

MIRSAIDOV M.M.
BOYMURODOVA L.I.
G`IYASOVA N.T.

NAZARIY MEXANIKA

**O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta
maxsus ta'lim vazirligi tomonidan oliy
o`quv yurtlarining bakalavriat talabalari
uchun o`quv qo`llanma sifatida
tavsiya etilgan**

TOSHKENT - 2008

Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., G`iyasova N.T.

Nazariy mexanika: Oliy o`quv yurtlari talabalari uchun o`quv qo`llanma. Toshkent, «O`zbekiston», 2008, 230 bet, il. 212 ta.

Ushbu o`quv qo`llanma *oliy o`quv yurtlarining qurilish, muxandislik, suv xo`jaligi, transport va kasbiy ta`lim sohalari bo`yicha bilim oluvchi bakalavriat talabalari uchun mo`ljallangan*. O`quv qo`llanmada nazariy ma'lumotlar bakalavriatura talablaridan kelib chiqqan holda qisqacha bayon qilingan bo`lib, mexanikaning statika bo`limidagi tekislikda joylashgan kuchlarni qo`shish va muvozanat shartlari fazodagi kuchlar sistemasining xususiy holi sifatida yoritilgan; kinematika bo`limidagi kinematik kattaliklar avval vektor usulida berilib, so`ngra koordinata va tabiiy usulda keltirib chiqarilgan; dinamika bo`limida esa qattiq jism va moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremlari xususiy hol sifatida bayon etilgan.

Qo`llanmada ko`plab masalalar oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan bo`lib, amaliy masalalarni hal etishda nazariyadan olgan bilimlardan qanday foydalanish va natijalarni tahlil qilish ko`rsatib berilgan.

Ma'sul muharrir: O`zbekiston milliy universiteti dotsenti,
f.-m.f.n. B.Atajanov.

Taqrizchilar: Toshkent Davlat texnika universiteti "Nazariy mexanika, mashina detallari, servis texnikasi va texnologiyasi" kafedrası:
t.f.d., professor K.A.Karimov.

Toshkent to`qimachilik va yengil sanoat instituti "Nazariy mexanika va materiallar qarshiligi" kafedrası:
t.f.d., professor T.M.Mavlonov.

Mazkur o`quv qo`llanma O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta`lim vazirligining 2007 yil 28 avgustdagi 177-buyrug`iga asosan berilgan №1251 sonli o`quv adabiyotlari grifi guvohnomasi asosida bosildi.

Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., G`iyasova N.T.
“Nazariy mexanika” dan o`quv qo`llanma

O`quv qo`llanmada nazariy ma'lumotlar bakalavriatura talablardan kelib chiqqan holda qisqacha bayon qilingan bo`lib, mexanikaning statika bo`limidagi tekislikda joylashgan kuchlarni qo`shish va muvozanat shartlari fazodagi kuchlar sistemasining xususiy holi sifatida yoritilgan; kinematika bo`limidagi kinematik kattaliklar avval vektor usulida berilib, so`ngra koordinata va tabiiy usulda keltirib chiqarilgan; dinamika bo`limida esa qattiq jism va moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremlari xususiy hol sifatida bayon etilgan.

Qo`llanmada ko`plab masalalar oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan bo`lib, amaliy masalalarni hal etishda nazariyadan olgan bilimlardan qanday foydalanish va natijalarni tahlil qilish ko`rsatib berilgan.

Ushbu o`quv qo`llanma oliy o`quv yurtlarining qurilish, muxandislik, suv xo`jalig , transport va kasbiy ta`lim sohalari bo`yicha bilim oluvchi bakalavriat talabalari uchun mo`ljallangan.

М.М.Мирсайдов, Л.И. Боймуродова, Н.Т. Гнёсова
Учебное пособие по Теоретической механике

В учебном пособии приводятся основные понятия и теоремы статики, кинематики и динамики. В отличие от других учебников здесь предложен общий подход к решению различных задач. Так равновесия плоской системы сил рассматриваются как частный случай пространственной, координатный и естественный способ описания характеристик движения - как частный случай, описываемый в векторной форме, а динамики материальной точки и динамики твёрдого тела излагаются как частный случай общих теорем динамики механических систем. Изложенный материал снабжен достаточным количеством задач с подробным их решением в нескольких вариантах.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для *студентов бакалавриата, обучающихся инженерным специальностям по направлениям водного хозяйства, строительства, машиностроения, транспорта и педагогов по этим специальностям.*

M.M.Mirsaidov, L.I.Boymurodova, N.T.G`iyasova
The manual on “The theoretical mechanics”

In the manual the cores concept and theorems of statics, kinematics and dynamics are resulted. Unlike other textbooks transition from the general to the particular, for example, balance of flat system of forces is considered as a special case spatial, a coordinate and natural way of the description of characteristics of movement as a special case described in the vector form and the common theorems of dynamics are proved for mechanical systems, and theorems of dynamics of a firm body and a material point are stated as a special case. The stated material is supplied by enough of tasks with their detailed decision in several variants.

The offered manual is intended *for students of a bachelor degree of directions of a water management trained on engineering specialties, construction, mechanical engineering and teachers.*

SO`ZBOSHI

Hozirgi zamon fan-texnikasining va kompyuter texnologiyasining rivojlanishi oliy o`quv yurtlari o`quv jarayoniga yangi fanlarni olib kirdi. Mamlakatimiz oliy ta'limida bir pog`onali tizimdan ikki pog`onali bakalavr-magistr tizimiga o`tilishi bilan barcha texnika fanlari qatori, nazariy mexanika fanining ham o`quv soatlari hajmi qisqartirildi. Oliy o`quv yurtlarida ta'lim olayotgan talabalar uchun Respublikamiz Davlat ta'lim standartlaridan kelib chiqqan holda hozirga qadar «Nazariy mexanika» fanining qisqa kursi yaratilgan emas. Lekin muxandislik ishlarida muammoli va amaliyotga tatbiq etiladigan masalalarni hal etishda nazariy mexanika fani fundamental predmetlardan biri hisoblanadi. Shuning uchun mazkur kursni lotin grafikasida chop etish dolzarb masala hisoblanib, ayniqsa qisqa vaqt ichida bo`lajak mutaxxisslarga nazariy mexanikadan zarur bo`lgan nazariy va amaliy bilim va ko`nikmalarni sodda hamda rovon tilda mukammal yetkazish muhim masala bo`lib qoldi. Ushbu o`quv qo`llanma shularni e`tiborga olib yaratildi.

O`quv qo`llanmada nazariy mexanikaning statika bo`limidagi juft kuch momenti vektori haqidagi teoremlar vektorlar algebrasidagi tushunchalar asosida qisqacha talqin etildi. Juft kuch momenti vektoriga oid boshqa teoremlar xususiy hol sifatida yoritildi. Kuchlar sistemasini qo`shish fazoda joylashgan kuchlar uchun berilib, so`ngra tekislikda joylashgan kuchlar sistemasiga tegishli nazariy ma'lumotlar xususiy hol ko`rinishida keltirib chiqarildi. Shuningdek, kinematika bo`limidagi moddiy nuqta va jism nuqtasining tezlik hamda tezlanishlari vektor, koordinata keyin tabiiy usullarda bayon qilindi.

Qo`llanmada nazariy mexanikaning prinsiplaridan Dalamber, mumkin bo`lgan ko`chish, Dalamber-Lagranj prinsiplari to`liq tushuntirilib berildi. Dinamikaning umumiy teoremlari esa sistema uchun yoritildi, so`ngra qattiq jism va moddiy nuqta uchun xususiy hol sifatida keltirib chiqarildi.

Taqdim etilayotgan qo`llanmada ko`pgina masalalar hal etilgan bo`lib, ular oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan. Bu qo`llanmadan texnika va pedagogika oliy o`quv yurtlarining talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Qo`llanma qo`lyozmasini o`qib chiqib, uning sifatini oshirish borasida bergan maslahatlari uchun Respublikamiz oliy o`quv yurtlarining professor, o`qituvchilariga, jumladan professorlar K.S.Sultonov, A.R.Rizayev, TDTU professori K.A.Karimov, TTESI professori T.M.Mavlonov hamda TDMU dotsenti B.Atajonovga mualliflar o`z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

O`quv qo`llanma haqidagi fikr va mulohazalaringizni quyidagi manzilga yuborishingizni so`raymiz: *Toshkent, Navoiy ko`chasi, 30-uy.*

KIRISH

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga ta'siri va mexanik harakatlarning umumiy qonunlari haqidagi fandir.

Vaqt o'tishi bilan fazoda moddiy jismlarning bir-biriga nisbatan o'rin almashinishi *mexanik harakat* deb ataladi.

Jismning barcha xossalarini hisobga olgan holda sodir bo'ladigan mexanik hodisalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish juda murakkabdir. Shuning uchun mexanikada moddiy nuqta va absolut qattiq jism tushunchalari qo'llaniladi.

Mexanik harakatni yoki muvozanatni tekshirayotganimizda o'lchamlari va shaklining ahamiyati bo'lmagan jism *moddiy nuqta* deb ataladi.

Jism harakati tekshirilayotganda uning ikkita nuqtasi orasidagi masofa doim o'zgarmasdan qolsa, bunday jism *absolut qattiq* jism deyiladi.

Tabiatda absolut qattiq jism yo'q, har qanday jism oz bo'lsa-da deformatsiyalanadi. Agar bu o'zgarish jismning o'lchamlariga nisbatan juda kichik bo'lsa, mexanik harakatni tekshirishda mazkur o'zgarish e'tiborga olinmaydi.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari kuzatish va tajriba natijalariga asoslanadi

Biz o'rganadigan nazariy mexanika *G.Galiley* (1564 – 1642) va *I.Nyuton* (1643 – 1727) tomonidan ta'riflab berilgan qonunlarga asoslangan bo'lib, klassik mexanika deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog'liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor deb olinadi.

