Министерство Высшего и Среднего специального
образования Республики Узбекистана
Национальный Университет Узбекистана
имени М. Улугбека

Физический факультет
Направление метеорология

Курсовая работа

По предмету: Численные методы прогноза погоды

На тему: Прогностические модели, основанные на полных уравнениях гидротермодинамики.

Выполнила: Закирова Ф.А.

Проверила: доц. Фатхуллаева З.Н

Ташкент 2011

Содержание.

Введение.

Основной недостаток методов прогноза, основанных на использовании квазигеострафического и квазисоленоидального приближений, связан с неточностью описания поля движения с помощью квазигеострафического и других приближений. Особенно отчетливо этот недостаток проявляется при процессах образования новых возмущений в полях ветра и давления, а также при перестройке барического поля. Именно при этих процессах имеют место наибольшие отклонения фактического ветра от геострафического или солиноидального.

Уже в 50-х годах наряду с интенсивным развитием квазигеострафических и других так называемых фильтрованных прогностических моделей начались поиски новых путей решения задачи гидродинамического прогноза. Эти поиски привели к появлению нового направления, в котором не используется никакого приближения относительно действительного ветра. Делается только предположение о квазистатичности крупномасштабных атмосферных движений. В качестве основных уравнений при этом используется непреобразованные или полные уравнения гидротермодинамики.

Наиболее важный вклад в создание нового направления в теории прогноза был сделан И.А. Кибилем. Им было указано на необходимость учета процесса адаптации при интегрировании полных уравнении и предложена наиболее общая прогностическая модель на основе полных уравнений. В то же время И.А.Кибель показал, что в процессе интегрирования полных уравнений благодаря адаптации движение должно оставаться близким к геострофическому.

Для разработки новых прогностических моделей важное значение имели новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, предложенные Г.И.Марчуком.

Идеи И.А.Кибеля и Г.И.Морчука легли в основу целового ряда прогностических моделей, разработанных исследователями: С.А. Бортниковым, Н.И. Булевым, С.В. Немчиновым и В.П. Садоковым, В.В. Быковым, В.М. Кадышниковым, Л.В. Берковичем, Д.Я. Прессманом, М.С. Фукс- Рабиновичем, В.И. Воробьевым, В.М. Дымниковым И Г.Р Контаревым и др.

Интенсивное развитие методов прогноза, основанных на интегрировании полных уравнений гидротермодинамики, проводилось также зарубежными исследователями. В этой курсовой изложены общие принципы, лежащие в основе методов прогноза с помощью полных уравнений.

1.Постановка задачи прогноза метеорологических элементов на основе полных уравнений гидротермодинамики.

Под полными уравнениями гидротермодинамики будем понимать уравнения, в которых вместо уравнения движения по вертикальной оси принимается уравнение статики. При отсутствии турбулентной вязкости и притоков тепла в изобарической системе координат эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+l\upsilon.$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\tau\frac{\partial \upsilon}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu.$$

$$T=-\frac{g}{R}p\frac{\partial H}{\partial p}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{c^2}{Rp}\tau \qquad (1.1)$$

В качестве краевых условий по вертикали принимается непроникновение воздуха через верхнюю границу атмосферы и сквозь земную поверхность, т.е

$$\text{при } p=0 \qquad \tau=0$$

$$\text{при } p=P \qquad \tau=\tau_1=g\rho_1\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial H}{\partial y}\right) \qquad (1.2)$$

Рассмотрим тепрь условие на границе области интегрирования Г. Необходимость в постановке таких условий возникает при интегрировании уравнений не на всем земном шаре, а на ограниченной территории.

Простейшие граничные условия при неизменности всех рассматриваемых функций на границе области интегрирования не дают удовлетворительных результатов. Наиболее обоснованно эти условия можно поставить для случая, когда граница области интегрирования проходит вдоль экватора. В этом случае можно принять, что на границе нормальная составляющая скорость ветра и производные по нормали от касательной составляющей вектора скорости и от высот изобарических поверхностей обращаются в нуль, т.е.

$$V_n|_\Gamma=0, \qquad \frac{\partial V\tau}{\partial n}|_\Gamma=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial n}|_\Gamma=0. \quad (1.3)$$

Краевые условия (1.3) отражают известные эмпирические факторы о малости обмена воздуха между северным и южным полушариями.

