

R.R. ABZALIMOV

**EHTIMOLLAR NAZARIYASI
VA MATEMATIK STATISTIKA**

T o s h k e n t – 2008

**O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim
vazirligi**

R.R. ABZALIMOV

**EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK
STATISTIKA**

ANNOTATSIYA.

O'quv qo'llanmada «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» ning asosiy bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumotlar keltirilgan.

Qo'llanma oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Oliy matematika» fanidan namunaviy dastur asosida tuzildi.

Qo'llanma texnika oliy o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Oliy texnika o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari
uchun o'quv qo'llanma

Taqrizchilar:

O'zbekiston Milliy Universiteti,
«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
kafedrasi. F.m.f.d., professor

T.M. Zuparov

Toshkent arxitektura – qurilish
instituti, «Oliy va amaliy matematika»
kafedrasi. F.m.f.n. dosent,

A.Q. Amanov.

T o s h k e n t – 2008

0

Mundarija

I-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI.

- §1 Ehtimollar nazariyasining predmeti.
- §2 Hodisalar algebrasi.
- §3 Ehtimollar fazosi.
- §4 Ehtimolning klassik ta'rifi.
- §5 Ehtimolning geometrik ta'rifi.
- §6 Nisbiy chastota va statistik ehtimol.
- §7 Shartli ehtimollik.
- §8 To'la ehtimollik formulasi.
- §9 Beyes formulasi.
- §10 Hodisalarning bog'liqsizligi.
- §11 Bernulli sxemasi.
- §12 Muavr-Laplasning limit teoremlari.
- §13 Diskret tasodifiy miqdorlar.
- §14 Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari.
- §15 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari.
- §16 Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari
- §17 Matematik kutilma.
- §18 Dispersiya
- §19 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyasi va uning xossalari.
- §20 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari.
- §21 Boshlang'ich va markaziy momentlar.
- §22 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlariga misollar.**
- §23 Gaussning normal taqsimot qonuni.
- §24 Asimmetriya va ekstess.
- §25 Matematik statistikada ishlatiladigan ba'zi bir taqsimotlar.
- §26 Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni
- §27 Bir tasodifiy argumentning funksiyasi.
- §28 Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi.
- §29 Katta sonlar qonuni

§30 Markaziy limit teoremlari.

II-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI.

§1 Matematik statistika masalasi.

§2 Bosh va tanlanma to'plam.

§3 Tanlash usullari.

§4 Tanlanmaning statistik taqsimoti.

§5 Empirik taqsimot funksiya.

§6 Poligon va gistogramma.

§7 Taqsimot parametrlarining statistik baholari.

§8 Nazariy o'rtacha qiymati.

§9 Tanlanma o'rtacha qiymat.

§10 Nazariy dispersiya.

§11 Tanlanma dispersiya.

§12 Nuqtaviy baholar, ishonchli ehtimol, ishonchli interval.

§13 Normal taqsimot parametrlari uchun ishonchli baholar.

§14 Taqsimot markazining ishonchli baholari.

§15 Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ning bahosi uchun ishonchli intervallar.

§16 Gipotezalarni statistik tekshirish.

§17 Statistik gipoteza. Nolinchi, konkurent (alternativ), oddiy va murakkab gipotezalar.

§18 Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar.

§19 Nolinchi gipotezani tekshiruvchi ba'zi bir statistik kriteriyalar.

§20 Kritik soha. Gipotezani qabul qilish sohasi. Kritik nuqtalar.

§21 Kriteriyaning quvvati.

§22 Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi.

§23 Normal taqsimotning nazariy chastotalarini hisoblash usuli.

§24 Korrelyasion analiz elementlari.

§25 Masalaning qo'yilishi va yechilishi.

§26 Chiziqli korrelyatsiya.

3-BOB. MISOL VA MASALALAR

§1 Namunaviy misol va masalalar yechimi

§2 Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

§3 Korrelyatsiyon analiz elementlaridan mustaqil ish variantlari.

A d a b i y o t l a r:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{funksiyaning qiymatlari jadvali.}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{funksiyaning qiymatlari jadvali.}$$

So'z boshi.

Zamonaviy kadrlarni yetishtirish borasida respublikamiz oliy ta'limi tizimida tub o'zgarishlar amalga oshirilmoqda. Bunga sabab, «Ta'lim to'g'risida»gi qonun va «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»ning qabul qilinishi va ularda ilmiy-texnika taraqqiyoti yutuqlarini xalq xo'jaligiga tadbiq qilish, ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanish bilan uzviy bog'liq ekanligining aniq ko'rsatilishidir.

Bundan shunday xulosa chiqarish kerakki, hozirgi zamonda fundamental fanlar bilan bir qatorda ularning tatbiqiga bag'ishlangan maxsus kurslarni ko'proq o'qitish dolzarb masalalardan biri bo'lib qoladi.

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» maxsus kursi oliy matematikaning tatbiqiy bo'limlaridan biri bo'lib, uning mavjud qonuniyatlarini ma'lum darajada bilish, tasodifiy holatlarni hisobga olgan holda mantiqiy xulosalar chiqarish va mavjud vaziyat uchun optimal yechimlarni topa olishga imkon yaratadi.

Ushbu qo'llanmaning mavjud adabiyotlardan asosiy farqi shundaki, bu qo'llanma o'zbek tilida va lotin alifbosida yozilgan. Bundan tashqari, bu qo'llanmada texnik oliy o'quv yurtlari uchun zarur bo'lgan asosiy ma'lumotlar fanning ichki uzviyligi buzilmagan holda keltirilgan.

Ehtimollar nazariyasi bobida matematik statistika bobi uchun kerakli ma'lumotlarga asosiy urg'u berilgan bo'lib, matematik statistika bo'limida esa, asosan tajriba natijalarini statistik qayta ishlash uchun zarur bo'lgan usullar keltirilgan. Texnik fanlarda tajriba natijalarini statistik qayta ishlash keng ko'lamda qo'llaniladi.

Qo'llanmani yozishda muallif Toshkent davlat texnika universitetida ko'p yillar davomida o'qigan ma'ruzalarini asos qilib oldi.

Mazkur qo'llanma kamchiliklardan holi emas, shu sababdan muallif qo'llanmani yanada takomillashtirishga qaratilgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladi.

Muallif.

I-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI.

§1 Ehtimollar nazariyasining predmeti.

Matematika va fizikaning maktab kursida odatda natijasi bir qiymatli aniqlangan masalalar ko'riladi. Masalan, agar ma'lum balandlikda jism qo'ldan chiqarilsa, u albatta o'zgarmas tezlanish bilan erga tusha boshlaydi va uning fazodagi o'rnini ixtiyoriy vaqtda hisoblash mumkin. Lekin fan va texnikada har doim ham bir qiymatli aniqlangan masalalar ko'rilmagan, natijasi ko'p qiymatli aniqlangan masalalar ko'p uchraydi. Masalan, tanga tashlansa, gerb yoki reshka tushishini oldindan aytib bo'lmaydi. Bunda natija bir qiymatli aniqlanmagan. Bunga o'xshash masalalarda, aniq bir narsa aytish mumkin emasdek bo'lib tuyulsada, lekin oddiy o'yin tajribasi shuni ko'rsatadiki, tanga tashlash soni etarlicha katta bo'lganda gerb yoki reshka tushishlari soni taxminan teng bo'ladi. Bu esa ma'lum ma'noda qonuniyatni ifodalaydi. Xuddi shunday qonuniyatlarni ehtimollar nazariyasi o'rganadi. Bunda masalaning qo'yilishi o'zakdan o'zgaradi. Bizni aniq bir tajribaning natijasi emas, bu tajriba etarlicha ko'p marta takrorlangandagi natijalar bo'ysunadigan qonuniyatlar qiziqtiradi. Demak, ehtimollar nazariyasining predmeti ommaviy, bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimollik qonuniyatlarini o'rganishdan iboratdir. Tanga tashlash tajribasini biz eng sodda va tanish holat sifatida keltirdik. Bunda tajriba natijasi ko'p qiymatli bo'lishi muhim. Lekin juda ko'p, ma'nosi jihatidan har-xil masalalar uchun tanga tashlash tajribasi model bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Ehtimollar nazariyasiga umumiy ta'rif berilganda uni «berilgan tasodifiy hodisalarning ehtimolligiga ko'ra boshqa tasodifiy hodisalarning ehtimolligini topish» deb ta'riflaydilar. Bu ta'rif shuni faraz qiladiki, ehtimolliqi oldindan ma'lum bo'lgan dastlabki hodisalar mavjud. Ularning ehtimolliqi qanday topilgan? Bu ehtimolliklarni ko'rilayotgan ma-

salani keltirib chiqargan fan beradi. Bunda asosan matematik mushohadalar emas, balki masalani yuzaga keltirgan fan mushohadalari asosiy rol o'ynaydi. Masalan, tanga tashlash tajribasini olsak, gerb yoki reshka tushishi tajribalar soni etarlicha katta bo'lganda teng imkoniyatga ega bo'ladi. Bu fakt shunga asoslanganki, tanga simmetrik, materiali bir jinsli va uning qalinligi etarlicha kam bo'lganligidan u qirrasiga turmaydi. Shuning uchun ko'p yuz yillik tajribalarga asoslanib, gerb tushishi bilan reshka tushishi miqdori ko'p sonli tajribalarda taxminan teng bo'ladi deyishga asos bor. Bu yerda matematik mushohoda emas, tangananing fizik xususiyatlari va ko'p yuz yillik tajribalar natijasi rol o'ynaydi. Murakkab ehtimollik masalalari ko'rilayotgan, dastlabki elementar hodisalarning ehtimolligi berilgan bo'lishi kerak. Har bir aniq holda bu ehtimolliklar turlicha, shu masalani keltirib chiqargan fan mushohadalariga tayanib beriladi.

Ehtimollar nazariyasi, matematikaning boshqa tatbiqiy bo'limlariga o'xshash, to'g'ridan-to'g'ri tabiat jarayonlari bilan emas ularning matematik modellari ustida ishlaydi. Tasodifiy jarayonlarning matematik modelida asosiy tushuncha bo'lgan ehtimollik - tasodifiy hodisadan olingan funksiya sifatida ta'riflanadi. Ya'ni, tasodifiy hodisaning ehtimolligi - bu hodisaning ro'y berish imkonining ob'ektiv darajasining sonli harakteristikasidir. Matematik analiz kursida funktsiyani o'rganishdan oldin uning argumenti bo'lgan haqiqiy sonlar izchil o'rganilgani kabi, ehtimollar nazariyasi ham tasodifiy hodisalar va ular ustida amallarni o'rganishdan boshlanadi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy kursi quyidagi uchta asosiy tushunchalarga asoslanib qurilgan.

-Bulardan birinchisi - tasodifiy hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasidir. Ayni bir hisobda mana shu tushuncha ehtimollar nazariyasini to'plamlar nazariyasi, o'lchamlar nazariyasi va funksiyalar nazariyasidan ajratib, mustaqil fan sifatida uning chegaralarini aniqlab berdi.

-Ikkinchisi - to'la ehtimollik formulasidir. Ayni shu, tushuncha ehtimollikni hisoblashning o'ziga xos kombinatorik usullaridagi mavjud ko'p qirraliklarining asosidir.

