

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲАМ ОРТА АРНАЎЛЫ
БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК
УНИВЕРСИТЕТИ**

Математика факультети

Қол жазба ҳуқықында
УДК 517.927

Таңирбергенова Талшын

**«Екинши тәртипли квазисызықлы толқын
теңлемелерининң периодлы шешимлери»**

Қәнигелиги: 5A460100 «Дифференциаллық теңлемелер»

“Математика магистри” дәрежесин алыў ушын усынылған

ДИССЕРТАЦИЯ

Магистрлик диссертация
«Алгебра ҳәм дифференциаллық
теңлемелер» кафедрасында
көрип шығылды ҳәм қорғаўға
усынылды.
Кафедра баслығы: _____

Илимий басшы: _____

ф.м.и.к. доц. Ө. Курбанбаев

ф.м.и.к., доц. О. Нуржанов

« ____ » _____ 2011 жыл

Мазмұны

Кирисиў	3
I-Бап. Екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлерин жуўық изертлеўдиң избе-из жуўықласыўлар усылы.....	
§1. Екинши тәртипли сызықлы биртеккли емес толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери	7
§2. Квазисызықлы толқын теңлемелери ушын T_1 периодлы шешимлер.....	12
§3. Квазисызықлы толқын теңлемелери ушын T_2 периодлы шешимлер.....	12
II-Бап. Екинши тәртипли автономлы квазисызықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери	20
§1. Екинши тәртипли автономлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери	20
§2. Екинши тәртипли киши параметрге ийе автономлы толқын теңлемелердиң периодлы шешимлери.....	24
§3. Квазисызықлы толқын теңлемелери ушын киши параметрлер методы	36
Жуўмақлаў	46
Әдебиятлар.....	48

Кирису

Теманың актуаллыгы. Механиканың, физиканың, биологияның хәм тағы басқада тәбияттаныў илимлериниң, сондай-ақ, экономиканың хәм техниканың оғада көп санлы мәселелери дифференциаллық теңлемелерди изертлеўге алып келинеди.

Дифференциаллық теңлемелерди изертлеўдеги тийкарғы мақсетлердиң бири оның шешими ҳаққында мағлыўматларға ийе болыў, элементар функциялар арқалы анықлаў мүмкин болмаған дәл шешимди, керекли болған жағдайларда жуўық шешимлер менен алмастырыў болып табылады. Сонлықтан бундай жуўық шешимлерди табыў усылларын ислеп шығыў дифференциаллық теңлемелер теориясындағы тийкарғы мәселелердиң бири болып есапланады.

Дифференциаллық теңлемелерди жуўық шешиўдиң пайда болған аналитикалық методлары ишиндеги ең нәтийжели усыллардың бири асимптотикалық усыллар болып, ол XVIII әсирде Лагранждың, Лапластың мийнетлеринде пайда бола баслады. Бул теориядағы киши параметр проблемасы тербелислер теориясы ушын Линдштедтиң, Гюльденниң жаңа методларын ислеп шығыўға алып келди.

Илимниң ҳәр қыйлы тараўлары менен таныса отырып, тәбияттың бақлаў мүмкин болған барлық қубылысларын үйрене отырып, тербелис -бул ең көп тарқалған қозғалыс түрлериниң бири екенлигине исенемиз. Қурылыслардың хәм машиналардың вибрациялары, радиотехникадағы хәм оптикадағы электо-магнитлик тербелислер, сеслик хәм ультрасеслик тербелислер, булар ҳәр қыйлы хәм бир бирине уқсамайтуғын тербелислер болып, булар математикалық хәм физикалық методлар менен улыўма тербелислер ҳаққындағы тәлийматқа биригеди [3,4,5,6,12,13].

Тербелис процесслерин үйрениў илимниң көпшилик тараўларын үйрениў ушын оғада үлкен әҳмийетке ийе. Тербелис процесслери улыўма жағдайда оғада курамалы болып, оларды сүүретлеў ушын хәмме ўақыт дәл

математикалық моделин дүзиу мүмкін бола бермейді хәм сол себепли әпиуайыластыратуғын уйғарыулар жасауға туўра келеди.

Киши тербелислер теориясы Лагранждың мийнетлеринде-ақ қәлиплескен еди. Келеси раўажланыўында бул теория сызықлы тербелислер теориясы, яғный турақлы коэффициентли сызықлы дифференциаллық теңлемелер менен сүүретленетуғын тербелислер теориясы деп атала баслады.

Тәбияттағы хәм техникадағы көпшилик тербелис қубылыслары сызықлы емес дифференциаллық теңлемелер менен сүүретленеди. Бундай тербелислерди сызықлы емес тербелислер деп атайды. Сызықлы емес тербелислер теориясының раўажланыўына, сызықлы емес тербелислер системаларындағы жаңа қубылысларды ашыуға хәм оларды изертлеуге А.Пуанкаре, А.М.Ляпунов, Ван-дер-Поль, А.Андронов, Н.М.Крылов, Н.Н.Боголюбов хәм тағы басқалар үлкен үлес қосты [9,10,15].

Дифференциаллық теңлемелер теориясында айрықша орынлардың биринде сызықлы емес дифференциаллық теңлемелердиң жуўық шешимлерин дүзиу методлары болып табылады. Дара жағдайда әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди жуўық дүзиудиң санлы–аналитикалық усылы хәм сызықлы емес механиканың асимптотикалық методлары болып табылады [1,2,7,8,11,14,16].

Изертлеу объекти. Екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери үйрениледі.

Жумыстың мақсети. Екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелери ушын периодлы шешимлерди изертлеудиң санлы–аналитикалық хәм асимптотикалық методларын үйрениу.

Илимий жаңалығы. Жумыста квазисызықлы екинши тәртипли толқын теңлемелериниң базы-бир классларының периодлы шешимлери изертленеди. Бунда периодлы шешимлерди дүзиудиң жуўық алгоритмлери алынып, бул алгоритмлердиң жыйнақлылығы дәлилленеди хәм қәтеликлери баҳаланады.

Жумыстың жәрияланғанлығы. Магистрлик диссертация жумысының тийкарғы нәтийжелери Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети “Алгебра хәм дифференциаллық теңлемелер” хәм “Математикалық анализ” кафедраларының биргеликтеги семинарларында (Нөкис, 2010-2011 жыллар) [17], Өзбекстан Республикасы ғәрезсизлигиниң 20 жыллық байрамына бағышланған “Математиканың хәзирги заман проблемалары” атлы илимий конференциясында (17 март 2011 жыл) [18], Магистрантлардың Республикалық илимий-әмелий конференциясында (30 апрель 2011 жыл) [19] хәм “Илим ғумшалары” атамасындағы Республикалық илимий-әмелий конференциясында (30-31 май 2011 жыл) баянат етилди.

Жумыстың көлеми хәм дүзилиси. Магистрлик диссертация кирисиў бөлими хәм еки баптан турады. Хәр бир бап үш параграф көлеминде жазылған. Жумыстың соңында жуўмақлаў бөлими хәм пайдаланылған әдебиятлар дизими берилген. Әдебиятлар дизими 19 атамадан хәм диссертация көлеми 54 беттен ибарат.

Биринши бап „Екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлерин жуўық изертлеўдиң избе-из жуўықласыўлар усылы” деп аталып, онда екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелери периодлы шешимлерин изертлеўдиң избе-из жуўықласыўлар усылының айырым вариантлары қарастырылады.

Биринши баптың биринши параграфы „Екинши тәртипли сызықлы биртекли емес толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери” деп аталып, онда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$$

түриндеги биртекли емес толқын теңлемелериниң периодлы шешимлерин изертлеў, периодлы шешимге ийе болыў шәртлери хәм бул периодлы шешимлерди жуўық дүзиў мәселелери қарастырылады.

Биринши баптың екінші параграфы „Квазисызықты толқын теңлемелері үшін T_1 периодлы шешімлер” деп аталып, онда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x)$$

түріндегі екінші тәртіпті квазисызықты теңлемелердің параметрге ғарезлі болған базы-бір периодлы шешімлерін дүзіу мәселелері қарастырылады.

Биринши баптың үшінші параграфы „Квазисызықты толқын теңлемелері үшін T_2 периодлы шешімлер” деп аталып, бұл параграфта да алдыңғы параграфтағы мәселе қарастырылады, бірақ басқаша шәртлердің орынланыуы талап етилгенліктен, бұл параграфта периодлы шешімді дүзіу схемалары өзгертіледі.

Екінші бап „Екінші тәртіпті автономлы квазисызықты толқын теңлемелерінің периодлы шешімлері” деп аталып, онда екінші тәртіпті автономлы квазисықты толқын теңлемелерінің периодлы шешімлерін асимптотикалық усыллар жәрдеминде изертлеу мәселелері қарастырылады.

Екінші баптың биринші параграфы „Екінші тәртіпті автономлы толқын теңлемелерінің периодлы шешімлері” деп аталып, онда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

түріндегі автономлы толқын теңлемелерінің периодлы шешімлерін дүзіу мәселелері қарастырылады. Онда қарастырылып атырған автономлы теңлеме белгилеулер жасау арқалы автономлы емес теңлемеге алып келинеді хәм оған орталандыруу усылы қолланылады.

Екінші баптың екінші параграфы „Екінші тәртіпті киши параметрге ийе автономлы толқын теңлемелердің периодлы шешімлері” деп аталып, онда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

түріндегі автономлы киши параметрге ийе толқын теңлемелериниң периодлы шешимлерин дүзиў мәселелери қарастырылады

Екинши баптың үшінши параграфы „Квазисызықлы толқын теңлемелери ушын киши параметрлер методы” деп аталып, онда алдынғы параграфтағы мәселениң периодлы шешими киши параметрлер усылы жәрдемінде изертленеди.

I-БАП. Екінші тәртіпті квазисызықты толқын теңлемелерінің периодты шешімдерін жуық ізертлеудің ізбе-із жуықтасуы

Дифференциалдық теңлемелер теориясында жетекші орынлардың бірінде сызықты емес дифференциалдық теңлемелердің жуық шешімдерін дүзіу методлары болып табылады. Дара жағдайда бұндай усулдардың бири әдеттеги дифференциалдық теңлемелер ушын периодты шешімдерди жуық дүзіудің санлы—аналитикалық усулы болып табылады.

Бұндай усуллар жәрдемінде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x)$$

түріндеги квазисызықты толқын теңлемелерінің периодты шешімдерін ізертлеу, шешімнің параметрге ғәрезли жуық мәнісдерін дүзіу хәм оның қәтелигин бақалау барысындағы усулдың қолайлылығы, оның жуық методлар теориясындағы әхмийетлигиін көрсетеди.