Klassik mexanikada moddiy jismlarning harakati uch o'lchovli Evklid fazosiga nisbatan tekshiriladi hamda fazoni mutlaqo qo'zg'almas deb qaraladi. Harakat o'lchoviga oid kattaliklar Evklid geometriyasi asosida olinadi.

Xalqaro SI sistemasida vaqt birligi qilib sekund (s), uzunlik birligi qilib metr (m), massa birligi qilib kg, kuch birligi qilib Nyuton (N) qabul qilingan.

Nazariy mexanika, masalaning qanday nuqtayi nazardan qo'yilishiga qarab, *statika*, *kinematika* va *dinamika* qismlariga ajratiladi.

Mexanikaning *statika* bo'limida jismlarning muvozanati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o'rganiladi. Bu holat mexanik harakatning xususiy holi hisoblanadi. *Kinematikada* jismlarning harakati, bu harakatni yuzaga keltirayotgan yoki uni o'zgartirayotgan sabablar e'tiborga olinmay, harakat geometrik nuqtayi nazardan o'rganiladi. *Dinamikada* jismlarning mexanik harakatlari shu harakatni vujudga keltirayotgan sabablarga bog'lab o'rganiladi.

BIRINCHI BO`LIM

S T A T I K A

I BOB. QATTIQ JISM STATIKASI VA STATIKANING ASOSIY AKSIOMALARI

1- §. Kuch. Kuchlar sistemasi. Ekvivalent sistema. Teng ta'sir etuvchi kuchlar

Nazariy mexanikaning statika bo`limida jismlarning muvozanat holati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o`rganiladi. Statika bo`limiga oid masalalarni ikki turga bo`lish mumkin:

- kuchlarni qo`shish va absolut qattiq jismga qo`yilgan kuchlar sistemasini sodda holga keltirish;
- kuchlar sistemasi ta'siridagi absolut qattiq jism muvozanatining zarur va yetarli shartlarini aniqlash.

Mexanikada moddiy jismlarning bir-biriga o`zaro ta'siri kuch bilan o`lchanadi. Kuch vektor kattalik bo`lib, uning jismga ta'siri:

- kuch qo`yilgan nuqta;
- kuchning yo`nalishi;
- kuchning miqdori bilan aniqlanadi.

Kuchning Xalqaro birliklar sistemasi (SI)dagi o`lchov birligi sifatida Nyuton (N) qabul qilingan.

Kuchning yo`nalishi va qo`yilish nuqtasi jismlarning mexanik ta'siriga va ularning bir-biriga nisbatan joylashishiga bog`liq.

Masalan, Yerning jismga ta'siri Yer markaziga qarab yo`nalgan bo`lib, u jismning og`irlik markaziga qo`yilgan. Rasmda kuch uchida strelkasi bo`lgan to`g`ri chiziq kesmasi bilan ko`rsatiladi (1-rasm).

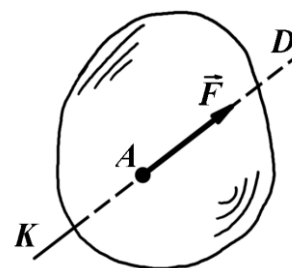
Kesmaning boshi kuch qo`yilgan nuqta A bo`ladi. Kesmaning uzunligi biror masshtabda kuch miqdorini shartli ravishda ifodalaydi.

Kuch yo`nalgan KD to`g`ri chiziq uning *ta'sir chizig`i* deyiladi. Og`irlik kuchining ta'sir chizig`i jism og`irlik markazidan o`tuvchi vertikal dan iborat.

Kuch vektor kattalik bo`lgani sababli u biror katta harf bilan belgilanadi, bu harfning tepasiga chiziqcha, ya'ni vektor belgisi qo`yiladi (masalan, $\vec{F}$). Kuch miqdori esa F bilan belgilanadi.

Jismga bir vaqtda ta'sir qiluvchi kuchlar to`plami ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) *kuchlar sistemasi* deyiladi.

Jismga qo`yilgan ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa ($\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m$) kuchlar sistemasi bera olsa, bunday kuchlar sistemasi *ekvivalent sistema* deb ataladi va quyidagicha yoziladi:



1-rasm

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m).$$

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining jismga ta'sir kuchini bitta kuch bera olsa, uni *teng ta'sir etuvchi kuch* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

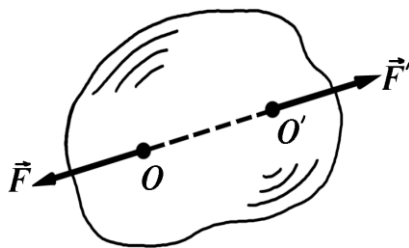
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}.$$

2 - §. Statikaning asosiy aksiomalari

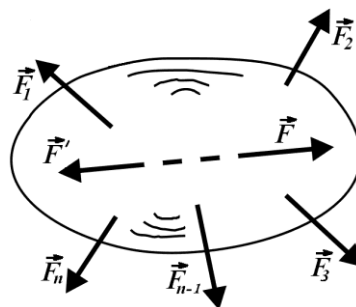
Nazariy mexanikaning statika bo'limi isbot talab qilmaydigan, kundalik tajribalarda tasdiqlangan bir necha aksiomaga asoslanadi.

1. Inersiya aksiomasi. Miqdor jihatidan bir-biriga teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuch ta'siridagi jism o'zining muvozanatini yoki to'g'ri chiziqli va teng o'lcho'vli harakatini o'zgartirmaydi.

2. Ikki kuchning o'zaro muvozanatlashish aksiomasi. Erkin holatdagi qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgandagina muvozanatlashadi. Bu kuchlar sistemasi nolga ekvivalentdir. Shuning uchun ular *nollik sistema* (2-rasm) deyiladi. $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$.



2 - rasm



3 - rasm

3. Muvozanatlashuvchi kuchlarni qo'shish va ayirish aksiomasi. Jismga qo'yilgan kuchlar sistemasiga o'zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasi qo'shilsa yoki olinsa, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Faraz qilaylik, jism $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsin (3-rasm). Jismga yana $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$ sistemani qo'yaylik. Bunda jism yangi $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirida ham muvozanatda bo'ladi, ya'ni:

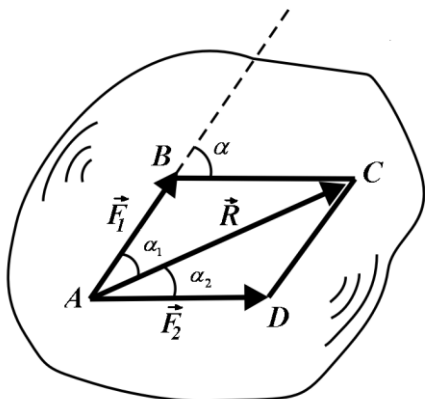
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n).$$

Yuqoridagi aksiomalardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

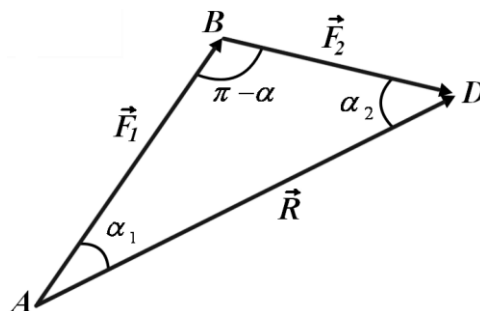
Teorema. Berilgan kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga miqdori va yo'nalishi o'zgartirilmay ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

4. Parallelogramm aksiomi. Jismning biror nuqtasiga qo'yilgan turli yo'nalishdagi ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi mazkur kuchlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga miqdor jihatidan teng bo'lib, shu diagonal bo'ylab yo'naladi (4-rasm):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$



4 - rasm



5 – rasm

Berilgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarga qurilgan parallelogramm *kuch parallelogrammi* deb, kuchlarni bu usulda qo'shish esa *parallelogramm usuli* deb ataladi. Bunda shuni eslatib o'tish lozimki, ikkita $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchni qo'shishda parallelogrammning hammasini qurish shart emas, uni quyidagi tartibda qurish mumkin:

1) kuch miqdori uchun masshtab tanlanadi;

2) $\vec{F}_1$ kuch oxirida tanlab olingan masshtabga muvofiq $\vec{F}_2$ ni o'ziga parallel qilib qo'yamiz (4,5-rasmlarga q.);

3) $\vec{F}_1$ kuch boshi A bilan $\vec{F}_2$ kuch oxiri D ni tutashtiruvchi vektor bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi (5-rasm).

$\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarga qurilgan uchburchak kuch uchburchagi, kuchlarni bunday usulda qo'shish esa uchburchak usuli deyiladi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning miqdori va yo'nalishi geometriya yoki trigonometriya formulalaridan foydalanib aniqlanadi.

Teng ta'sir etuvchi kuchning modulini $\triangle ABD$ dan kosinuslar teoremasiga asosan aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)}$$

yoki

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

$\alpha = 0^\circ$ bo'lganda

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2; \quad (2.1)$$

$\alpha = 180^\circ$ da

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2; \quad (2.2)$$

$\alpha = 90^\circ$ da

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

bo'ladi.

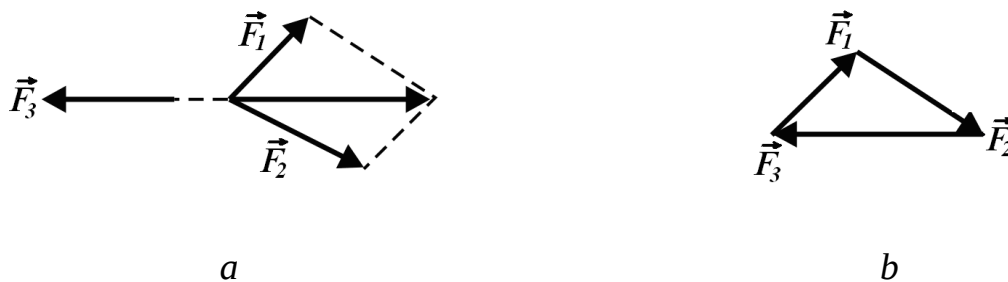
(2.1) va (2.2) dan ko'rinib turibdiki, bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar algebraik qo'shiladi.

