ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Қол жазба ҳуқықында
УДК 517.927

Есемуратова Гулбахар

«Кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлемелер ушын айырым мәселелер»

5А460102 -Дифференциаллық теңлемелер қәнигелиги бойынша

Магистр академик дәрежесин алыў ушын усынылған

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Илимий басшы: ф.-м.и.к. доц. Ө.Қурбанбаев

НӨКИС-2011

Мазмуны

Кирисиў

Теманың актуаллығы. Магистрлик диссертация жумысы кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын айырым мәселелерди үйрениўге ҳәм изертлеўге арналған. Бул диссертация жумысында үйренилетуғын мәселелердиң актуаллығы бәринен бурын тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелер теориясының илим менен техниканың хәр түрли тараўларындағы, атап айтқанда сызықлы емес тербелислер теориясындағы [1,3,12,15,16], басқарыў теориясындағы [4,11], сондай-ақ автоматиканың, телемеханиканың, радиолокацияның, теориялық кибернетиканың, суў қурылысының, медицина, биология ҳәм тағы басқа илимлердиң көплеген тараўларындағы пайда болатуғын мәселелерди шешиў барысында өз қолланыўларының әхмийетлилиги менен анықланады.

Кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелерди шешиў ҳәм шешимди изертлеў ушын ҳәр түрли методлар ислеп шығылған [2,5,6,8,10,13,14,15,16].

Усындай көп санлы методлар ишинде терең үйренилген адымлар усылы, дара жағдайда кешигиўши аргументли сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын шешимди интеграллық көринисте дүзиў усыллары тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелердиң шешимин изертлеўде, ең қолайлы усыллардың бири болып есапланады [7,9,15,17,18,19].

Солай етип, кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық, сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди изертлеўдиң нәтийжели конструктив методларын ислеп шығыў мәселеси теориялық ҳам практикалық жақтан үлкен қызығыўшылық туўдырады ҳәм бул бүгинги күнде актуал мәселелердиң бири болып, өз шешилиўин талап етеди.

Магистрлик диссертацияның мақсети ҳәм ўазыйпалары– кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық ҳәм сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелердиң шешимин дүзиў усылларын ислеп шығыў ҳәм бул усылларды конкрет шегаралық мәселелерди шешиўде қолланыўдан ибарат.

Изертлеў обьекти. Кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық ҳәм сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелердиң ҳәр түрли көринислери қарастырылып, бундай мәселелер ушын шешимлерди дүзиў мәселелери үйрениледи.

Изертлеўдиң илимий жаңалығы. Магистрлик диссертацияда кешигиўши аргументке ийе сызықлы әпиўайы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелер, дара туўындылы сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын, атап айтқанда жыллылық өткизгишлик теңлемелери ҳәм биртекли тардың тербелис теңлемелери ушын тийкарғы басланғыш мәселелер қарастырылып, бундай мәселелердиң шешимин дүзиўдиң айырым усыллары изертленеди.

Изертлеў нәтийжелериниң апробациясы. Магистрлик диссертация жумысының тийкарғы нәтийжелери Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети “Алгебра ҳәм дифференциаллық теңлемелер” ҳәм “Математикалық анализ” кафедраларының биргеликтеги семинарларында (Нөкис, 2010-2011 жыллар), Өзбекстан Республикасы ғәрезсизлигиниң 20 жыллық байрамына бағышланған “Математиканың ҳәзирги заман проблемалары” атлы илимий конференциясында (17 март 2011 жыл) [17], Магистрантлардың Республикалық илимий-әмелий конференциясында (30 апрель 2011 жыл) [18] ҳәм “Илим ғумшалары” атамасындағы Республикалық илимий-әмелий конференциясында (30-31 май 2011 жыл) баянат етилди.

Жумыстың көлеми ҳәм дузилиси. Магистрлик диссертация кирисиў бөлиминен, еки баптан, жуўмақлаў бөлими менен пайдаланылған әдебиятлар дизиминен турады. Әдебиятлар дизими 18 атамадан ибарат болып, диссертация көлеми 55 бет.

Диссертация жумысының биринши бабы “Кешигиўши аргументке ийе әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын айырым мәселелер” деп аталады, ол үш параграф көлеминде жазылған. Бул баптың биринши параграфы “Кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер” деп аталады. Онда биринши, екинши ҳәм жоқары тәртипли кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер қарастырылып, бундай мәселелер ушын кешигиўши аргумент бирдей ҳәм ҳәр қыйлы болған жағдайларда адымлар усылы ҳаққында қысқаша мағлыўматлар бир қатар мысаллар менен бериледи.

Екинши параграф “Сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын шешимниң интеграллық көриниси” деп аталады. Онда сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын орынлы болған шешимниң айырым қәсийетлери берилип, соңынан бул қәсийетлер тийкарында орынлы болатуғын шешимди дүзиў усылларының бири қарастырылады. Бундай мәселелердиң шешимлерин дүзиўде адымлар усылын өз ишине қамтыйтуғын шешимниң интеграллық көринислери үйрениледи ҳәм бул усыл жәрдеминде жоқары тәртипли сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў усыллары келтирилип, нәтийжеси конкрет алынған мысалларды шешиўде пайдаланылады.

Үшинши параграф ”Сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын шегаралық мәселелер“ деп аталып, онда кешигиўши аргументке ийе сызықлы дифференциаллық теңлемелердиң базы-бир түрлери ушын шегаралық мәселелерди шешиўде адымлар усылы ҳәм шешимниң қәсийетлерине тийкарланған ҳалда шешимди еки шешимниң қосындысы түринде көрсетиў арқалы бундай мәселелердиң шешимин табыў усыллары қарастырылады.

Диссертация жумысының екинши бабы “ Кешигиўши аргументли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер” деп аталып, олда үш параграф көлеминде жазылған. Бул баптың биринши параграфы “Кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселелер” деп аталып, онда кешигиўши аргумент ҳәр түрли формада берилген жыллылық өткизгишлик теңлемелери ушын тийкарғы басланғыш мәселелер қарастырылады ҳәм бундай мәселелер ушын шешимди дүзиў усыллары үйрениледи. Шешим өзгериўшилери ажыралған формада изленеди ҳәм кешигиўши аргумент қатнасқан теңлеме ушын шешим интеграллық көринисте анықланады. Алынған нәтийжелер бойынша көплеп келтирилген мысаллар шешип көрсетиледи.

Екинши параграф "Ушларынан шегараланбаған тардың кешигиўши аргументке ийе биртекли тербелис теңлемеси" деп аталып, онда кешигиўши аргумент ҳәр түрли формада берилген биртекли тардың еркин тербелис теңлемелери ушын тийкарғы басланғыш мәселелер қарастырылып, бундай мәселелер ушын шешимди дүзиў усыллары үйрениледи. Бул жағдайда да шешим өзгериўшилери ажыралған формада изленеди ҳәм кешигиўши аргумент қатнасқан теңлеме ушын шешим интеграллық көринисте анықланады. Алынған нәтийжелер бойынша көплеп мысаллар келтириледи.

Екинши баптың соңғы үшинши параграфы "Кешигиўши аргументке ийе биртекли емес теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер" деп аталып, онда кешигиўши аргументке ийе биртекли емес жыллылық өткизгишлик теңлемеси ҳәм кешигиўши аргументке ийе биртекли тардың мәжбүрий тербелис теңлемелери ушын тийкарғы басланғыш мәселелер қарастырылады ҳәм нәтийжелер конкрет алынған мысалларды шешиўде қолланылады.

І-БАП. Кешигиўши аргументке ийе әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын айырым мәселелер

Кешигиўши аргументке ийе әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер тийкарынан алғанда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, x(\mathrm{t}), x(\mathrm{t} - \tau_1),.., x(\mathrm{t} - \tau_m)),\ \ \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$$

$$x(t) = \varphi(t),\ E_{t_0} = \left[t_0 - \max_i \tau_i,\ t_0\right]$$

көринисте ушырап, өзиниң көп санлы изертлениўлерине ийе.

Бундай мәселелерди шешиўдиң ең қолайлы усылларының бири адымлар усылы болып табылады. Бул усыл бойынша берилген тийкарғы басланғыш мәселениң $t \geq t_0$ ушын шешими избе-из ажыратылған интервалларда бөлек изленеди.

Мысалы бир кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)),\ \ t \geq t_0$$

$$x(t) = \varphi(t),\ E_{t_0} = \left[t_0 - \tau,\ t_0\right]$$

тийкарғы басланғыш мәселе берилген жағдайда адымлар усылы жәрдеминде берилген тийкарғы басланғыш мәселениң $t \geq t_0$ ушын шешими, узынлығы τ ға тең болған интервалларда бөлек изленеди. Усындай интерваллардың дәслепкиси $\left[t_{0,}\ t_0 + \tau\right]$ интервалы болып, бул интервал адымлар усылында биринши адым деп аталады. Берилген мәселениң биринши адымдағы шешими

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \varphi(t-\tau)), & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ x(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў менен анықланады.

Кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиўдиң көп санлы усылларының бири сызықлы биртекли турақлы коэффициентли ҳәм турақлы кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын орынлы болып, бундай теңлемелердиң улыўма көриниси

$$x^{(n)}(t)+\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}\cdot x^{(p)}(t-\tau_j)=0$$

түрине ийе болады, бул жерде $\tau_j>0$, j=1,2,...,m. Бундай теңлемелер көбинесе стационар сызықлы кешигиўши аргументли биртекли дифференциаллық теңлемелер деп аталады ҳәм басланғыш точканың оң жақ дөгерегинде ҳәмме ўақыт шешимге ийе болады. Бундай теңлемелердиң айырым түрлери ушын тийкарғы басланғыш мәселелердиң шешимин

$$\underset{\varphi}{x}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k\,\underset{t^k}{x}(t)+\int_0^{\tau}\underset{t^{n-1}}{x}(t-s)\,y^{(n)}(s)ds$$

түринде излеўге болады, бул жерде $C_k,\ k=0,1,...,n-1$ ҳәм y(t) лар анықланыўы керек болған белгисиз шамалар, ал $\underset{t^k}{x}(t)$ лар берилген теңлемениң $x(t)=t^k,\ t\in E_\tau=[0,\tau]$ басланғыш функциялары бойынша анықланатуғын шешимлери.

Кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлемелер ушын айырым мәселелердиң бири тийкарғы басланғыш мәселелерди изертлеў барысында $t=t_1>t_0$ точкада $x(t_1)=x_1$ шегаралық шәртти қанаатландыратуғын $t_0\le t\le t_1$ аралықтағы үзликсиз шешимди табыў мәселелери болып табылады.

§1. Кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер

Кешигиўши аргументли биринши тәртипли дифференциаллық теңлемелердиң ең көп қолланылатуғын көринислериниң бири

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mathrm{f}(\mathrm{t},x(\mathrm{t}),x(\mathrm{t}-\tau_1),..,x(\mathrm{t}-\tau_m)),\ \ \mathrm{t}\ge \mathrm{t}_0$$

түрине ийе болады, бул жерде қарастырылып атырған мәселе кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлеме болғанлықтан $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_m > 0$ болады, бул жерде теңлемениң оң жағы өзиниң аргументлери бойынша базы-бир областта үзликсиз функция.