Бұл усулды қолланыу барысында сызықты биртекли

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$$

түріндеги дифференциалдық теңлемелердің периодты шешімдері хәққындағы мағлыұматлар, оның периодты шешімдерге ийе болыу шәртлери, периодты шешімдерди дүзіу схемалары тиккелей пайдаланылады. Соның ушын квазисызықты толқын теңлемелерінің периодты шешімдерін ізертлеу, жоқарыда келтирилген сызықты биртекли емес дифференциалдық теңлемелерди үйрениуге алып келинеди.

Бұл бапта усы айтылған мәселелер ізбе-излиги қарастырылған болып, дәслепки параграфта екінші тәртіпті сызықты биртекли емес толқын теңлемелерінің периодты шешімдері хәққындағы мағлыұматлар үйрениледи хәм алынған нәтижелер квазисызықты толқын теңлемелердің периодты шешімдерін ізертлеуге қолланылады.

§1. Екінші тәртіпті сызықты біртекті емес толқын теңлемелерінің периодты шешімдері

Мейлі екінші тәртіпті тұрақты коэффициентті сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеме менен берілген

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t) \quad (1)$$

толқын теңдемесін қарастырайық, бұл жерде $f(t)$ функциясы, айтайық bazı-бір интервалда немесе бүтін сан туырысында анықланған, берілген функция. Бұл теңдеменің ұлыма шешімін табыу ұсылларының бири ерікті тұрақтыларды вариациялау ұсылы болып табылады. Бұның ұшын дәслеп біртекті

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

теңдеменің

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

ұлыма шешімі табылады хәм ерікті тұрақтыларды вариациялау ұсылына мууапық, біртекті емес (1) теңдеменің шешімі

$$x(t) = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t$$

көрінисте ізленеди хәм $C_1(t)$, $C_2(t)$ ларға қарата

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos \omega t + C_2'(t) \sin \omega t = 0 \\ -C_1'(t) \omega \sin \omega t + C_2'(t) \omega \cos \omega t = f(t) \end{cases}$$

системасы пайда болады. Бұл системаны шешіп $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ туындыларына қарата

$$C_1'(t) = -\frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega t, \quad C_2'(t) = \frac{1}{\omega} f(t) \cos \omega t$$

мәніслеріне ийе боламыз. Бұларды интеграллап $C_1(t)$, $C_2(t)$ лардың

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega s ds + C_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \cos \omega s ds + C_2$$

мәніслерін анықлаймыз.

Табылған $C_1(t), C_2(t)$ лардың бұл мәніслерін жоқарыдағы орынларына апарып қойып, (1) теңлемениң

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \cos \omega t \int_0^t f(s) \sin \omega s \, ds + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \int_0^t f(s) \cos \omega s \, ds$$

ямаса әпиұайластырып

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) \, ds \quad (3)$$

түріндегі улыұма шешиміне ийе боламыз.

Бизге мәлім, бұл шешімдегі

$$\frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) \, ds$$

қосылыұшы (1) біртекли емес теңлемени қанаатландырып, оның бір дара шешими болып табылады. Егер (1) ге біртекли болған (2) теңлемениң улыұма шешимін түрлендирип

$$\begin{aligned} C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t &= -C \cos \omega t \int_0^T g(s) \sin \omega s \, ds + C \sin \omega t \int_0^T g(s) \cos \omega s \, ds = \\ &= C \left[\int_0^T g(s) \cos \omega t \sin \omega s \, ds + \int_0^T g(s) \sin \omega t \cos \omega s \, ds \right] = C \int_0^T g(s) \sin \omega(t-s) \, ds \end{aligned}$$

деп жазсақ, онда

$$y(t) = C \int_0^T g(s) \sin \omega(t-s) \, ds \quad (4)$$

функциясы (2) біртекли теңлемени ерикли $g(t)$ функциясы ушын қанаатландырады, бұл жерде $T > 0$ хәм C лар ерикли тұрақлылар, ал $g(t)$ функциясы $t \in [0, T]$ ушын үзликсиз болған ерикли функция.

Онда (1) біртекли емес теңлемениң шешимін

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds + C \int_0^T g(s) \sin \omega(t-s) ds$$

түрінде, дара жағдайда $g(t) \equiv f(t)$ десек

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds + C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds \quad (5)$$

түрінде көрсетіуге болады.

(5) шешім ерикли C ушын (1) теңлемени қанаатландырады.

Хақыйқатында да

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^t f(s) \cos \omega(t-s) ds + \omega C \int_0^T f(s) \cos \omega(t-s) ds$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) - \omega \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \omega^2 C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds$$

болып, буларды (1) теңlemeдеги орынларына қойсақ, (5) ниң (1) ни қанаатландыратуғнлығын көріуіге болады.

Енди (1) теңлемениң (5) көринистеги шешиминиң айырым жағдайларына тоқтап өтемиз. Мейли $f(t)$ функциясы периодлы функция болып, айтайық T саны бул функцияның периоды болсын. Онда (1) теңleme T хәм ω ға ғәрезли болған периодлы шешимге ийе болыуы мүмкин.

Теорема 1. Мейли $f(t)$ функциясы T периодқа ийе үзликсиз функция болсын, ал m саны

$$\cos(\omega Tm) = -1$$

теңлигин қанаатландыратуғн ең киши натурал сан болсын.

Онда $T_1 = Tm$ саны (1) теңлемениң периодлы шешиминиң ең киши оң периоды болады.

Дәлиллеу. Бул теореманы дәлиллеу ушын (5) шешимди пайдаланамыз. Бул шешим (1) теңлемени ерикли C хәм T ушын қанаатландыратуғн болғанлықтан, оның базы бир мәнислерин бул шешим

периодлы хэм соның менен бирге ең киши периодқа ийе болатуғындай етип сайлап аламыз. Шешимнің ең киши оң периоды T дан киши болмайтұғынлығы себепли, ең киши оң периодты T_1 деп уйғарып, (5) ден

$$\begin{aligned}
 x(t+T) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{t+T} f(s) \sin \omega(t-s+T) ds + C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s+T) ds = \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_{-T}^t f(s) \sin \omega(t-s) ds + C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s+T) ds = \\
 &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds + C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds + \frac{1}{\omega} \int_{-T}^0 f(s) \sin \omega(t-s) ds + \\
 &+ C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s+T) ds - C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds = \\
 &= x(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s+T) ds + C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s+T) ds - \\
 &- C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds = x(t) + \frac{1}{\omega} \cos \omega T \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds + \\
 &+ \frac{1}{\omega} \sin \omega T \int_0^T f(s) \cos \omega(t-s) ds + C \sin \omega T \int_0^T f(s) \cos \omega(t-s) ds + \\
 &+ C \cos \omega T \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds - C \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds = \\
 &= x(t) + \left(\frac{1}{\omega} \cos \omega T + C \cos \omega T - C \right) \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds + \\
 &+ \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega T + C \sin \omega T \right) \int_0^T f(s) \cos \omega(t-s) ds = x(t)
 \end{aligned}$$

Бул соңғы теңлик орынланыўы ушын

$$\begin{cases} (\frac{1}{\omega} + C) \cos \omega T = C \\ (\frac{1}{\omega} + C) \sin \omega T = 0 \end{cases} \quad (6)$$

теңліктер системасының орынланыуы керек болады. Ал бұның үшін

$$\cos \omega T = -1$$

теңлігінің орынланыуы зәрүр. Егер бұл теңлік орынлы болса, онда (6) дан

$$C = -\frac{1}{2\omega}$$

болып, (1) нің T периодлы шешими

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(s) \sin \omega(t-s) ds$$

формуласы менен анықланады.

Бұл формуладан көриніп тұрғанындай, (1) теңлемесі үшін бұндай периодқа ийе шешім бірден бір болып, бұл шешім

$$x(0) = \frac{1}{2\omega} \int_0^T f(s) \sin \omega s ds \quad x'(0) = \frac{1}{2} \int_0^T f(s) \cos \omega s ds$$

басланғыш шарттарын қанаатландырады.

Егер $\cos \omega T = -1$ теңлігі орынланбаса, онда $f(t)$ функциясының $2T$ периодын пайдаланамыз және $\cos 2\omega T = -1$ теңлігінің орынланыуын тексереміз, егер бұл теңлік орынланса, онда (1) теңлемесінің

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{2T} f(s) \sin \omega(t-s) ds$$

формуласы менен анықланатуғын шешими $2T$ периодқа ийе болады. Ал бұл теңлікте орынланбаса, онда $\cos 3\omega T = -1$ теңлігінің орынланыуын тексереміз және тағ басқа. Жуымақлап айтқанда $\cos(\omega Tm) = -1$ теңлігін қанаатландыратуғын m натурал санының ең кіші мәнісі үшін (1) теңлемесінің

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s) \sin \omega(t-s) ds$$

формуласы менен анықланатуғын $x(t)$ шешими өзінің ең киши оң $T_1 = mT$ периодына ийе болады.

Мысал ушын, мейли

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{9} x = \sin \frac{2}{3} t$$

теңлемесин қарастырайық, бул жерде $\omega = \frac{1}{3}$ хәм $T = 3\pi$. Бул жағдайда

$$\cos \omega T = \cos \frac{1}{3} 3\pi = \cos \pi = -1$$

теңлиги орынлы болып, берилген теңлемениң ең киши оң периоды $T = 3\pi$ болады хәм бул периодлы шешим

$$x(t) = 3 \int_0^t \sin \frac{2}{3} s \sin \frac{1}{3} (t-s) ds - \frac{3}{2} \int_0^{3\pi} \sin \frac{2}{3} s \sin \frac{1}{3} (t-s) ds$$

интегралын есаплаў арқалы анықланып

$$x(t) = -3 \sin \frac{2}{3} t$$

түрине ийе болады.

Егер $\cos(\omega Tm) = -1$ теңлигин қанаатландыратуғын m натурал саны болмаса, ямаса $\cos(\omega Tn) = 1$ теңлигин қанаатландыратуғын n натурал санының ең киши мәнисинен үлкен болып кетсе, онда (1) теңлемениң шешиминиң ең киши оң периоды базы-бир шәртлер орынланғанда $T_2 = nT$ болып, оның бундай периодқа ийе шешими

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds \quad (7)$$

формуласы менен анықланады хәм соның менен бирге бул период

$$F(t) = f(t) \sin \omega t$$

функциясының периоды болып табылады. Бул жерде айта кететін шарттер соннан ибарат болып, $f(t)$ функциясы $[0, T_2]$ интервалында $\cos \omega t$ хәм $\sin \omega t$ функциялары менен ортогонал болыуы керек, яғный

$$\int_0^{T_2} f(s) \sin \omega s ds = 0 \quad (8)$$

$$\int_0^{T_2} f(s) \cos \omega s ds = 0$$

теңликлериниң орынланыуы керек.