Teng ta'sir etuvchi kuch $\vec{R}$ ning $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar bilan tashkil qilgan α_1 va α_2 burchaklari sinuslar teoremasiga ko'ra aniqlanadi:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}. \quad (2.3)$$

Mazkur aksiomadan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema: Bir tekislikda yotuvchi va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi va ulardan tuzilgan kuch uchburchagi yopiq bo'ladi, ya'ni oxirgi $\vec{F}_3$ kuchning uchi $\vec{F}_1$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (6-rasm; a,b).



6 - rasm

5. Ta'sir va aks ta'sirning tenglik aksiomasi. Absolut qattiq jismlarning bir-biriga ta'siri teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan, ya'ni ta'sir hamma vaqt aks ta'sirga teng va unga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Bu aksioma I.Nyuton tomonidan ta'riflangan bo'lib, u klassik mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi.

6. Qattiq bo'lmagan jismlar muvozanatining saqlanish qonuni. Qattiq bo'lmagan jism kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa, jism qattiq holatga aylanganda ham uning muvozanati o'zgarmaydi. Bu aksiomadan ko'ramizki, absolut qattiq jismga qo'yilgan kuchlarning muvozanat sharti deformatsiyalanadigan jismga qo'yilgan kuchlar uchun ham o'rinli bo'ladi. Deformatsiyalanadigan jismlarga oid bir qancha masalalar, masalan, ip, zanjir, qayish, sterjen kabi jismlardagi zo'riqlashlarni aniqlashga oid masalalar yechishda oltinchi aksiomadan foydalanamiz.

3 - §. Bog`lanish va uning reaksiyalari

Fazoda istalgan tomonga harakatlana oladigan jism *erkin jism* deb ataladi. Harakati biror bir sabab bilan cheklangan jism *bog`lanishdagi jism* deyiladi.

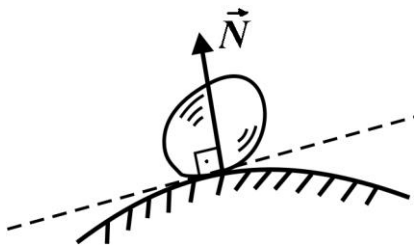
Jismning harakatini cheklovchi sabab *bog`lanish* deb ataladi. Bog`lanishning ta'sirini almashtiruvchi kuch *reaksiya kuchi* deyiladi.

Nazariy mexanikada bog`lanishdagi jismning harakatini yoki muvozanatini erkin jismning harakati yoki muvozanatiga keltirib tekshiriladi. Bu hol quyidagi aksioma bilan ifodalanadi.

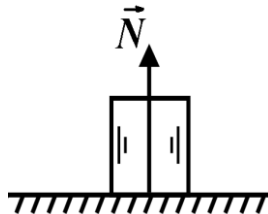
7. Jismni bog`lanishdan bo`shatish aksiomasi. Bog`lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun jismga ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga bog`lanish reaksiya kuchini ham qo`shish kerak.

Statika masalalarini yechishda reaksiya kuchlarini aniqlash alohida ahamiyatga ega.

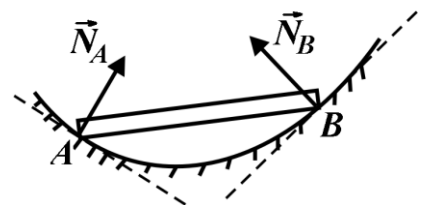
1. Jism silliq sirtga tiralib turgan bo`lsin. Bu holda reaksiya kuchi jism hamda silliq sirtning o`zaro tegib turgan nuqtasi orqali o`tkazilgan umumiy normal bo`ylab yo`naladi (7, 8-rasmlar).



7 - rasm



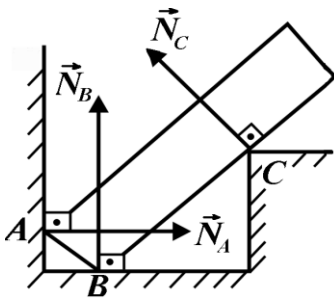
8 – rasm



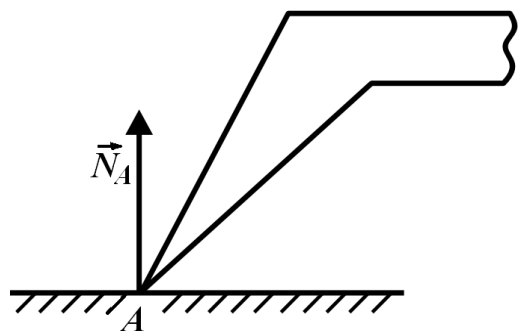
9 – rasm

Xususan, jism qo`zg`almas tayanch tekisligiga tiralib tursa va ishqalanish kuchi hisobga olinmasa, u holda normal reaksiya kuchi jism hamda tayanch tekisligining urinish nuqtasi orqali o`tkazilgan umumiy normal bo`ylab yo`naladi (9-rasm).

Agar jism tayanch tekisligiga bitta nuqtasi bilan tayansa, u holda qaysi tekislikka (jism yoki tayanch tekisligiga) normal o`tkazish mumkin bo`lsa, reaksiya kuchi mazkur normal bo`yicha yo`naladi (10, 11-rasmlar).

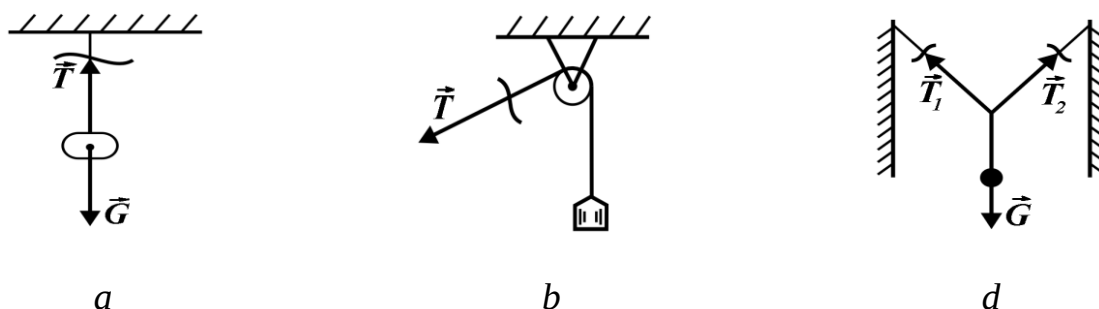


10 - rasm



11 – rasm

2. Jism qayish, zanjir, ip (yoki arqon)lar vositasida bog'langan bo'lsa (12-rasm; *a, b, d*), shuningdek vaznsiz qattiq sterjen orqali sharnir vositasida boshqa jismga biriktirilgan bo'lsa (13-rasm; *a, b*), mazkur bog'lanishlarning reaksiya kuchlari qayish, zanjir, ip yoki vaznsiz sterjen bo'ylab yo'naladi.



12 – rasm



13-rasm

3. Jism silindrik sharnir yoki podshipniklar vositasida bog'langan bo'lsa, bog'lanish reaksiyasi hamisha aylanish o'qiga perpendikular bo'ladi (14-rasm, *a*). Jismga bir qancha kuchlar ta'sir etsa, sharnir reaksiyasining miqdori va yo'nalishi noma'lum bo'ladi. Bu holda noma'lum reaksiya $\vec{R}$ ni koordinata oqlari bo'ylab yo'nalgan R_x va R_y tuzuvchilarga ajratiladi (14-rasm, *b*).

Jismning muvozanat shartlaridan R_x va R_y ni aniqlagandan so'ng, sharnir reaksiyasining moduli R quyidagicha topiladi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

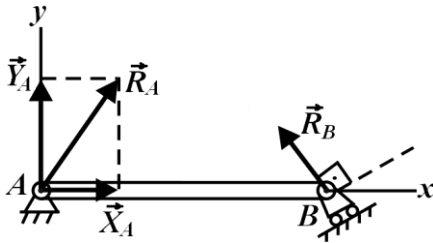


14 – rasm

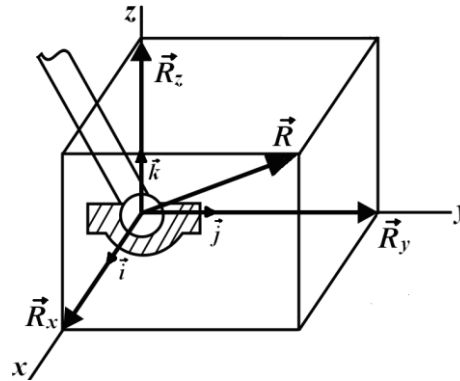
Sharnir reaksiyasining yo`nalishi esa, yo`naltiruvchi kosinuslari orqali aniqlanadi, ya'ni:

$$\cos(\vec{R}^{\wedge}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \cos(\vec{R}^{\wedge}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R},$$

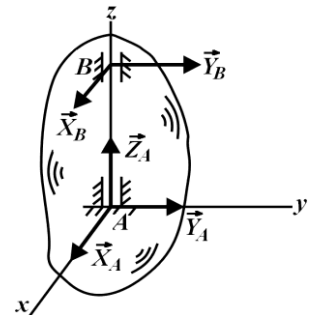
bunda $\vec{i}$, $\vec{j}$ - koordinata o`qlarining birlik vektorlari.