Мейли $E_{t_0} = \lfloor t_0 - \max\limits_i \tau_i,\ t_0 \rfloor$ деп белгилейик. Бул көплик берилген мәселе ушын басланғыш көплик болып есапланады ҳәм бул көпликте $x(t) = \varphi(t)$ болатуғын, ал $t \geq t_0$ ушын берилген теңлемени қанаатландыратуғын үзликсиз $x(t)$ шешимди анықлаў мәселеси тийкарғы басланғыш мәселе болып табылады, бул жерде $\varphi(t)$ функциясы алдын ала берилген басланғыш функция деп аталыўшы $t \in E_{t_0}$ ушын үзликсиз функция. Излениўши шешимниң $t = t_0$ точкадағы мәниси ушын тийкарынан $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$ қабыл етиледи. Усы басланғыш мәселе ушын анықланатуғын (1) теңлемениң шешими $\underset{\varphi}{x}(t)$ түринде белгиленеди.

Қарастырылып атырған мәселе ушын басланғыш функция қандайда бир өткерилген эксперимент жоллар менен алынса, ал айырым жағдайларда бул функция кешигиўши аргументке ийе емес басқа бир дифференциаллық теңлемелерди шешиў арқалы анықланады. Сонлықтан, әсиресе жоқары тәртипли кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлемелер ушын басланғыш функциялар түрли формаларда ушырасады.

Мысал ушын кешигиўши аргументке ийе екинши тәртипли

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{x}(\mathrm{t} - \tau), \mathrm{x}'(\mathrm{t}), \mathrm{x}'(\mathrm{t} - \tau)),\ \ \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$$

түриндеги дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселеде $t \geq t_0$ ушын бир рет үзликсиз дифференциалланыўшы $x(t)$ шешимди табыў талап етиледи, соның менен бирге басланғыш E_{t_0} көпликте бул шешим ҳәм оның туўындылары берилген $\varphi_k(t)$ басланғыш функцияларға тең болады деп есапланады, ал $t = t_0$ точкада

$$\varphi_k(t_0) = x^{(k)}(t_0 + 0), \quad k = 0,1$$

теңлигиниң орынланыўы талап етиледи.

Айырым жағдайларда $\varphi_k(t)$ басланғыш функциялар сыпатында бир $\varphi(t)$ функциясы ҳәм оның туўындылары қабыл етиледи:

$$\varphi_k(t) = \varphi^{(k)}(t), \quad k = 0,1 .$$

Солай етип кешигиўши аргументке ийе жоқары тәртипли дифференциаллық теңлемелер ушын басланғыш функциялар сыпатында бир функция ҳәм оның туўындылары алынса, ал айырымларында басланғыш функцияның туўындылары алынатуғын жерде басқа функциялар алынады. Бул нәтийже кешигиўши аргумент t ға ғәрезли болған жағдай ушында, яғный $\tau_k=\tau_k(t)$ ушында орынлы.

Мейли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, x(\mathrm{t}), x(\mathrm{t} - \tau_1),.., x(\mathrm{t} - \tau_m)), \ \ \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$$

$$x(t) = \varphi(t), \ E_{t_0} = \left\lfloor t_0 - \max_i \tau_i, \ \ t_0 \right\rfloor$$

тийкарғы басланғыш мәселе берилген болсын. Бундай мәселелерди шешиўдиң ең қолайлы усылларының бири адымлар усылы болып табылады.

Бул усылдың тийкарғы мазмуны соннан ибарат болып, берилген тийкарғы басланғыш мәселениң $t \geq t_0$ ушын шешими, узынлығы $\min_i \tau_i$ ға тең болған интервалларда бөлек изленеди.

Усындай интерваллардың дәслепкиси $\left\lfloor t_0, t_0 + \min_i \tau_i \right\rfloor$ интервалы болып, бул интервал адымлар усылында биринши адым деп аталады.

Мысалы бир кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \ \ t \geq t_0$$

$$x(t)=\varphi(t),\ E_{t_0}=\left[t_0-\tau,\ t_0\right]$$

тийкарғы басланғыш мәселе берилген болсын.

Адымлар усылы жәрдеминде берилген тийкарғы басланғыш мәселениң $t\geq t_0$ ушын шешими, узынлығы τ ға тең болған интервалларда бөлек изленеди. Усындай интерваллардың дәслепкиси $\left[t_{0,}\ t_0+\tau\right]$ интервалы болып, бул интервал адымлар усылында биринши адым деп аталады. Берилген мәселениң биринши адымдағы шешими

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),\varphi(t-\tau)), & t_0\leq t\leq t_0+\tau\\ x(t_0)=\varphi(t_0)\end{cases}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў менен анықланады.

Белгили усыллардың бири менен бул Коши мәселесиниң $x=x_1(t)$ шешими анықланған болсын. Ендиги мәселе шешимди келеси адымда анықлаў болып табылады. Бул адымдағы шешим

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),x_1(t-\tau)), & t_0+\tau\leq t\leq t_0+2\tau\\ x(t_0+\tau)=x_1(t_0+\tau)\end{cases}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады

Процессти усылайынша даўам етсек, онда n адымдағы шешим, яғный $t_0+(n-1)\tau\leq t\leq t_0+n\tau$ интервалындағы шешим

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),x_{n-1}(t-\tau)), & t_0+(n-1)\tau\leq t\leq t_0+n\tau\\ x(t_0+(n-1)\tau)=x_{n-1}(t_0+(n-1)\tau)\end{cases}$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады, бул жерде $x_{n-1}(t)$ берилген тийкарғы басланғыш мәселениң n-1 адымда табылған шешими.

Мейли, мысал жағдайында

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=2x(t-1),\\ x(t)=t+1, t\in[-1;0]\end{cases}$$

тийкарғы басланғыш мәселе ушын $[0,2]$ аралықта берилген теңлемени қанаатландыратуғын шешимди адымлар усылы жәрдеминде анықлайық.

Биринши адымда шешим $[0,1]$ аралықта изленеди. Бул аралықтағы шешим

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t, \qquad x(0) = 1$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады. Бул Коши мәселесиниң шешими $x(t) = t^2 + 1$ болып, келеси [1,2] адымдағы шешим, енди

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2(t-1)^2 + 2, \quad x(1) = 2$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады.

Бул Коши мәселесиниң шешими

$$x(t) = \frac{2}{3}(t-1)^3 + 2t$$

болып табылады. Солай етип берилген тийкарғы басланғыш мәселениң [0,2] аралықтағы шешими

$$x(t) = \begin{cases} t^2 + 1, & \text{егер } t \in [0;1] \\ \frac{2}{3}(t-1)^3 + 2t, & \text{егер } t \in [1;2] \end{cases}$$

түринде көрсетиледи. Бул усыл тийкарғы басланғыш мәселелердиң шекли аралықтағы $x(t)$ шешимин анықлаўға мүмкиншилик береди. Соның менен бир ўақытта қарастырылып атырған областта f ҳәм φ функциялары үзликсиз болса, онда бул усыл $(t_0, \varphi(t_0))$ точка дөгерегинде шешимниң бар болыўын ҳәм f функциясы кешигиўши аргументке ийе болмаған

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \varphi(t-\tau))$$

теңлемесиниң бирден-бир шешимге ийе болыўы ҳаққындағы қосымша шәртлердиде қанаатландырса, айтайық f функциясы екинши аргумент бойынша Липшиц шәртин қанаатландырса, онда бул тийкарғы басланғыш мәселениң $(t_0, \varphi(t_0))$ точкасы дөгерегинде бирден-бир шешимге ийе болыўында тәмийинлейди.

Мейли енди еки кешигиўши аргументке ийе болған

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{f}(\mathrm{t}, x(\mathrm{t}), x(\mathrm{t} - \tau_1), x(\mathrm{t} - \tau_2)), \ \ \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0 \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \ E_{t_0} = \left[t_0 - \max_i \tau_i, \ t_0 \right], \ \ i = 1,2 ,$$

тийкарғы басланғыш мәселе берилген болсын ҳәм мейли, айтайық $\tau_1 < \tau_2$ болып, $2\tau_1 \geq \tau_2$ болсын. Онда берилген мәселе ушын басланғыш көплик $E_{t_0} = [\ t_0 - \tau_2, t_0\ ]$ болып, оның биринши адымдағы шешими

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \varphi(t - \tau_1), \varphi(t - \tau_2)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1 \\ x(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases} \tag{2}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў менен анықланады. Бул Коши мәселесиниң (1) теңлемеден парқы, оның оң жағы енди кешигиўши аргументке ғәрезли болмай қалады.

Мейли (2) Коши мәселеси $x = x_1(t)$ шешимге ийе болсын. Ендиги мәселе шешимди даўам етиў болып, бул шешимниң даўамы

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x_1(t - \tau_1), \varphi(t - \tau_2)), \quad t_0 + \tau_1 \leq t \leq t_0 + \tau_2 \\ x(t_0 + \tau_1) = x_1(t_0 + \tau_1) \end{cases}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады. Егер бул Коши мәселеси $x = x_2(t)$ шешимге ийе болса, онда ендиги мәселе шешимди және даўам етиў болып, бул шешимниң даўамы

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x_2(t - \tau_1), x_1(t - \tau_2)), \quad t_0 + \tau_2 \leq t \leq t_0 + \tau_1 + \tau_2 \\ x(t_0 + \tau_2) = x_2(t_0 + \tau_2) \end{cases}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў менен анықланады ҳәм тағы басқа.

Мысал ушын, мейли

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t-1) + x(t-2), \ t \geq 0, \\ x(t) = t+1, \ t \in [-2;0] \end{cases}$$

тийкарғы басланғыш мәселеси берилген болып, бул мәселениң шешимин адымлар усылы жәрдеминде анықлаў мәселеси қойылған болсын.

Биринши адымда шешим [0,1] аралықта изленип, ол

$$\frac{dx(t)}{dt} = 3t - 1, \ x(0) = 1$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады. Бул Коши мәселесиниң шешими

$$x = x_1(t) = \frac{3}{2}t^2 - t + 1$$

болып, келеси адымдағы, яғный [1,2] аралықтағы шешим, енди

$$\frac{dx(t)}{dt} = 3(t-1)^2 - (t-1) + 2, \quad x(1) = \frac{3}{2}$$

түриндеги Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм бул шешим

$$x = x_2(t) = (t-1)^3 - \frac{1}{2}(t-1)^2 + 2t - \frac{1}{2}$$

түрине ийе болады.