-Uchinchisi - katta sonlar qonuni. Bu qonunga suyanib ehtimollar nazariyasi amaliyot bilan bog'landi, hayotiy jarayonlarni aks ettiruvchi miqdoriy tuzilishi bilan matematik modellarni to'ldirdi.

Mana shu tushunchalarni o'rganish - ehtimollar nazariyasi bilan tanishishning asosiy qismidir.

§2 Hodisalar algebrasi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lmish hodisa deb sinov (tajriba) o'tkazish natijasida, ya'ni ma'lum shartlar majmui amalga oshishi natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktga aytiladi. Tajribaning natijasi bir qiymatli aniqlanmagan hollarda hodisa tasodifiy hodisa deb ataladi, tajriba esa tasodifiy tajriba deb ataladi. Tasodifiy tajribalar haqida so'z yuritganimizda biz faqat yetarlicha ko'p marta takrorlash mumkin bo'lgan (hech bo'lmaganda nazariy jihatdan) tajribalarni ko'zda tutamiz. Tasodifiy tajribaning matematik modelini qurish quyidagi etaplarni o'z ichiga oladi:

- 1) Elementar hodisalar to'plami Ω - ni tuzish.
- 2) Berilgan tajriba uchun etarli bo'lgan hodisalar sinfi $\mathfrak{I}$ ni ajratish.
- 3) Shu hodisalar sinfi ustida ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi sonli funktsiya P -hodisaning ehtimolini berish.

Hosil bo'lgan $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ -uchlikni ehtimollar fazosi deb ataymiz.

Ω -elementar hodisalar to'plami deb berilgan tasodifiy tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha bir-birini rad etuvchi hodisalar to'plamiga aytiladi. Ω -ning elementlarini $\omega_i, i=1,2,\dots,n$ bilan belgilanadi. n -esa Ω -to'plam elementlarining soni. Murakkab hodisa, yoki oddiygina hodisa deb Ω - elementar hodisalar to'plamining ixtiyoriy to'plam ostiga aytiladi.

Misol:

Tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, bunda ω_i - soqqa bir marta tashlanganda i -raqamining tushishi hodisasidir. Bu hodisa - elementar hodisadir, va, Ω -elementar hodisalar to'plamidir.

Quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A -tushgan raqamning juft bo'lishi. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

B -tushgan raqamning uchga bo'linishi. $B = \{\omega_3, \omega_6\}$

C -tushgan raqam 2 dan katta emas $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

K -tushgan raqamning toq bo'lishi. $K = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$,

Ikki yoki undan ortiq hodisalarning birlashmasi deb, barcha hodisalarning kamida biriga tegishli elementar hodisalar to'plamiga aytiladi.

Misol:

$M = A + B$ - tushgan raqam juft yoki uchga bo'linadi.

$$M = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$$

Ikki yoki undan ortiq hodisalarning ko'paytmasi deb, barcha hodisalarga bir vaqtda tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plamiga aytiladi.

Misol:

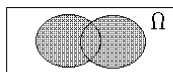
$P = A \cdot B$ tushgan raqam juft va uchga bo'linadi. $P = \{\omega_6\}$.

Ikki hodisa ayirmasi A/B deb, A-hodisaning B hodisaga tegishli bo'lmagan elementar hodisalari to'plamiga aytiladi.

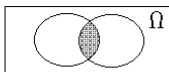
Misol:

A/B - tushgan raqam juft, lekin uchga bo'linmaydi.

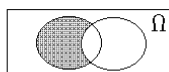
$A/B = \{\omega_2, \omega_4\}$. Bu misollarni yaqqol tasavvur etish uchun Venn diagrammasiga murojaat etamiz. Ω - to'g'ri to'rt burchakka tegishli bo'lgan nuqtalar to'plami.



$A+B$



$A*B$



A/B

Tajribada ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa deb, tarkibida elementar hodisa bo'lmagan bo'sh to'plamga aytiladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

Misol: Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta.

Muqarrar hodisa deb $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_6, \}$ to'plamga aytamiz.

Misol: Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta emas.

Ikki yoki undan ortiq hodisa birgalikda deyiladi, agarda ularning tarkibida hech bo'lmaganda, bitta umumiy elementar hodisa bo'lsa. Aks holda ular birgalikda emas deyiladi. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ko'paytmasi har doim mumkin bo'lmagan hodisadir.

Misol:

Agar yuqorida kiritilgan A, B, C, K hodisalarni qarasak:

A va B - birgalikda $AB = \{\omega_6\}$

A va C - birgalikda $AC = \{\omega_2\}$

A va K – birgalikda emas $AK = \emptyset$

B va C - birgalikda emas $BC = \emptyset$

V va K - birgalikda $BK = \{\omega_3\}$

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytmiz va $\bar{A}$ bilan belgilaymiz.

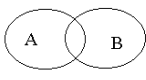
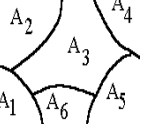
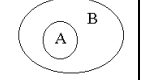
Misol:

$$\bar{A} = K. \quad \bar{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$$

$A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi, agarda $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$ va $A_1 + A_2 + \dots + A_N = \Omega$ bo'lsa.

Misol:

Ikkita qarama-qarshi hodisa birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi. Masalan A va K. Agar A hodisaning ro'y berishi V hodisaning ro'y berishiga olib kelsa, u holda A hodisa V hodisani ergashtiradi, yoki A dan V kelib chiqadi deb aytiladi va $A \subset B$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda har bir A hodisaga tegishli elementar hodisa, V-hodisaga ham tegishli bo'ladi. Agar $A \subset B$ va bir vaqtda $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va V hodisalar teng kuchli deb ataladi va $A=V$ ko'rinishda belgilanadi. Bularni Venn diagrammasida quyidagicha tasvirlash mumkin.

				
A va B birgalikda	A va B birgalikda emas	A va B lar qarama-qarshi	Birgalikda bo'lmagan hodisalar to'la gruppasi	$A \subset B$

Yuqorida aniqlangan hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega.

1) $A + B = B + A$

2) $A \cdot B = B \cdot A$

- | | |
|--|--|
| 3) $A + A = A$ | 4) $A \cdot A = A$ |
| 5) $A + \bar{A} = \Omega$ | 6) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ |
| 7) $A + \emptyset = A$ | 8) $A \cdot \emptyset = \emptyset$ |
| 9) $A + \Omega = \Omega$ | 10) $A \cdot \Omega = A$ |
| 11) $A \setminus B = A\bar{B}$ | 12) $\bar{\emptyset} = \Omega$ |
| 13) $A(B + C) = AB + AC$ | 14) $A + BC = (A + B)(A + C)$ |
| 15) $\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$ | 16) $\overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}$ |
| 17) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$ | |

Biz yuqorida ehtimollikni hodisadan olingan sonli funksiya sifatida harakterlagan edik. Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar argumentining barcha qiymatlarida aniqlanishi shart bo'lmaganligi kabi, Ω to'plamning ixtiyoriy tuplam ostlari uchun ehtimolni aniqlash har doim ham mumkin bo'lavermaydi. To'plam ostlari sinflarini cheklashga to'g'ri kelgan hollarda, biz bu sinflardan, yuqorida kiritilgan hodisalar ustidagi amallarga nisbatan yopiqligini talab etamiz. Ω -to'plamning to'plam ostlaridan tuzilgan to'plamlar sinfini $\mathfrak{I}$ bilan belgilaymiz.

Ta'rif

$\mathfrak{I}$ - algebra deb ataladi, agarda

A1. $\emptyset \in \mathfrak{I}, \Omega \in \mathfrak{I}$;

A2. $A \in \mathfrak{I}$ dan $\bar{A} \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa;

A3. $A \in \mathfrak{I}$ va $B \in \mathfrak{I}$ dan $A \cup B \in \mathfrak{I}$ va $A \cap B \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa.

Ta'rif

Algebra $\mathfrak{I}$ ni σ - algebra deb ataymiz agarda

A3. $A_n \in \mathfrak{I}, n = 1, 2, \dots$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$ kelib chiqsa.

Misol:

$\mathfrak{I} = \{\emptyset, \Omega\}$ - eng kichik algebraga misol.

Agar Ω -chekli to'plam bo'lsa, u holda barcha to'plam ostlarining sistemasi ham cheklidir va Ω ning barcha to'plam ostlari soni 2^n ga teng. Bu holda Ω ning barcha to'plam ostlari sinfi $\mathfrak{I}$ algebra tashkil etadi. Agar Ω -sanoqli yoki uzluksiz to'plam bo'lsa, u holda to'plam ostlari, sinfidan σ -algebra bo'lishligini talab etishga to'g'ri keladi.

Chunki bu holda to'plam ostlari sinfi cheksiz ko'p elementlardan tashkil topgan bo'lib shu sinf to'plamlari ustida amallar bajarilganda har doim ham yana shu sinfga tegishli to'plam hosil bo'lavermaydi.

§3 Ehtimollar fazosi.

Endi biz σ -algebra $\mathfrak{F}$ ga tegishli bo'lgan barcha Ω ning to'plam ostlarini hodisa deb ataymiz.

Ta'rif

σ -algebra $\mathfrak{F}$ ustida aniqlangan P-sonli funksiyani hodisaning ehtimoli deb ataymiz, agarda

R1. $P(A) \geq 0$, barcha $A \in \mathfrak{F}$ lar uchun,

R2. $P(\Omega) = 1$,

R3. $i \neq j$ larda $A_i \cdot A_j = \emptyset$ bo'lgan $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ hodisalar uchun

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Endi biz $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - uchlikni ehtimollar fazosi deb ataymiz. Shunday qilib biz tasodifiy tajribaning matematik modelini qurdik.

§4 Ehtimolning klassik ta'rifi.

Agar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ - chekli elementar hodisalar to'plamini qarasa va $\mathfrak{F}$ deb Ω ning barcha to'plam ostlarini olsak, u holda $\mathfrak{F}$ σ -algebra bo'ladi. $R(A)$ ehtimollik funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1, \quad P(\omega_i) \geq 0, \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), \quad P(\emptyset) = 0.$$

Shunday aniqlangan $P(A)$ funksiya ehtimollikning barcha shartlarini bajaradi.

Agar biz $|A|$ bilan A to'plamning elementlari, sonini belgilasak va ix-

tiyoriy $1 \leq i \leq n$ da $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, ya'ni ω_i larning ro'y berishini teng imkoniyatli deb faraz qilsak ehtimollikning klassik ta'rifi kelib chiqadi.

$$P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) \quad \Rightarrow \quad 1 = P(\omega_i) \cdot |\Omega|$$

yoki

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} \Rightarrow P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = |A| \cdot P(\omega_i) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ya'ni

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (1)$$

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$ bo'lgan hol klassik bo'lgani uchun,

(1) tenglik ehtimollikning klassik ta'rifi deb ataladi. Ehtimollikning klassik ta'rifidan foydalanganda A to'plam va Ω fazodagi elementar hodisalar sonini hisoblashga to'g'ri keladi. Ehtimol masalalarida bularni hisoblash ancha qiyinchilik tug'dirgani uchun kombinatorika usullaridan foydalanishga to'g'ri keladi.