Хақыйқатында да (7) ниң (1) теңлемени қанаатландыратуғынлығы анық. Енди бул шешимниң $T_2 = nT$ периодқа ийе болатуғынлығын көрсетиу ушын

$$\begin{aligned} x(t + T_2) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{t+T_2} f(s) \sin \omega(t - s + T_2) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s + T_2) ds = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{-T_2}^t f(s) \sin \omega(t - s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s + T_2) ds = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t - s) ds - \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s) ds + \frac{1}{\omega} \int_{-T_2}^0 f(s) \sin \omega(t - s) ds - \\ &- \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s + T_2) ds + \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s) ds = \\ &= x(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t - s) ds = x(t) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega s ds + \\ &+ \frac{1}{\omega} \cos \omega t \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega s ds = x(t) \end{aligned}$$

теңлигиниң орынланыуын талап етемиз. Ал бир ўақыттың өзінде $\sin \omega t$ хәм $\cos \omega t$ лар нолге айланбайды. Онда буннан (8) ниң орынланыуы зәрүр болады.

(7) формула менен анықланатуғын шешимнің дүзилисинен көринип турғанындай, (1) теңлеме ушын бундай периодқа ийе болған шешимде бирден бир болып, бул шешим тек ноллик басланғыш шәртлерди, яғный

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

басланғыш шәртлерин қанаатландырады. Басланғыш шәртлердің тек ноллик болыуы

$$x(0) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega s \, ds, \quad x'(0) = \frac{1}{2} \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega s \, ds$$

теңдиклеринен келип шығды.

Мейли мысал ушын

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \cos 3t$$

теңлемесин қарастырайық, бул жерде $\omega = 2$ хәм $T = \frac{2\pi}{3}$. Шешимнің

периодын анықлау ушын дәслеп

$$\cos 2 \frac{2\pi}{3} m = -1$$

теңлигин қанаатландыратуғын m натурал санын анықлаймыз, бирақ m ниң хеш қандай натурал мәнисинде бул теңдик орынланбайды. Енди

$$\cos 2 \frac{2\pi}{3} n = 1$$

теңлигин қанаатландыратуғын n ниң ең киши натурал мәнисин анықлаймыз, буннан $n=3$. Онда шешимнің периоды

$$T_2 = Tn = \frac{2\pi}{3} 3 = 2\pi$$

болып, бул периодлы шешим

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \cos 3s \sin 2(t-s) \, ds - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 3s \sin 2(t-s) \, ds$$

интегралын есаплау арқалы анықланады хәм

$$x(t) = -\frac{1}{5}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

түрине ийе болады.

Солай етип жуўмақлап айтқанда төмендеги теорема орынлы болады.

Теорема 2. Мейли (1) теңлемениң оң жағы, яғный $f(t)$ функциясы T периодқа ийе үзлексиз функция болсын. Онда бул теңлемениң шешиминиң ең киши оң периоды T_1 хәм T_2 периодлардың кишиси менен, яғный $\min(T_1, T_2)$ менен анықланып, шешимниң өзи сәйкес (5) ямаса (7) формула менен анықланады.

Мейли енди $f(t)$ функциясы T периодқа ийе үзлексиз функция болған жағдайда (1) теңлемениң периодлы шешимин дүзиўге мүмкиншилик беретугын (7) ден өзгеше болған

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{t}{\omega T_2} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds \quad (9)$$

формуласы менен анықланатуғын шешимди қарастырайық, бул жерде $T_2 = nT$ хәм n саны $\cos(\omega Tn) = 1$ теңлигин қанаатландыратуғын натурал санлардың ең киши мәниси. Бул шешим T_2 периодқа ийе, ҳақыйқатында да

$$\begin{aligned} x(t+T_2) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{t+T_2} f(s) \sin \omega(t-s+T_2) ds - \frac{t+T_2}{\omega T_2} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s+T_2) ds = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds + \frac{1}{\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds - \\ &\quad - \frac{t}{\omega T_2} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{\omega} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds = x(t) \end{aligned}$$

Соның менен бирге (8) шәрт орынланған ўақытта бул шешим (1) теңлемениде қанаатландырады. Ҳақыйқатында да

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t f(s) \cos \omega(t-s) ds - \frac{t}{T_2} \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega(t-s) ds - \frac{1}{\omega T_2} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) - \omega \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega(t-s) ds -$$

$$+ \frac{t\omega}{T_2} \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega(t-s) ds - \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega(t-s) ds$$

Буннан

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t) - \frac{2}{T_2} \int_0^{T_2} f(s) \cos \omega(t-s) ds$$

болып, бул теңлеме (1) теңлеме менен тең күшли болыуы ушын

$$\int_0^{T_2} f(s) \cos \omega(t-s) ds = 0$$

ямаса төмендеги еки

$$\int_0^{T_2} f(s) \cos \omega s ds = 0, \quad \int_0^{T_2} f(s) \sin \omega s ds = 0$$

теңлемелер системасының орынланыуы зәрүр болады.

§2. Квазисызықты толқын теңлемелері үшін T_1 периодлы шешімлер

Мейли екінші тәртіпті квазисызықты дифференциалдық теңleme менен берілген

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x) \quad (1)$$

толқын теңлемесін қарастырайық, бұл жерде $f(t, x)$ функциясы t аргумент бойынша T периодлы және соның менен бірге айтайық

$$-\infty < t < \infty, \quad |x| \leq a \quad (2)$$

областында үзліксіз, берілген функция, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Параметр ε ның бұндай айырым мәнісінде шешім бұл параметрге тәуелсіз болады да, ал бұл шешімнің периоды ε ға тәуелсіз болмай қалады. Биз бұл параграфта ұсындай периодқа ие шешімді жуық дәуіс және оның қателігін бағалау мәселесін қарастырамыз.

Мейли $f(t, x)$ функциясы (2) облыста оң M саны менен шегараланған және оң K саны бойынша Липшиц шартын қанаатландыратуғын функция болсын, яғни

$$|f(t, x)| \leq M$$

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$$

шартларын қанаатландыратуғын функция болсын.

Мейли $f(t, x)$ функциясының T периоды үшін $\cos(\omega T m) = -1$ теңлігін қанаатландыратуғын m саны бар болсын. Онда бірінші параграфта келтірілген мағлыұматлар бойынша $T_1 = Tm$ саны (1) теңлемесінің периодлы шешімінің ең кіші оң периоды болады және бұл периодлы шешім бірінші параграфтағы (9) формулаға тейкарланған халда

$$x(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds \quad (3)$$

интеграллық теңлемесін шешиў арқалы анықланады, бул жерде $T_1 = Tm$ хәм m саны $\cos(\omega Tm) = -1$ теңлигин қанаатландыратуғын натурал санлардың ең киши мәнисі.

Бул интеграл теңлемениң шешими T_1 периодқа ийе болатуғынлығы хәм (3) интеграллық теңлемениң шешими (1) теңлемени қанаатландыратуғынлығы бизге биринши параграфтан мәлим. Сонлықтан (1) теңлемениң периодлы шешимін табыў мәселеси (3) интеграллық теңлемени шешиўге алып келинеди.

Мейли дәслепки жуўықласыў ретинде $x_0 = 0$ болсын деп уйғарайық хәм (3) интеграллық теңлемени

$$x_{n+1}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds \quad (4)$$

формуласы жәрдемінде жуўық шешиў мәселесін қарастырайық, бул жерде $n = 0, 1, 2, \dots$ хәм $x_0 = 0$.

(3) формула бойынша биринши жуўықласыў

$$x_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, 0) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, 0) \sin \omega(t-s) ds$$

түрине ийе болып, буннан екинши жуўықласыўдың

$$x_2(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

хәм үшінши жуўықласыўдың

$$x_3(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_2(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x_2(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

түрінде анықланатуғынлығы келип шығады. Процессти усылайынша даўам етсек, онда келеси жуўықласыўлардың хәр бири

$$x_{n+1}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

түрінде анықланатуғынлығы келип шығады, бул жерде $n = 0, 1, 2, \dots$

Енди жоқарыдағы көринислерде анықланатуғын жуўықласыўларды баҳаласақ

$$|x_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, 0) \sin \omega(t-s)| ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, 0) \sin \omega(t-s)| ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t M ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} M ds = \frac{\varepsilon}{2\omega} Mt + \frac{\varepsilon}{2\omega} M(T_1 - t) = \frac{\varepsilon}{2\omega} MT_1,$$

$$|x_2(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, x_1(t, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, x_1(t, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t M ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} M ds = \frac{\varepsilon}{2\omega} Mt + \frac{\varepsilon}{2\omega} M(T_1 - t) = \frac{\varepsilon}{2\omega} MT_1$$

яғный, барлық жуўықласыўлар ушын

$$|x_n(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t M ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} M ds = \frac{\varepsilon}{2\omega} Mt + \frac{\varepsilon}{2\omega} M(T_1 - t) = \frac{\varepsilon}{2\omega} MT_1$$

теңсизликлери орынлы болады. Буннан егер,

$$\frac{\varepsilon}{2\omega} MT \leq a$$

болса, онда избе-из жуўықласыўшы функциялардың ҳәр бири (2) областтан шығып кетпейди.