§2. Сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын шешимниң интеграллық көриниси

Кешигиўши аргументли дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиўдиң қарастырайын деп атырған усылымыз тийкарынан сызықлы биртекли турақлы коэффициентли ҳәм турақлы кешигиўши аргументке ийе дифференциал теңлемелер ушын орынлы болып, бундай теңлемелердиң улыўма көриниси

$$x^{(n)}(t) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} \cdot x^{(p)}(t - \tau_j) = 0 \tag{1}$$

түрине ийе болады, бул жерде $\tau_j > 0$, j=1,2,...,m. Бундай теңлемелер көбинесе стационар сызықлы кешигиўши аргументли биртекли дифференциаллық теңлемелер деп аталады ҳәм ол басланғыш точканың оң жақ дөгерегинде ҳәмме ўақыт шешимге ийе болады.

(1) теңлеме ушын қарастырылайын деп атырған усыл төмендеги еки қәсийетке тийкарланады:

1). Шешимлердиң ерикли турақлылар бойынша

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \underset{\varphi_i}{x}(t) = \underset{\varphi}{x}(t)$$

сызықлы комбинациясы және шешим болып табылады, бул жерде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i$$

соның менен, егерде

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \underset{\varphi_i}{x}(t)$$

қатары жыйнақлы болса, онда бул қәсийет $k \to \infty$ ушында өз күшинде қалады.

2). Егер $S_0 \le S \le S_1$ ушын $\underset{\varphi(t,s)}{x(t,s)}$ функциясы S параметринен үзликсиз ғәрезли болған (1) теңлемениң шешими болса, онда

$$\int_{S_0}^{S_1} \underset{\varphi(t,s)}{x(t,s)} \Phi(s) ds$$

интеграллық функциясыда сол теңлемениң

$$\int_{S_0}^{S_1} \varphi(t,s) \Phi(s) ds$$

басланғыш функцияға ийе болған шешими болып табылады, бул жерде $\varphi(t,s)$ ҳәм $\Phi(s)$ функциялары $S_0 \le S \le S_1$, $t \in E_{t0}$ ушын үзиликсиз функциялар ҳәм $\varphi(t,s)$ функциясы t бойынша n рет үзликсиз дифференциалланыўшы функция. Егерде

$$\int_{S_0}^{\infty_1} \underset{\varphi(t,s)}{x(t,s)} \Phi(s) ds$$

интегралы жыйнақлы ҳәм t бойынша интеграл астында n рет үзликсиз дифференциалланыўшы функция болса, онда бул қәсийет $s_1 \to \infty$ ушында орынлы болады.

Бул қәсийетлерге сүйенген ҳалда (1) теңлемениң шешимин интеграллық көринисте анықлаўға болады. Әпиўайылық ушын бул усылды тиккелей (1) теңлемениң өзине емес, ал оның айырым көринислерине қолланыў жағдайларын көрсетемиз.

Мейли сызықлы биртекли турақлы коэффициентли n тәртипли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t-\tau)}{dt^k}, \quad t \geq \tau \tag{2}$$

дифференциаллық теңлемеси ушын, бул теңлемениң $E_\tau = [0, \tau]$ басланғыш көпликте

$$x(t) = \varphi(t), \; t \in E_\tau = [0, \tau] \tag{3}$$

басланғыш функциясына тең болатуғын шешимин табыў мәселесин қарастырайық. Сызықлы биртекли кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелердиң жоқарыдағы қәсийетлерине тийкарланған ҳалда (2),(3) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \underset{t^k}{x}(t) + \int_0^\tau \underset{t^{n-1}}{x}(t-s) y^{(n)}(s) ds \tag{4}$$

түринде излеймиз, бул жерде $C_k, \; k = 0,1,\ldots,n-1$ ҳәм y(t) лар белгисиз шамалар, ал $\underset{t^k}{x}(t)$ лар (2) теңлемениң $E_\tau = [0, \tau]$ басланғыш көпликте $x(t) = t^k, \; t \in E_\tau = [0, \tau]$ басланғыш функциясына тең болатуғын шешимлери, яғный

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t-\tau)}{dt^k}, \quad t \geq \tau$$

$$x(t) = t^k, \; t \in E_\tau = [0, \tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселелердиң шешимлери. Бул шешимлер дара жағдайда берилген (2),(3) тийкарғы басланғыш мәселени шешиўге тиккелей қолланыўға қарағанда жеңиллеў формада әмелге асырылатуғын адымлар усылы менен табылыўы мүмкин, бул жерде $\underset{t^k}{x}(t) \equiv 0,\ t < 0$ болатуғынлығы бизге (2) теңлеме ушын, айтайық адымлар усылын қолланған ўақытта мәлим.

(4) шешимдеги белгисиз шамаларды анықлаў ушын $t \in E_\tau = [0, \tau]$ болсын деп уйғарамыз. Сонда (4) ден

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_0^t (t-s)^{n-1} y^{(n)}(s)ds$$

болып, бундағы интегралды есапласақ

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k - t^{n-1} y^{(n-1)}(0) - (n-1)t^{n-1} y^{(n-1)}(0) - \ldots - (n-1)!\, y(0) + (n-1)!\, y(t)$$

болады. Соңғы теңликтен салыстырыўлар арқалы белгисиз шамалардың

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!}\varphi(t)\,, \qquad C_k = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)$$

мәнислерин анықлаймыз.

Белгисиз шамалардың табылған бул мәнислерин жоқарыдағы (4) деги орынларына апарып қойсақ берилген (2),(3) тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \underset{t^k}{x}(t) + \int_0^\tau \underset{t^{n-1}}{x}(t-s)\varphi^{(n)}(s)ds \tag{5}$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли екинши тәртипли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = a\,\frac{dx(t-1)}{dt} + bx(t-1),\ \ t \geq 1 \tag{6}$$

дифференциаллық теңлемесиниң басланғыш көпликте

$$x(t) = \varphi(t) = e^t,\ \ t \in E_1 = [0,\, 1] \tag{7}$$

басланғыш функциясына тең болатуғын шешимин анықлаў мәселесин қарастырайық.

(5) ге муўапық (6),(7) тийкарғы басланғыш мәселениң шешими

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \varphi(0)\underset{1}{x}(t) + \varphi'(0)\underset{t}{x}(t) + \int_0^1 \underset{t}{x}(t-s)\varphi''(s)ds$$

түринде изленип, $\varphi(t) = e^t$ екенлигин есапқа алсақ

$$\underset{e^t}{x}(t) = \underset{1}{x}(t) + \underset{t}{x}(t) + \int_0^1 \underset{t}{x}(t-s)e^s ds$$

түрине ийе болады, бул жерде (6) теңлемедеги a ҳәм b коэффициентлери $\underset{1}{x}(t)$ ҳәм $\underset{t}{x}(t)$ шешимлерди анықлаў ўақтында қатнасады.

§3. Сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын шегаралық мәселелер

Мейли сызықлы биртекли турақлы коэффициентли n тәртипли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t-\tau)}{dt^k}, \quad t \geq \tau \tag{1}$$

дифференциаллық теңлемеси ушын, бул теңлемениң $E_\tau = [0, \tau]$ басланғыш көпликте

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in E_\tau = [0, \tau] \tag{2}$$

басланғыш функциясына тең болатуғын ҳәм $t = t_1$ точкада

$$x(t_1) = x_1 \tag{3}$$

шегаралық шәртти қанаатландыратуғын $\tau \le t \le t_1$ аралықтағы үзликсиз шешимди табыў мәселесин қарастырайық.

(1),(2) ҳәм (3) шегаралық мәселениң изленип атырған шешими ушын $\varphi(\tau - 0) = x(\tau + 0)$ теңлигиниң орынланыўы талап етиледи, ал бирақ τ точкада шешимниң сыйпақ (тегис) болыўы талап етилмейди. Егер (1),(2) тийкарғы басланғыш мәселе ушын (3) шегаралық шәртти қанаатландыратуғын шешим бар болса, онда бул мәселе барлық ўақытта адымлар усылы жәрдеминде толық изертленеди.

Ҳақыйқатында (1),(2) тийкарғы басланғыш мәселениң $t \in [\tau, 2\tau]$ аралықтағы, яғный биринши адымдағы шешими бир параметрге ғәрезли болған $x = x_1(t, C)$ көринисте анықланады. Бул шешим

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k \varphi(t-\tau)}{dt^k}, \quad t \ge \tau$$

түриндеги сызықлы биртекли емес дифференциаллық теңлемениң

$$x^{(k)}(\tau) = \varphi^{(k)}(\tau), \; k = 0,1,2,...,n-2$$

шәртин қанаатландыратуғын шешими болып есапланады, ал τ точкада бул шешимниң тегис болыўы талап етилмегенликтен, ол бир параметрге ғәрезли болған ҳалатта қалып қояды.

Екинши адымдағы шешимде ерикли турақлылардың саны, яғный параметрлердиң саны көбеймейди, себеби екинши адымда интеграллаў процессинде пайда болған жаңа ерикли турақлылар бул шешим менен биринши адымдағы табылған шешимниң 2τ точкада тең болыў ҳәм тегис болыў шәртлеринен анықланып кетеди. Атап айтқанда екинши адымдағы шешим

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x_1(t-\tau, C)}{dt^k}, \quad t \ge 2\tau$$

теңлемесиниң

$$x^{(k)}(2\tau) = x_1^{(k)}(2\tau, C), \quad k = 0,1,2,...,n-1$$

шәртин қанаатландыратуғын шешими болып есапланады. Мейли бул шешим $x = x_2(t, C)$ болсын. Процессти даўам етип t_1 точканы өз ишине алатуғын интервалға жетип келемиз. Егер бул интервалдағы шешимди $x = x_m(t, C)$ деп белгилесек, онда С параметри

$$x_m(t_1, C) = x_1$$

теңлигинен анықланады ҳәм солай етип (τ, t_1) аралығында үзликсиз ҳәм тегис болған, ал интервалдың ушларында

$$x^{(k)}(\tau) = \varphi^{(k)}(\tau), \quad x(t_1) = x_1, \quad k = 0,1,2,...,n-2$$

шегаралық шәртлерди қанаатландыратуғын, яғный (1),(2) тийкарғы басланғыш мәселениң (3) шегаралық шәртти қанаатландыратуғын шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли екинши тәртипли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t-1)}{dt} + x(t-1), \;\; t \ge 1$$

дифференциаллық теңлемесиниң басланғыш көпликте

$$x(t) = \varphi(t) = e^t, \;\; t \in E_1 = [0, 1]$$

басланғыш функциясына тең болатуғын ҳәм $t = 3$ те

$$x(3) = \frac{19}{2}e - \frac{34}{3}$$

шегаралық шәртти қанаатландыратуғын шешимин анықлаў мәселесин қарастырайық.

Биринши адымдағы шешим $t \in [1, 2]$ ушын

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2e^{t-1}, \;\; x(1) = e$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$x_1(t) = 2e^{t-1} + Ct + e - C - 2$$

түрине ийе болады.