Рассматриваемая система уравнений содержит три производные по времени. Это означает, что в начальный момент должно быть задано распределение в пространстве трех функций. Эти три функции из пяти могут быть выбраны произвольно. Если, например, известными принять u, υ и H, то и T найдется с помощью уравнения статики, а τ- из уравнения неразрывности. Действительно, интегрирование уравнения неразрывности по p и учитывая первое из граничных условий (1.2), находим

$$\tau= -\int_0^R\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)dp. \quad (1.4)$$

Обычно принимается, что

При t=0 $\quad u= u^0, \upsilon = \upsilon^0, H= H^0 \quad (1.5)$

Система уравнений (1.1) является весьма сложной, так как она содержит ряд нелинейных членов. Получить ее точное решение в аналитическом виде оказывается невозможным. Перепишем уравнения движения и притока тепла таким образом, чтобы в левой части остались только производные по времени, а в правой части все остальные члены, суммы которых обозначим через f_u, f_υ, f_T:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f_u, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}=f_\upsilon, \quad \frac{\partial T}{\partial t}=f_T \quad (1.6)$$

Если в некоторый момент времени функции u, υ и H известны, то можно определить T и τ, а затем и функции f_u, f_υ, f_T, а следовательно, и производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t}$.

Теперь, используя какое-либо приближение для производных, можно сделать шаг по времени и найти будущие значения u, υ, T и H. Далее вновь рассчитывается функция τ и т.д.

При таком подходе уравнения системы (1.1) никак не преобразуются, поэтому такой путь решения условно можно назвать п р я м ы м методом интегрирования уравнений.

Несмотря на кажущуюся простоту, реализация такого подхода требует особой тщательности в выборе конечно- разностной аппроксимации производных и специальной подготовки исходных данных. Использование про́стейших конечно- разностных соотношений и данных непосредственных измерений, сожержащих ошибки, не могут привести к цели. Причина заключается в следующем. Рассматривая правые части первых уравнений системы (1.1), а также величину D, можно заключить, что они представляют собой малые разности больших величин. В самом деле, если

$$O(g\frac{\partial \mathrm{H}}{dx}) = O(l\upsilon) = 10^{-3}$$

то

$$O(-g\frac{\partial \mathrm{H}}{dx} + l\upsilon) = O(l\upsilon\bullet) = 10^{-4}$$

($\upsilon' = \upsilon - \upsilon_g$ отклонение ветра от геострофического) и если

$$O(\frac{\partial u}{dx}) = O(\frac{\partial \upsilon}{dx}) = 10^{-5}$$

то

$$O(\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial \upsilon}{dy}) = O(D) = 10^{-6}.$$

Тогда при наличии даже относительно небольших ошибок в u и υ (независимо от причины) мы можем получить относительно большие ошибки в величинах u', υ' и D, а значит и в величинах правых частей уравнений (1.6) и выражения (1.4), а в конечном счете в определении производных по времени. В дальнейшем мы увидим, каким образом преодолеваются указанные трудности.

2.Способы интегрирования полных уравнений гидротермодинамики.

И.А. Кибель предложил такие способы интегрирования полных уравнений, при которых указанные малые разности больших величин исключаются с самого начала. Проиллюстрируем это на двух примерах. Рассмотрим вначале способ, когда решение ищется для производных по времени в виде пространственных интегралов.