Биринши ҳәм екинши жуўықласыўлар арасындағы болатуғын айырманы баҳаласақ

$$\begin{aligned}
|x_2(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, x_1(s, \varepsilon)) - f(s, 0)| |\sin \omega(t-s)| ds + \\
&+ \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, x_1(s, \varepsilon)) - f(s, 0)| |\sin \omega(t-s)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t K |x_1(s, \varepsilon) - x_0| ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} K |x_1(s, \varepsilon) - x_0| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t K \frac{\varepsilon}{2\omega} MT_1 ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} K \frac{\varepsilon}{2\omega} MT_1 ds \leq \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{2\omega} \right)^2 KMT_1 t + \left(\frac{\varepsilon}{2\omega} \right)^2 KMT_1 (T_1 - t) = \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \right)^2 KM
\end{aligned}$$

Енди екинши ҳәм үшінши жуўықласыўлар арасындағы болатуғын айырманы баҳаласақ

$$\begin{aligned}
|x_3(t, \varepsilon) - x_2(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, x_2(s, \varepsilon)) - f(s, x_1(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds + \\
&+ \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, x_2(s, \varepsilon)) - f(s, x_1(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t K \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \right)^2 KM ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} K \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \right)^2 KM ds \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{2\omega}\right)^3 K^2 M T_1^2 t + \left(\frac{\varepsilon}{2\omega}\right)^3 K^2 M T_1^2 (T_1 - t) = \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^3 K^2 M$$

Тап усындай процессти даўам етсек онда

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t |f(s, x_n(s, \varepsilon)) - f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} |f(s, x_n(s, \varepsilon)) - f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^t K \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^n KM ds + \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_t^{T_1} K \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^n KM ds \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2\omega}\right)^{n+1} K^n M T_1^n t + \left(\frac{\varepsilon}{2\omega}\right)^{n+1} K^n M T_1^n (T_1 - t) = \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^{n+1} K^n M \end{aligned}$$

Бул алынған нәтийжелерди пайдаланып төмендеги теңсізликке ийе боламыз;

$$\begin{aligned} |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| &\leq |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_{n+k-1}(t, \varepsilon)| + \dots + |x_{n+1}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^{n+k} K^{n+k-1} M + \dots + \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^{n+1} K^n M = \\ &= \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega}\right)^{n+1} K^n M \left(1 + \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K + \dots + \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K\right)^{k-1}\right) = \\ &= \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K\right)^n M \left(1 + \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K + \dots + \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K\right)^{k-1}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Буннан n шексізликке умтылғандағы шекке өтсек хәм ε параметриниң

$$\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K < 1$$

шәртин қанаатландыратуғын мәнислерин пайдалансақ, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^n = 0$$

болып, буннан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| = 0$$

болатуғынлығы келип шығады, яғный (4) избе-изликтің n шексизликке умтылғандағы шеги базы бир функцияға умтылады. Егер бул функцияны $x^0(t, \varepsilon)$ деп белгилесек

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, \varepsilon) = x^0(t, \varepsilon) \quad (6)$$

онда бул $x^0(t, \varepsilon)$ функциясы (3) интеграллық теңлемениң шешими болып табылады, яғный

$$x^0(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x^0(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon}{2\omega} \int_0^{T_1} f(s, x^0(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

хәм сонлықтанда бул $x = x^0(t, \varepsilon)$ функциясы (1) теңлемениң T_1 периодлы шешими болып табылады.

Егер дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы қәтеликти баҳалайтуғын болсақ, онда (5) ден k шексизликке умтылғандағы шек алып хәм (6) ны есапқа алсақ

$$\begin{aligned} |x^0(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^n M \left(1 + \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K + \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^n M \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K} = \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^n \frac{\varepsilon T_1 M}{2\omega - \varepsilon T_1 K} \end{aligned}$$

яғный

$$|x^0(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| \leq \left(\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K \right)^n \frac{\varepsilon T_1 M}{2\omega - \varepsilon T_1 K} \quad (7)$$

теңсизлиги менен баҳаланады.

Солай етип, алынған нәтижелерди жуўмақлай отырып төмендеги теореманың орынлы болатуғынлығына исенемиз.

Теорема. Мейли екінші тәртіпті квазисызықты (1) дифференциаллық теңлемде $f(t, x)$ функциясы t аргумент бойынша T периодлы хәм (2) областында үзлексіз функция болсын хәм соның менен бирге бул функция

$$|f(t, x)| \leq M$$

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$$

шәртлерин қанаатландыратуғын функция болсын.

Мейли $f(t, x)$ функциясының T периоды ушын $\cos(\omega Tm) = -1$ теңлигин қанаатландыратуғын m саны бар болсын хәм соның менен бирге ε параметриниң базы бир мәнислеринде

$$\frac{\varepsilon T_1}{2\omega} K < 1, \quad \frac{\varepsilon}{2\omega} MT \leq a$$

теңсизликлери орынлы болсын.

Онда (4) избе-излик пенен анықланатуғын $x_n(t, \varepsilon)$ функциялар избе-излиги m шексизликке умтылғанда (1) теңлемениң $T_1 = Tm$ периодлы шешимине умтылады хәм дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы кәтелик (7) формула менен анықланады.

§3. Квазисызыклы толқын теңлемелери ушын T_2 периодлы шешимлер

Мейли екінші тәртіпті квазисызыклы дифференциаллық теңleme менен берілген

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x) \quad (1)$$

толқын теңлемесін қарастырайық, бұл жерде $f(t, x)$ функциясы t аргумент бойынша T периодлы хәм айтайық

$$-\infty < t < \infty, \quad |x| \leq a \quad (2)$$

областында үзліксіз, берілген функция, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Алдыңғы параграфтағы сыяқлы, бұл параграфта периоды ε ға ғәрезлі болмаған периодқа ийе шешимді жууық дүзиудің басқаша схемаларын хәм оның қәтелигін бахалау мәселесін қарастырамыз.

Мейли $f(t, x)$ функциясы (2) областта оң M саны менен шегараланған хәм оң K саны бойынша Липшиц шәртин қанаатландыратуғын функция болсын, яғный

$$|f(t, x)| \leq M$$

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$$

шәртлерін қанаатландыратуғын функция болсын.

Мейли $f(t, x)$ функциясының T периоды ушын $\cos(\omega Tn) = 1$ теңлигін қанаатландыратуғын n саны бар болсын. Онда бирінші параграфта келтирилген мағлыұматлар бойынша $T_2 = Tn$ саны (1) теңлемениң периодлы шешиминің ең киши оң периоды болады хәм бұл периодлы шешим бирінші параграфтағы (9) формулаға тийкарланған халда

$$x(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_0^{T_2} f(s, x(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds \quad (3)$$

интеграллық теңлемесін шешиу арқалы анықланады, бұл жерде $T_2 = nT$ хәм n

саны $\cos(\omega Tn) = 1$ теңлигин қанаатландыратуғын натурал санлардың ең киши мәниси.

Бул интеграл теңлемениң шешими T_2 периодқа ийе болатуғынлығы бизге мәлим хәм соның менен бирге

$$\int_0^{T_2} f(s, x(s, \varepsilon)) \sin \omega s \, ds = 0$$

$$\int_0^{T_2} f(s, x(s, \varepsilon)) \cos \omega s \, ds = 0$$

теңлиги орынланған жағдайда (3) интеграллық теңлемениң шешими (1) теңлемениде қанаатландырады, яғный соңғы шәрт орынлынған жағдайда (1) теңлемениң периодлы шешимин табыў мәселеси (3) интеграллық теңлемени шешийге алып келинеди.

Мейли дәслепки жуўықласыў ретинде $x_0(t) = C \sin(\omega t + \varphi)$ функциясы болсын деп уйғарайық хәм (3) интеграллық теңлемени

$$x_{n+1}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) \, ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) \, ds \quad (4)$$

формуласы жәрдемінде жуўық шеший мәселесин қарастырайық, бул жерде $n = 0, 1, 2, \dots$.

(4) формула бойынша биринши жуўықласыў

$$x_1(t, \varepsilon) = x_0(t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s) \, ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s) \, ds$$

формуласы менен анықланып, буннан пайдаланған ҳалда екинши жуўықласыў

$$x_2(t, \varepsilon) = x_0(t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) \, ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) \, ds$$

хәм келеси жуўықласыў

$$x_3(t, \varepsilon) = x_0(t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_2(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x_2(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

формулалары менен анықланады.

Процессти усылайынша даўам етсек хәр бир жуўықласыў

$$x_{n+1}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x_n(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

формуласы менен анықланады, бул жерде $n = 0, 1, 2, \dots$

Енди жоқарыдағы көринислерде анықланатуғын жуўықласыўларды баҳаласақ

$$\begin{aligned} & |x_1(t, \varepsilon) - x_0(t)| \leq \\ & \leq \left| \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t |f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s)| ds - \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_0^{T_2} |f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s)| ds \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2} \right) \int_0^t |f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s)| ds + \\ & + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} |f(s, x_0(s)) \sin \omega(t-s)| ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2} \right) \int_0^t M ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} M ds \leq \frac{\varepsilon}{\omega} M \left[\left(1 - \frac{t}{T_2} \right) \int_0^t ds + \frac{t}{T_2} \int_t^{T_2} ds \right] = \\ & = \frac{\varepsilon}{\omega} M \alpha_1(t) \leq \frac{\varepsilon T_2}{2\omega} M \\ & |x_2(t, \varepsilon) - x_0(t)| \leq \\ & \leq \left| \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t |f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_0^{T_2} |f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t |f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds + \\
&+ \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} |f(s, x_1(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t M ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} M ds \leq \frac{\varepsilon}{\omega} M \left[\left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t ds + \frac{t}{T_2} \int_t^{T_2} ds \right] = \\
&= \frac{\varepsilon}{\omega} M \alpha_1(t) \leq \frac{\varepsilon T_2}{2\omega} M
\end{aligned}$$

яғный, барлық жуықласыўлар ушын

$$|x_n(t, \varepsilon) - x_0(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\omega} M \alpha_1(t) \leq \frac{\varepsilon T_2}{2\omega} M$$

Мейли $\left[-a + \frac{\varepsilon}{2\omega} MT; a - \frac{\varepsilon}{2\omega} MT\right]$ көплиги бос емес көплик болсын,

онда

$x_0(t) \in \left[-a + \frac{\varepsilon}{2\omega} MT; a - \frac{\varepsilon}{2\omega} MT\right]$ ушын ҳәр бир жуықласыўшы функция (2)

областан шығып кетпейди.