15 – rasm



16-rasm



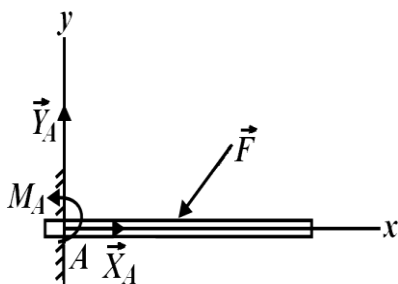
17-rasm

Texnikada ko`pincha balka ko`rinishidagi sistema qo`llaniladi. Tayanchlarga qo`yilgan to`sin *balka* deb ataladi. Agarda to`sin A qo`zg`almas sharnir va B qo`zg`aluvchi sharnir vositasida bog`langan bo`lsa, sharnirlar reaksiyasi 15-rasmdagidek yo`naladi.

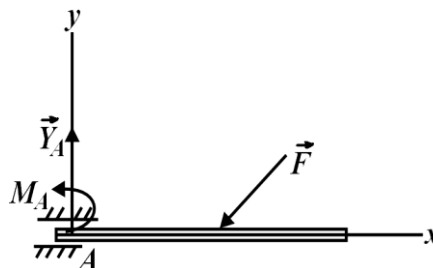
4. Bog`lanish A sferik sharnir yoki podpyatnik (B podshipnik) dan iborat bo`lsa, umumiy holda bunday bog`lanish reaksiya kuchlarining yo`nalishi noma'lum bo`ladi. Ular odatda koordinata o`qlari bo`ylab  $R_x, R_y, R_z$  tuzuvchilarga ajratiladi (16, 17-rasmlar). Sferik sharnir reaksiyasining miqdori va yo`nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \cos(\vec{R}^{\wedge}, \vec{i}) = R_x/R, \cos(\vec{R}^{\wedge}, \vec{j}) = R_y/R, \cos(\vec{R}^{\wedge}, \vec{k}) = R_z/R.$$

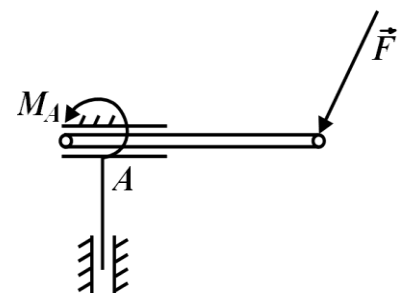
5. Agarda 18-rasmdagi AB balkaning A uchi devorga qisib mahkamlangan bo`lsa, bu holda A nuqtadagi bog`lanish reaksiyasining ikkita tuzuvchisidan tashqari, balkaning A nuqta atrofida aylanishiga to`squinlik qiluvchi reaksiya momenti  $M_A$  ham mavjud bo`ladi. Moment tushunchasini keyinroq kiritamiz.



18-rasm



19- rasm



20 – rasm

6.19-rasmda ko'rsatilgan AB balkaning A uchi gorizontaal bo'ylab siljigidigan qilib mahkamlangan. Bunday bog'lanish reaksiyasi siljish tekisligiga perpendikular bo'lgan $\vec{Y}_A$ reaksiya kuchidan hamda balkaning A nuqta atrofida aylanishiga to'sqinlik qiluvchi reaksiya momenti M_A dan iborat bo'ladi.

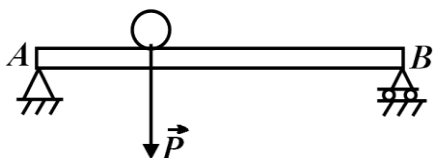
20-rasmda ko'rsatilgan AB balkaning A uchi ham gorizontaal, ham vertikal bo'ylab siljiydigan qilib mahkamlangan. Bu holda A nuqtada faqat balkaning A nuqta atrofida aylanishiga qarshilik qiluvchi M_A reaksiya momenti mavjud bo'ladi.

4 - §. Inshoot va mashinalarga qo'yiladigan kuchlarning turlari

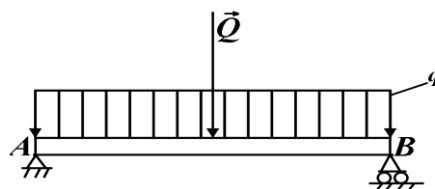
Jismga ta'sir etuvchi kuchlarning quyidagi turlari uchraydi.

1. To'planma kuch. Bir-biriga tegib turadigan ikki jismning o'zaro ta'sir kuchi ularning urinib turgan nuqtasiga qo'yilgan deb hisoblanadi. Haqiqatdan esa jismlarning tegib turgan joyida deformatsiya hosil bo'lib, ularning o'zaro ta'siri urinib turgan nuqtaga qo'yilmay biror yuzachaga qo'yiladi. Bu yuzachaning sathi juda kichik bo'lsa-da cheklidir. Darhaqiqat, ikkita jismning tegib turgan yuzasi jism o'lchamlariga qaraganda juda kichkina bo'lsa, bu yuzani bir nuqta deb, kuch esa nuqtaga qo'yilgan to'planma kuch deb hisoblanadi. Bu to'planma kuch jismlarning tegib turgan yuzasidagi bosimlarning teng ta'sir etuvchisidir.

Masalan, ikki uchi bilan tayanch ustida yotgan to'sinning biror joyiga qo'yilgan og'ir jismning to'sin sirtiga tegib turgan yuzasi juda kichik bo'lganida shu yuza bo'yicha ta'sir etuvchi kuchlar o'rniga ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{P}$ ni olamiz (21-rasm).



21-rasm



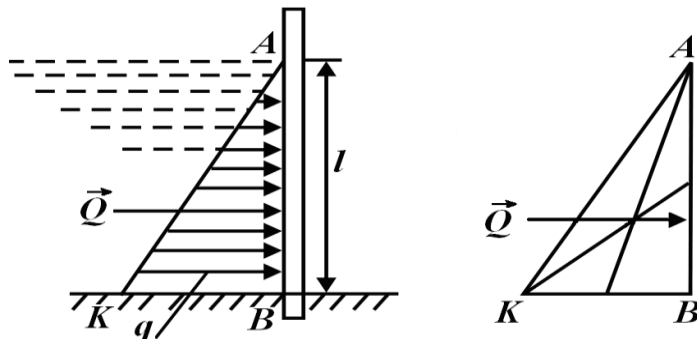
22 –rasm

2. Taqsimlangan kuchlar. Mashina yoki inshoot qismining ma'lum yuzasi yoki uzunligi bo'yicha qo'yilgan kuch uzluksiz ta'sir ko'rsatib tursa, bunday kuch *taqsimlangan kuchlar* deyiladi.

Uzunlik birligi yoki yuza birligiga ta'sir qiluvchi kuchlarning intensivligi q bilan belgilanadi va mos ravishda N/m yoki N/m^2 bilan o'lchanadi.

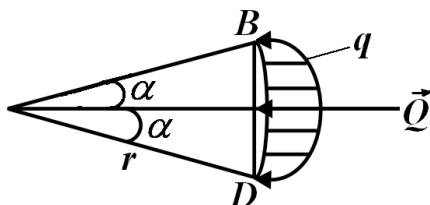
Taqsimlangan kuchlarga ko'prik balkasining ustiga yotqizilgan beton yoki asfaltning ta'siri misol bo'la oladi. Beton yoki asfalt balka bo'yicha tekis yotqizilgan bo'lib, balkaga 22-rasmda ko'rsatilganidek ta'sir qiladi. Masalani ychishda taqsimlangan kuchlar bir nuqtaga qo'yilgan kuch bilan almashtiriladi. 22- rasmda tasvirlangan taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi AB uchastkaning o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, kuch kattaligi $Q=q \cdot AB$ bo'ladi.

Taqsimlangan kuchlarga yana bir misol sifatida to'g'on devoriga suvning ta'sirini keltirish mumkin (23-rasm). Bu kuchning taqsimlanishi suv yuzasidan to'g'on tagigacha uchburchak qonuni bilan o'zgarib boradi. Bu holda taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasidan o'tadi va miqdori $ql/2$ bo'ladi.

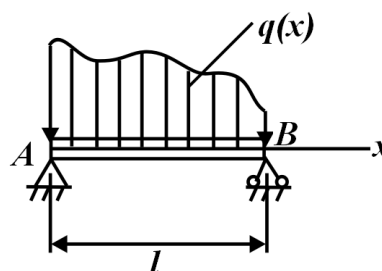


23 – rasm

Agarda taqsimlangan kuch aylananing BD yoyi bo'yicha ta'sir etsa (24-rasm), uning teng ta'sir etuvchisi $Q=q \cdot BD$ bo'ladi. Bunda BD uzunlik BD yoy vatarini uzunligini bildiradi. $\bar{Q}$ ning ta'sir chizig'i BD vatar o'rtasidan o'tadi.



24 – rasm



25 – rasm

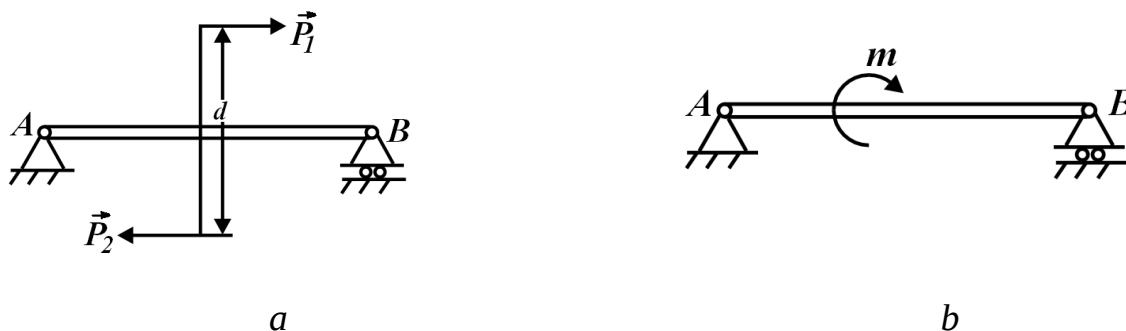
Inshoot qismlariga qo'yilgan kuchlar tekis taqsimlanmay, ixtiyoriy ravishda taqsimlangan bo'lishi mumkin. Tuproq, qum kabi sochiluvchi materiallar bilan yuklangan balka bunga misol bo'la oladi. Bu holda agar taqsimlangan kuchlarning intensivligi $q=q(x)$ qonuniyat asosida o'zgarsa (25-rasm), bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi Q , balka AB va $q(x)$ egri chizig'i bilan chegaralangan yuza orqali ifodalanadi:

$$Q = \int_0^l q(x) dx.$$

Q kuchning ta'sir chizig'i mazkur yuzaning og'irlik markazidan o'tadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$x = \frac{\int_0^l xq(x) dx}{\int_0^l q(x) dx}.$$

3. Juft kuch. Ma'lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qaraima-qarshi yo`nalgan va miqdor jihatidan teng bo`lgan ikki kuch *juft kuch* deyiladi. 26-rasmda balkaga qo`yilgan juft kuch tasvirlangan. Juft kuch berilganda, juft kuch tashkil etuvchilari va bu tashkil etuvchilar orasidagi ( $d$ ) masofa (26-rasm, *a*) yoki uning momenti ( $m$ ), juft kuch ta'siridagi aylanma harakat yo`nalishi ko`rsatiladi (26-rasm, *b*). Juft kuch haqida keyinroq to`xtalib o`tamiz.