Введем новую независимую переменную ζ=p/P, исключим из уравнения притока тепла температуру с помощью уравнения статики и перепишем полученные уравнения таким образом, чтобы линейные члены оказались в левой, а нелинейные- в правой части уравнений, т.е. в виде:

$$\frac{\mathrm{du}}{dt} - l\upsilon + g\frac{\partial \mathrm{H}}{dx} = -(u\frac{\mathrm{du}}{dx} + \upsilon\frac{\mathrm{du}}{dy} + \frac{\tau \mathrm{du}}{Pdp}) = -B_u$$

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{dt} + lu + g\frac{\partial \mathrm{H}}{dy} = -(u\frac{\mathrm{d}\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{dy} + \frac{\tau \mathrm{d}\upsilon}{Pdp}) = -B_\upsilon$$

$$\zeta^2 g\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{d\zeta dt} + \frac{c^2}{P}\tau = -R\zeta A_T$$

$$\frac{\mathrm{du}}{dx} + \frac{\mathrm{d}\upsilon}{dy} + \frac{1\mathrm{d}\tau}{Pd\zeta} = 0 \qquad (2.1)$$

где $A_T = -(u\frac{\partial T}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial T}{\partial y}) = \frac{g}{R}\zeta(u\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{d\zeta dx} + \upsilon\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{d\zeta dy})$

- адвекция температуры.

Произведя дифференцирование уравнений движения и комбинируя результаты, получим уравнения вихря и дивергенции. Кроме того, преобразуем уравнения притока тепла, исключив из него τ. В результате получим следующие три уравнения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + lD = A_\Omega$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + g\Delta H - l\Omega = A_D$$

$$\frac{\partial}{d\zeta}\zeta^2 g\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{d\zeta dt}-\frac{c^2}{g}D=-\frac{R}{g}\frac{\partial\zeta A_T)}{\partial\zeta} \qquad (2.2)$$

где $D=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$,

$$\Omega=\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

$$A_\Omega=-\left[u\frac{\partial(\Omega+l)}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial(\Omega+l)}{\partial y}\right]-D\Omega-\frac{1}{P}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\upsilon}{\partial\zeta}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)\right]$$

$$A_D=-\left[u\frac{\partial D}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial D}{\partial y}\right]-\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right]+u\frac{\partial l}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial l}{\partial x}-$$

$$-\frac{1}{P}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial\upsilon}{\partial\zeta}\right)\right]$$

В самом общем случае можно считать, что

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \upsilon=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad (2.3)$$

так что

$$\Omega=\Delta\psi, \qquad D=\Delta\varphi, \qquad \frac{\tau}{P}=\int_0^\zeta \Delta\varphi d\zeta \quad (2.4)$$

Предположим, что величины A_T, A_Ω и A_D, содержащие нелинейные член, в некоторый момент времени(например в начальный) известны. В таком случае систему уравнений (2.2)можно рассматривать как систему из трех уравнений с тремя неизвестными $\frac{\partial H}{\partial t}$,$\Omega$,D.

Исключая из полученной системы уравнений две какие-либо переменные, можно получить уравнение для любой из них. Так, например, уравнения для $\frac{\partial H}{\partial t}$ имеет вид

(2.5)

$$\Delta\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{l^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{l^2}\frac{\partial^3 H}{\partial t^3}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}\right]=\frac{l^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{R}{gl^2}\frac{\partial^2(\zeta A_T)}{\partial\zeta\partial t}+\frac{1}{g}A_D\right]$$

$$-\frac{Rl^2}{gc^2}\frac{\partial(\zeta A_T)}{\partial\zeta}+\frac{1}{g}A_\Omega$$

Решая это уравнение и учитывая краевые условия, мы можем получить $\frac{\partial H}{\partial t}$ в виде интегралов по переменным x, y, ζ ,t. Ограничиваясь лишь изложением общего подхода к решению задачи, мы не будем записывать эти интегралы, а дадим лишь гидродинамическую трактовку полученных уравнений и их решений.

Система уравнений(2.2), а также уравнение вида (2.5) описывают перемещение и эволюцию как крупномасштабных, так и быстрых внутренних гравитационных волн. При этом быстрые волны при своем перемещении и затухании способствуют адаптации метеорологических полей. В тоже время наличие в уравнениях линейных членов A_T, A_Ω и A_D отражает процесс непрерывной генерации новых волн. В результате просмотренная система уравнений будет описывать процесс, движения в котором имеют характер колебания вблизи квазигеострафического. Решая эту задачу шагами по времени, мы получаем прогноз крупномасштабных движений при учете процесса адаптации и близости движения к геострофическому.