Енди биринши ҳәм екинши жуықласыўлар арасындағы болатуғын айырманы баҳаласак

$$\begin{aligned}
|x_2(t, \varepsilon) - x_1(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t |f(s, x_1(s, \varepsilon)) - f(s, x_0(s))| |\sin \omega(t-s)| ds + \\
&+ \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} |f(s, x_1(s, \varepsilon)) - f(s, x_0(s))| |\sin \omega(t-s)| ds \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t K |x_1(s, \varepsilon) - x_0(s)| ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} K |x_1(s, \varepsilon) - x_0(s)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t K \frac{\varepsilon}{\omega} M \alpha_1(s) ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_1} K \frac{\varepsilon}{\omega} M \alpha_1(s) ds = \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 KM \left[\left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t \alpha_1(s) ds + \frac{t}{T_2} \int_t^{T_1} \alpha_1(s) ds \right] = \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 KM \alpha_2(t)
\end{aligned}$$

Процессти усылайынша даўам етсек, онда

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t |f(s, x_n(s, \varepsilon)) - f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds + \\
&+ \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} |f(s, x_n(s, \varepsilon)) - f(s, x_{n-1}(s, \varepsilon))| |\sin \omega(t-s)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t K |x_n(s, \varepsilon) - x_{n-1}(s, \varepsilon)| ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} K |x_n(s, \varepsilon) - x_{n-1}(s, \varepsilon)| ds \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^n K^n M \alpha_n(s) ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^n K^n M \alpha_n(s) ds = \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+1} K^n M \left[\left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t \alpha_n(s) ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} \alpha_n(s) ds \right] = \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+1} K^n M \alpha_{n+1}(t)
\end{aligned}$$

хәм тағы басқа. Енди

$$\alpha_{n+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T_2}\right) \int_0^t \alpha_n(s) ds + \frac{\varepsilon t}{\omega T_2} \int_t^{T_2} \alpha_n(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

теңлиги менен анықланатуғын $\alpha_n(t)$ функциялар избе-излигинин

$$\alpha_{n+1}(t) \leq \frac{T_2^n}{\pi^n} \tilde{\alpha}_1(t), \quad \tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\pi}{3} \alpha_1(t) = \frac{2\pi}{3} t \left(1 - \frac{t}{T_2}\right)$$

хәм

$$\tilde{\alpha}_1(t) \leq \frac{\pi T_2}{6}$$

теңсизликлерин қанаатландыратуғынлығын пайдалансақ, онда

$$\begin{aligned} |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| &\leq |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_{n+k-1}(t, \varepsilon)| + \dots + |x_{n+1}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+k} K^{n+k-1} M \alpha_{n+k}(t) + \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+k-1} K^{n+k-2} M \alpha_{n+k-1}(t) + \\ &+ \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+1} K^n M \alpha_{n+1}(t) \leq \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+k} K^{n+k-1} M \frac{T_2^{n+k-1}}{\pi^{n+k-1}} \tilde{\alpha}_1(t) + \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+k-1} K^{n+k-2} M \frac{T_2^{n+k-2}}{\pi^{n+k-2}} \tilde{\alpha}_1(t) + \\ &+ \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{n+1} K^n M \frac{T_2^n}{\pi^n} \tilde{\alpha}_1(t) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left[\left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^{n+k-1} + \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^{n+k-2} + \dots + \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^n \right] M \tilde{\alpha}_1(t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^n \left[\left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^{k-1} + \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K\right)^{k-2} + \dots + 1 \right] M \tilde{\alpha}_1(t) \end{aligned}$$

Буннан n шексизликке умтылғандағы шекке өтсек хәм ε параметриниң

$$\left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right) < 1$$

шәртин қанаатландыратуғын мәнислерин пайдалансақ, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^n = 0 \quad (5)$$

болып, буннан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| = 0$$

болатуғынлығы келип шығады, яғный (4) избе-изликтің n шексизликке умтылғандағы шеги базы бир функцияға умтылады. Егер бул функцияны $x^0(t, \varepsilon)$ деп белгилесек

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t, \varepsilon) = x^0(t, \varepsilon) \quad (6)$$

болып, бул $x^0(t, \varepsilon)$ функциясының (3) интеграллық теңлемесиниң шешими болып табылатуғынлығын көрсетеди, яғный

$$x^0(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^t f(s, x^0(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds - \frac{\varepsilon t}{T_2 \omega} \int_0^{T_2} f(s, x^0(s, \varepsilon)) \sin \omega(t-s) ds$$

Егер дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы қәтеликти баҳалайтуғын болсақ, онда $|x_{n+k}(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)|$ дан k шексизликке умтылғандағы шек алып хәм (5) ни есапқа алсақ, онда бул қәтелик

$$|x^0(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^n \left[1 + \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right) + \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^2 + \dots \right] M \tilde{\alpha}_1(t) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^n \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K} M \tilde{\alpha}_1(t) = \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^n \frac{\varepsilon \pi}{\omega \pi - \varepsilon T_2 K} M \tilde{\alpha}_1(t)$$

яғный

$$\left| x^0(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon) \right| \leq \left(\frac{\varepsilon T_2}{\omega \pi} K \right)^n \frac{\varepsilon \pi}{\omega \pi - \varepsilon T_2 K} M \tilde{\alpha}_1(t) \quad (7)$$

теңсизлиги менен баҳаланады.

Солай етип, алынған нәтижелерди жуўмақлай отырып төмендеги теореманың орынлы болатуғынлығына исенемиз.

Теорема. Мейли екінші тәртіпті квазисызықты (1) дифференциаллық теңлемде $f(t, x)$ функциясы t аргумент бойынша T периодлы хәм (2) областында үзлексіз функция болсын хәм соның менен бирге бул функция

$$|f(t, x)| \leq M$$

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq K |x_2 - x_1|$$

шәртлерін қанаатландыратуғын функция болсын.

Мейли $f(t, x)$ функциясының T периоды ушын $\cos(\omega T m) = -1$ теңлигін қанаатландыратуғын m саны бар болсын хәм соның менен бирге ε параметринің bazı бир мәніслерінде

$$\frac{\varepsilon T_2}{2\omega} K < 1$$

теңсизлиги орынлы болсын хәм $\left[-a + \frac{\varepsilon}{2\omega} MT; a - \frac{\varepsilon}{2\omega} MT \right]$ көплиги бос емес көплік болсын.

Онда (4) избе-излік пенен анықланатуғын $x_n(t, \varepsilon)$ функциялар избе-излиги m шексизлікке умтылғанда (1) теңлемнің $T_2 = Tn$ периодлы

шешимине умтылады хәм дәл шешим менен жуўық шешим арасындағы қәтелик (7) формула менен анықланады.

II-БАП. Екинши тәртіпті автономлы квазисызықты толқын теңлемелерінің периодлы шешімдері

Дифференциаллық теңлемелерді жуық шешіудің пайда болған аналитикалық методдары ишіндегі ең нәтижелі усуллардың бири асимптотикалық усуллар болып, бул теориядағы киши параметр проблемасы тербеліслер теориясы ушын жаңа методдарлы ислең шығыўға алып келди.

Тербеліс процесслері улыўма жағдайда оғада курамалы болып, айырым ўақытлары оларды сүүретлең математикалық моделин дүзиў

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$$

түриндегі киши параметрге ийе автономлы толқын теңлемесине алып келинеди. Бундай мәселелердің айырымларында теңлемениң оң тәрәпи басқа ағзаларға салыстырғанда жетерли дәрежеде киши деп есаплаўға болатуғын базы-бир ағзалар топарын ажыратыў мүмкиншилигине ийе болады. Бул ағза қарастырылып атырған мәселе ушын айтарлықтай дәрежеде мағанаға ийе емес деп есапланылып, теңлемеден алып тасланады хәм нәтийжеде қарастырылып атырған теңлемеге салыстырмалы әпиўайы болған теңлеме пайда болады.

Бул усул периодлы шешімлерди табыўдың Пуанкаре усулының тийкарына жатады. Қарастырылып атырған физикалық системаның математикалық қойылыўына дәл ерсисий ушын Пуанкаре „киши параметр” түсинигин киритеди. Дәслең шешімнің периодына сай белгилеў жасаў арқалы теңлеме автоном жағдайынан қутқарылады хәм периодлы шешім жоқарыда айтылған схема менен изертленеди.

Бул усулды оң жағы киши параметрге анық түрде ғәрезли болған

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt})$$

түриндегі теңлемелерге қолланыў айтарлықтай нәтийже береди.

§1. Екинши тәртипли автономлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери

Мейли екинши тәртипли автономлы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(x, \frac{dx}{dt}) \quad (1)$$

толқын теңлемесиниң

$$x(t + T) = x(t) \quad (2)$$

шәртин қанаатландыратуғын периодлы шешимин табыў мәселесин қарастырайық, бул жерде $f(x, y)$ функциясы, айтайық базы-бир интервалда ямаса пүтин сан туўрысында анықланған, берилген функция. Бул теңлемениң периодлы шешимин табыў усылларының бири, оны автономлы болмаған теңлемеге алып келиў хәм пайда болған теңлемениң периодлы шешимин белгили усыллар жәрдемінде анықлаў болып табылады. Усы мақсетте (1) теңлемедә

$$t = \frac{\tau}{\omega}(1-a), \quad a \neq 1, \quad a = \text{const}$$

белгилеўин киритемиз. Онда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\omega}(1-a) \frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega}(1-a) \frac{dx}{d\tau} \right) = \frac{1}{\omega}(1-a) \frac{d^2x}{d\tau^2} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\omega^2}(1-a)^2 \frac{d^2x}{d\tau^2}$$

болып, буннан (1) теңлеме

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1-a)^2 x = \left(\frac{1-a}{\omega} \right)^2 f(x, \frac{\omega}{1-a} \frac{dx}{d\tau})$$

ямаса

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1-a)^2 x = \tilde{f}(x, \frac{dx}{d\tau}) \quad (3)$$

түриндеги теңлемеге ийе боламыз, бул жерде

$$\tilde{f}(x, \frac{dx}{d\tau}) = \left(\frac{1-a}{\omega} \right)^2 f(x, \frac{\omega}{1-a} \frac{dx}{d\tau})$$

Енди (3) теңлемениң 2π периодлы шешими

$$x(\tau) = u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau,$$

$$\frac{dx(\tau)}{dt} = -u(\tau) \sin \tau + \vartheta(\tau) \cos \tau$$

формуласы бойынша табылады.

Соңғы қатнасты хәм (3) теңлемени есапқа алсақ, онда

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} \cos \tau + \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \sin \tau = 0,$$

$$-\frac{du(\tau)}{d\tau} \sin \tau + \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \cos \tau = (2a - a^2)[u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau] + F(\tau, a, u, \vartheta),$$

$$F(\tau, a, u, \vartheta) = \tilde{f}(u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau, -u(\tau) \sin \tau + \vartheta(\tau) \cos \tau)$$

теңдиклерине ийе боламыз.

Соңғы теңдикти $\frac{du(\tau)}{d\tau}$ хәм $\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}$ ларға қарата шешсек

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = -(2a - a^2) \left[\frac{1}{2} u(\tau) \sin 2\tau + \vartheta(\tau) \sin^2 \tau \right] - F(\tau, a, u, \vartheta) \sin \tau,$$

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = -(2a - a^2) \left[u(\tau) \cos^2 \tau + \frac{1}{2} \vartheta(\tau) \sin 2\tau \right] + F(\tau, a, u, \vartheta) \cos \tau$$

системасына ийе боламыз.

Бул системаны қысқаша

$$\frac{dy}{dt} = P(\tau, a, y) \quad (4)$$

түрінде де жазыўға болады, бул жерде y хәм P лар еки өлшемли векторлар хәм соның менен бирге

$$P(\tau + 2\pi, a, y) = P(\tau, a, y)$$

Солай етип (3) автономлы толқын теңлемесинің 2π периодлы шешимін изертлеу мәселесі, автономлы болмаған (4) системаның 2π периодлы шешимін табу мәселесіне алып келинді.