26 – rasm

Nazorat savollari

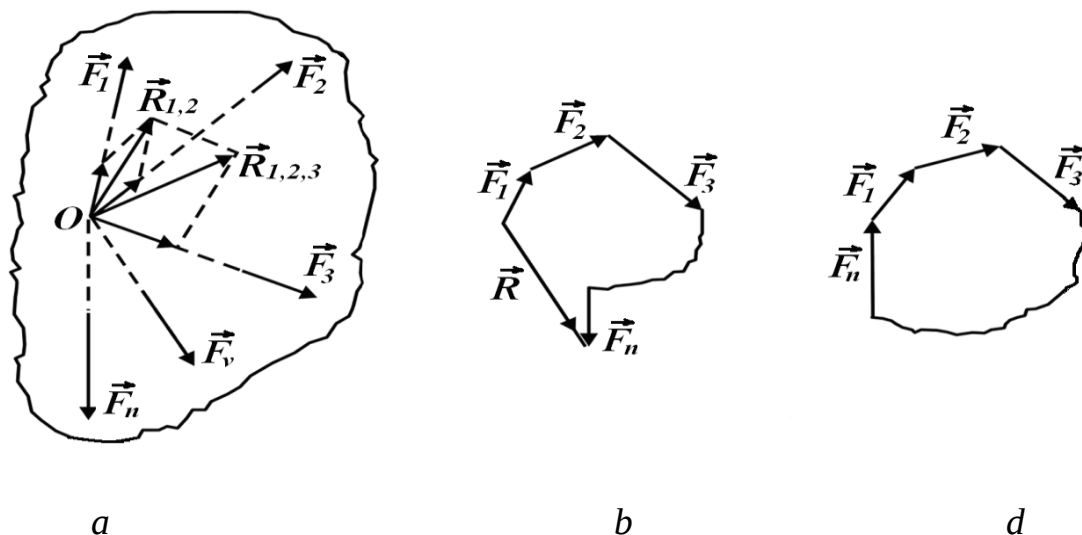
1. Qanday jism absolut qattiq deb ataladi?
2. Kuch qanday omillar bilan aniqlanadi?
3. Qanday kuch berilgan kuch sistemasining teng ta'sir etuvchisi deyiladi?
4. Statikaning asosiy aksiomalariga ta'rif bering.
5. Uch kuch teoremasi nimadan iborat?
6. Bog`lanishdan bo`shatish aksiomasi nimani ifodalaydi?
7. Qanday jism erksiz jism deyiladi?
8. Bog`lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
9. Absolut qattiq jism tayanadigan silliq sirtning reaksiya kuchi qanday yo`nalgan? Jismning mazkur sirtga bosimi qanday yo`naladi?
10. Arqon, zanjir va vaznsiz qattiq sterjenli bog`lanish reaksiyalari qanday yo`naladi?
11. Sferik, silindrik sharnirli bog`lanish reaksiyalari qanday bo`ladi?
12. Qistirib mahkamlangan bog`lanish reaksiya kuchining yo`nalishi qanday?
13. Qanday kuch to`planma kuch deyiladi?
14. Taqsimlangan kuchlarning qanday turlari bor va ular qanday aniqlanadi?
15. Juft kuch ta'rifi qanday?
16. Qanday kuchlar sistemasi ekvivalet sistema deyiladi?

II BOB. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

5 - §. Kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik qo`shish va ularning geometrik muvozanat sharti

Ta'sir chiziqlari fazo (tekislik)da bir nuqtada tutashuvchi kuchlar to'plami *fazo (tekislik)dagi kesishuvchi kuchlar sistemasi* deb ataladi.

Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo`shishda parallelogramm yoki uchburchak usulini ketma-ket qo`llaniladi (27-rasm; a,b,d).



27 – rasm

(27-rasm , a) dan ko`rinib turibdiki:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{1,2} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \\ \vec{R}_{1,2,3} &= \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \\ \vec{R} &= \vec{R}_{1,2,\dots,n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_v + \dots + \vec{F}_n\end{aligned}$$

yoki

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_v.$$

(27-rasm, b) dan ko`ramizki, kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi mazkur kuchlar geometrik yig`indisiga teng bo`lib, u shu kuchlardan tuzilgan ko`pburchak yopuvchisidan iborat. Bunday kuchlar muvozanatlashganda kuch ko`pburchagi yopiq bo`ladi, ya'ni $\vec{F}_n$ kuchning uchi $\vec{F}_1$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (27-rasm, d):

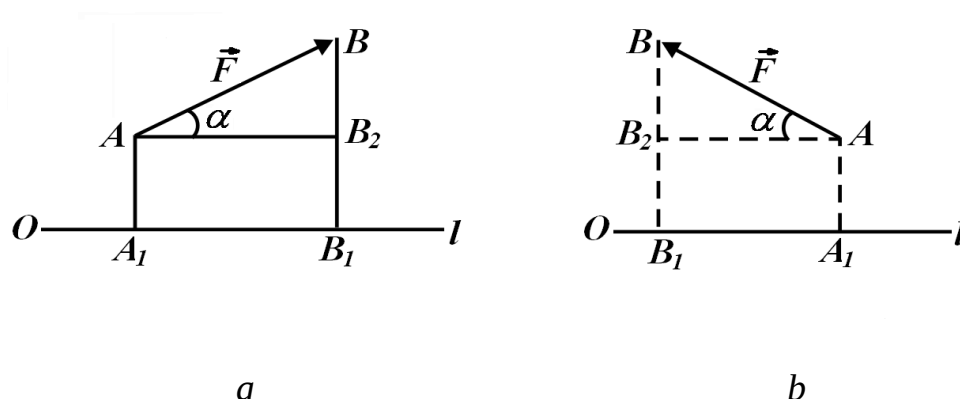
$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_v = 0.$$

Demak, kesishuvchi kuchlarning geometrik muvozanat sharti mazkur kuchlardan tuzilgan ko`pburchakning yopiq bo`lishligidir.

6 - §. Kuchning o`qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Faraz qilaylik, $\vec{F}$ kuch bilan l o`q bir tekislikda yotsin. Bu holda kuchning boshi  $A$  va oxiri  $B$  nuqtalardan  $l$  o`qqa tushirilgan proyeksiyalar A_1 va B_1 orasidagi kesmaning mos ishorali uzunligi *kuchning l o`qdagi proyeksiyasi* deyiladi (28-rasm).

Agar A_1 nuqtadan B_1 nuqtaga ko`chish  $l$  o`qning musbat yo`nalishi bilan ustma-ust tushsa, kuchning o`qdagi proyeksiyasi musbat, aks holda manfiy qiymatlarga ega bo`ladi (28-rasm; a, b).



28 – rasm

$\vec{F}$ kuchning l o`qidagi proyeksiyasini F_l bilan belgilasak,

$$F_l = A_1B_1, \quad A_1B_1 = AB_2. \quad (6.1)$$

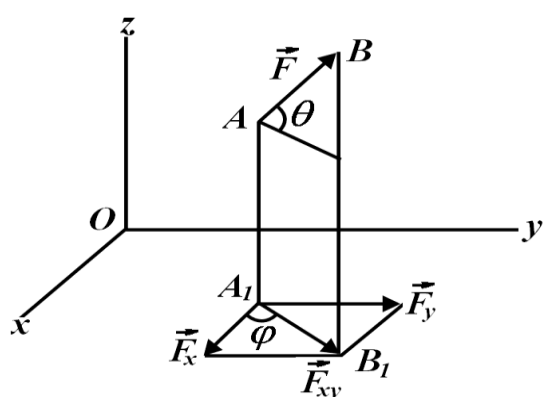
$\triangle ABB_2$ (28-rasm, a) dan

$$AB_2 = F \cdot \cos \alpha. \quad (6.2)$$

(6.2) ni (6.1) ga qo`ysak:

$$F_l = F \cdot \cos \alpha. \quad (6.3)$$

$\alpha = 0$ bo`lsa,  $F_l = F$ ;  $\alpha = 180^\circ$  bo`lsa, $F_l = -F$; $\alpha = 90^\circ$ bo`lsa,  $F_l = 0$  bo`ladi.



29 – rasm

(6.3) dan ko`ramizki, kuchning biror o`qdagi proyeksiyasi kuchning miqdori hamda kuchning shu o`q musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchak kosinusining ko`paytmasiga teng.

Demak, kuch o`qning musbat yo`nalishi bilan o`tkir burchak hosil qilsa, uning proyeksiyasi musbat; agar o`tkir burchak tashkil etsa, manfiy bo`ladi.

Faraz qilaylik. $\vec{F}$ kuch x (yoki y) o`q bilan bir tekislikda yotmasin. Bu holda $\vec{F}$

kuchni avval Oxy tekisligiga proyeksiyalaymiz. Buning uchun $\vec{F}$ kuchning boshi A va oxiridagi B nuqtadan Oxy tekislikka perpendikular AA_1 va BB_1 chiziqlarni o`tkazamiz. U holda $\vec{A_1B_1} = \vec{F_{xy}}$ vektori muzkur kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi deb ataladi (29-rasm).