3. Второй подход Кибеля к интегрированию полных уравнений гидротермодинамики.

Вначале производится замена производных по времени конечными разностями, а решение ищется относительно значений искомых функций в будущий момент времени.

Исключив из уравнения притока тепла τ с помощью уравнения неразрывности, перепишем систему уравнений(2.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l\upsilon = -(u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \frac{\tau}{P}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \zeta} + g\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}) = -F_u$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + lu = -(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\tau}{P}\frac{\partial \upsilon}{\partial \zeta} + g\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}) = -F_\upsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\ \mathrm{H}}{\partial t} - \frac{c^2}{g}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}) = -\frac{R}{g}\frac{\partial\left(\zeta A_T\right)}{\partial \zeta} \qquad (3.1)$$

Произведем теперь замену производных по времени с помощью соотношений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\delta t}\left(u^1 - u^0\right),\ \ \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{1}{\delta t}\left(\upsilon^1 - \upsilon^0\right),\ \ \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\delta t}\left(H^1 - H^0\right) \quad (3.2)$$

где δt- шаг по времени; u^0,υ^0 и H^0- значения функций в начальный, u^1,υ^1 и H^1 – в конечный момент времени. Отнесем теперь силу Кориолиса и горизонтальную дивергенцию к будующему моменту времени, а силу барического градиента представим в виде полусуммы сил в начальный и конечный моментв времени, т.е. положим, что $g\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{g\partial\left(\left(H^1 - H^0\right)\right)}{2\partial x}$, $g\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{g\partial\left(\left(H^1 - H^0\right)\right)}{2\partial x}$.

В результате вместо уравнения (3.1) получим:

$$u^1 - l\delta t\upsilon^1 = u^0 - \delta tF_u$$

$$\upsilon^1 + l\delta tu^1 = \upsilon^0 - \delta tF_\upsilon \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial\ \mathrm{H}^1}{\partial \zeta} - \frac{c^2\delta t}{g}(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon^1}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial\ \mathrm{H}^0}{\partial \zeta} - \frac{R}{g}\delta t\frac{\partial\left(\zeta A_T\right)}{\partial \zeta}$$

Мы можем теперь найти решение системы (3.3) относительно u^1, υ^1 и H^1. С помощью первых двух уравнений системы получаем

$$u^1 = \frac{1}{1+(l\delta t)^2}\left[u^0 + l\delta t\upsilon^0 - \delta t(F_u + l\delta t F_\upsilon\right]$$

$$\upsilon^1 = \frac{1}{1+(l\delta t)^2}\left[\upsilon^0 + l\delta t u^0 - \delta t(F_\upsilon + l\delta t F_u\right] \qquad (3.4)$$

С учетом этих сложных соотношений можно найти выражение для дивергенции. Найденное выражение подставим в третье уравнение системы (3.3). Выделив Из функций F_u и F_υ производные $\frac{\partial H^1}{\partial x}$ и $\frac{\partial H^1}{\partial y}$ и вернувшись к функциям B_u и B_υ, получаем уравнения для искомой функции H^1:

$$(\Delta + a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial \zeta})(H^1 - H^2) = A,$$

где a_1, a_2 и a_3- коэффициенты, А- комбинация функций A_T, B_u и B_υ, а также начальных значений u^0, υ^0 и H^0

Решив уравнения (3.5), получим будущие значения H^1. Теперь с помощью (3.4) определяются будущие значения u^1, υ^1. Далее может быть сделан следующий шаг по времени и т.д.

Идеи, содержащиеся в изложенных подходах И.А.Кибеля, нашли широкое применение при разработке конкретных прогностических схем. Особенно важным оказалось предложение о выражении линейных членов через их значение не только в начальный, но и в конечный моменты времени, т.е. предложение о применении так называемых неявных конечно-разностных схем.

4.Интегрирование полных уравнений гидротермодинамики для баротропной атмосферы при использовании явных схем.