Екинши адымдағы шешим $t \in [2, 3]$ ушын

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 4e^{t-2} + Ct + e - C - 2,$$

$$x(2) = 3e + C - 2,\ \ x'(2) = 2e + C$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$x_2(t) = 4e^{t-2} + C\frac{t^3}{6} + (e - C - 2)\frac{t^2}{2} + Ct + e - \frac{7}{3}$$

түрине ийе болады.

Енди бул табылған шешимди жоқарыдағы шегаралық шәртке апарып қойсақ $C = 0$ болып, шегаралық шәртти қанаатландыратуғын ҳәр бир адымдағы шешим

$$x_1(t) = 2e^{t-1} + e - 2\,,\quad x_2(t) = 4e^{t-2} + (e-2)\frac{t^2}{2} + e - \frac{7}{3}$$

көринислерине ийе болады.

(1),(2) ҳәм (3) тийкарғы басланғыш мәселеге қойылған шегаралық мәселениң шешимин басқаша жоллар менен де анықлаўға болады. Бундай жоллардың бири сыпатында төмендеги усылды көрип шығамыз. Дәслеп (1) тийкарғы басланғыш мәселениң τ точкада үзликсиз ҳәм тегис болған $x = \underset{\varphi(t)}{x}(t)$ шешимин анықлаймыз. Енди бул шешим параметрге ғәрезли болмай қалады. Кейиншелик (1) теңлемениң $\underset{\varphi_1(t)}{x}(t)$ шешимин анықлаймыз, бул шешим τ точкада үзликсиз, бирақ тегис болыўы шәрт емес, соның ушын $\varphi_1(t)$ басланғыш функция ретинде $\varphi_1(t) \equiv 0,\, t \in E_\tau$ функциясын алып, бул функцияға сәйкес $\underset{\varphi_1(t)}{x}(t)$ шешимди τ точкада $\underset{\varphi_1}{\dot{x}}(\tau + 0) = 1$ шәртин қанаатландыратуғындай етип анықлаймыз.

Онда кешигиўши аргументке ийе сызықлы биртекли дифференциаллық теңлемелердиң шешимлериниң қәсийетлери бойынша $\varphi(t)$ басланғыш функцияға ийе шешимди

$$\underset{\varphi}{x}(t) + C\,\underset{\varphi_1}{x}(t)$$

қосындысы түринде көрсетиўге болады, бул жерде C ерикли турақлы. Бул ерикли турақлы (2) шәрттен, яғный

$$\underset{\varphi}{x}(t_1) + C\underset{\varphi_1}{x}(t_1) = x_1$$

теңлигинен анықланады.

Егер $\underset{\varphi_1}{x}(t_1) \neq 0$ болса, онда ерикли турақлы C бир мәнисли анықланады. Ҳақыйқатында да

$$C = \frac{x_1 - \underset{\varphi}{x}(t_1)}{\underset{\varphi_1}{x}(t_1)}$$

болып (1), (2) ҳәм (3) тийкарғы шегаралық мәселениң шешими

$$x(t) = \underset{\varphi}{x}(t) + \frac{x_1 - \underset{\varphi}{x}(t_1)}{\underset{\varphi_1}{x}(t_1)}\underset{\varphi_1}{x}(t)$$

көриниске ийе болады.

Егер $\underset{\varphi_1}{x}(t_1) = 0$ болса, онда төмендеги еки жағдайдың бири болыўы мүмкин: $\underset{\varphi}{x}(t_1) \neq x_1$ болса, онда (1),(2) ҳәм (3) тийкарғы шегаралық мәселе шешимге ийе емес, ал $\underset{\varphi}{x}(t_1) = x_1$ болса, онда (1),(2) ҳәм (3) тийкарғы шегаралық мәселе

$$x(t) = \underset{\varphi}{x}(t) + C\underset{\varphi_1}{x}(t) \tag{4}$$

түриндеги бир параметрли шешимлер семействосына ийе болады, яғный шексиз көп шешимге ийе болады.

Мысал ушын, мейли екинши тәртипли кешигиўши аргументке ийе

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t-1)}{dt} + x(t-1), \quad t \geq 1$$

дифференциаллық теңлемесиниң басланғыш көпликте

$$x(t) = \varphi(t) = e^t, \ \ t \in E_1 = [0, 1]$$

басланғыш функциясына тең болатуғын ҳәм $t = 3$ те

$$x(3) = \frac{73e - 82}{6}$$

шегаралық шәртти қанаатландыратуғын шешимин усы айтылған усылда шешиў мәселесин қарастырайық. Дәслеп берилген теңлемениң

$$x(t) = \varphi(t) = e^t, \ \ t \in E_1 = [0, 1]$$

басланғыш функциясына сәйкес келиўши ҳәм $t = 1$ точкада үзликсиз ҳәм тегис болатуғын шешимин табамыз.

Биринши адымдағы шешим $t \in [1, 2]$ ушын

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 2e^{t-1}, \ \ x(1) = e, \ x'(1) = e$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$\underset{\varphi}{x_1}(t) = 2e^{t-1} + (e-2)t$$

түрине ийе болады.

Екинши адымдағы шешим $t \in [2, 3]$ ушын

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 4e^{t-2} + (e-2)t$$

$$x(2) = 4e - 4, \ \ x'(2) = 3e - 2$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$\underset{\varphi}{x_2}(t) = 4e^{t-2} + (e-2)\frac{t^3}{6} + (e-2)t + \frac{2e-4}{3}$$

түрине ийе болады.

Енди басланғыш функция ретинде $\varphi_1(t) \equiv 0, \ \ t \in E_1$ функциясын алып берилген теңлемени қайтадан адымлар усылы жәрдеминде шешип шығамыз.

Биринши адымдағы шешим $t \in [1, 2]$ ушын

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0, \ \ x(1) = 0, \ x'(1) = 1$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$\underset{\varphi_1}{x_1}(t) = t - 1$$

түрине ийе болады.

Екинши адымдағы шешим $t \in [2,\ 3]$ ушын

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = t - 1\ ,\quad x(2) = 1,\quad x'(2) = 1$$

Коши мәселесин шешиў арқалы анықланады ҳәм ол

$$\underset{\varphi_1}{x_2}(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{3}$$

түрине ийе болады.

Онда берилген мәселениң шешими (4) формула бойынша

$$x(t) = \underset{\varphi}{x}(t) + C\,\underset{\varphi_1}{x}(t) = 4e^{t-2} + (e-2)\frac{t^3}{6} + (e-2)t + \frac{2e-4}{3} +$$

$$+C\left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{3}\right)$$

түрине ийе болып, бул жерде ерикли турақлы С ны шегаралық шәрт орынланатуғындай етип сайлап аламыз.

$$x(3) = \underset{\varphi}{x}(3) + C\,\underset{\varphi_1}{x}(3) = 4e + (e-2)\frac{9}{2} + 3(e-2) + \frac{2e-4}{3} +$$

$$+C\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{73e-82}{6}$$

Буннан $C = 1$ болып, буны жоқарыдағы орнына қойсақ

$$x(t) = \underset{\varphi}{x}(t) + C\,\underset{\varphi_1}{x}(t) = 4e^{t-2} + (e-2)\frac{t^3}{6} + (e-2)t + \frac{2e-4}{3} +$$

$$+\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{3} = 4e^{t-2} + (e-1)\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + (e-1)t + \frac{2e-5}{3}$$

яғный

$$x(t)=4e^{t-2}+(e-1)\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+(e-1)t+\frac{2e-5}{3}$$

болады.

II-БАП. Кешигиўши аргументли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер

Кешигиўши аргументке ийе дара туўындылы дифференциаллық теңлемелердиң ең көп тарқалған ҳәм изертленген түри ўақыт бойынша тек бир кешигиўши аргументке ийе болған

$$u_t(t,x)=f\big(t,\ u(t,x),\ u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u(t-\tau,x), u_x(t-\tau,x),u_{xx}(t-\tau,x)\big),\ \ \tau>0 \tag{1}$$

түриндеги дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер болып табылады. Бундай теңлемелер ушын E_τ басланғыш көпликте анықланған $\varphi(t,x)$ басланғыш функциялары ерикли түрде ямаса x қа қарата қойылған базы-бир талапларды қанаатландырыў шәрти менен сайлап алынады. Басланғыш көпликте берилген $\varphi(t,x)$ басланғыш функциясы менен сәйкес келиўши, ал $t\geq\tau$ ушын берилген (1) теңлемени қанаатландыратуғын дифференциалланыўшы $u(t,x)$ функциясын табыў мәселеси әдеттеги дифференциаллық теңлемелер сыяқлы дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушында тийкарғы басланғыш мәселе деп аталады. Тийкарғы басланғыш мәселеде басланғыш $\varphi(t,x)$ функциясынан $u(t,x)$ функциясына өтиў үзликсиз әмелге асырылады.

Егер $\tau \geq \tau_0 > 0$ ушын адымлар усылы жарамлы болса, онда тийкарғы басланғыш мәселе ҳәр бир адымда кешигиўши аргументке ийе емес

$$u_t(t,x) = f\big(t,\, u(t,x),\, u_x(t,x), u_{xx}(t-\tau,x),\, u_k(t-\tau,x),$$
$$u_{kx}(t-\tau,x), u_{kxx}(t-\tau,x))$$

теңлемеси ушын Коши мәселесине алып келинеди, бул жерде $u_k(t,x)$ берилген тийкарғы басланғыш мәселениң өткен k - адымдағы шешими.

Дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиўде адымлар усылы айтарлықтай жақсы нәтийже бере бермейди. Себеби ҳәр бир адымда пайда болатуғын Коши мәселесин шешиў аңсатлық пенен әмелге асырыла бермейди. Бундай жағдайда келип шығатуғын машқалалардан қутылыў мақсетинде кешигиўши аргументли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер көбинесе өзгериўшилерди айырыў усылы, яғный Фурье усылы жәрдеминде шешиледи.

Бул жағдайда өзгериўшилерди айырыў усылы кешигиўши аргументке ийе емес дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын қандай избе изликте алып барылса, кешигўши аргументке ийе дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушында сол избе изликте алып барылады. Бирақ өзгериўшилери ажыралғаннан соң кешигиўши аргумент қатнасатуғын теңлемени шешиў, енди тийкарғы басланғыш мәселени шешиўге алып келинеди.

Бул тийкарғы басланғыш мәселени адымлар усылы менен шешиўге болады, бирақ оның адымлар саны айтарлықтай көп болмаўы керек. Көпшилик ўақытлары бул басланғыш мәселениң шешимин интеграллық көринисте излеў қолайлы болады. Бул жағдайда адымлар усылы қолланылады, бирақ басланғыш функциялардың әпиўайы көринисте сайлап алыныўы себепли, бул адымлар усылы тез ҳәм жеңил формада әмелге асырылады.