1

Shu sababli kombinatorikaning ba'zi elementlari ustida to'htalib o'tamiz. Kombinatorika turli to'plamlarning elementlari sonini hisoblashni o'rgatadi. Kombinatorikada muhim rol o'ynaydigan ikki qoyida bor: qo'shish va ko'paytirish qoyidalar.

Qo'shish qoyidasi: Agar A to'plamning elementlari soni $|A| = n$ va B to'plamning elementlari soni $|B| = m$ bo'lib, A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydigan chekli to'plamlar bo'lsa $|A + B| = n + m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoyidasi: Bizga $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsa, bu ikki to'plamdan tuzilgan, barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) / i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ $n \cdot m$ elementdan iborat bo'ladi.

O'rinlashtirishlar soni. Kombinatorikaning klassik masalalaridan biri o'rinalmashtirishlar sonini hisoblashdir. Turli n -elementdan tashkil topgan to'plamning elementlarini turli n -joyga joylashtirishlar sonini hisoblaylik. Misol uchun $A = \{1, 2, 3\}$. Ularni quyidagicha turlicha joy-

lashtirish mumkin: $\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,2,1\}, \{3,1,2\}$. Bunday joylashtirishlar soni $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ga teng. Umuman olganda n -elementdan, turli n -joyga joylashtirishlar soni $P_n = n!$ ga teng.

Tanlashlar soni: n -elementdan m -tadan necha hil usul bilan tanlash mumkin. Misol: $A = \{1,2,3\}$. Ikkitadan tanlasak $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$ hosil bo'ladi. Tanlashlar soni 3 ga teng. Umuman olganda n -elementdan

m -tadan tanlashlar soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Kombinatorikaning keyingi masalalaridan biri o'rinlashtirish masalasidir. Misol: $A = \{1,2,3\}$ to'plam berilgan bo'lsa uning ikki elementidan tashkil topgan to'plamlardan necha hil usul bilan tuzish mumkin.

$$\{1,2\}, \{2,1\}, \{1,3\}, \{3,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}.$$

Bunday to'plamlar soni $A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6$ ta. Umuman olganda

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Endi biz to'plam Ω da hodisani, to'plam elementi deganda hodisadagi elementar hodisalarni tushunsak, to'plam uchun aniqlangan kombinatorika elementlarini hodisadagi elementar hodisalar sonini aniqlashda ishlata olamiz.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ -ehtimollar fazosida R -ehtimol funksiyasining xossalarini keltiramiz.

$$1) A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Isboti:

$$B = A + (B \setminus A) \text{ va } A \cap (B \setminus A) = \emptyset \text{ bo'lgani uchun}$$

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad (2)$$

$$2) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Isboti:

(2) dan kelib chiqadi

$$3) \text{ Ixtiyoriy } A \in \mathfrak{F} \text{ uchun } 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Isboti:

(2) xossa va $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ munosabatlardan kelib chiqadi.

$$4) P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Isboti:

A3. shartdan, $A + \overline{A} = \Omega$ va $A \cdot \overline{A} = \emptyset$ munosabatlar orqali kelib chiqadi.

$$5) P(\emptyset) = 0.$$

Isboti:

4) xossa bilan A2 shartdan kelib chiqadi.

6) Ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathfrak{F}$ lar uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (3)$$

Isboti:

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}) \text{ desak } \bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k \text{ bo'ladi.}$$

Endi A3 shartdan $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ bo'lgani uchun

$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(B_k)$ kelib chiqadi. Bundan esa $B_k \subseteq A_k$ va 2) xossaga ko'ra (3) tengsizlik kelib chiqadi.

7) Ixtiyoriy A va B lar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti:

$A \cup B = A + (B \setminus AB)$ bo'lgani uchun A3 shartdan $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB)$ bo'ladi. Endi 1) xossadan $P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB)$ bo'lgani uchun xossa isbot bo'ldi.

§5 Ehtimolning geometrik ta'rif.

Ehtimollikning klassik ta'rifida elementar hodisalar soni chekli, deb faraz qilinadi. Amaliyotda esa ko'pincha mumkin bo'lgan natijalari soni cheksiz bo'lgan tajribalar uchraydi. Bunday hollarda klassik ta'rifni

qo'llanib bo'lmaydi. Bunday hollarda ba'zan ehtimollikni hisoblashning boshqacha usulidan foydalanish mumkin bo'lib, bunda ham avvalgidek elementar hodisalarning teng imkoniyatlilik tushunchasi asosiy ahamiyatga ega bo'lib qolaveradi.

Ehtimollikning geometrik ta'rifi deb ataladigan usuldan Ω - n o'lchamli evklid fazosining cheklangan to'plami bo'lgan holda foydalanish mumkin.. Hodisa deb Ω ning o'lchovini aniqlab bo'ladigan to'plam ostini qaraymiz. A deb Ω ning barcha o'lchovga ega bo'lgan to'plam ostlari sinfini belgilaymiz. U holda A hodisaning ehtimoli deb quyidagiga aytamiz:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)};$$

$\mu(A)$ - A to'plamning o'lchami. (n=1 bo'lganda uzunlik, n=2 bo'lganda yuza, n=3 bo'lganda hajm).

§6 Nisbiy chastota va statistik ehtimol.

n ta bir xil tajriba ketma-ket o'tkazilgan bo'lib, ularning har birida A hodisa ro'y bergan yoki ro'y bermagan bo'lsin.

Ta'rif.

A hodisaning berilgan tajribalar ketma - ketligidagi nisbiy chastotasi deb A hodisa ro'y bergan tajribalar soni m ning o'tkazilgan barcha tajribalar soni n ga nisbati aytiladi.

$$W(A) = \frac{m}{n};$$

Tajribalar soni oshgan sari nisbiy chastota ehtimolga cheksiz yaqinlashib boradi. Shuning uchun nisbiy chastotani taxminan hodisaning ehtimoliga teng deb qabul etishadi.

Ehtimolning klassik ta'rifi elementar hodisalar fazosi Ω -chekli, deb faraz qiladi. Tajribada esa ko'plab cheksiz sondagi elementar hodisalar fazosi uchraydi. Mana shu hol ham klassik ta'rifning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Klassik ta'rifning yana bir kamchiligi shundaki, juda ko'p hollarda tajriba natijalarini elementar hodisalar to'plami ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi. Undan ham qiyinrog'i shuki, elementar hodisalarning ro'y berishi teng imkoniyatli deb hisoblashga asos har doim ham topilavermaydi. Odatda elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini simmetriya tushunchasiga suyanib kiritishadi. Lekin simmetriya

tushunchasiga ega bo'lgan masalalar amaliyotda juda kam uchraydi. Shu kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda, ehtimollikning statistik ta'rifini ham berishadi. A hodisaning statistik ehtimoli deb A hodisaning nisbiy chastotasi olinadi. Endi ehtimolning klassik ta'rifi bilan statistik ta'rifini solishtirsak shunday xulosaga kelamiz.

Ehtimolning klassik ta'rifi tajriba o'tkazilishini ko'zda tutmaydi. Statistik ehtimol esa tajriba o'tkazgandan so'ng topiladi. Boshqacha aytganda klassik ehtimol tajribagacha topilsa (a priory), statistik ehtimol tajribadan so'ng hisoblanadi (a pasteriory).

§7 Shartli ehtimollik.

Ta'rif:

Ixtiyoriy $B \in \mathfrak{F}$ uchun $P(B) > 0$ bo'lsin, A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimolligi A hodisaning V hodisa ro'y berish shartidagi shartli ehtimolligi deb ataladi va $P(A/B)$ bilan belgilanib quyidagicha hisoblanadi

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

Agar B - fiksirlangan bo'lib, $A \in \mathfrak{F}$ hodisa uchun $P(A/B)$ ehtimolni kiritsak, yangi $(\Omega, \mathfrak{F}, P_B)$ ehtimollar fazosi hosil bo'ladi. Bu yerda $P_B(A) = P(A/B)$. P_B - ning ehtimollik shartlarini bajarishini tekshiramiz.

$$1) P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq 1$$

$$2) P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) Agar $A_1 A_2 = \emptyset$ bo'lsa, $(A_1 B) \cap (A_2 B) = \emptyset$ bo'ladi.

Shuning uchun

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 / B) &= \frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B + A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = \\ &= P(A_1 / B) + P(A_2 / B) \end{aligned}$$

Bu xossa sanoqli sondagi A_n lar uchun ham o'rinli bo'ladi.

(1) dan quyidagi hosil bo'ladi:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \setminus B) \quad (2)$$

Bu tenglikni ba'zan ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi ham deb ataydilar.

Misol:

Idishda M dona oq va N-M dona qora sharlar bor. Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkala sharning oq bo'lishlik ehtimolini toping.

Yechish:

Bu ehtimolni (2) formula orqali topish mumkin.

A - birinchi olingan shar oq.

B - ikkinchi olingan shar oq.

Bu holda

$$P(A) = \frac{M}{N}; \quad P(B/A) = \frac{M-1}{N-1}$$

AB - ikkala olingan shar oq.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{M \cdot M - 1}{N \cdot (N - 1)};$$

Agar biz (2) tenglikda 2-ta hodisa o'rniga N-ta $A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar ketma-ketligini qarasak quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

Teorema 1

Agar $A_1, A_2, \dots, A_N$ hodisalar uchun $P(A_1, A_2, \dots, A_{N-1}) > 0$ bo'lsa, u holda

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_N) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_N/A_1 \cdot A_2 \dots A_{N-1}) \quad (3)$$

§8 To'la ehtimollik formulasi.

$A_1, A_2, \dots, A_N$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil qilsin.

Teorema 2 Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etib, barcha $1 \leq k \leq n$ lar uchun $P(A_k) > 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy B hodisa uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B/A_k) \quad (4).$$

Bu tenglikka to'la ehtimollik formulasi deyiladi.

Isboti:

$B = B \cdot \Omega = BA_1 + \dots + BA_n$ bo'lib, $BA_i \cap BA_j = \emptyset, i \neq j$ - lar uchun. Bu tenglikdan teorema 1 ga ko'ra quyidagi kelib chiqadi:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(BA_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B/A_k)$$

Misol:

Idishda M dona oq va N-M dona qora shar bor. Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkinchi olingan shar oq bo'lishlik ehtimolini toping:

Yechish:

B - ikkinchi olingan shar oq.

A - birinchi olingan shar oq.

$\bar{A}$ - birinchi olingan shar qora

$$P(A) = \frac{M}{N}; P(\bar{A}) = \frac{N-M}{N}; P(B/A) = \frac{M-1}{N-1}; P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N-1};$$

to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} +$$

$$+ \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N};$$

Ya'ni: $P(A) = P(B)$

§9 Beyes formulalari.

Teorema 3

$A_1, A_2, \dots, A_N$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasi bo'lsin va $P(A_k) > 0$. Agar ixtiyoriy B - hodisa uchun $P(B) > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B / A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)} \quad (5)$$

Isboti:

Teorema 1 ga ko'ra $P(A_k B) = P(A_k)P(B / A_k) = P(B) \cdot P(A_k / B)$. Endi $P(B)$ ga to'la ehtimollik formulasini qo'llab (5) tenglikni hosil qilamiz.