Agar $\vec{F}$ kuchning Oxy tekisligi bilan tashkil qilgan burchagi θ ga teng bo'lsa, 29- rasmdan quyidagini olamiz:

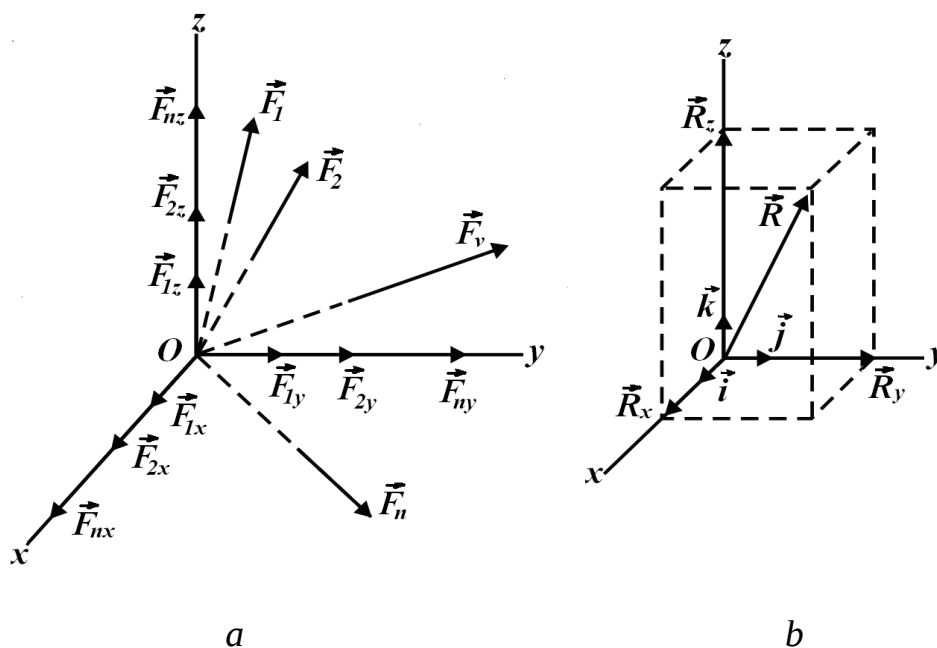
$$F_{xy} = F \cos \theta. \quad (6.4)$$

Agar F_{xy} ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{F}$ kuchning Ox , Oy , Oz oqlardagi proeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \\ F_y &= F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi, \\ F_z &= F \cos(90^\circ - \theta) = F \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.5)$$

7 - §. Kesishuvchi kuchlarni analitik usulda qo'shish va ularning analitik muvozanat sharti

Faraz qilaylik, jismga O nuqtada kesishuvchi kuchlar ta'sir qilsin (30-rasm; a , b).



30-rasm

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlarni yuqoridagilarga asoslanib, Ox, Oy, Oz o'qlariga proyeksiyalaymiz. Natijada mazkur o'qlar bo'ylab joylashgan kuchlar hosil bo'ladi.

Bir to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan kuchlar algebraik qo'shilgani uchun:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= \sum F_{vx} = R_x, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= \sum F_{vy} = R_y, \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= \sum F_{vz} = R_z. \end{aligned}$$

Endi R_x, R_y, R_z larni parallelogram usuli bo'yicha qo'shsak (30-rasm, b):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

kelib chiqadi.

Teng ta'sir etuvchi $\vec{R}$ ning yo'naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \frac{R_z}{R},$$

bu yerda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining birlik vektorlari.

Kesishuvchi kuchlar ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun $R=0$ shart bajarilishi kerak:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0.$$

Bundan

$$R_x = \sum F_{vx} = 0, \quad R_y = \sum F_{vy} = 0, \quad R_z = \sum F_{vz} = 0 \quad (7.1)$$

kelib chiqadi.

Agar kesishuvchi kuchlar tekislikda joylashgan bo'lsa (7.1) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \quad \sum F_{vy} = 0. \quad (7.2)$$

(7.1) va (7.2) formulalar mos ravishda fazo (tekislik)da joylashgan kesishuvchi kuchlarning analitik muvozanat shartini ifodalaydi.

Nazorat savollari

1. Qanday ko'pburchak kuch ko'pburchagi deyiladi?
2. Kuch o'qqa qanday proyeksiyalanadi?
3. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4. Kesishuvchi kuchlar qanday geometrik qo'shishiladi?
5. Bir nuqtaga qo'yilgan kuchlarni analitik qo'shish usulini tushuntirib bering.
6. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti qanday?
7. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartlari qanday yoziladi?

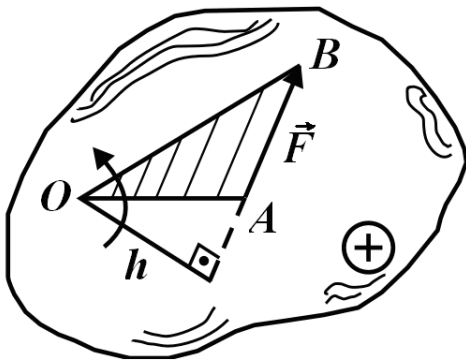
III BOB. MOMENTLAR NAZARIYASI

8 - §. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti

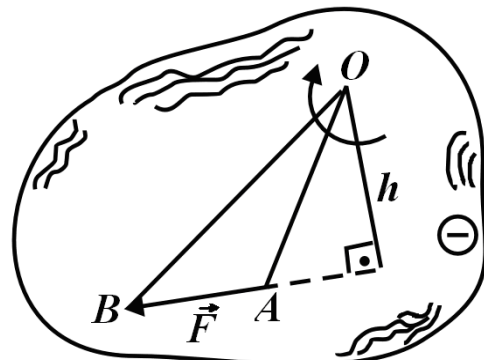
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalar yechishda kuchning nuqtaga nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi. Berilgan nuqtadan kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikular uzunligi *kuch yelkasi deyiladi*. Kuch yelkasi odatda h bilan belgilanadi.

$\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch miqdorini uning yelkasiga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi (31, 32 – rasmlar):

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (8.1)$$



31-rasm



32-rasm

Kuchning momenti hisoblanadigan nuqta *moment markazi* deb ataladi.

Kuchning jismga ko'rsatadigan aylanma harakat effekti uning momenti bilan xarakterlanadi. Bu effect kuch miqdoriga, moment markazi va kuch orqali o'tuvchi tekislikning aylanish yo'nalishiga bog'liq bo'ladi. Kuch jismni 31 – rasmdagidek moment markazi atrofida soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat, soat strelkasi bo'yicha aylanadigan yo'nalishda aylantirsa, manfiy ishora bilan olinadi (32 – rasm).

Kuch momenti SI birliklar sistemasida Nyuton metr (Nm) bilan o'lchanadi. Kuch momenti quyidagi xususiyatlarga ega:

1. Kuchni o'z ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirsak, uning momenti o'zgarmaydi.
2. Kuchning ta'sir chizig'i moment markazidan o'tsa, uning mazkur nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.
3. Kuchning O nuqtaga nisbatan momenti ΔOAB yuzining ikkilanganiga teng, ya'ni:

$$m_0(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta OAB}.$$

9 - §. Kuchning o`qqa nisbatan momenti

Jismning biror o`q atrofidagi aylanma harakatini kuchning o`qqa nisbatan momenti xarakterlaydi.

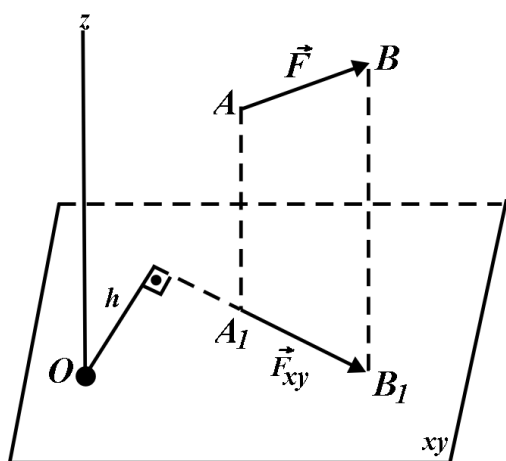
Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalarni yechishda kuchning o`qqa nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi.

*Kuchning o`qqa nisbatan momenti* deb, kuchning o`qqa perpendikular qilib olingan tekislikdagi proyeksiyasidan o`q bilan tekislikning kesishgan nuqtasiga nisbatan olingan momentiga aytiladi (33-rasm).

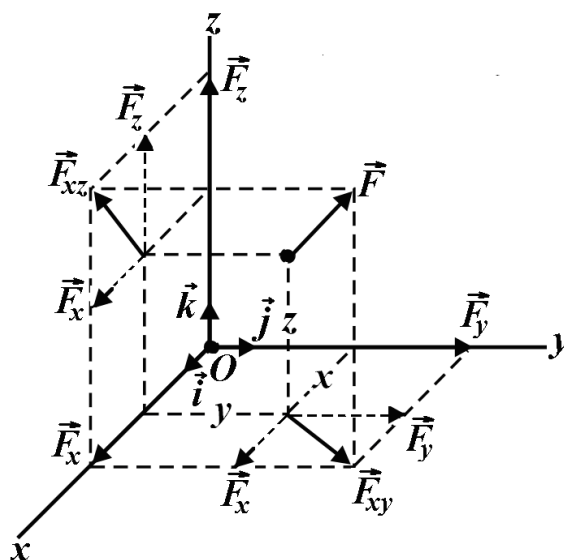
Kuchning o`qqa nisbatan momentining matematik ifodasi

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \quad (9.1)$$

formula bilan ifodalanadi.