Кешигиўши аргументке ийе биринши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелерден басқа, екинши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелерде көплеп ушырасады. Бундай теңлемелердиң улыўма көриниси

$$\begin{gathered} u_{tt}(t,x) = f\big(t,\, u(t,x), u_t(t,x)\,, u_x(t,x), u_{xx}(t,x),\, u(t-\tau,x), \\ u_t(t-\tau,x)\,, u_x(t-\tau,x)\ , u_{xx}(t-\tau,x)\big), \quad \tau > 0 \end{gathered} \tag{2}$$

түрине ийе болады. Бул жағдай ушында басланғыш функция E_τ көпликте берилип, $u(t,x) = u_k(t,x)$ көринисине ийе болады ҳәм пайда болатуғын тийкарғы басланғыш мәселени шешиў (1) теңлеме жағдайындағы сыяқлы алып барылады.

§1. Кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселелер

Мейли кешигиўши аргументке ийе болған, биртекли

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t-\tau,x), \quad t \ge \tau \tag{1}$$

жыллылықтың таралыў теңлемесин қарастырайық. Айтайық бул теңлеме ушын басланғыш $E_\tau = [0,\tau]$ көплигинде

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau \tag{2}$$

басланғыш функциясы берилген болсын, бул жерде $\tau > 0$ ҳәм $-\infty < x < \infty$. Енди усы берилген тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин анықлаў мәселесин қарастырайық.

Шешимди өзгериўшилери ажыралған

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = T(t)\cdot X(x) \tag{3}$$

көбеймеси түринде излеймиз. Көбеймедеги $T(t)$ ҳәм $X(x)$ функцияларын анықлаў ушын буны (1) теңлемедеги орынларына апарып қоямыз ҳәм

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t-\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

қатнасынан

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad -\infty<x<\infty \tag{4}$$

$$T'(t)+(\lambda a)^2T(t-\tau)=0, \ \ t\geq\tau \tag{5}$$

теңлемелерине ийе боламыз. (4) теңлемениң шешими λ ге ғәрезли болғанлықтан, оның шешимин

$$X_\lambda(x)=A(\lambda)Cos\lambda x+B(\lambda)Sin\lambda x$$

түринде көрсетиўге болады.

Егер (5) ниң шешимин $T_\lambda(t)$ деп белгилейтуғын болсақ, онда (3) ден

$$u_\lambda(t,x)=T_\lambda(t)\cdot X_\lambda(x)$$

ямаса

$$u_\lambda(t,x)=T_\lambda(t)\cdot[A(\lambda)Cos\lambda x+B(\lambda)Sin\lambda x]$$

түриндеги (1) теңлемениң айырым дара жағдайлардағы шешимлерине ийе боламыз. Соның менен бирге

$$T_\lambda(t)\cdot A(\lambda)=T_c(t,\lambda)$$

ҳәм

$$T_\lambda(t)\cdot B(\lambda)=T_s(t,\lambda)$$

белгилеўлерин киритсек, онда жоқарыдағы шешимди

$$u_\lambda(t,x)=T_c(t,\lambda)Cos\lambda x+T_s(t,\lambda)Sin\lambda x$$

түринде көрсетиўге болады. Буннан λ бойынша интеграл алып (1) теңлемениң шешимин

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x+T_s(t,\lambda)Sin\lambda x]d\lambda \tag{6}$$

түринде белгисиз $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер жәрдеминде толық көрсетиўге болады. Бул белгисиз коэффициентлер төмендегише анықланады.

Мейли $t \in [0,\tau]$ болсын. Онда (6) дан

$$\varphi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_c(t,\lambda) Cos\lambda x + \varphi_s(t,\lambda) Sin\lambda x] d\lambda$$

теңлигине ийе боламыз. бул жерде $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лар (5) теңлеме ушын басланғыш функциялар. Бул басланғыш функциялар төмендегише анықланады

$$\varphi_c(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x) Cos\lambda\, xdx, \qquad \varphi_s(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x) Sin\lambda\, xdx .$$

Табылған $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң бул мәнислерин пайдалансақ, онда (6) дағы $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лар (5) теңлеме бойынша сәйкес

$$\begin{aligned} &T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-\tau) = 0, \quad t \ge \tau \\ &T_\lambda(t) = \varphi_c(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau] \end{aligned} \tag{7}$$

ҳәм

$$\begin{aligned} &T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-\tau) = 0, \quad t \ge \tau \\ &T_\lambda(t) = \varphi_s(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau] \end{aligned} \tag{8}$$

тийкарғы басланғыш мәселелердиң шешимлери болып есапланады.

(7) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин

$$T_c(t,\lambda) = \underset{\varphi_c(t,\lambda)}{T}(t) = \underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot\varphi_c(0,\lambda) + \int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi'_c(s,\lambda)ds$$

түринде көрсетиўге болады, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ функциясы

$$\begin{aligned} &T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-\tau) = 0, \quad t \ge \tau \\ &T_\lambda(t) = 1, \quad t \in [0,\tau] \end{aligned}$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселениң шешими. Бул шешимди бизге таныс адымлар усылы жәрдеминде анықлаўға болады. Қысқалық ушын бул шешимди

$$T_{\lambda_1}(t)=\begin{cases} 0, & \text{егер} \quad t\in[-\tau,0] \\ 1, & \text{егер} \quad t\in[0,\tau] \\ (\lambda a)^2(t-\tau)+1, & \text{егер} \quad t\in[\tau,2\tau] \\ \ldots, \quad \ldots, & \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots, \end{cases}$$

түринде көрсетиў алдағы ўақытлары қолланыў барысында өз қолайлықларына ийе.

Тап усындай (8) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_s(t,\lambda)}{T(t)}=T_{\lambda_1}(t)\cdot\varphi_s(0,\lambda)+\int_0^{\tau}T_{\lambda_1}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds$$

түринде көрсетиўге болады, бул жерде $T_{\lambda_1}(t)$ функциясы жоқарыдағы көринисте анықланады.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (1),(2) жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[T_{\lambda_1}(t)\cdot\varphi_c(0,\lambda)+\int_0^{\tau}T_{\lambda_1}(t-s)\cdot\varphi_c'(s,\lambda)ds\right]Cos\lambda xd\lambda+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[T_{\lambda_1}(t)\cdot\varphi_s(0,\lambda)+\int_0^{\tau}T_{\lambda_1}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds\right]\sin\lambda xd\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын

$$u_t(t,x)=a^2u_{xx}(t-1,x), \quad t\geq 1$$

$$u(t,x)=e^{3t-2x}, \quad t\in[0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық. Шешимди (6) формула жәрдеминде

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x+T_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

түринде излеймиз. Бул жерде $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер төмендегише анықланады. Мейли $t\in[0,1]$ болсын. Онда

$$e^{3t-2x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x + \varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

теңлигине ийе боламыз, бул жерде $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ функциялар сәйкес төмендегише анықланады

$$\varphi_c(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{3t-2x}Cos\lambda\,xdx=\frac{1}{\pi}e^{3t}\int_{0}^{\infty}e^{-2x}Cos\lambda\,xdx=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

$$\varphi_s(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{3t-2x}\sin\lambda\,xdx=\frac{1}{\pi}e^{3t}\int_{0}^{\infty}e^{-2x}\sin\lambda\,xdx=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

Табылған $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң бул мәнислерин пайдалансақ, онда $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лар сәйкес төмендегише

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-1)=0,\quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t)=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad t\in[0,1]$$

ҳәм

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-1)=0,\quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t)=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad t\in[0,1]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы есапланады ҳәм сәйкес төмендегише көринислерге ийе болады

$$T_c(t,\lambda)=\underset{\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)}=\frac{\underset{1}{2T_\lambda(t)}}{\pi(4+\lambda^2)}+\frac{6}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1\underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot e^{3s}ds$$

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)}=\frac{\underset{1}{\lambda T_\lambda(t)}}{\pi(4+\lambda^2)}+\frac{3\lambda}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1\underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot e^{3s}ds$$

бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ функциясы

$$T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-1) = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = 1, \ t \in [0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселениң шешими. Бул шешимди адымлар усылы жәрдеминде анықланып төмендегише көрсетиўге болады

$$\underset{1}{T_\lambda}(t) = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad \mathrm{t} \in [\text{-}1,0] \\ 1, & \text{егер} \quad \mathrm{t} \in [0,1] \\ (\lambda a)^2 (t-1) + 1, & \text{егер} \quad \mathrm{t} \in [1,2] \\ \ldots, \ \ldots, & \ldots, \ \ldots, \ \ldots, \end{cases}$$

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин жоқарыдағы орынларына апарып қойып мысалда қарастырылып атырған жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)} = \frac{2}{\pi(4+\lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s) \cdot e^{3s} ds \right] Cos\lambda x d\lambda +$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi(4+\lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s) \cdot e^{3s} ds \right] \sin \lambda x d\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Егер жыллылықтың таралыў теңлемеси

$$u_t(t,x) = a^2 \left[u_{xx}(t,x) + u_{xx}(t-\tau, x) \right], \quad t \ge \tau \tag{9}$$

түрине ийе болса, онда

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau$$

басланғыш функция ушын шешим (3) көринисте изленип, ал ондағы $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ функциялары сәйкес

$$T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 \left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-\tau) \right] = 0, \quad t \ge \tau$$

$$T_\lambda(t) = \varphi_c(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_c(t,\lambda)=\underset{\varphi_c(t,\lambda)}{T(t)}=\frac{1}{2}\left[\varphi_c(0,\lambda)+\varphi_c(\tau,\lambda)\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{1}{2}\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_c'(s,\lambda)ds$$

түриндеги ҳәм

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2\left[T_\lambda(t)+T_\lambda(t-\tau)\right]=0,\quad t\ge\tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_s(t,\lambda)}{T(t)}=\frac{1}{2}\left[\varphi_s(0,\lambda)+\varphi_s(\tau,\lambda)\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{1}{2}\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds$$

түриндеги шешимлери арқалы анықланады.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (8) жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left[\varphi_c(0,\lambda)+\varphi_c(\tau,\lambda)\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_c'(s,\lambda)ds\right]Cos\lambda xd\lambda+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left[\varphi_s(0,\lambda)+\varphi_s(\tau,\lambda)\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds\right]\sin\lambda xd\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын

$$u_t(t,x)=a^2\left[u_{xx}(t,x)+u_{xx}(t-1,x)\right],\quad t\ge 1$$

$$u(t,x)=e^{3t-2x},\quad t\in[0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық. Бул мәселениңде шешимин

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x+T_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

түринде излеймиз. Бул жерде $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер бурынғысынша

$$e^{3t-2x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x + \varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

теңлигинен анықланатуғын

$$\varphi_c(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t-2x} Cos\lambda\, xdx = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

$$\varphi_s(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t-2x} \sin\lambda\, xdx = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

$\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ функциялары жәрдеминде

$$T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-1)\right] = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t \in [0,1]$$