Misol:

Ikkita idish bor bo'lib, ikkalasida ham N donadan shar bor. Birinchisida M_1 oq shar, ikkichisida esa M_2 oq shar bor. Tajriba quyidagidan iborat: avval $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan birinchi yoki ikkinchi idish

tanlanadi, so'ngra tanlangan idishdan tavsakaliga n dona shar quyidagicha tartibda olinadi: har safar shar olingach uning rangi aniqlanib yana idishga qaytarib solinadi. Shu usulda olingan n dona sharning barchasi oq bo'lishi ehtimolini toping

Yechish:

B - tanlangan barcha n dona sharlar oq.

Bu holda ikkita gipotezaga egamiz.

A_1 - birinchi idish tanlangan

A_2 - ikkinchi idish tanlangan.

Masalaning shartiga ko'ra:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.5 \quad P(B / A_k) = \left(\frac{M_k}{N} \right)^n; \quad k = 1, 2;$$

Beyes formulasiga ko'ra

$$P(A_k / B) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{M_k}{N} \right)^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{N} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{M_2}{N} \right)^n} = \frac{M_k^n}{M_1^n + M_2^n}; k = 1, 2;$$

Agar $M_2 < M_1$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$P(A_1 / B) = \frac{1}{1 + \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^n} \rightarrow 1$$

§10 Hodisalarning bog'liqsizligi.

Hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Agar A va B hodisalar uchun $P(B) > 0$ bo'lsa $P(A/B)$ shartli ehtimol mavjud bo'ladi. Agar $P(A/B) = P(A)$ bo'lsa, A hodisa B ga bog'liq emas deyiladi. Agar $P(B) > 0$ bo'lsa, bu holda

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} = P(B) \text{ bo'ladi. Demak A ning B}$$

dan bog'liq emasligidan B ning ham A dan bog'liq emasligi kelib chiqadi. Teorema 1 dan o'zaro bog'liq bo'lmagan A va B hodisalar uchun $P(AB) = P(A)P(B)$ ekanligi kelib chiqadi. Ko'p hollarda bu tenglikni bog'liqsizlikning ta'rifi sifatida qabul qilishadi. Ya'ni ixtiyoriy A va B hodisalar uchun $P(AB) = P(A)P(B)$ tenglik bajarilsa A va B lar bog'liq emas deyiladi, agar tenglik bajarilmasa A va B lar o'zaro bog'liq deyiladi.

Misol:

52 ta kartadan iborat kartalar dastasidan tavakkaliga karta olingan. A - "tuz" kartasi chiqishi, B - "childik" kartasi chiqishi hodisasi bo'lsa, u holda AB – «childik tuz» kartasi chiqishi hodisasidir. A - hodisa to'rtta elementar hodisadan tashkil topgan, B - hodisa 13 ta elementar hodisadan tashkil topgan. Shuning uchun:

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4};$$

$$P(AB) = \frac{1}{52} = P(A)P(B);$$

Demak A va B lar o'zaro bog'liq emas. Agar kartalar dastasiga yana bitta karta, "joker" kartasini qo'shsak, u holda A va B lar o'zaro bog'liq bo'lib qoladi. Ya'ni:

$$P(A) = \frac{4}{53}; \quad P(B) = \frac{13}{53}; \quad P(AB) = \frac{1}{53};$$

Ko'rinib turibdinki

$$P(AB) \neq P(A)P(B);$$

§11 Bernulli sxemasi.

Ta'rif:

Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining ehtimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, ular bog'liqmas sinovlar ketma - ketligini hosil qiladi deyiladi.

Quyidagicha masalani qaraylik: bir xil sharoitda o'tkaziladigan n ta bog'liqmas sinovning har birida A hodisa $P(A) = p$ ehtimollik bilan ro'y bersa, uning bu n ta sinovda rosa m marta ro'y berish ehtimolligini toping. Izlanayotgan ehtimollikni $P_n(m)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $P_3(2)$ - bog'liqmas 3- ta sinovda A hodisa rosa 2- marta ro'y berish ehtimolligidir. Bu ehtimollikni bevosita hisoblash mumkin:

$$P_3(2) = P(A\bar{A}\bar{A} + A\bar{A}A + \bar{A}AA) = P(A\bar{A}\bar{A}) + P(A\bar{A}A) + P(\bar{A}AA) = 3 \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 3p^2q$$

Bu yerda $q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$. Umumiy holda $P_n(m)$ ehtimollik Bernulli formulasi deb ataladigan ushbu formula bilan hisoblanadi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad q = 1 - p$$

Shu formulani isbotlaymiz: n-ta bog'liqmas sinovda A hodisaning rosa m-marta ma'lum tartibda ro'y berishi, masalan

$$\underbrace{A, A, A, \dots, A}_m, \underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}}_{n-m}$$

kombinatsiya ro'y berish ehtimolligi bog'liqmas hodisalarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Ravshanki, A hodisaning yana m marta, biroq boshqacha tartibda ro'y berishi ehtimolligi yana shunday bo'ladi. A hodisa m marta turli tartibda uchraydigan bunga o'xshash kombinasiyalar soni guruhlashlar soni C_n^m ga teng. Bizni qiziqtirayotgan B hodisa A hodisaning n ta bog'liqmas sinovda rosa m marta ro'y berishi bajariladigan bu kombinatsiyalarning hammasi birgalikda bo'lmagan hodisalaridir. Shuning uchun birgalikdama hodisalar uchun R3 aksiomaga ko'ra $P_n(m) = P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Misol:

Elektr energiyasining ishlatilish hajmi bir sutka davomida belgilangan normadan oshmasligi ehtimolligi $p=0,75$ ga teng. Yaqin 6 sutka ichida elektr energiyasining ishlatilish hajmi 4 sutka davomida normadan oshmasligi ehtimolligi topilsin.

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} (0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30$$

§12 Muavr-Laplasning limit teoremlari.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi:

Agar A hodisaning ro'y berish ehtimolligi har bir sinovda o'zgarmas va p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, u holda etarlicha katta n lar uchun:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};$$

Muavr - Laplasning integral teoremasi:

Agar A hodisaning n ta bog'liqmas sinovda ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, u holda etarlicha

katta n larda A hodisaning m_1 tadan m_2 tagacha ro'y berish ehtimolligi $P(m_1 \leq m \leq m_2)$ taqriban

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx F(x_2) - F(x_1)$$

ga teng, bu yerda

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

1- izoh

Sinovlar soni qanchalik katta bo'lsa bu formulalar shunchalik yaxshiroq yaqinlashishlar beradi.

2- izoh

$\varphi(x)$ va $F(x)$ funksiyalar uchun jadvallar bor, lekin ular faqat argumentning musbat qiymatlari uchun tuzilgan, chunki $\varphi(x)$ juft, $F(x)$ toq funksiya $x > 5$ uchun har doim $F(x) = 0.5$.

§13 Diskret tasodifiy miqdorlar.

Chekli $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosini qaraymiz. Tasodifiy miqdor deb elementar hodisadan olingan sonli funksiya $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ga aytamiz.

Misol:

Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli shemasida Ω quyidagi elementar hodisalardan tashkil topgan: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Bu yerda agar i -nchi tajribada A hodisa ro'y bersa $\omega_i = 1$, aks holda $\omega_i = 0$ desak, bu sxemada $\mu = \mu(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ A hodisalarning n ta tajribada ro'y berish soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Agar $g(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ko'p o'zgaruvchili sonli funksiya bo'lsa va $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \eta(\omega) = g(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_r(\omega))$ murakkab

funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Xususan $\sum_{k=1}^2 \xi_k$ va $\prod_{k=1}^2 \xi_k$ lar

ham tasodifiy miqdordir. Xar bir hodisa $A \in \mathfrak{F}$ bilan quyidagi tasodifiy miqdorni bog'lash mumkin:

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorga A hodisaning indikatorini deyiladi. Indikatorning xossalari:

$$I_{\emptyset} = 0; \quad I_{\Omega} = 1, \quad I_{AB} = I_A I_B, \quad I_{\bar{A}} = 1 - I_A.$$

Agar $A_1, A_2, \dots, A_N$ lar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa

$$I_{\sum_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n I_{A_i}.$$

ξ - tasodifiy miqdorning qabul qiluvchi barcha qiymatlari chekli son-dagi, $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ lardan iborat bo'lgani uchun diskret tasodifiy miqdor deb ataymiz.

§14 Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari.

ξ -tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb quyidagi B sonli to'plamning funksiyasi sifatida karaluvchi quyidagi ehtimollikka ay-tamiz:

$$P(\xi \in B) = P\{\omega; \xi(\omega) \in B\}.$$

ξ - tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, uning $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari bilan va $P(\xi = x_i)$ ehtimollar bilan aniqla-nadi. $P(\xi = x_i) = p_i$ deb belgilaymiz. Bu holda $P(\xi \in B)$ taqsimot qonunini quyidagi jadval ko'rinishda berish mumkin.

ξ	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Bu yerda $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Bu jadval yordamida quyidagi tenglikka ko'ra ixtiyoriy sonli to'plam B ning ehtimolini aniqlash mumkin;

$$P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i ;$$

Misollar:

1) Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ - tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi binomial taqsimot qonuni orqali beriladi:

$$P(\mu = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n$$

2) $\{1, 2, \dots, N\}$ dagi tekis taqsimot qonuni:

$$P(\mu = m) = \frac{1}{N}, m = 1, 2, \dots, N$$

Ikki tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun $P\{(\xi \in B_1) \cap (\eta \in B_2)\} = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$ tenglik ixtiyoriy B_1 va B_2 sonli to'plamlar uchun bajarilsa, ular o'zaro bog'liqsiz deyiladi.

§15 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

Agar ixtiyoriy $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosini qaraydigan bo'lsak u holda biz ixtiyoriy sonli funksiya $\xi = \xi(\omega)$ ni tasodifiy miqdor deb atay olmaymiz.

Ta'rif:

$\xi = \xi(\omega)$ sonli funksiya tasodifiy miqdor deyiladi agarda ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun $\{\xi \leq x\} = \{\omega; \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ munosabat bajarilsa.

Ta'rif:

Barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun aniqlangan funksiya $F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$ ga ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi. $x_1 < x_2$ sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\{\xi \leq x_2\} = \{\xi \leq x_1\} \cup \{x_1 < \xi \leq x_2\} \quad (1)$$

$\{\xi \leq x_1\}$ va $\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ lar birgalikda bo'lmaganlari uchun (1) dan kelib chiqadiki $P\{\xi \leq x_2\} = P\{\xi \leq x_1\} + P\{x_1 < \xi \leq x_2\}$ va

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \quad (2)$$

Teorema:

Taqsimot funksiyasi $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

- 1) $F(x)$ - kamaymaydigan funksiya
- 2) $F(x)$ - o'ngdan uzluksiz funksiya
- 3) $F(+\infty) = 1$
- 4) $F(-\infty) = 0$

Izox:

Ixtiyoriy $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor biror intervalda uzluksiz qiymatlar qabul qilgani uchun uni uzluksiz tasodifiy miqdor deb atashadi.

Ta'rif:

Agar ikki uzluksiz tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun

$$F_{\xi\eta}(x_1, x_2) = P(\xi < x_1, \eta < x_2) = P(\xi < x_1) \cdot P(\eta < x_2) = F_{\xi}(x_1) \cdot F_{\eta}(x_2)$$

tenglik bajarilsa, u holda ξ va η lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

§16 Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari.