Енді соңғы автономлы (4) системаның периодлы шешимін изертлеуде ортандырыу ұсылын қолланамыз.

Мейли

$$\overline{P(\tau, a, \xi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau, a, \xi) d\tau$$

деп белгилейік хәм

$$\frac{d\xi}{dt} = P_0(a, \xi) \quad (5)$$

системасын қарастырайық. Соңғы система (4) система үшін ортандырыушы система деп аталады, бул жерде

$$P_0(a, \xi) = \overline{P(\tau, a, \xi)}$$

(5) системаның

$$P_0(a, \xi) = 0 \quad (6)$$

системасын шешіу арқалы анықланатуғын $\xi = \xi_0$ квазистатистикалық шешими деп аталатуғын шешими үш a, ξ_1, ξ_2 белгисизлерге қарата берілген еки теңлемеден ибарат (6) системадан анықланады. (6) система анық сайлап алынған параметр a ның $a = a_0 \neq 1$ мәнисінде $\xi = \xi_0$ квазистатистикалық шешимге ийе болыуы мүмкин. Сонлықтан параметр a ның $a = a_0 \neq 1$ мәнисі берілген автономлы (1) системаның изленип атырған периодлы шешиминің

$$T = \frac{2\pi}{\omega} (1 - a_0)$$

периодын анықлайды.

(6) система және бир характерли айрықшалыққа ийе. Мейли $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ болсын. (6) системаны кең мағанада жазсақ

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2a)\xi_2 - \overline{F(\tau, a, \xi_1, \xi_2) \sin \tau} = 0,$$

$$\frac{1}{2}(2a - a^2)\xi_1 - \overline{F(\tau, a, \xi_1, \xi_2) \cos \tau} = 0$$

болып, буннан $\xi_2 = 0$ десек, онда a, ξ_1 белгисизлерине қарата төмендеги

$$\overline{F(\tau, a, \xi_1, 0) \sin \tau} = 0,$$

$$\frac{1}{2}(2a - a^2)\xi_1 - \overline{F(\tau, a, \xi_1, 0) \cos \tau} = 0 \quad (7)$$

системасына ийе боламыз. Егер (7) система (ξ_1^0, a_0) шешимине ийе болса, онда усының менен бирге $P_0(a, \xi)$ сәулелендириуінің жекеленген точкасы анықланады. Дара жағдайда, (7) системаның биринши теңлемеси параметр a ның қәлеген мәнисинде $\xi_1 = \xi_1^0 \neq 0$ шешимге ийе болса, онда бул системаның екинши теңлемеси излениўши

$$T = \frac{2\pi}{\omega}(1 - a_0)$$

периодты табыў ушын керекли a параметрин анықлайды.

§2. Екінші тәртіпті киші параметрге ийе автономлы толқын теңлемелердің периодлы шешімлері

Мейли екінші тәртіпті киші параметрге ийе автономлы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}) \quad (1)$$

толқын теңлемесінің

$$x(t + T) = x(t) \quad (2)$$

шәртин қанаатландыратуғын периодлы шешимін табыў мәселесін қарастырайық, бул жерде $f(x, y)$ функциясы, айтайық базы-бир интервалда ямаса пүтин сан туўрысында анықланған, берилген функция. Бул теңлемениң периодлы шешимінің аналитикалық функциялар классында бар болыўы Пуанкаре усылы жәрдемінде, ал тегис функциялар классында болса Крылов-Боголюбов-Митропольскийдің асимптотикалық усыллары жәрдемінде, сондай-ақ Самойленконың санлы-аналитикалық усыллары жәрдемінде жеткиликли дәрежеде үйренілген.

Биз бул параграфта автономлы толқын теңлемелердің периодлы шешімлерін изертлеўдің алдыңғы параграфтағы қолланған усылларын пайдаланып (1) теңлемениң периодлы шешимін изертлеў мәселелерін қарастырамыз. Буның ушын (1) системаның соныңдай периодлы шешимін, яғный $\varepsilon = 0$ ушын биртеккли

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

теңлемениң периодлы шешиміне айланатуғын периодлы шешімлерін изертлеймиз. Бундай периодлы шешімнің периодлары улыўма алғанда ε параметрге ғәрезли болады:

$$T = T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\lambda(\varepsilon)}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\varepsilon) = \omega \quad (3)$$

бул жерде $\lambda(\varepsilon)$ ны периодтың жийилиги деп есаплаймыз. Усы мақсетте $\lambda(\varepsilon)$ ны

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\omega}{1 - \varepsilon\nu}, \quad \varepsilon\nu \neq 1$$

түрінде аламыз хәм (1) теңлемедә

$$t = \frac{\tau(1 - \varepsilon\nu)}{\omega} \quad (4)$$

белгилеўин жасаймыз. Онда (1) теңлеме

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 - \varepsilon\nu)^2 x = \varepsilon(1 - \varepsilon\nu)^2 \omega^{-2} f(x, \frac{\omega}{1 - \varepsilon\nu} \frac{dx}{d\tau}) \quad (5)$$

түрине ийе болады. Бул жағдайда бурынғы өзгериўшиниң $t = T$ мәнисине жаңа өзгериўшиниң $\tau = 2\pi$ мәниси сәйкес келеди, яғный (5) теңлемениң изленип атырған периодлы шешиминиң периоды жаңа өзгериўши аргументке қарата фиксирленген хәм ол 2π болады.

Алдынғы баптың соңғы үшінши параграфында қарастырылған усыл үйренилип атырған теңлеме автономлы болған жағдайда да, автономлы болмаған жағдайда да орынлы болады. Соның менен бирге бул усыл жәрдемінде табылған период сәйкес биртеккли теңлемениң шешиминиң периоды менен сәйкес келеди. Сонлықтан соңғы (5) теңлемени

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \varepsilon(2\nu - \varepsilon\nu^2)x + \varepsilon(1 - \varepsilon\nu)^2 \omega^{-2} f(x, \frac{\omega}{1 - \varepsilon\nu} \frac{dx}{d\tau})$$

ямаса

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = P(x, \frac{dx}{d\tau}) \quad (6)$$

көринисте жазып аламыз, бул жерде

$$P(x, \frac{dx}{d\tau}) = \varepsilon(2\nu - \varepsilon\nu^2)x + \varepsilon(1 - \varepsilon\nu)^2 \omega^{-2} f(x, \frac{\omega}{1 - \varepsilon\nu} \frac{dx}{d\tau})$$

Бизге мәлим биртеккли

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = 0$$

теңлемениң шешиминиң τ бойынша периоды 2π ге тең. Сонлықтан (5) теңлемениң периодлы шешимин изертлеу мәселеси (6) теңлемениң 2π периодлы шешимин дүзиу мәселесине алып келинеди хәм бул периодлы шешим алдынғы баптың соңғы үшінши параграфына мууапық

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \int_0^\tau P(x(s), \frac{dx(s)}{ds}) \sin(\tau - s) ds - \frac{\tau}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x(s), \frac{dx(s)}{ds}) \sin(\tau - s) ds$$

интеграл теңлемеси жәрдемінде әмелге асырылады, бул жерде

$$x_0(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau$$

Енди (5) теңleme ушын сәйкес биринши тәртипли стандарт системаны дүземиз. Оның ушын (5) теңlemeге алдынғы параграфтағы сыяқлы

$$x(\tau) = u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau,$$

$$\frac{dx(\tau)}{dt} = -u(\tau) \sin \tau + \vartheta(\tau) \cos \tau$$

белгилеуин киритемиз хәм нәтийжеде

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} \cos \tau + \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \sin \tau = 0,$$

$$-\frac{du(\tau)}{d\tau} \sin \tau + \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \cos \tau + \varepsilon(\varepsilon\nu^2 - 2\nu)[u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau] = \bar{f}(\tau, \nu, u, \vartheta)$$

бул жерде

$$\bar{f}(\tau, \nu, u, \vartheta) = (1 - \varepsilon\nu)^2 \omega^{-2} f(u(\tau) \cos \tau + \vartheta(\tau) \sin \tau, \frac{\omega}{1 - \varepsilon\nu} (-u(\tau) \sin \tau + \vartheta(\tau) \cos \tau))$$

Бул соңғы системадан

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \varepsilon\alpha(\varepsilon) \left[\frac{1}{2} u(\tau) \sin 2\tau + \vartheta(\tau) \sin^2 \tau \right] - \bar{f}(\tau, \nu, u, \vartheta) \sin \tau = \bar{P}_1(\tau, \nu, u, \vartheta)$$

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = -\varepsilon\alpha(\varepsilon) \left[u(\tau) \cos^2 \tau + \frac{1}{2} \vartheta(\tau) \sin 2\tau \right] + \bar{g}(\tau, \nu, u, \vartheta) \cos \tau = \varepsilon \bar{P}_2(\tau, \nu, u, \vartheta)$$

ямаса қысқартылған формада

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon \bar{P}(\tau, \nu, y) \quad (7)$$

деп жазыуға болады, бул жерде

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon \nu^2 - 2\nu$$

хәм $y, \bar{P}$ лар еки өлшемлі векторлар, $y = (u, \vartheta)$, $\bar{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$.

Мейли (7) система ν дың базы-бир $\nu = \nu_0$ мәнисинде 2π периодлы шешимге ийе болсын. Онда автономлы (1) теңлеме

$$T = \frac{2\pi}{\omega} (1 - \varepsilon \nu_0)$$

периодқа ийе болған шешимге ийе болады хәм бул шешим

$$x(t) = u \left(\frac{\omega t}{1 - \varepsilon \nu_0} \right) \cos \frac{\omega t}{1 - \varepsilon \nu_0} + \vartheta \left(\frac{\omega t}{1 - \varepsilon \nu_0} \right) \sin \frac{\omega t}{1 - \varepsilon \nu_0}$$

көринистеги шешимге ийе болады.

Теорема. Мейли (7) система ν дың базы-бир $\nu = \nu_0$ мәнисинде $-a \leq x \leq a$, $-b \leq \frac{dx}{dt} \leq b$ областында 2π периодлы шешимге ийе болсын.

Онда (1) теңлеме $\varepsilon = 0$ дың жеткиликлі дәрежеде кишкене дөгерегинде ε нан үзлексіз ғәрезлі болған

$$T = \frac{2\pi}{\omega} (1 - \varepsilon \nu_0)$$

периодлы шешимге ийе болыуы ушын ν дың базы-бир $\nu = \nu_0$ мәнисинде орталандырыушы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \overline{\bar{P}(\tau, \nu_0, \xi)}$$

системасы

$$-a \leq \xi_{01} \cos \tau + \xi_{02} \sin \tau \leq a,$$

$$-b \leq \xi_{01} \sin \tau + \xi_{02} \cos \tau \leq b$$

шәртин қанаатландыратуғын $\xi = \xi_0$ теңсалмақтық жағдайына ийе болыуы зәрүрли.

