' urınba bo'legi.

Lemma 1.6. Koshi ma'sleleri ma'sele 1.5 ha'm ma'sele 1.6 ten' ku'shli.

Da'lilleniwi. Ma'sele 1.5 sheshimi ma'sele 1.6 nın' sheshimi bolatug'inlig'ı anıq. Meyli endi ma'sele 1.6 nın' sheshimi v bolsın. Bizler sonday $\omega \in W_{q-1}^1(D)$ differentsial formanın' bar ekenligin da'lilleymiz, bul forma ushın $u = v - \bar{\partial}\omega$ ma'sele 1.5 tin' sheshimi boladı.

Meyli $n > 1$ ushın Laplas ten'lemesinin' sheshimi $g(\zeta, z)$ bolsın.

$v \in W_q^1(D)$ bolg'anlıqtan $\chi_D v \in L_q^2(C^n)$ ha'm

$$g\chi_D v \in W_{loc,q}^2(C^n) \cap W_q^3(D) \cap W_{loc,q}^3(C^n \setminus D)$$

$g\chi_D v$ formanın' $C^n \setminus D$ dan pu'tkil C^N dawamın $(g\chi_D v)^+$ arqalı belgileymiz. Uitni teoreması boyınsha bul dawam etiw bar boladı ha'm ol $W_{loc,q}^3(C^n)$ klasqa tiyisli. Onda

$$w = \bar{\partial}^*(g\chi_D v - (g\chi_D v)^+) \in W_{loc,q-1}^2(C^n).$$

$(g\chi_D v)^+$ arqalı $g\chi_D v$ nın' $C^n \setminus D$ dag'ı jayılwın belgileymiz.

$$\partial^\alpha (g\chi_D v)^+|_{\partial D^+} = \partial^\alpha (g\chi_D v)^+|_{\partial D^-}, \quad |\alpha| \leq 2$$

Juwmag'ında

$$\partial^\beta (g\chi_D v)^+|_{\partial D^-} = \partial^\beta (g\chi_D v)^+|_{\partial D^+} = \partial^\beta (g\chi_D v)^-|_{\partial D^-}, \quad |\beta| = 1$$

Bunnan ω forma koeffitsientlerinin' D oblast shegarasında nolge ten' ekenligi kelip shıg'adı.

Dawam etsek, ∂D da $\omega = 0$ ekenliginen koeffitsientleri $C^\infty(\bar{D})$ klasqa tiyisli $(n, n - q - 1)$ tiptegi barlıqmalar ushın

$$\int_{\partial D} \varphi \wedge \omega = 0$$

Bul ∂D da urınba bo'lek $\omega_\tau = 0$ ekenligin bildiredi. Bunnan tısqarı, urınba bo'lek $(\bar{\partial}\omega)_\tau = 0$, ∂D da. Haqıyqatında,

$$\int_{\partial D} \psi \wedge \bar{\partial}\omega = \int_D \bar{\partial}\psi \wedge \bar{\partial}\omega = - \int_{\partial D} \bar{\partial}\psi \wedge \omega = 0$$

boladı, koeffitsientleri $C^\infty(\bar{D})$ klasqa tiyisli $(n, n-q-2)$ barlıq ψ formalar ushın.

Tag'ı da $g\chi_D v \in W_{loc,q}^2(C^n)$ bolg'anlıqtan,

$$h = \bar{\partial}(g\chi_D v - (g\chi_D v)^+)$$

$0, q+1$ tipindegi forma ∂B da nolge ten' boladı.

§ 2.6. İntegrallanıwshı funksiylardı golomorf dawam ettiriw sha'rtleri

Meyli D -baylamlı sıypaq $\partial D \in C^2$ shegarag'a iye C^n ken'islikke tiyisli shegaralang'an oblast bolsın. Aytayıq, D oblast h'aqıyqıy ma'nisli $\rho \in C^2(C^n)$ funksiya ja'rdeminde to'mendegishe anıqlansın:

$$D = \{z : \rho(z) > 0\}, \quad \text{grad } \rho(z) \neq 0, \quad z \in D.$$

$z \in D$ ushın $\text{grad } \rho(z) \neq 0$ sha'rti, $\rho(z) = 0$ ge ju'rgizilgen kompleks urınba tuwrılar h'a'r bir $\zeta \in D$ noqatta transversal kesilisetug'ının bildiredi.