33 – rasm



34 – rasm

Agar x, y, z bilan kuch qo'yilgan A nuqtaning koordinatalarini; F_x, F_y, F_z orqali $\vec{F}$ kuchning koordinata o`qlariga proyeksiyalarini belgilasak (34-rasm), u holda kuchning o`qqa nisbatan momentining analitik ifodasi quyidagicha bo`ladi:

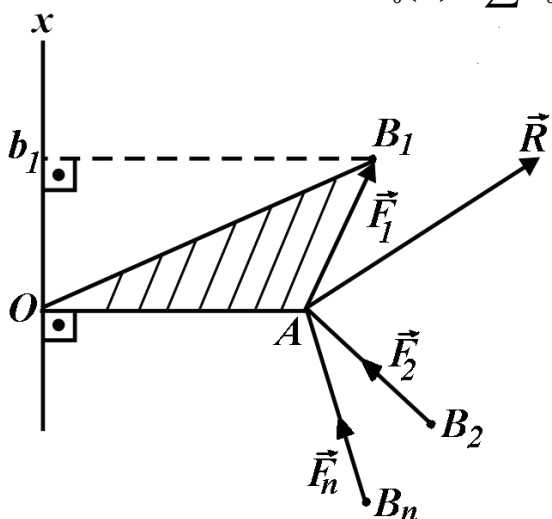
$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Agar kuchning ta'sir chizig'i o`qqa parallel yoki o`qni kesib o'tsa, uning mazkur o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`ladi.

10 - §. Kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi

Teorema. Kesishuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisidan biror nuqtaga nisbatan olingan moment uning tuzuvchi kuchlaridan mazkur nuqtaga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_v). \quad (10.1)$$



35 - rasm

Faraz qiliylik, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar A nuqtaga qo'yilgan bo'lib, ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{R}$ bo'lsin (35-rasm).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_v \quad (10.2)$$

Kuchlar qo'yilgan A nuqtani moment markazi O bilan tutashtirib, OA ga perpendikular Ox o'qni o'tkazamiz. Ox o'qning musbat yo'nalishini shunday tanlab olamizki, ixtiyoriy kuchning mazkur o'qdagi proyeksiyasini ishorasi shu kuchning O markazga nisbatan olingan momenti ishorasi bilan bir xilda bo'lsin.

Kuch momentining uchinchi xususiyatidan foydalanib, kuchlarning O nuqtaga nisbatan momentini aniqlaymiz:

$$m_0(\vec{F}_1) = 2S_{\triangle OAB_1}, \quad m_0(\vec{F}_2) = 2S_{\triangle OAB_2}, \quad \dots, \quad m_0(\vec{F}_n) = 2S_{\triangle OAB_n}.$$

35-rasmdan:

$$m_0(\vec{F}_1) = OA \cdot Ob_1 = OA \cdot F_{1x}. \quad (10.3)$$

(10.2) tenglikni Ox o'qiga proyeksiyalasak:

$$R_x = \sum F_{vx}. \quad (10.4)$$

(10.4) ni ikki tomonini OA ga ko'paytiramiz:

$$OA \cdot R_x = \sum OA \cdot F_{vx}.$$

(10.3) ga asosan:

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_v).$$

Demak, kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi isbotlandi.

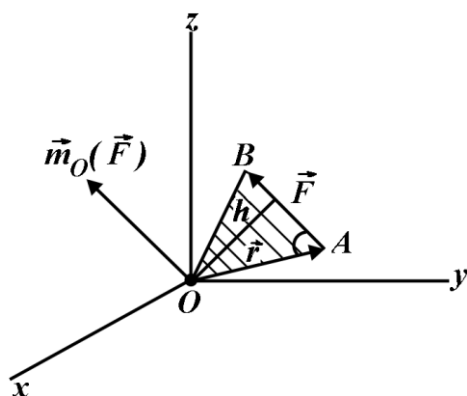
11 - §. Kuchning nuqtaga nisbatan momentining vektorligi

Yuqoridagi 8-mavzuda kuchniug nuqtaga nisbatan momentini algebraik miqdor (kattalik), ya'ni u kuch miqdori bilan yelkasi uzunligining ko'paytmasidan iborat deb qaragan edik. Lekin jismga ta'sir qilayotgan kuch fazoda joylashgan bo'lsa, mazkur kuch momentining moduli va ishorasi jismning aylanma harakatini to'liq xarakterlay olmaydi. Shuning uchun kuchning nuqtaga nisbatan momentining vektori tushunchasi kiritiladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorini ikki vektorning vektor ko'paytmasidan iborat deb qarash mumkin. Buning uchun moment markazi O nuqtani sanoq sistemasining boshi desak, $\vec{r}$ kuch qo'yilgan A nuqtaning radius-vektori bo'ladi (36-rasm).

$\triangle OAB$ dan:

$$h = r \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}). \quad (11.1)$$



36 – rasm

(11.1) ni (8.1) ga qo'ysak:

$$m_0(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F})$$

$$\text{yoki} \quad \vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (11.2)$$

Demak, kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor miqdor bo'lib, u kuch qo'yilgan nuqtaning radius-vektori bilan kuchning vektor ko'paytmasiga teng bo'lib, u kuch va moment markazi orqali hosil qilingan uchburchak yuziga perpendikular yo'naladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorining yo'nalishi shunday qo'yiladiki, uning uchidan turib qaralganda kuch jismni soat strelkasiga qarshi aylantirayotgan bo'lishi kerak.

(11.2) dan foydalanib, $\vec{M}_O$ ni analitik hisoblash mumkin. Ox , Oy , Oz o'qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\vec{F}$ kuch proyeksiyalarini F_x , F_y , F_z ; $\vec{r}$ – proyeksiyalarini x , y , z ; $\vec{M}_O$ – proyeksiyalarini esa M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz} desak:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k},$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

$$\vec{M}_O = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}.$$

Vektorlar algebrasiga ko'ra,

$$M_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (11.3)$$

bundan

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= yF_z - zF_y, \\ M_{Oy} &= zF_x - xF_z, \\ M_{Oz} &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (11.4)$$

kelib chiqadi.

(11.4) dan foydalanib M_0 modulini va yo`naltiruvchi kosinuslarini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{M}_0, \wedge \vec{i}) &= M_{Ox} / M_0, \\ \cos(\vec{M}_0, \wedge \vec{j}) &= M_{Oy} / M_0, \\ \cos(\vec{M}_0, \wedge \vec{k}) &= M_{Oz} / M_0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

(9.2) bilan (11.4) ni taqqoslash natijasida nuqtaga nisbatan kuch momentining biror o`qdagi proyeksiyasi mazkur kuchning shu o`qqa nisbatan momentiga tengligini ko`ramiz.

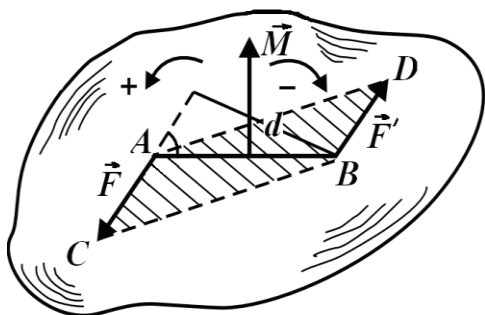
Nazorat savollari

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi? Mazkur momentning ishorasi qanday tanlanadi?
2. Qanday holda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
3. Kuchning o`z ta`sir chizig`i bo`ylab ko`chirilganda uning momenti qanday o`zgaradi?
4. Kuchning o`qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Qanday holda kuchning o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
6. Nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan o`qqa nisbatan kuch momenti orasida qanday munosabat bor?
7. Nuqtaga nisbatan kuch momentining vektorligini tushuntirib bering.
8. O`qqa nisbatan kuch momentining analitik ifodasi qanday yoziladi?
9. Varinon teoremasini ta`riflang.

IV BOB. JUFT KUHLAR NAZARIYASI

12 - §. Juft kuch. Juft kuch moment

Ma'lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qarama-qarshi yo`nalgan va miqdor jihatidan teng bo`lgan ikki kuch juft kuch deb ataladi. U $(\vec{F}, \vec{F}')$ bilan belgilanadi (37-rasm).



37 – rasm

Juft kuchning teng ta'sir etuvchisi bo`lmaydi va juft kuchni tashkil qiluvchi kuchlar muvozanatlashmaydi. Demak, juft kuch teng ta'sir etuvchisi bo`lmagan va muvozanatlashmaydigan kuchlar sistemasidan iborat.

Juft kuchni tuzuvchi kuchlarning ta'sir chizig`i orqali o`tkazilgan tekislik juft tekisligi deyiladi. Juft kuchni tuzuvchi kuchlar orasidagi eng qisqa masofa *juft kuch*

yelkasi deb ataladi va u d bilan belgilanadi (37-rasm).

Juft kuchni tuzuvchi kuchlardan biri bilan juft yelkasning ko`paytmasi *juft kuch momenti* deyiladi. U quyidagicha yoziladi:

$$M = \pm Fd. \quad (12.1)$$

Juft kuch jismni soat strelkasiga teskari yo`nalishda aylantirsa, uning momenti musbat, aks holda manfiy deb olinadi.

13 - §. Juft kuch momentining vektorligi

Juft kuchning jismga ta'siri asosan uch omil bilan aniqlanadi:

1. Juft kuch momentinning miqdori;
2. Juft kuchning ta'sir tekisligi;
3. Mazkur tekislikning burilish yo`nalishi.

Bir tekislikda yotmaydigan juft kuchlarni kuzatganimizda, har bir juft kuchning jismga ta'sirini aniqlash uchun yuqoridagi uchta omil bo`lishi zarur. Mazkur omilni fazoda bitta vektor, ya'ni juft kuch momentining vektori orqali ifodalash mumkin.

Moduli (12.1) orqali amqlanadigan vektor juft kuch momentining vektori deyiladi. U juft kuch tekisligiga perpendikular bo`lib, uning uchidan qaralganda jism har doim soat strelkasiga teskari yo`nalishda aylanadi (37-rasm).