Мысал ушын

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} \quad (8)$$

түриндеги Ван-дер-Пол теңлемесин қарастырайық. Бул жағдайда алдынғы биринши параграфтағы (7) теңлемелер системасы (8) теңлеме ушын

$$\overline{-\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{8}\xi_1^3 + \frac{1}{2}\xi_1 \cos 2t - \frac{1}{8}\xi_1^3 \cos 4t = 0}$$

$$\overline{\frac{1}{2}(2\nu_0 - \varepsilon\nu_0^2)\xi_1 + \frac{1}{2}(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_1^3)\sin 2t + \frac{1}{8}\xi_1^3 \sin 4t = 0}$$

көриниске ийе болады.

Енди орталандырыўды пайдалансақ

$$\xi_1(1 - \frac{1}{4}\xi_1^2) = 0$$

$$\nu_0(2 - \varepsilon\nu_0) = 0$$

теңлемелер системасына ийе боламыз. Ал $\xi_{10} = 0$ ушын (8) түриндеги Ван-дер-Пол теңлемеси ноллик шешимге ийе болатуғын болғанлықтан, $\xi_{10} = 2$, $\xi_2 = 0$, $\nu_0 = 0$ ушын бул теңлемениң бирден бир 2π периодлы шешимине ийе боламыз.

§3. Квазисызықты дифференциаллық теңлемелер үшін киши параметрлер методы

Мейли келеси ўақытлары мысал сыпатында пайдаланыўға болатуғын, сыртқы эззи күштиң тәсири изленип атырған шешимге пропорционал болған

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon x \quad (1)$$

толқын теңлемесин алып, анықлық ушын айтайық

$$x(0) = A, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0 \quad (2)$$

басланғыш шәртин қанаатландыратуғын шешимди изертлеў мәселесин карастырайық, бул жерде ε киши параметр.

Егер берилген (1),(2) Коши мәселесин тиккелей шешетуғын болсақ, онда шешим

$$x(t) = A \cos \sqrt{\omega^2 - \varepsilon} t \quad (3)$$

болады. Шешимнің бул көринисинен сериппелилик коэффициентиниң өзгериўи менен, яғный ε киши параметрдиң өзгериўи менен тербелис жийилигиниңде өзгериўин көриўге болады.

Егер (1), (2) мәселеге киши параметрдиң стандарт усылын қоллансақ, яғный шешимди

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (4)$$

түринде излесек, онда (4) ни (1),(2) ге койыў арқалы $x_0(t)$ ға қарата

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0, \quad x_0(0) = A, \quad \frac{dx_0(0)}{dt} = 0$$

Коши мәселесине ийе болып, буннан

$$x_0(t) = A \cos \omega t$$

шешимге ийе боламыз, ал $x_1(t)$ ға қарата

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = x_0(t) = A \cos \omega t$$

$$x_1(0) = 0, \quad \frac{dx_1(0)}{dt} = 0$$

Коши мәселесине ийе болып, буның шешими

$$x_1(t) = \frac{A}{2\varepsilon} t \sin \omega t$$

түрине ийе болады.

Егер табылған $x_0(t)$ хәм $x_1(t)$ лардың бул жоқарыдағы мәнислерин (4) деги орынларына апарып қойсақ, онда кишкене қәтелик пенен

$$x(t) \approx A \cos \omega t + \frac{A}{2\varepsilon} t \sin \omega t \quad (5)$$

түріндеги жуўық шешимге ийе боламыз. Бул алынған (5) нәтийжени (1), (2) мәселеге избе-из жуўықласыўлар усылын қолланған ўақытта биринши жуўықласыўдан соң ақ алыўға болады.

Бул жерде тийкарынан айта кететин нәрсе, бизди $x(t)$ шешимнің шексиз ўақыт интервалындағы, айтайық $t \rightarrow \infty$ дағы жағдайы қызықтырады. Соңғы (5) жуўық шешим бул жағдай ҳаққында улыўма дурыс емес, салыстырмалы $x_0(t)$ дан да жаман болған нәтийже береді. Ҳақыйқатында да (5) ниң оң жағындағы екинши ағза кишкене $|\varepsilon| \neq 0$ ушын хәм $t \rightarrow \infty$ да амплитуда бойынша шексиз өседі хәм сонлықтан ол биринши ағзаны басып кетеді. Бундай ағзалар тербелислер теориясында секулярлық ағзалар деп аталады. Нәтийжеде қарастырылып атырған (1), (2) мәселеде резонанс аўхал болғандай болып сезиледи, ал бирақ оның (3) шешими резонанстың жоқ екенлигин көрсетеди.

(4) деги келеси жуўықласыўларды есапласақ, онда

$$x_2(t) = -\frac{A}{8\omega^2} t^2 \cos \omega t + \frac{A}{8\omega^2} t^2 \sin \omega t$$

болып, бул бурынғыданда бетер жаман нәтижени көрсетеди. Ҳақыйқатында да $t \rightarrow \infty$ да бул $x_1(t)$ ға салыстырғанда бир қанша тезирек өседі.

(4) деги шешимди (3) дәл шешимди ε ның дәрежелери бойынша қатарға жайыў арқалыда алыўға болады. Буның ушын

$$\sqrt{\omega^2 - \varepsilon} = \omega - \alpha$$

белгилеўин жасаймыз хәм α ны $\varepsilon = 0$ дөгерегинде қатарға жаямыз

$$\alpha = \omega - \omega \left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2\omega} + \frac{\varepsilon^2}{8\omega^3} + \frac{\varepsilon^3}{16\omega^5} + \dots \quad (6)$$

Онда

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega - \alpha) t = A \cos \omega t \cos \alpha t + A \sin \omega t \sin \alpha t = \\ &= A \cos \omega t \left(1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^4 t^4}{24} - \dots \right) + A \sin \omega t \left(\alpha t - \frac{\alpha^3 t^3}{6} + \frac{\alpha^5 t^5}{120} - \dots \right) \end{aligned}$$

болып, α ның орнына оның (6) дағы мәнислерин қойсақ, нәтижеде (4) деги шешимге ийе боламыз. Буннан резонансты еслеўши секуляр ағзалардың пайда болыўы түсиникли болады: $\cos t$ хәм $\sin t$ функциялары ушын Маклорен қатарларының дара қосындылары шекли интервалдағы t ушын бул функцияларды жақсы сүўретлейди, ал $t \rightarrow \infty$ ушын улыўма жарамсыз болады.

Жоқарыда қарастырылған (1),(2) мәселеге салыстырғанда курамалырақ мәселелердің шекли көринистеги дәл шешимин көрсетиў қыйын, сонлықтан секулярлық ағзалардың себебинен пайда болатуғын резонанс ҳаққында қыял жүритиў қыйын болады. Бундай ағзалар тийкарынан автономлы системалардың тербелисин киши параметрлер усылының анаў ямаса мынаў варианты менен изертлеў барысында пайда болады. Әсиресе бул жағдай ноллик жуўықласыў ретинде надурис анықланған жийиликти алған ўақытта пайда болады. Буның себебин $|\varepsilon| > 0$ қаншелли киши болса да

$$\cos(\omega + \varepsilon)t - \cos \omega t$$

айырмасының $t \rightarrow \infty$ да киши болмайтуғынлығынан сезиўге болады.

Енди усы қарастырылған мәселеге тийкарланған ҳалда улыўма болған

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \frac{dx}{dt}) \quad (7)$$

теңлемесин қарастырайық, ε киши параметр.

Шешимди (4) көринисте

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (8)$$

түринде изертлеймиз ҳәм (8) ни (7) ге қойып, алынған бирдейликтен ε ның дәрежелери бойынша салыстырыў арқалы

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = f(x_0, \frac{dx_0}{dt})$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = f_x(x_0, \frac{dx_0}{dt})x_1 + f_{x'}(x_0, \frac{dx_0}{dt})\frac{dx_1}{dt}$$

$$- \dots - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots - \dots$$

Бул методты қолланыўда жоқарыда айтылған секулярлық ағзалардың шешимде пайда болатуғынын жеңил көриўге болады.

Жоқарыда қарастырылған мысалды анализлей отырып, биз $x(t)$ ның киши параметрдің дәрежелери бойынша қатарға жайылмасы жәрдеминде жуўық шешимлерди алыўдың бул усылының ўақыттың тек оғада киши аралығы ушын жарамлы екенлигин көремиз.

Усыған байланысly сызықлы емес дифференциаллық теңлемелердің шешимлериниң үлкен ўақыт аралықлары ушын ямаса шексиз ўақыт аралығы ушын изертлеўге жарамлы болған усыллар ислеп шығылған. Солардың бири Линдштедт_Пуанкаре усылы болып табылады. Бул метод жағдайында (7) теңleme өзгериўшилерди алмастырыў жәрдеминде 2π периодқа ийе

периодлы шешимге ийе болатуғын автоомиялы емес теңлемеге алып келинеди хәм соннан кейин шешим (8) формула жәрдемінде изленеди.

Изленип атырған шешимнің периоды алдын ала бизге белгисиз болғанлықтан бул периодты

$$T + \alpha = \frac{2\pi}{\omega} + \alpha$$

түрине ийе болады деп қабыл етиўге болады, бул жерде $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ белгисиз болған ε киши параметрдің функциясы хәм ол $\varepsilon = 0$ ушын нолге айланады.

Онда соңғы периодты

$$T + \alpha = \frac{2\pi}{\omega} + \alpha = \frac{2\pi}{\omega} (1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots) \quad (9)$$

түрінде таңлап аламыз хәм

$$t = \frac{\tau}{\omega} (1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots) \quad (10)$$

белгилеўин киритемиз.

Онда (7) теңлемениң (9) түріндеги периодлы шешимине

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots)^2 = \\ = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \omega(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots)^{-1} \frac{dx}{d\tau}\right) (1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

теңлемесиниң ε нан ғәрезсиз 2π периодқа ийе болған периодлы шешими сәйкес келеди. Бул шешимди

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots + \varepsilon^n x_n(\tau) + \dots \quad (12)$$

түрінде излеймиз. Ал енди бул шешимнің периоды ε нан ғәрезсиз 2π периодқа ийе болғанлықтан барлық $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ коэффициентлер τ бойынша 2π периодлы функциялар болады, соның менен бирге изленип

атырған периодлы шешімнің туғындысы $t=0$ де нолге айланатуғын болғанлықтан

$$\frac{dx_i(0)}{d\tau} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

болады.