Biz yukorida tasodifiy miqdor tushunchasi va uning taqsimot qonunini ikki holda kiritdik. Birinchisi: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosi chekli, bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deb ataladi. Ikkinchisi: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - ehtimollar fazosi ixtiyoriy, ya'ni Ω - ning elementlari cheksiz ko'p yoki uzluksiz, bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar uzluksiz tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

Yuqorida kiritilgan tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari ularni to'la harakterlaydilar. Ammo ba'zan taqsimot qonunlari noma'lum bo'ladilar va kamroq ma'lumotlar bilan qanoatlanishga to'g'ri keladi. Ba'zan shunday son qiymatlar bilan ishlash maqsadga muvofiq bo'ladiki, bu son qiymatlar tasodifiy miqdorning xususiyatlarini belgilab beradilar. Bunday son qiymatlarni tasodifiy miqdorning sonli harakteristikalari deb ataladi. Eng muhim sonli harakteristikalar sifatida matematik kutilish va dispersiyalarni qarash mumkin.

Bizga X diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

§17 Matematik kutilma.

Ta'rif:

X-diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb quyidagi yig'indiga aytamiz:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Matematik kutilishning xossalari:

- 1) O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu o'zgarmas sonning o'ziga teng:

$$M(C) = C$$

- 2) O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi oldiga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X)$$

- 3) Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsalar, u holda:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

- 4) Ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar X va Y lar uchun:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Misollar:

1) O'zaro bog'liqsiz n-ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodi-saning ro'y berishlar soni μ -diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$M(\mu) = n \cdot p, \quad p = P(A)$$

2) $\{1, 2, \dots, N\}$ dagi tekis taqsimlangan ξ - diskret tasodifiy miqdorn-ing matematik kutilishi:

$$M(\xi) = \frac{1 + N}{2};$$

§18 Dispersiya

Shunday ikkita turli tasodifiy miqdor ko'rsatish mumkinki ularning matematik kutilmasi bir xil bo'ladi. Masalan

$$\begin{array}{ll} X: -0,01 & 0,01 \\ P: 0,5 & 0,5 \\ M(X) = -0,01 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5 = 0; & Y: -100 & 100 \\ P: 0,5 & 0,5 \\ M(Y) = -100 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 0 \end{array}$$

Demak, tasodifiy miqdorning faqatgina matematik kutilmasini bilish bilan uni harakterlab bo'lmay ekan. Shuning uchun ham matematik kutilmadan tashqari tasodifiy miqdor qabul qiluvchi qiymatlarning matematik kutilma atrofida sochilish darajasini aniqlashimiz kerak bo'ladi.

Ta'rif:

X-diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi (tarqoqligi) deb quyidagi matematik kutilmaga aytiladi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

X-tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bu taqsimot konuniga qarab $[X - M(X)]^2$ - tasodifiy miqdorning taqsimot konunini yozish mumkin:

$[x - M(x)]^2$:	$[x_1 - M(x)]^2$	$[x_2 - M(x)]^2$	$[x_3 - M(x)]^2$	...	$[x_n - M(x)]^2$
P:	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ta'rif bo'yicha:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [X_1 - M(X)] \cdot p_1 + [X_2 - M(X)] \cdot p_2 + \dots + [X_n - M(X)] \cdot p_n$$

Amalda dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalani-shadi:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1) $D(C) = 0$

2) $D(CX) = C^2 D(X)$

3) Agar X va Y bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsalar, u holda

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Bundan $D(C + X) = D(X)$ kelib chiqadi

4) X va Y lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsalar, u holda

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Misol:

O'zaro bog'liqsiz n -ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodi-saning ro'y berishlar soni μ -diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(\mu) = n \cdot p \cdot q \quad p = P(A) \quad q = 1 - p$$

Dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga o'rta kvadratik chetlanish deb ataladi va $\sigma(\mu)$ bilan belgilanadi:

$$\sigma(\mu) = \sqrt{npq}$$

§19 Ehtimollikning zichlik funksiyasi va uning xossalari.

Biz uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi orqali aniqlagan edik. Bu aniqlash yagona bo'lmay, uzluksiz tasodifiy miqdorni ehtimollikning zichlik funksiyasi orqali ham aniqlash mumkin.

Ta'rif:

Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ - dif-ferensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning ehtimolligining zichlik funksiya-si deb taqsimot funksiyadan olingan hosilaga aytamiz:

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) \quad (1)$$

Demak, taqsimot funksiyasi zichlik funksiyaning boshlang'ichi ekan.

Zichlik funksiyaning asosiy xossalari:

Teorema 1

Ixtiyoriy x - lar uchun $p_{\xi}(x) \geq 0$ va

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx \quad (2).$$

Isboti:

$F_{\xi}(x)$ funksiya kamayyuvchi bo'lgani uchun:

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) \geq 0$$

(2) tenglik quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) \stackrel{(1)}{=} F_{\xi}(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx$$

(1) - Nyuton - Leybnis formulasiga asosan.

Teorema 2

Agar $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiyasi bo'lsa y holda $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$

Isboti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b p_{\xi}(x) dx \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} [F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} F_{\xi}(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F_{\xi}(a) = 1 \end{aligned}$$

Teorema 3

Agar $F_{\xi}(x)$ va $p_{\xi}(x)$ lar mos ravishda taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyalari bo'lsalar u holda:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(t) dt$$

Isboti:

Xosmas integral ta'rifi va Nyuton - Leybnis formulasiga ko'ra taqsimot funksiyaning xossaligidan quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x p_{\xi}(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} (F_{\xi}(x) - F_{\xi}(a)) = \\ &= F_{\xi}(x) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F_{\xi}(a) = F_{\xi}(x) \end{aligned}$$

Misol:

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x) = \frac{a}{1+x^2}$ berilgan. a - sonini aniqlang va taqsimot funksiyasining ko'rinishini toping.

Yechish:

a - parametрни topish uchun Teorema 2 ni qo'llaymiz:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dx}{1+x^2} = a \cdot \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = a \cdot \frac{\pi}{2} - a \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\pi$$

Bundan esa $a = \frac{1}{\pi}$ kelib chiqadi. Taqsimot funksiyani topish uchun teorema 3 ni qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{\frac{1}{\pi} dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctg t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctg x - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Misol:

ξ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ a \frac{\ln x}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

berilgan. a ni toping va $F_{\xi}(x)$ - ni hisoblang:

Yechish:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^1 p_{\xi}(x) dx + \int_1^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_1^{\infty} a \frac{\ln x}{x^3} dx = \\ &= a \left[\frac{\ln x}{-2x^2} \Big|_1^{\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} a \frac{dx}{x^3} \right] = \frac{a}{4} \frac{1}{x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{a}{4} \cdot \left(0 + \frac{1}{1^2} \right) = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

Bundan $a=4$ kelib chiqadi. $F_{\xi}(x)$ ni topamiz: $x \leq 1$ bo'lganda

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(x) dx = 0. \quad x > 1 \text{ bo'lganda esa}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^1 p(t) dt + \int_1^{\infty} p(t) dt = 4 \int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt = \\ &= 4 \cdot \left[\frac{\ln t}{-2t^2} \Big|_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{dt}{t^3} \right] = 4 \cdot \left(\frac{\ln t}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} \right) \Big|_1^x = 1 - \frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

§20 Uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning sonli harakteristikalari.

Zichlik funksiyaga ega bo'lgan uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari aniq integral orqali aniqlanadi.

Ta'rif:

ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x)$ ga teng bo'lsa, uning matematik kutilmasi quyidagi aniq integralga teng bo'ladi.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx \quad (1)$$

va dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_{\xi}(x) dx \quad (2)$$

Diskret tasodifiy miqdorlarda aniqlangan barcha hisoblash formulalari uzluksiz tasodifiy miqdorlarining sonli harakteristikalarini hisoblashda ham saqlanadi:

$$1) M(a\xi + b) = a \cdot M\xi + b \quad (3)$$

$$2) M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta \quad (4)$$

$$3) D(a\xi + b) = a^2 D\xi \quad (5)$$

$$4) D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \quad (6)$$

(3) - tenglikni isbotlashdan oldin ξ va $a\xi + b$ tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari va taqsimot funksiyalari orasidagi bog'lanishni o'rnatamiz.

Teorema 1.

Agar ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ va zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ bo'lsa, u holda $a\xi + b$ tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiya quyidagicha bo'ladi:

$$p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (7)$$

taqsimot funksiyasi esa

$$F_{a\xi+b}(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a > 0 \quad (8)$$

$$F_{a\xi+b}(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a < 0 \quad (9)$$

Isboti:

1) $a > 0$ bo'lsin. U holda:

$$F_{a\xi+b}(x) = P(a\xi + b \leq x) \stackrel{(1)}{=} P\left(\xi \leq \frac{x-b}{a}\right) \stackrel{(2)}{=} F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

(1): $a\xi + b \leq x$ va $\xi \leq \frac{x-b}{a}$ lar teng kuchli bo'lganlari uchun

$\{\omega : a\xi + b \leq x\}$ va $\{\omega : \xi \leq \frac{x-b}{a}\}$ hodisalar teng bo'ladilar. Teng

hodisalarining ehtimollari ham teng bo'ladi.

(2): ξ - tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra tenglik o'rinli.

Endi zichlik funksiyaning ta'rifiga ko'ra:

$$P_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = \left(F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) = \frac{1}{a} F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

$a > 0$ da $|a| = a$ bo'lgani uchun (7) formula isbot bo'ldi. Endi $a < 0$ bo'lgan holni isbotlaymiz. $a \cdot \xi + b$ - tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned} F_{a\xi+b}(x) &= P(a\xi + b \leq x) \stackrel{(1)}{=} P\left(\xi \geq \frac{x-b}{a}\right) \stackrel{(2)}{=} 1 - P\left(\xi \leq \frac{x-b}{a}\right) = \\ &= 1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

(1): $a > 0$ bo'lgani uchun $a\xi + b \leq x$ tengsizlik bilan $\xi \leq \frac{x-b}{a}$

tengsizlik teng kuchli bo'ladilar va shuning uchun $\{\omega : a\xi + b \leq x\}$ va

$\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\}$ hodisalar teng bo'ladilar.

(2): $\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\} = \{\omega : \xi < \frac{x-b}{a}\}$ va $F_{\xi}(x)$ taqsimot funksiyasi

o'ngdan uzluksiz funksiya bo'lgani uchun qattiq tengsizlikni noqat'iy tengsizlik bilan almashtirish mumkin.

Endi zichlik funksiyasining ta'rifiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = \left(1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)' = -\frac{1}{a}F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \\ = \frac{1}{|a|}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Chunki $a < 0$ da $|a| = -a$ bo'ladi. (7) formula to'la isbot bo'ldi.

Endi biz (3) tenglikni quyidagi teorema asoslanib isbot qilamiz:
Teorema 2.

Agar a va b lar o'zgarmas son ($a \neq 0$) bo'lib, $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiyasi bo'lsa u holda:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p_{\xi}(x)dx \quad (10)$$

Isboti:

$p_{a\xi+b}(x)$ - deb $a\xi + b$ ning zichlik funksiyasini belgilaymiz.