Полные уравнения гидродинамики для баротропной атмосферы возьмем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial x} + l\upsilon.$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y} - lu.$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial H}{\partial y} = -H(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \qquad (4.1)$$

Перепишем уравнения таким образом, чтобы в левой части остались только производные по времени, т.е в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial H}{\partial x}) + l\upsilon = f_u.$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + g\frac{\partial H}{\partial y}) - lu = f_\upsilon.$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -(u\frac{\partial H}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial H}{\partial y}) - H(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) = f_H \qquad (4.2)$$

Зная u,υ и H в какой- либо момент времени t, мы можем рассчитать значения f_u f_υ f_H , а следовательно, и производные по времени. Чтобы получит значения u,υ и H в некоторый момент времени t+δt, необходимо заменить производные по времени с помощью конечных разностей. При использовании явных конечно- разностных схем возможно несколько вариантов конечно- разностной аппроксимаций.

5.Метод Адамса.

В некоторых случаях для численной аппроксимации используется метод Адамса, в соответствии с которым

$$X^{t+\delta t} - X^{t} = \left[\frac{3}{2} f^{t} - \frac{1}{2} f^{t-\delta t}\right]\delta t$$

Здесь X-любая функция, а f= $\dfrac{\partial X}{\partial t}$

Метод Адамса имеет третий порядок точности аппроксимации. Однако для его реализации необходимо иметь значение f не только на текущем шаге, но и на предыдущем.

Подчеркнем, что при любом из упорядоченных методов конечно-разностной аппроксимации можно выразить будущее значение функции через известные функции непосредственно, т.е в явном виде.

Перейдем теперь к рассмотрению конечно-разностной аппроксимации правых частей уравнений(5.1). Для квадратной сетки точек с безразмерными координатами i и j в простейшем случае, например, первое уравнение системы(4.2) запишется в виде

$$(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t})_{ij} = (f_u)_{ij} = -\frac{1}{2\delta s}\left[u_{ij}(u_{1+1,j} - u_{i-1,j}) + \upsilon_{ij}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + g(H_{i+1,j} - H_{i-1,j})\right] +$$
$$+ l_{ij}\upsilon_{ij}.$$

Такая простейшая аппроксимация при использовании явных схем оказывается недостаточной, так как она не обеспечивает необходимой точности и не фильтрует ошибки в исходной информации. Поэтому были разработаны специальные способы конечно-разностной аппроксимации уравнений.

Для примера рассмотрим систему конечно-разностной аппроксимации, предложенную Ф.Г. Шуманом. Пусть *n*- любая безразмерная координата (i, j и т.д.). Введем в рассмотрение основные точки координатной системы, имеющие целые значения индексов *n,*и промежуточные точки с полученными значениями *n.*

Обозначим

$$\overline{X^{n}} = \frac{1}{2}(X_{n+\frac{1}{2}} + X_{n-\frac{1}{2}}) \quad , X^{n} = \frac{1}{(\delta l)_{n}}(X_{n+\frac{1}{2}} - X_{n-\frac{1}{2}}) \qquad (5.2)$$

где $\overline{X^n}$ имеет смысл осреднения, X $_n$- конечно-разностная производная, -приращение координаты, соответствующей индексу *n.*

Можно проверить, что

$$\overline{\overline{X^n}}^n = \overline{X}^{nn} + \frac{1}{4}(X_{n+1} + 2X_n + X_{n-1})$$

$$\overline{X}^n{}_n = \frac{1}{2\delta l}(X_{n+1} - X_{n-1}) \quad (5.3)$$

Применим соотношения (5.2) и (5.3) к простейшему одномерному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = -g\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} \qquad (5.4)$$

И рассмотрим для примера два способа конечно-разностной аппроксимации этого уравнения. Так как $u\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathrm{uu})}{\partial x}$,то последнее уравнение может быть записано в так называемой *дивергентной* форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathrm{uu})}{\partial x} = -g\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} \qquad (5.5)$$

Заменив производные на конечные разности и применив осреднение, получим уравнение (5.5) в так называемой *полумемоментной форме*

$$\overline{u}_t{}^t + \frac{1}{2}\overline{(uu)}^x{}_x = -g\overline{H}^x{}_x \qquad (5.6)$$