$H^p(D)$ funksiylar klasının' anıqlamasın keltiremiz.

Golomorf funksiya $f \in H^p(D)$ ($p > 0$), eger

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon v(\zeta))|^p d\sigma < +\infty,$$

bunda $d\sigma - \partial D$ betliktin' elementi, al $v(\zeta) - \partial D$ betlikke ζ noqatta ju'rgizilgen sırtqı normaldın' birlik vektori. $f \in H^p(D)$ funksiyanın' normal shegaralıq ma'nisleri $L^p(\partial D)$ klasqa ($d\sigma$ Lebeg o'lsheми boyınsha) tiyisli ekenligi jaqsı belgili([1],[2]).

$b \in CP^{n-1}$ vektor bag'ıtında $z \in C^n$ noqattan o'tiwshi

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j \cdot t, j = 1, 2, \dots, n, t \in C\} \quad (1.1)$$

ko'riniştegi bir o'lsheми l kompleks tuwrılardı qarastıramız (b vektordın' bag'ıtı $\lambda \neq 0$ kompleks sang'a ko'beytiwge shekemgi da'llikte anıqlanadı).

Sardo teoreması boyınsha derlik barlıq $z \in C^n$ h'a'm derlik barlıq $b \in CP^{n-1}$ ushın $l \cap \partial D$ kesilispe shekli sandag'ı sıypaq iymeklikler jıyındısınan ibarat ($l \cap \partial D = 0$ aynımalı jag'daydan basqa).

Tastıyqlaw 1.1.1. Eger $f \in L^p(\partial D)$, onda derlik barlıq $z \in C^n$ h'a'm derlik barlıq $b \in CP^{n-1}$ ushın $f \in L^p(\partial D \cap L)$.

Da'lileniwi. Meyli $f \in L^p(\partial D)$ h'a'm $l-z$ noqattan o'tiwshi (1.1) ko'rinstegi bir o'lsheмли kompleks tuwrı. $b \in W$ ushın $l \cap \partial D$ sıypaq iymeklik bolatug'ın $W \subset CP^{n-1}$ ashıq ko'plikti qaraştıramız. Eger $S = \bigcup_{b \in W} \partial D \cap l$ ashıq ko'plikti belgilesek, onda Fubini teoreması boyınsha ([3])

$$\int_S |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) = \int_W d\sigma(b) \int_{\partial D \cap l} |f(z+bt)|^p \left| \frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)} \right| dt,$$

Bunda $d\sigma(\zeta), d(b)$ h'a'm dt -sa'ykes S, W h'a'm $l \cap \partial D$ degi Lebeg o'lshemleri, al $\left| \frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)} \right|$ -ta'kirarlanıwshı integralg'a o'tkende payda bolıwshı yakobian moduli.

İshki integral derlik barlıq $b \in W$ ushın jıynaqlı. Al

$$0 < c_1 \leq \left| \frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)} \right| \leq c_2 < \infty$$

bolg'anlıqtan to'mendegi bah'alaw orınlı

$$0 < c_1 \int_{\partial D \cap l} |f|^p dt \leq \int_{\partial D \cap l} |f|^p \left| \frac{d\sigma(\zeta)}{d\sigma(b)} \right| dt \leq c_2 \int_{\partial D \cap l} |f|^p dt < \infty.$$

Bunnan tastıyqlaw kelip shıg'adı. Tastıyqlaw da'lillendi.

I-bapqa juwmaqlaw

Koshi-Riman sisteması ushın shegaralıq ma'selenin' biri bolg'an golomorf funktsiyalar ushın Koshi ma'selesin qarastırmaq, bul ma'sele barlıq standart funktsional ken'islikler ushın korrekt bolmaydı, lekin sonın' menen birge onı regulyarizatsiya metodı ja'rdeminde sheshiw mu'mkin.