1) $a > 0$. U holda uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik qutilishi ta'rifiga ko'ra

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{a\xi+b}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{a}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b)\frac{1}{a_{\xi}}p_{\xi}(t)adt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b)p_{\xi}(t)dt$$

(1): Teorema 1 ga ko'ra $a > 0$ da $p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko'rinishda o'zgaruvchilarni almashtirishni bajarsak, u holda $dx = a dt$ va $x = at + b$ bo'ladi. $a > 0$ bo'lgani uchun

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} t = +\infty$ (integrallashning yangi yuqori chegarasi), va

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t = -\infty$, (integrallashning yangi quyi chegarasi)

Agar $a < 0$ bo'lsa, hisoblashda juda katta bo'lmagan o'zgarish bo'ladi:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{a\xi+b}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (at+b) \frac{1}{a} p_{\xi}(t) a dt = \int_{-\infty}^{\infty} (at+b) p_{\xi}(t) dt$$

$$(1): \text{Teorema 1 ga ko'ra } a < 0 \text{ da } p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Shunday qilib (10) formula to'liq isbot bo'ldi.

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko'rinishda o'zgaruvchilarni almashtiramiz, u holda

$$dx = a dt, x = at + b \text{ bo'ladi va } a < 0 \text{ bo'lgani uchun } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-b}{a} = -\infty$$

(integrallashning yangi yuqori chegarasi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-b}{a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} t = +\infty$,

(integrallashning yangi quyi chegarasi)

(3) Integrallash chegaralarining o'rnini almashtiramiz.

Bu teoremadan, integralning chiziqliligidan va o'tgan temadagi teorema 2 dan (3) formula to'la isbot bo'ladi.

Ya'ni:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (at+b) p_{\xi}(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = aM\xi + b$$

Endi tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash formulasini chiqaramiz.

Teorema 3.

Agar $p_{\xi}(x)$ - zichlik funksiya bo'lib, $m = M\xi$ bo'lsa, u holda:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p_{\xi}(x) dx \quad (11)$$

Isboti:

Avvalo $(\xi - m)^2$ - tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_{(\xi - m)^2}(x)$ - ni topamiz:

$(\xi - m)^2 \geq 0$ bo'lgani uchun, $x \leq 0$ larda $\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = \emptyset$ va shuning uchun:

$$F_{(\xi - m)^2}(x) = P\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = P(\emptyset) = 0$$

$x > 0$ da

$$\begin{aligned} F_{(\xi - m)^2}(x) &= P\{(\xi - m)^2 < x\} = P(m - \sqrt{x} < \xi < m + \sqrt{x}) = \\ &= F_{\xi}(m + \sqrt{x}) - F_{\xi}(m - \sqrt{x}) \end{aligned}$$

$p_{(\xi - m)^2}(x)$ deb $(\xi - m)^2$ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini belgilasak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} p_{(\xi - m)^2}(x) &= F'_{(\xi - m)^2}(x) = F'_{\xi}(m + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - F'_{\xi}(m - \sqrt{x}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_{\xi}(m + \sqrt{x}) + p_{\xi}(m - \sqrt{x})) \end{aligned}$$

Shunday qilib:

$$p_{(\xi - m)^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ da} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_{\xi}(m + \sqrt{x}) + p_{\xi}(m - \sqrt{x})), & x > 0 \text{ da} \end{cases}$$

Endi ξ - tasodifiy miqdorning dispersiyasini ta'rifga asosan hisoblash mumkin

$$D\xi = M(x - \xi)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{(\xi - m)^2}(x) dx = \int_{-\infty}^0 x p_{(\xi - m)^2}(x) dx + \int_0^{+\infty} x p_{(\xi - m)^2}(x) dx \stackrel{(1)}{=} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} x \frac{1}{2\sqrt{x}} (p_{\xi}(m + \sqrt{x}) + p_{\xi}(m - \sqrt{x})) dx = \int_0^{\infty} x p_{\xi}(m + \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \\
&\int_0^{\infty} x p_{\xi}(m - \sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} \stackrel{(2)}{=} \int_m^{\infty} (y - m)^2 p_{\xi}(y) dy - \int_m^{-\infty} (z - m)^2 p_{\xi}(z) dz \stackrel{(3)}{=} \\
&\stackrel{(3)}{=} \int_m^{\infty} (x - m)^2 p_{\xi}(x) dx + \int_{-m}^{\infty} (x - m)^2 p_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p_{\xi}(x) dx
\end{aligned}$$

(1): $x \leq 0$ lar uchun $p_{(\xi-m)^2}(x) = 0$ bo'lganidan

$$\int_{-\infty}^0 p_{(\xi-m)^2}(x) dx = 0$$

(2): Birinchi integralda $y = m + \sqrt{x}$ almashtirish bajarsak $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

va $\lim_{x \rightarrow +\infty} (m + \sqrt{x}) = +\infty$ bo'ladi (integrallashning yangi yuqori chegarasi), ikkinchi integralda $z = m - \sqrt{x}$ almashtirish bajarsak $dz = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ va $\lim_{x \rightarrow +\infty} (m - \sqrt{x}) = -\infty$ bo'ladi (integrallashning yangi quyi chegarasi).

(3): Integrallash o'zgaruvchisini yana x deb belgilaymiz (Integrallashning o'zgaruvchiga nisbatan invariantligi uchun integral qiymati o'zgarmaydi), ikkinchi integralda esa integrallash tartibini o'zgartiramiz. Shunday qilib (11) formula isbot bo'ldi.

Misol:

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} h, & -2 \leq x \leq 3 \text{ da} \\ 0, & x < -2 \text{ va } x > 3 \text{ da} \end{cases}$$

h , M_{ξ} , D_{ξ} , $P(1 < \xi < 5)$ va $F_{\xi}(x)$ larni toping:

$$1) 1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(x) dx + \int_{-2}^3 p_{\xi}(x) dx + \int_3^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 5h$$

$$2) M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 x p_{\xi}(x) dx = 0,2 \int_{-2}^3 x dx = 0,1 \cdot x^2 \Big|_{-2}^3 = 0,5$$

3)

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 0,5)^2 p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 (x - 0,5)^2 p_{\xi}(x) dx = \int_{-2}^3 (x - 0,5)^2 \cdot 0,2 dx = \\ = \frac{0,2}{3} (x - 0,5)^3 \Big|_{-2}^3 = \frac{6,25}{3} \approx 2,1$$

$$4) P(1 < \xi < 5) = \int_1^5 p_{\xi}(x) dx = \int_1^3 p_{\xi}(x) dx + \int_3^5 p_{\xi}(x) dx = \int_1^3 0,2 dx = 0,4$$

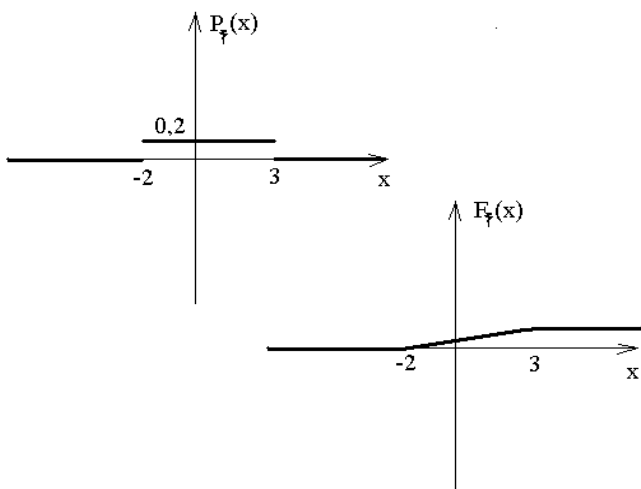
$$5) \text{ Agar } x < -2 \text{ bo'lsa } F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = 0$$

Agar $x > 3$ bo'lsa

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(t) dt + \int_{-2}^3 p_{\xi}(t) dt + \int_3^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-2}^3 0,2 dt = 1$$

chunki $x < -2$ da va $x > 3$ da $p_{\xi}(x) = 0$.

Agar $-2 \leq x \leq 3$ bo'lsa



Rasm 1

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-\infty}^{-2} p_{\xi}(t) dt + \int_{-2}^x p_{\xi}(t) dt = \int_{-2}^x 0,2 dt = 0,2(x+2)$$

Shunday qilib

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \quad \text{да} \\ 0,2(x+2), & -2 \leq x \leq 3 \quad \text{да} \\ 1, & x \geq 3 \quad \text{да} \end{cases}$$

2

§21 Boshlang'ich va markaziy momentlar.

X -tasodifiy miqdorning k -tartibli boshlang'ich momenti deb, X^k tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni $\mu_k = MX^k$.

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula $\mu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i$ ko'rinishda bo'lib, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x) dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bizga X -tasodifiy miqdor berilgan bo'lsa unga mos markaziy tasodifiy miqdor $\bar{X}^0$ deb, X -tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishiga aytiladi, ya'ni $\bar{X}^0 = X - \mu_1$.

X -tasodifiy miqdorning k -tartibli markaziy momenti deb markaziy $\bar{X}^0$ tasodifiy miqdorning k -tartibli boshlang'ich momentiga aytiladi, ya'ni

$$\eta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k \varphi(x) dx$$

ko'rinishda bo'ladi. $\eta_1 = 0, \eta_2 = D(X)$.

Bulardan tashqari tasodifiy miqdorlarning quyidagi ikki sonli xarakteristikalarini ko'rish mumkin. Mediana Me deb tasodifiy miqdorning shunday qiymatiga aytamizki, bunda

$$P(X < Me) - P(X > Me) = 0,5$$

bo'ladi. Demak tasodifiy tajribada X -tasodifiy miqdor bir xil extimol bilan yoki Me dan katta bo'ladi, yoki Me dan kichik bo'ladi. Bu xarakteristika tasodifiy miqdorning qiymatlari sonlar o'qida qanday joylashganligini xarakterlaydi. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ uchun $Me = M\xi$. Mediana noparametrik statistikada muhim rol o'ynaydi.

Moda deb diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun tasodifiy miqdorning eng katta extimolga ega bo'lgan qiymatiga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun moda tasodifiy miqdorning zichlik funksiya maksimum qiymatga erishadigan qiymatiga teng.

Zichlik funksiyasi bitta maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar unimodal taqsimotlar, bir necha maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar polimodal taqsimotlar deyiladi. Moda ham matematik kutilma va mediana kabi tasodifiy miqdorning sonlar o'qidagi joylanishini xarakterlovchi sonli xarakteristikadir. Simmetrik, unimodal taqsimotlar uchun bu uchala xarakteristika bir xildir. Normal taqsimot uchun moda bilan matematik kutilma teng bo'ladi.

§22 Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlariga misollar.

1. Agar ξ - tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$ ehtimol bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 & \text{bo'lsa,} \\ \sum_{k \leq x} C_n^k p^k q^{n-k} & \text{agar } 0 \leq x \leq n & \text{bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } n < x & \text{bo'lsa} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi = np$, $D\xi = npq$, $\sigma(\xi) = \sqrt{npq}$.