Если i и s- конечно-разностные координаты по осям x и t соответственно, то последнее уравнение с учетом (5.3) запишется в виде

$$u_{i,s+1} - u_{i,s-1} + \frac{1}{2}\frac{\delta t}{\delta s}(u^2{}_{i+1,s} - u^2{}_{i-1,s}) = -g\frac{\delta t}{\delta s}(H_{i+1,s} - H_{i-1,s}) \quad (5.7)$$

Теперь в (5.4) замену производных по (5.2) и произведем осреднение; причем, функцию u, стоящую перед производной по горизонтальной координате, для фильтрации ошибок осредним дважды. В результате вместо (5.6) получим

$$\overline{u}_t^{\,t} + \overline{u^{xx}u)}^{x}_{x} = -g\overline{H}^{x}_{x} \quad (5.8)$$

или, учитывая (5.3),

$$u_{i,s+1} - u_{i,s-1} + \frac{1}{4}\frac{\delta t}{\delta s}[(u_{i+1,s} + 2u_{i,s} + u_{i-1,s})(u_{i+1,s} - u_{i-1,s})] = -$$

$$- g\frac{\delta t}{\delta s}(H_{i+1,s} - H_{i-1,s}) \qquad (5.9)$$

Это так называемая *адвективная* форма с фильтрирующим множителем. Существуют и другие конечно-разностные аппроксимации уравнений, но рассмотренные выше способы получили наиболее широкое распространение.

6.Прогностическая модель баротропной атмосферы Ф.Г.Шумана.

В этой модели используются уравнения (4.1). Однако они записываются с учетом переменности масштаба карты в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-m\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial gH}{\partial x}\right)+l\upsilon.$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=-m\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial gH}{\partial y}\right)-lu.$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-m\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial H}{\partial y}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

Применяя адвективную форму фильтрирующим множителем, получаем следующие конечно-разностные уравнения:

$$\overline{u}^{t}_{t}=\overline{[-\overline{m}^{xy}(\overline{u}^{x}{}^{y}\,\overline{u}^{y}_{x}+\overline{\upsilon}^{xy}u^{y}_{x}+g\overline{H}^{y}_{x})+\overline{l}^{xy}\,\overline{\upsilon}^{xy}]}^{xy}\ .$$

$$\overline{\upsilon}^{t}_{t}=\overline{[-\overline{m}^{xy}(\overline{u}^{x}{}^{y}\,\overline{\upsilon}^{y}_{x}+\overline{\upsilon}^{xy}\,\overline{\upsilon}^{y}_{x}+g\overline{H}^{y}_{y})-\overline{l}^{xy}\,\overline{u}^{xy}]}^{xy}\ . \qquad (6.1)$$

$$\overline{H}^{t}_{t}=\overline{[-\overline{m}^{xy}(\overline{u}^{x}{}^{y}H^{y}_{x}+\overline{\upsilon}^{xy}\,\overline{H}^{y}_{y}+\overline{H}^{yx}(\overline{u}^{x}_{y}+\overline{\upsilon}^{x}_{y})]}^{xy}\ .$$

Данная модель была реализована для прогноза AT_{500} в тропиках, а также в северном полушарии. В последнем случае использовалось граничное условие на экваторе.

7. Прогностическая модель баротропной атмосферы М.С. Фукс-Рабиновича.

В качестве исходных уравнений в этой модели берутся уравнения (4.1). При этом в уравнениях движения производится учет горизонтальной турбулентной вязкости, что делается путем добавления к первому и второму уравнениям движения членов $k'\Delta u, k'\Delta v$.

Для аппроксимации производных по времени используется метод Адамса.

Аппроксимация правых частей уравнения выполняется по методу Ф. Шумана, изложенному ранее, а оператор Лапласа выражается в виде

$$\Delta_{ij} X^s = \frac{1}{(\delta s)^2}[X_{i-1,s} + X^s{}_{i+1,s} + X^s{}_{i,s-1} + X^s{}_{i,s+1} - 2(X^{s-1}{}_{i,s} - X^{s+1}{}_{i,s})]$$

(7.1)

Рассматриваемая прогностическая модель реализована для прогноза AT_{500} по большой части северного полушария. Область расчета представляет собой восьмиугольник с центром симметрии на северном полюсе. Шаг по координате составляет 390км на широте 60^0. В самой короткой строке восьмиугольника расположены 23 точки сетки, а в самой длинной строке-51 точка. Всего в восьмиугольнике 2181 точка. На границе области принимается условие (1.3). Модель дает удовлетворительные результаты на срок до 5 суток.