Biraq, operatorlı ten'lemelerdi u'yreniw ushın regulyarizatsiya metodının' kemshilik ta'repi $A * A$ operatordın' menshikli funktsiyaların tabıw kerek. Bazı bir ken'isliklerde bazı bir operatorlar ushın olardı tabıwdın' konstruktiv metodları bar Biraq sheksiz o'lsheмли ken'isliklerde spektral ma'sele (menschikli funktsiyalar h'a'm menschikli ma'selelerdi tabıw) ju'da qıyın. A'llette, Gilbert-Shmidt teoreması menschikli funktsiyalar h'a'm menschikli ma'nislerdi tabıw algoritmin beredi. Biraq a'llette bul teorema tek g'ana shekli sandag'ı bazis vektrlardı tabıw ushın qollanıladı. Tilekke qarsı, Joqarıda ayılğ'annan $Au = f$ operatorlı ten'leme korrekt emes ma'selege alıp keletug'ınıg'ı ko'rinedi. Sonlıqtan biz kerekli anıqlıqqa shekem approksimatsiyalaw ushın qansha vektor kerekligin ayta alamız.

JUWMAQLAW

Matematikanın ko'plegen tarawlarında, a'sirese matematikalıq-fızika h'a'm differentsial ten'lemeler teoriyasında Koshi ma'sesele o'zinin a'meliy h'a'm teoriyalıq jaqtan qollanılıwı boyınsha ju'da ku'shli a'h'miyetke iye bolıp esaplanadı. Bul ma'sele tek g'ana ayılǵ'an tarawlarda g'ana emes, al ba'lkim bir h'a'm ko'p kompleks o'zgeriwshili funktsiyalar teoriyasında da ko'plegen qollanılıwılarg'a iye. Ma'selen, Koshi-Riman ten'lemesi ushın Koshi ma'sesele, Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele h'a'm tag'ı basqalar. Sonnı aytıp o'tiw kerek, Koshi-Riman operatorı ushın Koshi ma'sesele tek g'ana funktsiyalar ushın emes, sonın menen birge differentsial formalar ushın da qaraw mu'mkin. Bunnan tisqari, qos ortogonalıqqa iye bazislerden paydalanıp Dolbo kompleksi ushın Koshi ma'sesele qarastırıp, bunda kompleksler ushın Koshi ma'sesele sheshimge iye bolıwının za'ru'rli h'a'm jetkilikli sha'rtleri tabıladı. Bul na'tiyjeler CR-funktsiyalar teoriyasına jaqın bolıp, olardıń tiykarg'ıları N.N. Tarxanov h'a'm A.A. Shlapunovlarg'a tiyisli([1]).

Koshi-Riman sisteması ushın shegaralıq ma'selenin biri bolǵ'an golomorf funktsiyalar ushın Koshi ma'sesele qarastıraraq, bul ma'sele barlıq standart funktsional ken'islikler ushın korrekt bolmaydı, lekin sonın menen birge onı regulyarizatsiya metodı ja'rdeminde sheshiw mu'mkin.

Biraq, operatorlı ten'lemelerdi u'yreniw ushın regulyarizatsiya metodının kemshilik ta'repi $A * A$ operatordın menshikli funktsiyaların tabıw kerek. Bazı bir ken'isliklerde bazı bir operatorlar ushın olardı tabıwdın konstruktiv metodları bar Biraq sheksiz o'lsheмли ken'isliklerde spektral ma'sele (menschikli funktsiyalar h'a'm menshikli ma'selelerdi tabıw) ju'da qıyın. A'llette, Gilbert-Shmidt teoreması menshikli funktsiyalar h'a'm menshikli ma'nislerdi tabıw algoritmin beredi. Biraq a'llette bul teorema tek g'ana shekli sandag'ı bazis vektrlardı tabıw ushın qollanıladı. Tilekke qarsı, Joqarıda ayılǵ'annan $Au = f$ operatorlı ten'leme korrekt emes ma'selege alıp keletug'ınılıǵ'ı ko'rinedi. Sonlıqtan biz

kerekli aniqliqqa shekem approksimatsiyalaw ushin qansha vektor kerekligin ayta alamiz.

D oblastta golomorf funktsiyalar olardin' tek ∂D dag'ı shegaralıq ma'nisleri menen aniqlanadı. Biraq birden – birlik teoremasınan (teorema 1.1) golomorf funktsiyani bir ma'nisli aniqlaw ushin onı ∂D shegaranın' qa'legen ashıq bos emes baylamlı Γ bo'leginde biliw jetkilikli.