2. Agar ξ - tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0 \text{ ehtimollar bilan qabul qilsa, uni Puasson}$$

qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } k < 0 & \text{bo'lsa,} \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar } 0 \leq k \leq x & \text{bo'lsa} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$

3. Agar ξ - tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_N$ qiymatlarni

$$P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N \text{ ehtimollar bilan qabul qilsin. Bu}$$

tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq x_1 & \text{bo'lsa} \\ \frac{k}{N}, & \text{agar } x_k < x \leq x_{k+1} & \text{bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x_N < x & \text{bo'lsa} \end{cases}$$

4. α - parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy

miqdorning zichlik funksiyasi $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha \cdot e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ko'rinishga, taqsimot funktsiyasi esa $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$.

§ 23 Gaussning normal taqsimot qonuni.

Ta'rif:

ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa, u Gaussning normal qonuni bo'yicha taqsimlangan deb ataladi.

$p_{\xi}(x)$ funktsiyaning musbatligi va juftligi ravshan. $x \rightarrow \pm\infty$ da $p_{\xi}(x) \rightarrow 0$ ligini oddiygina ko'rsatish mumkin. $x=a$ nuqtada funktsiya

yagona $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ga teng bo'lgan yagona maksimumga ega. Funktsiyaning grafigi $x = \sigma + a$ va $x = -\sigma + a$ da burilish nuqtalariga ega ekanligini ikkinchi hosila yordamida aniqlash mumkin. Odatda $a=0$ va $\sigma=1$ bo'lgan hol

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

ko'p qaraladi. Bu holda $\varphi(x)$ funktsiya markazlashtirilgan va normallangan $\frac{(\xi - a)}{\sigma}$ - tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi bo'ladi. Bu funktsiyaning qiymatlari jadvallari tuzilgan. Bu funktsiya yordamida ξ - normal taqsimotli tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) \quad (3)$$

Puasson integralini biz matematik analiz kursida ko'rgan edik, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Bundan foydalanib quyidagini ko'rsatish oson.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad (4)$$

Bizga yana quyidagi ikki integralning qiymatlari kerak bo'ladi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = 1 \quad (6)$$

Isboti:

(5) tenglik integral ostidagi funksiyaning toqligi va integrallash chegarasining 0 ga nisbatan simmetrikligidan osongina kelib chiqadi. (6) tenglikni hosil qilish uchun bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \end{aligned}$$

Endi (1) zichlik funksiyaga ega bo'lgan normal taqsimlangan tasodiy miqdor ξ - ning matematik kutilmasi

$$M\xi = a \quad (7)$$

va dispersiyasi

$$D\xi = \sigma^2 \quad (8)$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Matematik kutilmaning ta'rifidan

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) \varphi(t) dt = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t \varphi(t) dt + a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = a \quad (2)$$

(1): $t = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \frac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (4) va (5) tengliklardan.

(7) tenglik isbot bo'ldi. (8) ni isbot qilish uchun dispersiyani hisoblashning quyidagi formulasidan foydalanamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p_{\xi}(x) dx$$

$m = M\xi = a$ bo'lgani uchun,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dt = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt = \sigma^2 \quad (2)$$

(1): $t = \frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \frac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (6) formulaga asosan.

Endi normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi funksiyadan foydalanamiz:

$$F_0(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$$

Bundan esa zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x)$ bo'lgan ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi munosabat orqali

topiladi. $F_{\xi}(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali tuzilgan.

$F_0(x)$ funksiyaning quyidagi xossalari isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = -F_0(x) \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = \frac{1}{2} \quad (10)$$

Avval (9) tenglikni isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt \stackrel{(1)}{=} - \int_0^x \varphi(-z) dz \stackrel{(2)}{=} - \int_0^x \varphi(z) dz = -F_0(x)$$

(1): $z = -t$ almashtirish bajaramiz, bunda $-dz = dt$ bo'ladi.

(2) $\varphi(z)$ funksiyaning juftligidan.

Endi (10) tenglikni isbot qilamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$$

ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning (α, β) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = F_0(\beta) - F_0(\alpha)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha biror musbat son dan kichikligi ehtimolligini hisoblash uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \delta > 0 \quad (11)$$

Xususan $a=0$ bo'lganda $P(|\xi| < \delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli.

Agar (11) tenglikda $\delta = \sigma \cdot t$ deb olsak $P(|\xi - a| < \sigma \cdot t) = 2F_0(t)$ ni hosil qilamiz. Xususan $t=3$ bo'lganda

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2F_0(3) = 0,9973$$

ga egamiz. Bu tasdiq "uch sigma" qoidasi deb ataladi.

§24 Asimmetriya va ekstsess.

Normal taqsimotdan o'zga taqsimotlarni o'rganishda ularning normal taqsimotdan farqini sonli baholash masalasi kelib chiqadi. Shu maqsadda maxsus sonli xarakteristikalar kiritiladi. Shulardan, xususan asimmetriyava ekstsess tushunchasini ko'rib chiqaylik. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun bu xarakteristikalar nolga teng. Shu sababli o'rganilayotgan taqsimot uchun bu xarakteristikalarining sonli qiymatlari etarlicha nolga yaqin bo'lsa, bu taqsimotning normal taqsimotga yaqinligi xaqida gapirish mumkin. Aksincha, asimmetriya va ekstsesslarning katta qiymatlari bu taqsimotning normal taqsimotdan katta farqlanganligini bildiradi.

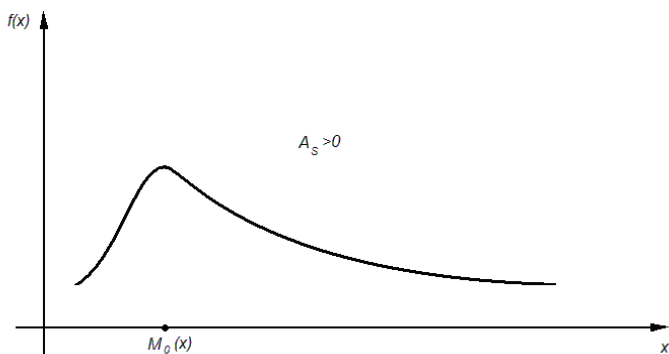
Asimmetriyaning baholanishini ko'rib chiqaylik. Simmetrik taqsimot uchun (bunday taqsimotning grafigi $x = M(X)$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik) xar bir toq tartibli markaziy momenti nolga teng. Shuning uchun bu toq tartibli ixtiyoriy (birinchi tartibli momentidasn boshqa, chunki ixtiyoriy taqsimotning birinchi tartibli markaziy momenti nolga teng) momentlar asimmetriyani baholash uchun xizmat qiladi. Tabiiyki ularning eng soddasi η_3 -uchinchi tartibli markaziy momenti tanlanadi. Lekin bu η_3 -moment tasodifiy miqdor o'lchanayotgan

o'lchov birligidan bog'liq bo'lganligi sababli uni $\sigma^3 = \sqrt{D(X)}^3$ ga bo'lib, birlik o'lchovisiz xarakteristikaga o'tib olinadi. Shunday qilib nazariy taqsimotning asimmetriyasi deb markaziy uchinchi tartibli momentning o'rtacha kvadratik chetlanish kubiga nisbatiga aytiladi:

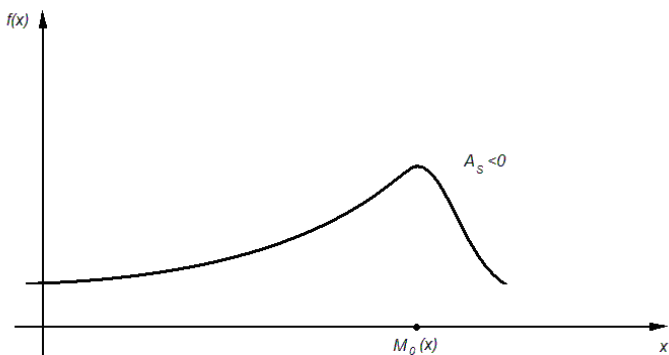
$$A_3 = \frac{\eta_3}{\sigma^3}.$$

Agar taqsimot egri chizig'ining uzun qismi, matematik kutilmadan o'ng tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya musbat (2 rasm,a) va agar taqsimot egri chizigining uzun qismi matematik kutilmadan chap tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya manfiy bo'ladi. (2 rasm,b).

a)



b)



Rasm 2

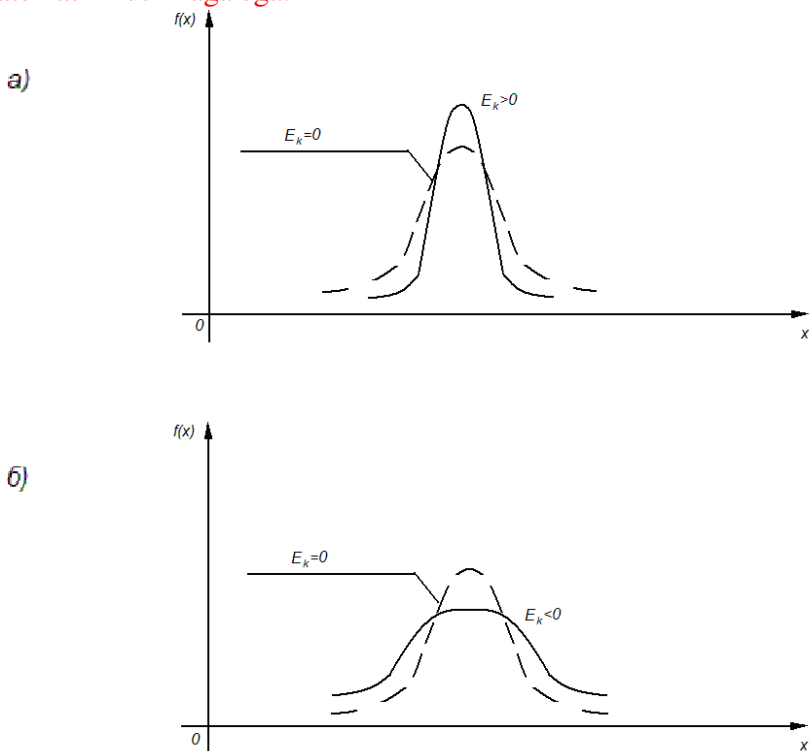
Nazariy taqsimot egri chizig'ining maksimumi normal taqsimot egri chizig'ining maksimumidan pastroqda yoki yuqoriroqda joylashganligini ya'ni taqsimot egri chizig'ining "qiyaligini" baholash uchun ekstsess deb ataluvchi sonli xarakteristikadan foydalaniladi. Ekstses

quyidagi tenglik bilan aniqlanadi: $E_4 = \frac{\eta_4}{\sigma^4} - 3$.

Normal taqsimot uchun $\frac{\eta_4}{\sigma^4} = 3$ bo'lganligi sababli $E_4 = 0$. Shu saba-

bli, agar biror taqsimot uchun ekstsess noldan farqli bo'lsa uning zichlik funksiyasining grafigi normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan farqli bo'ladi: agar ekstsess musbat bo'lsa, unda uning zichlik funksiyasining grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik

funksiyasi grafigidan balandroq bo'ladi (3 rasm,a) . Agar ekstsess manfiy bo'lsa unda solishtirilayotgan taqsimot zichlik funksiyasi grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan pastroq, ya'ni "yassi"roq bo'ladi (3 rasm b). Lekin bunda shu narsa ko'zda tutiladiki normal taqsimot xam, solishtirilayotgan taqsimot xam bir xil matematik kutilmaga ega.