(12) ни (11) ге қойып, ε ның бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерді салыстырсақ, онда биз $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ функцияларын табыу үшін бірқатар теңлемелерге ийе боламыз. Дәслеп

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0$$

теңлемесине ийе боламыз, буннан (13) ни есапқа алсақ

$$x_0(\tau) = M_0 \cos \tau$$

шешимине ийе боламыз, бул жерде M_0 ерикли турақлы. Енди $x_1(t)$ ға қарата

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 M_0 \cos \tau + \frac{1}{\omega^2} f(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau)$$

теңлемесине ийе боламыз. Бул теңleme периодлы шешімге ийе болыуы үшін

$$\begin{aligned} P(M_0) &= \int_0^{2\pi} f(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau) \sin \tau \, d\tau = 0 \\ -2h_1 M_0 + \frac{1}{2\omega^2} \int_0^{2\pi} f(M_0 \cos \tau, -\omega M_0 \sin \tau) \cos \tau \, d\tau &= 0 \end{aligned}$$

шәртинің орынланыуы зәрүрли хәм жеткиликли.

Бул теңлемелердің бириншисинен M_0 ерикли турақлының мәніси анықланады, ал екиншисинен h_1 ди анықлауға болады. Табылған M_0 хәм h_1 дің мәніслерин пайдаланып, жоқарыдағы теңлемеден $x_1(t)$ ны анықлауға болады:

$$x_1(\tau) = \varphi_1(\tau) + M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau$$

бул жерде $\varphi_1(\tau)$ базы бир белгили 2π периодлы функция. Ал M_1 хэм N_1 ерикли тураклылар. Бул тураклылар (13) шарттен хэм $x_2(t)$ ның периодлы болых шартлеринен анықланады. Булар менен бирликте h_2 де анықланады.

Процессти усылайынша даўам етип биз (11) теңлемениң (12) түриндеги тек бир қатар менен анықланатуғын шешимине ийе боламыз

Мысал ушын мейли ламполы генератордың автотербелис нызамын беретугын

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon(\alpha - \nu^2 x^2) \frac{dx}{dt} \quad (14)$$

теңлемесин қарастырайық, бул жерде α хэм ν лар базы-бир тураклы шамалар. Бул теңлемениң периодлы шешимин табыў ушын берилген теңлемени (10) формула жәрдемінде түрлендиремиз

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots)^2 = \frac{\varepsilon}{\omega}(\alpha - \nu^2 x^2)(1 + h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots) \frac{dx}{d\tau} \quad (15)$$

Бул теңлемениң шешимин

$$x(\tau) = M_0 \cos \tau + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots + \varepsilon^n x_n(\tau) + \dots \quad (16)$$

түринде излеймиз, бул жерде $x_i(t)$, $i=1,2,\dots$ лар периоды 2π ға тең болған периодлы функциялар хэм соның менен бирге олар ушын

$$\frac{dx_i(0)}{d\tau} = 0, \quad i=1, 2, \dots \quad (17)$$

басланғыш шартлери орынлы болады.

(16) ны (15) ге қойып $x_1(t)$ ушын төмендеги теңлемеге ийе боламыз

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 + 2h_1 M_0 \cos \tau &= -\frac{1}{\omega}(\alpha - \nu^2 M_0^2 \cos^2 \tau) M_0 \sin \tau = \\ &= \left(-\frac{\alpha M_0}{\omega} + \frac{\nu^2 M_0^3}{4\omega}\right) \sin \tau + \frac{\nu^2 M_0^3}{4\omega} \sin 3\tau \end{aligned}$$

Енди $\cos \tau$ хэм $\sin \tau$ лардың алдындағы коэффициентлерди нолге теңлестирип, төмендеги теңликлерге ийе боламыз

$$h_1 = 0, \quad P(M_0) = -\frac{\alpha M_0}{\omega} + \frac{\nu^2 M_0^3}{4\omega} = 0, \quad M_0^2 = \frac{4\alpha}{\nu^2}$$

буннан кейин $x_1(t)$ ушын төмендеги шешимге ийе боламыз

$$x_1(t) = -\frac{\nu^2 M_0^3}{32\omega} \sin 3\tau + M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau$$

бул жерде M_1 хэм N_1 ерикли тураклылар. Енди $x_2(t)$ ушын төмендеги теңлемеге ийе боламыз:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 &= -2h_2 M_0 \cos \tau + \frac{\alpha}{\omega} \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{\nu^2 M_0^2}{\omega} \cos^2 \tau \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\nu^2 M_0^2}{\omega} x_1 \sin 2\tau = \\ &= \left[M_0 \left(-2h_2 + \frac{\nu^4 M_0^4}{128\omega^2} \right) + N_1 \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{\nu^2 M_0^3}{4\omega} \right) \right] \cos \tau + M_1 \left(-\frac{\alpha}{\omega} - \frac{3\nu^2 M_0^2}{4\omega} \right) \sin \tau + \dots + \\ &+ M_0 \left(-2h_2 + \frac{\alpha^2}{8\omega^2} \right) \cos \tau + \frac{\nu^2 M_0^2 M_1}{2\omega} \sin \tau + \dots, \end{aligned}$$

бул жерде жазылмай қалған ағзаларда $\cos \tau$ хэм $\sin \tau$ лар қатнаспайды. Енди $\cos \tau$ хэм $\sin \tau$ лардың алдындағы коэффициентлерди нольге теңлестирип, төмендегилерге ийе боламыз

$$h_2 = \frac{\alpha^2}{16\omega^2}, \quad M_1 = 0$$

хэм (17) ден

$$N_1 = \frac{3\nu^2}{32\omega} M_0^3$$

Солай етип (14) ниң изленип атырған периодлы шешими

$$x(t) = M_0 \cos \tau + \left[\frac{3\nu^2 M_0^3}{32\omega} \sin \tau - \frac{\nu^2 M_0^3}{32\omega} \sin 3\tau \right] \varepsilon + \dots,$$

$$\tau = \omega t \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \varepsilon^2 + \dots \right), \quad M_0 = \frac{\sqrt{4\alpha}}{\nu} \quad (18)$$

Шешимнің бул соңғы көринисинен хәм (18) ден периодтың

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 - \frac{\alpha^2}{16\omega^2} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

түрінде анықланатуғынлығы келип шығады.

Жуўмақтау

Дифференциаллық теңлемелер теориясында айрықша орынлардың биринде сызықлы емес дифференциаллық теңлемелердің жуўық шешимлерин дүзиў методлары болып табылады. Дара жағдайда әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди жуўық дүзиўдин санлы–аналитикалық усылы ҳәм сызықлы емес механиканың асимптотикалық методлары болып табылады.

Бул магистрлик диссертация жумысы екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелери ушын периодлы шешимлерди жуўық дүзиў усылларын үйрениге арналған болып, онда тийкарынан периодлы шешимлерди изертлеўдин избе-из жуўықласыўлар усылының айырым вариантлары қарастырылған.

Қарастырылып атырған мәселелерди үйрениў барысында төмендеги бир қатар нәтийжелер алынды:

-Екинши тәртипли сызықлы биртекли емес толқын теңлемелери ушын айырым периодлы шешимлердин бар болыў шәртлери алынды;

-Алынған нәтийжелер қосымша шәртлердин қойылыўы менен усындай типтеги квазисызықлы теңлемелер ушын периодлы шешимлерин дүзиўге қолланылды;

-Екинши тәртипли квазисызықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлерин санлы-аналитикалық усыл жәрдемінде жуўық дүзиў алгоритми ҳәм бул алгоритмниң жыйнақлылығы дәлилленип, қәтелиги баҳаланды;

-Екинши тәртипли автономлы квазисықлы толқын теңлемелериниң периодлы шешимлери асимптотикалық усыллар жәрдемінде изертленип, нәтийжелери конкрет мәселелерди шешиўге қолланылды.

Бул жумыстың айырым нәтийжелери Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университетиниң «Алгебра ҳәм дифференциаллық теңлемелер» кафедрасының семинар мәжилислеринде, илимий конференцияларында, соның менен бирге ғәрезсизлигимиздин 20 жыллығына арналып,

Қарақалпақстан Республикасында болып өткен зийрек студент қызлардың илимий семинарларында баянат етилди.

Әдебиәтлар

1. Аносов Д.В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро колеблющимися решениями//Изв.АН СССР. Сер. мат.-1960.-24, №5. – с. 721–742.
2. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической небесной механики // Успехи. мат. наук. – 1963.-18, вып. 6–с. 92–191.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. Вишик М.И. Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму при периодических граничных условиях // Докл. АН СССР. – 137, №3. – с. 502-505.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М. : Наука, 1973.-576 с.
7. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка //Укр.мат.журн.-1987.-39. №3. с.347-353.
8. Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громьяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического тип. Киев.Наука думка. 1991.
9. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1969.-5, №1. – с. 44 – 59.
- 10.Нахушев А.М. Методика постановки корректных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости// Там же. – 1970.-6, №2. – с. 192 – 195.
- 11.Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Панасенко Г.П. Асимптотическое разложение решений системы теории упругости в перфорированных областях//Мат.статистика.-1983.-120,№1.-с.22
- 12.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

13. Похожаев С.И. О периодических решениях некоторых нелинейных гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1971. - 198, №6. – с. 1274-1277.
14. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно–аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк. 1976. – 180 с.
15. Скрыпник И.В. Применение топологических методов к уравнениям с монотонными операторами // Там же. – 1972.-24, №1. – с. 69 – 79.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
17. Танирбергенова Т., Курбанбаев %, «Гиперболалық типтегі сызықты емес толқын теңдемелірінің периодлы шешімлері» Магистрантлардың илимий жұмыстары жыйнағы бойынша материаллар топламы, Том-1, Нөкіс-2010. 30-31 бетлер.
18. Танирбергенова Т., Курбанбаев % «Квазисызықты екінші тәртіпті толқын теңдемелерінің периодлы шешімлері» Өзбекстан Республикасының гәрезсизлігінің 20 жыллық байрамына бағышланған «Математиканың хәзіргі заман проблемалары» атлы илимий конференциясында (17-март 2011ж) Нөкіс-2011. 35-38 бетлер.
19. Танирбергенова Т., Курбанбаев Ө, «Екінші тәртіпті квазисызықты дифференциаллық теңдемелердің базыбір периодлы шешімлері» «Өзбекстан Республикасы Экономикасы хәм жәмийет раўажланыўының хәзіргі заман принципери» Нөкіс-2011. 1ru-1ri бетлер.