Tegis oblast shegarasının' bo'legindegi shegaralıq ma'nis boyınsha golomorf funktsiyani an'latıw formulasın birinshi bolıp T. Karleman usındı. Keyin ala C da bunday formulalardı du'ziwdin' h'a'r qıylı metodları payda boldı.

Temanın' aktualıg'ı. İzzertlew taqırıbına tiyisli birinshi na'tiyjeler N.N. Tarxanov h'a'm A.A. Shlapunovlar ta'repinen aling'an bolıp, onda Koshi-Riman ten'lemesi ushin h'a'm Dolbo kompleksi ushin Koshi ma'seleleri u'yrenilgen.

Paydalanılğ'an a'debiyatlar

- [1]. **Kitmanov A.M.** İntegral Boxnera-Martinelli i ego primeneniya. – Novosibirsk: Nauka. 1992. – 240s.
- [2]. **Xenkin G.M., Chirka E.M.** Granichnie svoystva golomorfnyx funktsiy neskol'kix kompleksnyx peremennyykh // Sovremennye problemy matematiki. – M.: VINITI, 1975. – T.4. – s. 13 – 142.
- [3]. **Chirka E.M.** Kompleksnye analiticheskie mnojestva. – M.: Nauka, 1985. – 272s.
- [4]. **Mislivets M.S.** O skachke $\bar{\partial}$ - normalnoy proizvodnoy integrala Boxnera – Martinelli // Vestnik KrasGU.ser.fiz.mat.nauki. – 2004. – Vyp. 1. – s. 129-132.
- [5]. **Shlapunov A.A., Tarxanov N.N.** K zadache Koshi dlya golomorfnyx funktsiy klassa Lebega L^2 // Sibirskiy matematicheskiy jurnal. – 1992. – T. 33. - № 5. – s.186 – 195.
- [6]. **Globovnik J., Stout E.L.** Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. –1991. –V.64. –№ 3. –p. 571 – 615.
- [7]. **Martinelli E.** Sopre una dimostrazione de R. Fueter per un theorema di Hartogs // Comment. Math. Helv. – 1943. – 15. – p. 340 – 349.
- [8]. **Ayzenberg L.F., Dautov Sh.A.** Differentsialnye formy, ortogonalnye golomorfnyx funktsiyam ili formam, i ix svoystva. – Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-e, 1975. – 114s.
- [9]. **Kitmanov A.M., Mislivets S.G.** O golomorfnosti funktsiy, predstavimyykh formuloy logarifmicheskogo vicheta // Sibirskiy matematicheskiy jurnal. – 1997. – T. 38. - № 1. – s. 351-361.

- [10]. **Romanov A.V.** Sxodimost operatora Martinelli – Boxnera // Doklady AN SSSR. – 1978. – T. 242. - № 4. – s. 780 – 783.
- [11]. **Ayzenberg L.A., Yujakov A.P.** Integralnye predstavleniya i vychety v mnogomernom kompleksnom analize. – Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-e, 1979. – 366s.
- [12]. **Aronov A.M., Kitmanov A.M.** O golomorfnosti funktsiy, predstavimyx integralom Martinelli – Boxnera // Funktsionalnyy analiz i ego prilozheniya. – Moskva, 1975. – T. 9. - № 3. – s. 83 – 84.
- [13]. **Landkof N.S.** Osnovy sovremennoy teorii potentsiala. – M.: Nauka. – 1966. – 516 s.
- [14]. **Agranovskiy M.L., Valskiy R.E.** Maksimalnost invariantnykh algebr funktsiy // Sibirskiy matematicheskiy jurnal – Novosibirsk, 1971. – T. 12 - № 1. – s. 3 – 12.
- [15]. **Stout E.L.** The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. – 1977. – V. 44. – No. 1. – p. 105 – 108.
- [16]. **Grinberg E.** A boundary analogue of Morera's theorem in the unit ball of C^n // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – 102. – p. 114 – 116.
- [17]. **Globevnik J. and Stout E.L.** Discs and the Morera property // Pacific J. Math. – 2000. – 192. – p. 65 – 91.