ҳәм

$$T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-1)\right] = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t \in [0,1]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерин шешиў арқалы анықланады ҳәм сәйкес төмендегише көринислерге ийе болады

$$T_c(t,\lambda) = \underset{\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{1+e^3}{\pi(4+\lambda^2)}\underset{1}{T_\lambda(t)}\cdot + \frac{3}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda(t-s)}\cdot e^{3s}ds$$

$$T_s(t,\lambda) = \underset{\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{1+e^3}{\pi(4+\lambda^2)}\right]\underset{1}{T_\lambda(t)}\cdot + \frac{3\lambda}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda(t-s)}\cdot e^{3s}ds$$

Буларды (6) дағы орынларына апарып қойып

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1+e^3}{\pi(4+\lambda^2)}\underset{1}{T_\lambda(t)}\cdot + \frac{3}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda(t-s)}\cdot e^{3s}ds\right]Cos\lambda xd\lambda +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1+e^3}{\pi(4+\lambda^2)}\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{3\lambda}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1\underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot e^{3s}ds\right]\sin\lambda x d\lambda$$

түриндеги шешимге ийе боламыз, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ функциясы

$$T'_\lambda(t)+(\lambda a)^2\left[T_\lambda(t)+T_\lambda(t-1)\right]=0,\quad t\geq 1$$

$$T_\lambda(t)=1,\ \ t\in[0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселениң шешими. Бул шешим адымлар усылы жәрдеминде анықланып төмендегише көриниске ийе болады

$$\underset{1}{T_\lambda}(t)=\begin{cases}-1, & \text{егер}\quad t\in[-1,0]\\ 1, & \text{егер}\quad t\in[0,1]\\ 2e^{(\lambda a)^2(1-t)}-1, & \text{егер}\quad t\in[1,2]\\ \dots,\ \dots, & \dots,\ \dots,\ \dots,\end{cases}$$

Егер жыллылықтың таралыў теңлемеси

$$u_t(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+b^2u_{xx}(t-\tau,x),\quad t\geq\tau \tag{10}$$

түрине ийе болса, онда

$$u(t,x)=\varphi(t,x),\quad t\in E_\tau$$

басланғыш функция ушын шешим және (3) көринисте изленип, ал $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ функциялары сәйкес

$$T'_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\geq\tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_c(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_c(t,\lambda)=\underset{\varphi_c(t,\lambda)}{T}(t)=\frac{a^2\varphi_c(\tau,\lambda)+b^2\varphi_c(0,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau\underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi'_c(s,\lambda)ds$$

түриндеги ҳәм

$$T'_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\geq\tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_s(t,\lambda)}{T(t)}=\frac{a^2\varphi_s(\tau,\lambda)+b^2\varphi_s(0,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds$$

түриндеги шешимлери арқалы анықланады

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (10) жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{a^2\varphi_c(\tau,\lambda)+b^2\varphi_c(0,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_c'(s,\lambda)ds\right]Cos\lambda xd\lambda+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{a^2\varphi_s(\tau,\lambda)+b^2\varphi_s(0,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\varphi_s'(s,\lambda)ds\right]\sin\lambda xd\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын

$$u_t(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+b^2u_{xx}(t-1,x),\quad t\ge 1$$

$$u(t,x)=e^{3t-2x},\quad t\in[0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық.

$\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ функциялары бурынғысынша

$$\varphi_c(t,\lambda)=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad \varphi_s(t,\lambda)=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

көринислерине ийе болып, бул функциялар жәрдеминде дүзилген

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-1)=0,\quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t)=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad t\in[0,1]$$

ҳәм

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-1)=0,\quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t)=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad t\in[0,1]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерин шешиў арқалы

$$T_c(t,\lambda) = \underset{\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{2a^2e^3+2b^2}{\pi(4+\lambda^2)(a^2+b^2)}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot + \frac{6b^2}{a^2+b^2}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\frac{e^{3s}}{\pi(4+\lambda^2)}ds$$

$$T_s(t,\lambda) = \underset{\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{\lambda a^2e^3+\lambda b^2}{\pi(4+\lambda^2)(a^2+b^2)}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot + \frac{3\lambda b^2}{a^2+b^2}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\frac{e^{3s}}{\pi(4+\lambda^2)}ds$$

табылған $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул мәнислерин орынларына апарып қойып

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2a^2e^3+2b^2}{\pi(4+\lambda^2)(a^2+b^2)}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot + \frac{6b^2}{a^2+b^2}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\frac{e^{3s}}{\pi(4+\lambda^2)}ds\right]Cos\lambda x d\lambda +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\lambda a^2e^3+\lambda b^2}{\pi(4+\lambda^2)(a^2+b^2)}\underset{1}{T_\lambda}(t)\cdot + \frac{3\lambda b^2}{a^2+b^2}\int_0^1 \underset{1}{T_\lambda}(t-s)\cdot\frac{e^{3s}}{\pi(4+\lambda^2)}ds\right]\sin\lambda x d\lambda$$

түриндеги шешимге ийе боламыз, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ функциясы

$$T'_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t) + (\lambda b)^2 T_\lambda(t-1) = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = 1, \quad t \in [0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселениң жоқарыдағыдай усылда анықланатуғын шешими.

§2. Ушларынан шегараланбаған тардың кешигиўши аргументке ийе биртекли тербелис теңлемеси

Мейли кешигиўши аргументке ийе болған, ушларынан шегараланбаған биртекли тардың

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t-\tau, x), \quad t \geq \tau \tag{1}$$

еркин тербелис теңлемесин қарастырайық. Айтайық бул теңлеме ушын басланғыш $E_\tau = [0,\tau]$ көплигинде

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau \tag{2}$$

басланғыш функциясы берилген болсын, бул жерде $\tau > 0$ ҳәм $-\infty < x < \infty$.

Мейли енди усы берилген тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин анықлаў мәселесин қарастырайық. Шешимди өзгериўшилери ажыралған

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = T(t)\cdot X(x) \tag{3}$$

көбеймеси түринде излеймиз. Көбеймедеги $T(t)$ ҳәм $X(x)$ функцияларын анықлаў ушын буны (1) теңлемедеги орынларына апарып қоямыз ҳәм

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t-\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

қатнасынан

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

$$T''(t) + (\lambda a)^2 T(t-\tau), \ \ t \geq \tau \tag{5}$$

теңлемелерине ийе боламыз. (4) теңлемениң шешими λ ге ғәрезли болғанлықтан, оның шешимин

$$X_\lambda(x) = A(\lambda)Cos\lambda x + B(\lambda)Sin\lambda x$$

түринде көрсетиўге болады.

Егер (5) ниң шешимин $T_\lambda(t)$ деп белгилейтуғын болсақ, онда (3) ден

$$u_\lambda(t,x) = T_\lambda(t)\cdot X_\lambda(x)$$

ямаса

$$u_\lambda(t,x) = T_\lambda(t)\cdot[A(\lambda)Cos\lambda x + B(\lambda)Sin\lambda x]$$

түриндеги (1) теңлемениң айырым дара жағдайлардағы шешимлерине ийе боламыз. Соның менен бирге

$$T_\lambda(t)\cdot A(\lambda) = T_c(t,\lambda)$$

ҳәм

$$T_\lambda(t)\cdot B(\lambda) = T_s(t,\lambda)$$

белгилеўлерин киритсек, онда жоқарыдағы шешимди

$$u_\lambda(t,x) = T_c(t,\lambda)Cos\lambda x + T_s(t,\lambda)Sin\lambda x$$

түринде көрсетиўге болады. Буннан λ бойынша интеграл алып (1) теңлемениң шешимин

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty}[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x + T_s(t,\lambda)Sin\lambda x]d\lambda \qquad (6)$$

түринде белгисиз $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер жәрдеминде толық көрсетиўге болады. Бул белгисиз коэффициентлер төмендегише анықланады.

Мейли $t\in[0,\tau]$ болсын. Онда (6) дан

$$\varphi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x + \varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x]d\lambda$$

теңлигине ийе боламыз, бул жерде $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лар (5) теңлеме ушын басланғыш функциялар. Бул басланғыш функциялар төмендегише анықланады

$$\varphi_c(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x)Cos\lambda xdx\,, \qquad \varphi_s(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x)Sin\lambda xdx\,.$$

Табылған $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң бул мәнислерин пайдалансақ, онда (6) дағы $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лер (5) теңлеме бойынша сәйкес

$$\begin{aligned}&T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau\\&T_\lambda(t)=\varphi_c(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]\end{aligned}\tag{7}$$

ҳәм

$$\begin{aligned}&T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau\\&T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]\end{aligned}\tag{8}$$

тийкарғы басланғыш мәселелердиң шешимлери болып есапланады.

(7) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин

$$T_c(t,\lambda)=\underset{\varphi_c(t,\lambda)}{T(t)}=\underset{1}{T_\lambda}(t)\varphi_c(0,\lambda)+\underset{t}{T_\lambda}(t)\varphi_c^{/}(0,\lambda)+\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_c{}^{//}(s,\lambda)ds$$

түринде көрсетиўге болады, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ ҳәм $\underset{t}{T_\lambda}(t)$ функциялары сәйкес

$$\begin{aligned}&T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau\\&T_\lambda(t)=1,\quad t\in[0,\tau]\end{aligned}$$

ҳәм

$$\begin{aligned}&T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau\\&T_\lambda(t)=t,\quad t\in[0,\tau]\end{aligned}$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселелердиң шешими. Бул шешимди қысқалық ушын сәйкес

$$\underset{1}{T_\lambda}(t)\equiv\begin{cases}0,\quad егер\ -\tau\le t\le 0\\ 1,\quad егер\quad 0\le t\le\tau\\ 1+\dfrac{1}{2}(\lambda a)^2(t^2-\tau^2),\quad егер\quad \tau\le t\le 2\tau\\ --//--//--//--//--//--\end{cases}$$

ҳәм

$$T_{\underset{t}{k}}(t) \equiv \begin{cases} 0, & егер \quad -\tau \le t \le 0 \\ t, & егер \quad 0 \le t \le \tau \\ \tau + \frac{1}{6}(\lambda a)^2 (t^3 - \tau^3), & егер \quad \tau \le t \le 2\tau \\ --//--//--//--//--//-- & \end{cases}$$

түринде аңлатыўға болады. Тап усындай (8) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин

$$T_s(t,\lambda) = \underset{\varphi_s(t,\lambda)}{T(t)} = \underset{1}{T_\lambda}(t)\varphi_s(0,\lambda) + \underset{t}{T_\lambda}(t)\varphi_s^{/}(0,\lambda) + \int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_s^{//}(s,\lambda)ds$$

түринде көрсетиўге болады, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ ҳәм $\underset{t}{T_\lambda}(t)$ функциялары сәйкес жоқарыдағы көринислерде анықланады.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (1),(2) жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t)\varphi_c(0,\lambda) + \underset{t}{T_\lambda}(t)\varphi_c^{/}(0,\lambda) + \int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_c^{//}(s,\lambda)ds\right] Cos\lambda x d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t)\varphi_s(0,\lambda) + \underset{t}{T_\lambda}(t)\varphi_s^{/}(0,\lambda) + \int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_s^{//}(s,\lambda)ds\right] \sin\lambda x d\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке биртекли тардың еркин тербелис теңлемеси ушын