8. Интегрирование полных уравнений гидродинамики для баротропной атмосферы при использовании неявных схем.

При интегрировании уравнений гидродинамики методами, описанными раньше, все члены относились к одному исходному моменту времени. После замены производной по времени конечными разностями мы получали возможность найти выражения ля искомых функций через неизвестные величины в явной форме.

Теперь рассмотрим другой подход к интегрированию уравнений, при котором часть или все члены прогностических уравнений относятся не только к исходному, Нои к следующему моменту времени. В результате мы получим неявную схему. Неявные схему по сравнению с явными обладают большей вычислительной устойчивостью, что в свою очередь позволяет учитывать в соответствующих моделях различные эффекты без потери устойчивости счета.

Существует много разных вариантов неявных схем. На практике широкое применение нашел метод трапеций. Так как значения $f^{t+\delta t}$ не могут быть вычислены непосредственно по исходным данным, то для реализации таких схем применяется метод последовательных приближений. В качестве $f^{t+\delta t}$ в первом приближении принимают значения f^{t}, а во втором- значения f, вычисленные по данным, полученным в первом приближении, и т.д.

9.Прогностическая модель баротропной атмосферы З.И. Цквитинидзе.

Уравнения прогностической модели берутся в форме (4.1). Уравнения движения перепишем в виде (3.1) (без учета членов, содержащих производные $\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial \upsilon}{\partial \zeta}$), производные по времени заменим с помощью соотношений (3.2), а составляющие силы Кориолиса в функции F заменим полусуммами их значений в начальный и конечный момент времени. В результате получим:

$$u^1 - \frac{l\delta t}{2}\upsilon^1 = u^0 + \frac{l\delta t}{2}\upsilon^0 - \frac{\delta t}{2}(F_u^{\,1} + F_u^{\,0})$$

$$\upsilon^1 + \frac{l\delta t}{2}u^1 = \upsilon^0 - \frac{l\delta t}{2}u^0 - \frac{\delta t}{2}(F_\upsilon^{\,1} + F_\upsilon^{\,0})$$

где F^1 и F^0 - значения F в конечный и начальный моменты времени.

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$u^1 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\{(1-\varepsilon^2)u^0 + l\delta t\upsilon^0 - \frac{\delta t}{2}[(F_u^{\,1} + F_u^{\,0}) + \varepsilon(F_\upsilon^{\,1} + F_\upsilon^{\,0})]\}$$

$$\upsilon^1 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\{(1-\varepsilon^2)\upsilon^0 - l\delta t u^0 - \frac{\delta t}{2}[(F_\upsilon^{\,1} + F_\upsilon^{\,0}) - \varepsilon(F_u^{\,1} + F_u^{\,0})]\} \quad (9.1)$$

где $\varepsilon = \frac{l\delta t}{2}$.

Третье уравнение системы (4.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -(\frac{\partial uH}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon H}{\partial y}) = -F_H$$

Заменив производную по времени конечными разностями, а функции. $F_н$ полусуммой ее значений в начальный и конечный моменты времени, получим

$$H^1 = H^0 - \frac{\delta t}{2}(F_H{}^1 + F_H{}^0) \qquad (9.2)$$

Соотношения (8.1) и (8.2) и служат основными прогностическими уравнениями модели. Так как в правых частях этих соотношений стоят неизвестные функции $F_u^{\,1}$ и $F^0{}_\upsilon$, $F^1{}_H$, то используется метод последовательных приближений. В соответствии с этим методом значения u^1,υ^1 и H^1 для последующего ν+1-го приближения определяются с помощью выражений:

$$(u^1)^{\nu+1} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\{(1-\varepsilon^2)u^0 + l\delta t\upsilon^0 - \frac{\delta t}{2}[(F_u{}^1)^\nu + F_u{}^0 + \varepsilon((F_\upsilon{}^1)^\nu + F_\upsilon{}^0)]\}$$