Rasm 3

§25 Matematik statistikada ishlatiladigan ba'zi bir taqsimotlar.

χ^2 -taqsimot.

ξ -tasodifiy miqdor n -ozodlik darajasiga ega bo'lgan χ^2 -taqsimot qonuniga ega deyiladi agarda uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Bu erda $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ gamma funksiya bo'lib, xususan

$\Gamma(n+1) = n!$. Bu tasodifiy miqdorning momentlari quyidagicha aniqla-

nadi: $M_{\xi}^k = n(n+1)\dots[n+2(k-1)]$, $D\xi = 2n$, $\eta_3 = 8n$,

$\eta_4 = 48n + 12n^2, \dots$

Asimmetriya koeffitsienti $A_3 = \sqrt{\frac{8}{n}}$, ekstsess koeffitsienti $E_3 = \frac{12}{n}$.

1. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va $(0,1)$ parametrli normal

qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U xolda $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$

tasodifiy miqdor n -ozodlik darajali χ^2 -taqsimot qonuniga ega bo'ladi.

Statistikada nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ bilan tajriba natijalari

orasidagi muvofiqlikni tekshirish kriteriyasi Pirsonning χ^2 -

statistikasini o'rganishga asoslangan. χ^2 -statistika quyidagicha aniqla-

nadi: $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i - np_i}{np_i}$. Bu yerda $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$,

$x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_k = \infty$ $(-\infty; +\infty)$ intervalning ixtiyoriy

bo'linishi, $n_i - [x_{i-1}, x_i)$ intervalga tushgan kuzatmalar soni.

Qo'yilgan gipoteza to'g'ri deb faraz qilinganda χ^2 -statistika $n \rightarrow \infty$

da $k-1$ ozodlik darajasiga ega bo'lgan χ^2 -taqsimot qonuniga ega

bo'ladi va bu χ^2 -taqsimot $F(x)$ taqsimot funksiyasidan bog'liq bo'lmaydi.

St'yudent taqsimoti.

ξ -tasodifiy miqdor α -ozodlik darajali St'yudent taqsimotiga ega deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Bunday tasodifiy miqdorlarning momentlari quyidagicha topiladi:

$$M_{\xi}^{2k-1} = 0 \quad M_{\xi}^{2k} = \frac{\alpha^k \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad 2k < \alpha,$$

$$D_{\xi} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-2}, & \alpha > 2 \\ \infty, & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Agar η va ς - o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, va ς - n-ozodlik darajali χ^2 -taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lib,

η -standart normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, u xolda $\xi = \eta \sqrt{\frac{T}{\varsigma}}$

n-ozodlik darajali St'yudent taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'ladi. Bu taqsimotning statistikadagi tatbiqlarida ko'p xollarda α - natural son bo'ladi. St'yudent taqsimoti statistikada normal taqsimlangan boshto'plam o'rta qiymatiga qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda dispersiya noma'lum bo'lganda ishlatiladi. α -ning etarlicha katta qiymatlarida St'yudent taqsimoti standart normal taqsimotga asimptotik yaqinlashib boradi.

Fisher taqsimoti: Agar ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular k_1 va k_2 ozodlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa,

u holda $F = \frac{\xi/k_1}{\eta/k_2}$ tasodifiy miqdor F taqsimotga (yoki k_1 va k_2 ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi. F taqsimotning zichligi:

$$P_{k_1, k_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0 \frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1 x + k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Bu yerda $x > 0$ da $C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2) \Gamma(k_2/2)}$.

§26 Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning qo'shma taqsimot qonuni

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari (x, y) sonlar jufti bo'lgan (ξ, η) - ikki tasodifiy miqdor sistemasiga aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi. Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari $P_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ ro'yxatiga aytiladi. Taqsimot qonuni odatda jadval shaklida beriladi.

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	$\dots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	$\dots$	p_{n2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	$\dots$	p_{nm}

Uzluksiz ikki o'lchovli (ξ, η) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, $F_{\xi\eta} = P(\xi < x, \eta < y)$ ehtimolga aytiladi.

$F_{\xi\eta}(x, y)$ - taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

$$1) \quad 0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1$$

2) $F_{\xi\eta}(x_2, y) \geq F_{\xi\eta}(x_1, y)$, agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x, y_2) \geq F_{\xi\eta}(x, y_1)$, agar $y_2 > y_1$ bo'lsa.

3) Ushbu tengliklar o'rinli:

$$F_{\xi\eta}(-\infty, y) = 0, F_{\xi\eta}(y, -\infty) = 0, F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = 0$$

$$4) \quad F_{\xi\eta}(\infty, \infty) = 1$$

$$5) \quad F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_1(x), \quad F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_2(y)$$

Bu yerda $F_1(x)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdor (ξ, η) - ning ξ tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi, $F_2(y)$ esa η tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi.

6)

$$P(a < \xi < b, c < \eta < d) = F_{\xi\eta}(b, d) - F_{\xi\eta}(a, d) - F_{\xi\eta}(b, c) + F_{\xi\eta}(a, c).$$

Uzlaksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining zichlik funksiyasi deb, taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \partial y};$$

Zichlik funksiyani bilgan holda taqsimot funksiyani

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{\xi\eta}(x, y) dx dy;$$

formula bo'yicha topish mumkin.

(ξ, η) tasodifiy nuqtaning D sohaga tushish ehtimoli

$$P[(\xi, \eta) \in D] = \iint_D p_{\xi\eta}(x, y) dx dy \quad \text{tenglik bilan aniqlanadi.}$$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$1) \quad p_{\xi\eta}(x, y) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1$$

(ξ, η) - ikki o'ldiruvli tasodifiy miqdorning koovariatsiyasi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu_{\xi\eta}(x, y) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta))$$

ξ va η miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti deb koovariatsiyaning bu miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishlari ko'paytmasiga nisbatiga aytiladi:

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} ;$$

Agar $\mu_{\xi\eta} \neq 0$ bo'lsa, bu miqdorlar korrelyatsiyalangan deyiladi.

Agar $\mu_{\xi\eta} = 0$ bo'lsa, bu miqdorlar korrelyatsiyalanmagan deyiladi.

Ikkita korrelyatsiyalangan miqdor, shuningdek, bog'liq hamdir; agar ikkita miqdor bog'liq bo'lsa ularning korrelyatsiyalangan bo'lishi shart emas.

Ikkita miqdorning erkliligidan ularning korrelyatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, lekin bu miqdorlarning korrelyatsiyalanmaganligidan ularning erkliligi haqida xulosa chiqarish mumkin emas. (Normal taqsimlangan miqdorlar bundan mustasno).

§27 Bir tasodifiy argumentning funksiyasi.

Agar ξ tasodifiy argumentning har bir mumkin bo'lgan qiymatiga η tasodifiy argumentning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda η ni ξ tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\eta = \varphi(\xi)$. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'lsa, u holda ξ ning turli qiymatlariga η ning turli qiymatlari mos keladi, shu bilan birga ξ va η ning mos qiymatlarining ehtimollari bir xil bo'ladi. Boshqacha aytganda, η ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ tenglikdan topiladi, ξ_i argument ξ ning mumkin bo'lgan qiymatlari; η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari $P(\eta = \eta_i) = P(\xi = \xi_i)$ tenglikdan topiladi. Agar $\eta = \varphi(\xi)$

monoton funksiya bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, ξ ning turli qiymatlariga η ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin.

Bunday holda η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topish uchun ξ ning η bir xil qiymat qabul qiladigan qiymalarining ehtimollarini qo'shish lozim.

Agar ξ ushbu $p_{\xi}(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ differensiallanuvchi monoton funksiya bo'lib, unga teskari funksiya $\eta = \psi(\xi)$ bo'lsa, u holda η tasodifiy miqdorning $p_{\eta}(y)$ zichlik funksiyasini $p_{\eta}(y) = p_{\xi}[\psi(\eta)] \cdot |\psi'(\eta)|$ tenglikdan topiladi.

Agar $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya ξ ning qiymatlari intervalida monoton bo'lmasa, u holda bu intervalni $\varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'ladigan intervallarga ajratib, monotonlik intervallarining har biri uchun $p_{\eta_i}(y)$ zichlik funksiyalarini topish, keyin esa $p_{\eta}(y)$ ni $p_{\eta}(y) = \sum p_{\eta_i}(y)$ yig'indi ko'rinishida ifodalash lozim.

§28 Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi.

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlarining har bir juftiga μ tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda μ ikkita ξ va η tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\mu = \varphi(\xi, \eta)$. Agar ξ va η diskret erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\mu = \xi + \eta$ funksiyaning taqsimotini topish uchun μ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topish lozim, buning uchun ξ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining hammasi bilan qo'shib chiqish lozim. μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi.

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi + \mu = \xi_i + \mu_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Huddi shuningdek $\mu = \xi \cdot \eta$ funksiyaning ham taqsimoti topiladi. Bunda $\mu_i = \xi_i \cdot \eta_i$ lar μ ning mumkin bo'lgan har bir qiymati va μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi \cdot \mu = \xi_i \cdot \mu_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

§29 Katta sonlar qonuni

Extimollik nazariyasida «katta sonlar qonuni» deyilganda tor ma'noda bir qator matematik teoremlar tushuniladi va ularning har birida katta sondagi tajribalar o'rtacha harakteristikalarining u yoki bu shartlarda biror ma'lum o'zgarma miqdorlarga yaqinlashish fakti belgilanadi. Katta sonlar qonuni ehtimollik nazariyasining amaliyotga tatbiqlari uchun nazariy asos bo'ladi.

Bernuli teoremasi: S - tajribada A hodisa $p = P(A)$ ehtimol bilan ro'y beradi. Stajriba o'zaro bog'liq bo'lmagan holda n-marta takrorlanganda A hodisa m marta ro'y bersin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bu teoremadan ko'rinib turibdiki, A hodisaning ro'y berishi chastotasi $\frac{m}{n}$ - bizga katta n larda A hodisaning ro'y berish ehtimolini berar ekan. Ko'pincha amaliyotda quyidagi Chebishev tengsizligi ishlatiladi. Chebishev teoremasi: Chekli dispersiyaga ega bo'lgan istalgan ξ tasodifiy miqdor uchun har bir $\varepsilon > 0$ da

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

§30 Markaziy limit teoremasi:

Markaziy limit teoremlar tasodifiy miqdorlar yig'indilari ketma - ketliklarining qanday shartlarda normal taqsimotga bo'ysunishini aniqlab beruvchi teoremlaridir. Ular bir - birlaridan yig'indini hosil qiluvchi tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlariga qo'yiladigan shartlar bilan farq qiladi. Biz markaziy limit teoremaning eng sodda shaklini ta'riflaymiz, u qo'shiluvchilar bir xil taqsimlangan hol uchun to'g'ridir.

Teorema,

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning matematik kutilishi m va dispersiyasi σ^2 bo'lgan bir xil taqsimot qonuniga ega bo'lsa, u holda n cheksiz ortganida

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

-ning taqsimot qonuni matematik kutilishi 0 va dispersiyasi 1 bo'lgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Muavr - Laplasning lokal teoremasi bu teoremaning xususiy holi ekanini aytib o'tamiz.