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t-1,x), \quad t \ge 1$$

$$u(t,x) = e^{3t-2x}, \quad t \in [0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық. Шешимди (6) формула жәрдеминде

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x + T_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

түринде излеймиз. Бул жерде $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер төмендегише анықланады. Мейли $t\in[0,1]$ болсын. Онда

$$e^{3t-2x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x + \varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

теңлигине ийе боламыз, бул жерде $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ функциялар сәйкес төмендегише анықланады

$$\varphi_c(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t-2x}Cos\lambda\, xdx = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

$$\varphi_s(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3t-2x}\sin\lambda\, xdx = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

Табылған $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң бул мәнислерин пайдалансақ, онда $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лер сәйкес төмендегише

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-1) = 0, \quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t\in[0,1]$$

ҳәм

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-1) = 0, \quad t\ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t\in[0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы

$$T_c(t,\lambda) = \frac{2}{\pi(4+\lambda^2)}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\underset{t}{T_\lambda}(t) + 9\int_0^1 \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds\right]$$

$$T_s(t,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(4+\lambda^2)}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\underset{t}{T_\lambda}(t) + 6\int_0^1 \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds\right]$$

көринислеринде анықланады. Бул жерде

$$T_{\underset{1}{\lambda}}(t) \equiv \begin{cases} 0, & егер\ -1 \le t \le 0 \\ 1, & егер\ \ 0 \le t \le 1 \\ 1+\dfrac{1}{2}(\lambda a)^2(t^2-1), & егер\ \ 1 \le t \le 2 \\ --//--//--//--//--//-- \end{cases}$$

ҳәм

$$T_{\underset{t}{k}}(t) \equiv \begin{cases} 0, & егер\ -1 \le t \le 0 \\ t, & егер\ \ 0 \le t \le 1 \\ 1+\dfrac{1}{6}(\lambda a)^2(t^3-1), & егер\ \ 1 \le t \le 2 \\ --//--//--//--//--//-- \end{cases}$$

Егер биртекли тардың тербелис теңлемеси

$$u_{tt}(t,x) = a^2\left[u_{xx}(t,x) + u_{xx}(t-\tau,x)\right], \quad t \ge \tau \tag{9}$$

түрине ийе болса, онда

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau$$

басланғыш функция ушын шешим (6) көриниcте изленип, ал ондағы $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ функциялары сәйкес

$$T''_\lambda(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-\tau)\right] = 0, \quad t \ge \tau$$

$$T_\lambda(t) = \varphi_c(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_c(t,\lambda) = \underset{\varphi_c(t,\lambda)}{T}(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_c(0,\lambda) + \varphi_c(\tau,\lambda) - \tau\varphi'_c(\tau,\lambda)\right]T_{\underset{1}{\lambda}}(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi_c(0,\lambda) + \varphi'_c(\tau,\lambda)\right]T_{\underset{t}{\lambda}}(t) + \frac{1}{2}\int_0^\tau T_{\underset{t}{\lambda}}(t-s)\varphi''_c(s,\lambda)ds$$

түриндеги ҳәм

$$T''_\lambda(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-\tau)\right] = 0, \quad t \ge \tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_s(t,\lambda)}{T(t)}=\frac{1}{2}\left[\varphi_s(0,\lambda)+\varphi_s(\tau,\lambda)-\tau\varphi_s'(\tau,\lambda)\right]\underset{1}{T_\lambda}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi_s(0,\lambda)+\varphi_s'(\tau,\lambda)\right]\underset{t}{T_\lambda}(t)+\frac{1}{2}\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_s''(s,\lambda)ds$$

түриндеги шешимлери арқалы анықланады, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ ҳәм $\underset{t}{T_\lambda}(t)$ функциялары сәйкес

$$T_\lambda''(t)+(\lambda a)^2\left[T_\lambda(t)+T_\lambda(t-\tau)\right]=0,\quad t\geq\tau$$

$$T_\lambda(t)=1,\quad t\in[0,\tau]$$

ҳәм

$$T_\lambda''(t)+(\lambda a)^2\left[T_\lambda(t)+T_\lambda(t-\tau)\right]=0,\quad t\geq\tau$$

$$T_\lambda(t)=t,\quad t\in[0,\tau]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселелердиң

$$\underset{1}{T_\lambda}(t)\equiv\begin{cases}-1, & \text{егер } -\tau\leq t\leq 0\\ 1, & \text{егер } 0\leq t\leq\tau\\ \dfrac{2\cos\lambda at}{\cos\lambda a\tau}-1, & \text{егер } \tau\leq t\leq 2\tau\\ --//--//--//--//--//--\end{cases}$$

ҳәм

$$\underset{t}{T_k}(t)\equiv\begin{cases}-t, & \text{егер } -\tau\leq t\leq 0\\ t, & \text{егер } 0\leq t\leq\tau\\ \dfrac{2}{\lambda a}\sin\lambda at+\left(\dfrac{2\tau}{\cos\lambda a\tau}-\dfrac{2tg\lambda a\tau}{\lambda a}\right)\cos\lambda at-t, & \text{егер } \tau\leq t\leq 2\tau\\ --//--//--//--//--//--\end{cases}$$

түринде аңлатылатуғын шешимлери.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (9) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке биртекли тардың еркин тербелис теңлемеси ушын

$$u_{tt}(t,x) = a^2\left[u_{xx}(t,x) + u_{xx}(t-1,x)\right], \quad t \ge 1$$

$$u(t,x) = e^{3t-2x}, \quad t \in [0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселени қарастырайық.

$$\varphi_c(t,\lambda) = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad \varphi_s(t,\lambda) = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

функциялары жәрдеминде

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-1)\right] = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t \in [0,1]$$

ҳәм

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2\left[T_\lambda(t) + T_\lambda(t-1)\right] = 0, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad t \in [0,1]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерин шешиў арқалы төмендегилерди анықлаймыз

$$T_c(t,\lambda) = \underset{\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{1}{\pi(4+\lambda^2)}\left[1 + e^{3\tau} - 3\tau e^{3\tau}\right]\underset{1}{T_\lambda}(t) +$$

$$+\frac{1}{\pi(4+\lambda^2)}\left[1 + 3e^{3\tau}\right]\underset{t}{T_\lambda}(t) + \frac{9}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds$$

$$T_s(t,\lambda) = \underset{\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)} = \frac{\lambda}{2\pi(4+\lambda^2)}\left[1 + e^{3\tau} - 3\tau\, e^{3\tau}\right]\underset{1}{T_\lambda}(t) +$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi(4+\lambda^2)}\left[1+3e^{3\tau}\right]\underset{t}{T_\lambda}(t)+\frac{9\lambda}{2\pi(4+\lambda^2)}\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds$$

Буларды (6) дағы орынларына апарып қойып изленип атырған шешимге ийе боламыз.

Егер биртекли тардың тербелис теңлемеси

$$u_{tt}(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+b^2u_{xx}(t-\tau,x),\quad t\ge\tau \tag{10}$$

түрине ийе болса, онда $u(t,x)=\varphi(t,x),\quad t\in E_\tau$ басланғыш функция ушын шешим (6) көринисте изленип, ондағы $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ функциялары сәйкес

$$T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_c(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_c}{T_\lambda}(t)=\frac{b^2\varphi_c(0,\lambda)+a^2\varphi_c(t,\lambda)-a^2\tau\varphi_c^{/}(\tau,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)+$$

$$+\frac{b^2\varphi_c(0,\lambda)+a^2\varphi_c^{/}(\tau,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{t}{T_\lambda}(t)+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_c^{//}(s,\lambda)ds$$

түриндеги ҳәм

$$T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau$$

$$T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселесиниң

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\varphi_s}{T_\lambda}(t)=\frac{b^2\varphi_s(0,\lambda)+a^2\varphi_s(\tau,\lambda)-a^2\tau\varphi_s^{/}(\tau,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_\lambda}(t)+$$

$$+\frac{b^2\varphi_s(0,\lambda)+a^2\varphi_s^{/}(\tau,\lambda)}{a^2+b^2}\underset{t}{T_\lambda}(t)+\frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^\tau \underset{t}{T_\lambda}(t-s)\varphi_s^{//}(s,\lambda)ds$$

түриндеги шешимлери арқалы анықланады, бул жерде $\underset{1}{T_\lambda}(t)$ ҳәм $\underset{t}{T_\lambda}(t)$ функциялары

$$T''_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t)+(\lambda b)^2T_\lambda(t-\tau)=0,\quad t\ge\tau$$

$$T_\lambda(t) = 1, \quad t \in [0, \tau]$$

ҳәм

$$T''_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t) + (\lambda b)^2 T_\lambda(t-\tau) = 0, \quad t \geq \tau$$

$$T_\lambda(t) = t, \;\; t \in [0, \tau]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы анықланады.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин (6) дағы орынларына апарып қойып, (10) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимине ийе боламыз.

§3. Кешигиўши аргументке ийе биртекли емес теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелер

Мейли кешигиўши аргументке ийе болған, биртекли емес

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t-\tau, x) + f(t,x), \quad t \geq \tau \tag{1}$$

жыллылықтың таралыў теңлемесин қарастырайық. Айтайық бул теңлеме ушын басланғыш $E_\tau = [0, \tau]$ көплигинде

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau \tag{2}$$

басланғыш функциясы берилген болсын, бул жерде $\tau > 0$ ҳәм $-\infty < x < \infty$. Енди усы берилген тийкарғы басланғыш мәселениң шешимин анықлаў мәселесин қарастырайық.

Шешимди

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty} [T_c(t,\lambda) Cos\lambda x + T_s(t,\lambda) Sin\lambda x] d\lambda \tag{3}$$

көринисте белгисиз $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер жәрдеминде интеграл түринде излеймиз. Бул белгисиз коэффициентлерди анықламастан алдын берилген (1) теңлемедеги $f(t,x)$ ҳәм басланғыш $\varphi(t,x)$ функцияларын сәйкес

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_c(t,\lambda) Cos\lambda x + f_s(t,\lambda) Sin\lambda x] d\lambda$$

$$f_c(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x)Cos\lambda\,xdx\,,\quad f_s(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x)Sin\lambda\,xdx$$

ҳәм

$$\varphi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x+\varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x]d\lambda$$

$$\varphi_c(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x)Cos\lambda\,xdx\,,\quad \varphi_s(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,x)Sin\lambda\,xdx$$

Фурье интеграллары менен аңлатып аламыз.