$$(\upsilon^1)^{\nu+1} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\{(1-\varepsilon^2)\upsilon^0 - l\delta t u^0 - \frac{\delta t}{2}[(F_\upsilon{}^1)^\nu + F_\upsilon{}^0 + \varepsilon((F_u{}^1)^\nu + F_u{}^0)]\}$$

$$(H^1)^{\nu+1} = H^0 - \frac{\delta t}{2}((F_H{}^1)^\nu + F_H{}^0) \qquad (9.3)$$

В качестве краевого условия применяется условие(1.3), а в качестве начального приближения для функции F^1- их значение в начальный момент времени, т.е величины F^0 .

Методика была реализована для прогноза $Ат_{500}$ для квадратной области с 52х52 точки с центром симметрии на полюсе с шагами по координатам 300км и по времени 10 мин. Удовлетворительные результаты получаются на срок до трех суток.

Наряду с требованием устойчивости счета при построении разностных схем должны выполняться и другие требования, обеспечивающие соответствие разностного уравнения исходному дифференциальному. Среди этих требований важнейшим является выполнение в разностных схемах тех законов сохранения различных величин, которым удовлетворяют дифференциальные уравнения задачи. Для баротропной модели атмосферы, описываемой системой уравнений(3.1) с краевыми условиями(1.3), одной из таких сохраняемых величин является сума кинетической и потенциальной энергии в области интегрирования. Покажем, что эта величина остается постоянной. С этой целью умножим первое уравнение системы (3.1) на u, второе на υ, третье на g и результаты сложим. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+g\mathrm{H}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+g\mathrm{H}\right)+\upsilon\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+g\mathrm{H}\right)=$$

$$=-g\left(u\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial H}{\partial \mathrm{y}}+H\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}+H\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+\Phi\right)=-\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon\Phi}{\partial y}\right)$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения по площади S, ограниченной кривой Г, на которой удовлетворяются условия (1.3)

$$\iint\limits_{(S)}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+\Phi\right)\mathrm{dS}=-\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon\Phi}{\partial y}\right)\mathrm{dS}$$

В силу краевых условий (1.3) интеграл в правой части последнего равенства обращается в нуль. Это легко показать для частного случая, когда граница Г представляет собой квадрат со стороной 2а, вписанный в окружность экватора на плоскости карты. Тогда

$$\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}\right)dxdy=\int\limits_{-a}^{a}\left\{\int\limits_{-a}^{a}\frac{\partial u\Phi}{\partial x}dx\right\}dy=\int\limits_{-a}^{a}(u\Phi)\Bigg|_{-a}^{a}dy=0$$

В результате получим

$$\iint\limits_{(S)}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+\Phi\right)\mathrm{dS}=0$$

Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+\Phi\right)\mathrm{dS}=const.$$

Результаты численного интегрирования баротропных моделей показывает, что приведенное соотношение в основном выполняется.

Заканчивая рассмотрение баротропных моделей, отметим следующее. Предполагается, что при реализации прогностических моделей по полным уравнениям в качестве начальных данных должны быть использованы u, υ и H значения в узлах сетки. Однако ввиду практически полной невозможности получения достаточно точных величин u и υ по фактическим измерениям приходится ограничиться применением каких-либо приближений для них. Так, например, для прогностической модели Ф. Г. Шумана в качестве u, υ берутся их соленоидальные составляющие, а для М.С Фукс-Рабиновича, Д.Я. Прессмана и З.И. Цквитинидзе- геострофические.

Отмюда ясно, что необходимы поиски более точных приближений для u, υ. Кроме того, для прогностических моделей по полным уравнениям исходные данные u, υ и H должны быть определенным образом согласованы друг с другом.

Используемая литература.

1. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. Л., Гидрометеоиздат. 1989.
2. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1975.
3. Белов П.Н. Сборник упражнений по численным методам прогноза погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1980.
4. Динамика погоды (под ред. С.Манабе). Л., Гидрометеоиздат, 1985.