Енди белгисиз $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлерди анықлаў ушын $f(t,x)$ ҳәм басланғыш $\varphi(t,x)$ функцияларының Фурье интегралларын есапқа алған алда (3) ни (1) ге қоямыз ҳәм нәтийжеде (3) деги $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлерди анықлаў ушын сәйкес

$$T'_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=f_c(t,\lambda),\quad t\geq\tau$$
$$T_\lambda(t)=\varphi_c(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

ҳәм

$$T'_\lambda(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-\tau)=f_s(t,\lambda),\quad t\geq\tau$$
$$T_\lambda(t)=\varphi_s(t,\lambda),\quad t\in[0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерине ийе боламыз. Бул тийкарғы басланғыш мәселелерди қандайда бир белгили усыллар менен, айтайық адымлар усылы менен шешип, табылған $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ шешимлерди (3) деги орынларына апарып қойыў арқалы (1), (2) тийкарғы басланғыш мәселениң шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке ийе жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын

$$u_t(t,x)=a^2u_{xx}(t-1,x)+e^{-x},\quad t\geq1$$

$$u(t,x)=e^{3t-2x}, \quad t\in[0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық. Шешимди (3) формула жәрдеминде

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x+T_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

түринде излеймиз. Бул белгисиз коэффициентлерди анықламастан алдын $f(t,x)=e^{-x}$ ҳәм басланғыш $\varphi(t,x)=e^{3t-2x}$ функцияларын сәйкес

$$e^{-x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f_c(\lambda)Cos\lambda x+f_s(\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$f_c(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\cos\lambda x dx=\frac{1}{\pi(1+\lambda^2)},$$

$$f_s(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\sin\lambda x dx=\frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$$

$$e^{3t-2x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_c(t,\lambda)Cos\lambda x+\varphi_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$\varphi_c(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{3t-2x}Cos\lambda x dx=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

$$\varphi_s(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{3t-2x}\sin\lambda x dx=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}$$

түринде түрлендиремиз. Табылған $f_s(\lambda)$, $f_c(\lambda)$, $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң бул мәнислерин пайдалансақ, онда $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лар сәйкес төмендегише

$$T_\lambda'(t)+(\lambda a)^2T_\lambda(t-1)=\frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}, \ t\geq 1$$

$$T_\lambda(t)=\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \ t\in[0,1]$$

ҳәм

$$T'_{\lambda}(t)+(\lambda a)^2 T_{\lambda}(t-1)=\frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)},\quad t\geq 1$$

$$T_{\lambda}(t)=\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)},\quad t\in[0,1]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы есапланады ҳәм сәйкес төмендегише

$$T_c(t,\lambda)=\underset{\frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)}=\frac{2\underset{1}{T_{\lambda}}(t)}{\pi(4+\lambda^2)}+\frac{6}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1 \underset{1}{T_{\lambda}}(t-s)\cdot e^{3s}ds+\frac{(\lambda a)^{-2}}{\pi(1+\lambda^2)}$$

$$T_s(t,\lambda)=\underset{\frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}}{T(t)}=\frac{\lambda \underset{1}{T_{\lambda}}(t)}{\pi(4+\lambda^2)}+\frac{3\lambda}{\pi(4+\lambda^2)}\int_0^1 \underset{1}{T_{\lambda}}(t-s)\cdot e^{3s}ds+\frac{\lambda(\lambda a)^{-2}}{\pi(1+\lambda^2)}$$

түринде көрсетиўге болады, бул жерде $\underset{1}{T_{\lambda}}(t)$ функциясы

$$T'_{\lambda}(t)+(\lambda a)^2 T_{\lambda}(t-1)=0,\quad t\geq 1$$

$$T_{\lambda}(t)=1,\ t\in[0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселениң шешими.

$T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың бул табылған мәнислерин жоқарыдағы орынларына апарып қойып, мысалда қарастырылып атырған жыллылық өткизгишлик теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң

$$\underset{e^{3t-2x}}{u(t,x)}=\frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\underset{1}{T_{\lambda}}(t)+6\int_0^1 \underset{1}{T_{\lambda}}(t-s)\cdot e^{3s}ds+(\lambda a)^{-2}\right]Cos\lambda x d\lambda+$$

$$+\frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\underset{1}{T_{\lambda}}(t)+6\int_0^1 \underset{1}{T_{\lambda}}(t-s)\cdot e^{3s}ds+(\lambda a)^{-2}\right]\sin\lambda x d\lambda$$

түриндеги шешимине ийе боламыз.

Мейли енди кешигиўши аргументке ийе болған, ушларынан шегараланбаған биртекли тардың

$$u_{tt}(t,x)=a^2u_{xx}(t-\tau,x)+f(t,x),\quad t\geq\tau \qquad (4)$$

мәжбүрий тербелис теңлемесин қарастырайық. Айтайық бул теңлеме ушын басланғыш $E_\tau = [0,\tau]$ көплигинде

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \in E_\tau \tag{5}$$

басланғыш функциясы берилген болсын, бул жерде $\tau > 0$ ҳәм $-\infty < x < \infty$.

Шешимди жоқарыдағыдай

$$\underset{\varphi(t,x)}{u(t,x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[T_c(t,\lambda)Cos\lambda x + T_s(t,\lambda)Sin\lambda x\right] d\lambda$$

түринде түринде излеймиз ҳәм белгисиз $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлерди төмендегише анықлаймыз. Дәслеп $f(t,x)$ ҳәм $\varphi(t,x)$ функцияларын жоқарыдағыдай көринисте Фурье интегралы менен сүўретлеп аламыз ҳәм табылған $f_s(\lambda)$, $f_c(\lambda)$, $\varphi_c(t,\lambda)$ ҳәм $\varphi_s(t,\lambda)$ лердиң мәнислерин пайдаланып, $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ ларды сәйкес

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-\tau) = f_c(\lambda), \quad t \geq \tau$$

$$T_\lambda(t) = \varphi_c(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau]$$

ҳәм

$$T_\lambda''(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-\tau) = f_s(\lambda), \quad t \geq \tau$$

$$T_\lambda(t) = \varphi_s(t,\lambda), \quad t \in [0,\tau]$$

тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы анықлаймыз. $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ лардың табылған мәнислерин жоқарыдағы орынларына апарып қойып қарастырылып атырған биртекли тардың мәжбүрий тербелис теңлемеси ушын тийкарғы басланғыш мәселениң шешимине ийе боламыз.

Мысал ушын, мейли кешигиўши аргументке ийе биртекли тардың еркин тербелис теңлемеси ушын

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t-1,x) + e^{-x}, \quad t \geq 1$$

$$u(t,x) = e^{3t-2x}, \quad t \in [0;1]$$

тийкарғы басланғыш мәселесин қарастырайық. Бул жағдайда $T_c(t,\lambda)$ ҳәм $T_s(t,\lambda)$ коэффициентлер

$$T''_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-1) = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)}, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{2e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \ t \in [0,1]$$

ҳәм

$$T''_\lambda(t) + (\lambda a)^2 T_\lambda(t-1) = \frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}, \quad t \ge 1$$

$$T_\lambda(t) = \frac{\lambda e^{3t}}{\pi(4+\lambda^2)}, \ t \in [0,1]$$

түриндеги тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў арқалы

$$T_c(t,\lambda) = \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\underset{t}{T_\lambda}(t) + 9\int_0^1 \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds + \frac{1}{2(\lambda a)^2}\right]$$

$$T_s(t,\lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}\left[\underset{1}{T_\lambda}(t) + 3\underset{t}{T_\lambda}(t) + 6\int_0^1 \underset{t}{T_\lambda}(t-s)e^{3s}ds + \frac{1}{2(\lambda a)^2}\right]$$

көринислеринде анықланады. Бул жерде

$$\underset{1}{T_\lambda}(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{егер} \ -1 \le t \le 0 \\ 1, & \text{егер} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 + \frac{1}{2}(\lambda a)^2(t^2-1), & \text{егер} \ 1 \le t \le 2 \\ --//--//--//--//--//-- \end{cases}$$

ҳәм

$$\underset{t}{T_k}(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{егер} \ -1 \le t \le 0 \\ t, & \text{егер} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 + \frac{1}{6}(\lambda a)^2(t^3-1), & \text{егер} \ 1 \le t \le 2 \\ --//--//--//--//--//-- \end{cases}$$

Жуўмақлаў

Бул магистрлик диссертация жумысы кешигиўши аргументке ийе әдеттеги ҳәм дара туўындылы сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған тийкарғы басланғыш ҳәм шегаралық мәселелерди шешиў усылларын үйрениў ҳәм изертлеў мәселелерине арналған. Жумыста кешигиўши аргументке ийе сызықлы дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған тийкарғы басланғыш мәселелердиң түрлери бойынша шешимди дүзиў мәселелери үйренилген ҳәм төмендеги тийкарғы нәтийжелер алынған.

1. Биринши, екинши ҳәм жоқары тәртипли кешигиўши аргументке ийе дифференциаллық теңлемелер ушын тийкарғы басланғыш мәселелерде кешигиўши аргумент бирдей ҳәм ҳәр қыйлы болған жағдайлар ушын адымлар усылының тийкарғы схемалары ҳаққында мағлыўматлар.

2. Сызықлы тийкарғы басланғыш мәселелер ушын орынлы болған шешимниң айырым қәсийетлери бойынша, шешимди адымлар усылын өз ишине қамтыйтуғын интеграллық көринислерде дүзиў ҳәм нәтийжелерин үйрениў.

3. Кешигиўши аргументке ийе сызықлы дифференциаллық теңлемелердиң базы-бир түрлери ушын шегаралық мәселелерди шешиўде адымлар усылын ҳәм шешимниң қәсийетлерине тийкарланған ҳалда шешимди еки шешимниң қосындысы түринде көрсетиў арқалы бундай мәселелердиң шешимин табыў усылларын үйрениў.

4. Кешигиўши аргумент ҳәр түрли формада берилген биртекли ҳәм биртекли емес жыллылық өткизгишлик ҳәм биртекли тардың тербелис теңлемелери ушын тийкарғы басланғыш мәселелерди шешиў усылларын үйрениў.

Әдебиятлар

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, -М.: Мир, 1968. -183 с.
2. Бойчук А.А.Конструктивные методы анализа краевых задач. –Киев: Наук. думка, 1990. -96 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. –М.: Наука, 1974. -503 с.
4. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. –М.: Наука, 1973. -446 с.
5. Зубов В.М. К теории существования решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений ∕∕Дифференциальные уравнения. -1970. -2, №4. –с. 629-631.
6. Мартынюк Д.И. О периодических решениях счетных систем периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. –Мат.физика, 1968. вып 4. с.84-89.
7. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием.-Мат.физика, 1967.вып3.с.128-145
8. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Асимптотические методы. –Киев: Ин. математики НАН Украины. 1995. -389с.
9. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно – периодическими коэффициентами. –Киев: Наук. думка, 1984. -214 с.
10. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. –М.:Наука, 1972. -351 с.
11. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. –М.:Наука. 1978. -336 с.
12. Пинин Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. –М. Изв-во Иностран. лит. 1961. -248 с.
13. Рубанин В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. –М.:Наука, 1969. -287 с.

14. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием. –Автоматика и телемеханика. 1960, 21. №6, с. 729-739.
15. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1961. -124 с.
16. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1971. -231 с.