Juft kuch momentining vektorini ikkita vektorning vektor ko`paytmasiidan iborat deb qarash mumkin:

$$\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{F}' = \overline{BA} \times \vec{F}. \quad (13.1)$$

Darhaqiqat,

$$|\overline{BA} \times \vec{F}| = BA \cdot F \cdot \sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}). \quad (13.2)$$

34-rasmdan:

$$\sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}) = d/AB, \quad (13.3)$$

bundan

$$d = AB \cdot \sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}). \quad (13.4)$$

(13.4) ni (13.2) ga qo'ysak, (12.1) kelib chiqadi.

Demak, (13.1) vektor ko'paytma juft kuch yotgan tekislikka perpendikular bo'ladi, ya'ni juft kuch momentining vektoridan iborat.

14 - §. Juft kuch momentining vektoriga oid teoremlar

1 - teorema: Juft kuch momentining vektori uni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

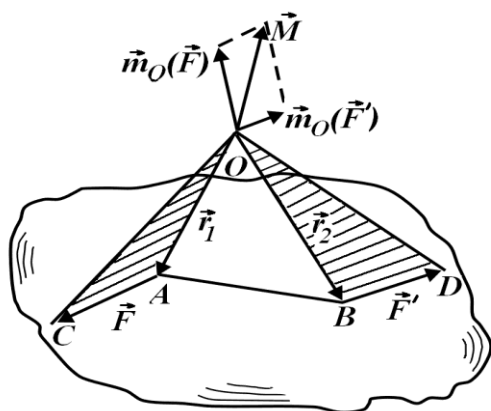
Isbot. Faraz qilaylik, jismga $(\vec{F}, \vec{F}')$ juft kuch qo'yilgan bo'lsin. Bu juft kuchning tashkil etuvchilarining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlaymiz (38-rasm).

(11.2) ga ko'ra:

$$\begin{aligned} \vec{m}_0(\vec{F}) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}, \\ \vec{m}_0(\vec{F}') &= \vec{r}_2 \times \vec{F}'. \end{aligned} \quad (14.1)$$

(14.1) ni hadma-had qo'shsak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}'. \quad (14.2)$$



38 – rasm

$\vec{F} = -\vec{F}'$ bo'lgani uchun (14.2) quyidagicha yoziladi;

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

yoki

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = \overline{BA} \times \vec{F}. \quad (14.3)$$

(14.3) ni (13.1) bilan taqqoslasak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = \vec{M}. \quad (14.4)$$

Shu bilan teorema isbotlandi.

2-teorema: Juft kuch momenti vektori – erkin vektordir.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun (14.4) dan foydalanamiz. 11-mavzudan bilamizki, nuqtaga nisbatan kuch momentining vektori kuch va moment markazi

orqali tuzilgan uchburchak yuziga perpendikulardir. Shunga ko'ra $\vec{m}_0(\vec{F})$ $\triangle OAC$ yuzaga, $\vec{m}_0(\vec{F}')$ esa $\triangle OBD$ yuzaga perpendikular yo'naladi (38-rasm)

(14.4) ga ko'ra mazkur vektorlarning geometrik yig'indisi juft kuch momenti vektoridan iborat bo'lib, u O nuqtaga qo'yilgan. O nuqta ixtiyoriy bo'lgani uchun $\vec{M}$ ni ham fazoning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yish mumkin.

Demak, juft kuch momentining vektori $\vec{M}$ erkin vektordir.

Yuqoridagilardan foydalanib, juft kuch momentining quyidagi xususiyatlarini ta'riflash mumkin:

1) juft kuchning tuzuvchilarini o'z ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirsak, juft kuch momenti o'zgarmaydi.

2) juft kuch momenti juft kuchlarni tashkil etuvchilariga qurilgan $ACBD$ parallelogramni yuziga teng; $M = S_{ACBD}$ (37-rasm).

3) juft kuchning o'zini ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan tekislikka ko'chirilsa, uning jismga ta'siri o'zgarmaydi.

4) juft kuch momentini o'zgartirmay, uni ixtiyoriy yelkaga keltirish mumkin.

5) juft kuch momentini o'zgartirmay, uni o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.

15 - §. Fazo va tekislikda joylashgan juft kuchlarni qo'shish

Faraz qilaylik, $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ va $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ juft kuchlar ikkita kesishuvchi tekislikda joylashgan bo'lsin (39-rasm).

Yuqoridagi keltirilganlardan foydalanib, ikkala juft kuchni AB yelkaga keltiramiz. Bu holda A nuqtada $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$, B nuqtada esa $\vec{F}_1'$ va $\vec{F}_2'$ kuchlar hosil bo'ladi. A va B nuqtadagi kuchlarni qo'shsak:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'. \quad (15.1)$$

$$(13.1) \text{ ga ko'ra: } \vec{M} = \vec{BA} \times \vec{R}. \quad (15.2)$$

(15.1) ni (15.2) ga qo'yamiz:

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}_1 + \vec{BA} \times \vec{F}_2,$$

bunda

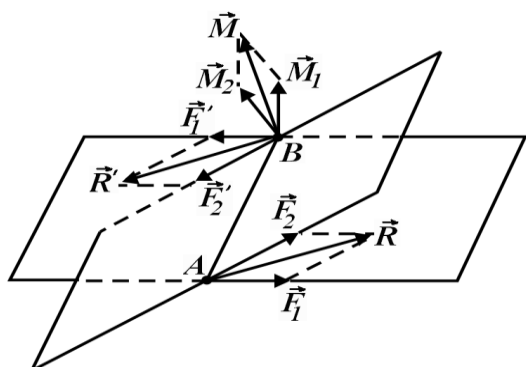
$$\vec{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1, \vec{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2.$$

Natijada

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (15.3)$$

Agar juft kuchlar n ta bo'lsa, (15.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{M} = \sum_{v=1}^n \vec{M}_v. \quad (15.4)$$



39 - rasm

Demak, fazoda joylashgan juft kuchlar bitta juftga ekvivalent bo`lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig`indisiga teng.

Agarda juft kuchlar tekislikda joylashgan bo`lsa, ular bitta juft kuchga ekvivalent bo`lib, uning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining algebraik yig`indisiga teng:

$$M = \sum_1^n M_v.$$

16 - §. Fazo va tekislikda joyiastigan juft kuchlar sistemasining muvozanati

Fazoda joylashgan juft kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun mazkur juft kuchlar momentlarining geometrik yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va etarlidir:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_v = 0. \quad (16.1)$$

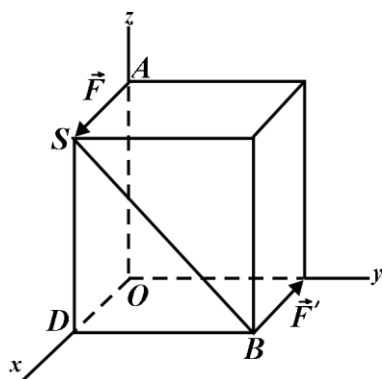
(16.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak:

$$\sum M_{vx} = 0, \quad \sum M_{vy} = 0, \quad \sum M_{vz} = 0. \quad (16.2)$$

(16.2) dan ko`ranib turibdiki, fazoda joylashgan juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo`lishi uchun juft kuchlar momentlari vektorlarining har bir koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarining yig`indisi nolga teng bo`lishi kerak.

Agarda juft kuchlar tekislikda joylashgan bo`lsa, ular momentlarinig algebraik yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va etarlidir:

$$\sum M_v = 0. \quad (16.3)$$



40 – rasm

Masala: Qirralarining uzunligi $1m$ bo`lgan kubga juft kuch qo`yilgan. Bu juft kuch momentining moduli aniqlansin (40- rasm). $F=F'=2N$.

Yechish. Masala shartiga ko`ra:

$$SD = DB = 1m.$$

$\triangle BSD$ dan:

$$SB = \sqrt{BD^2 + SD^2} \quad \text{yoki} \quad SB = d = \sqrt{2}m.$$

(12.1) ga asosan:

$$M = F \cdot d = 2\sqrt{2}N.$$

Nazorat savollari

1. Juft kuch va juft kuch momenti nima?
2. Juft kuch momenti vektori qanday yo`nalgan va uning miqdori nimaga teng?
3. Qanday shart bajarilganda ikkita juft kuch ekvivalent bo`ladi?

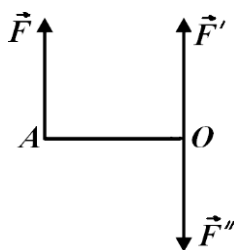
4. Fazoda joylashgan juft kuchlar qanday qo`shiladi?
5. Tekislikda joylashgan juft kuchlar qanday qo`shiladi?
6. Juft momentining erkin vektorligi haqidagi teoremani ta'riflang.
7. Fazodagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?
8. Tekislikdagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?

V BOB. IXTIYORIY KUHLAR SISTEMASI

17 - §. Kuchni berilgan markazga keltirish

Ta'sir chiziqlari fazo (tekislik) da ixtiyoriy joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema *fazo (tekislik) dagi ixtiyoriy kuchlar sistemasi* deyiladi. Ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta'sridagi jism holatini yoki muvozanatini tekshirish uchun mazkur kuchlar sodda holga keltiriladi.

Puanso lemmasi. Kuchni bir nuqtadan berilgan markazga keltirish natijasida, keltirish markazida shu kuchga teng bo`lgan kuch va uning qo`shilgan jufti hosil bo`ladi.



41 – rasm

Isbot. Aytaylik, jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo`yilgan bo`lsin (41-rasm). Bu kuchni ixtiyoriy O nuqtaga parallel ko`chirish uchun 3- aksiomaga ko`ra mazkur nuqtaga $(\vec{F}', \vec{F}'')$ kuchni qo`yamiz. Bunda $F' = F'' = F$.

Natijada: $\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}', \vec{F}'')$ yoki $\vec{F} \Leftrightarrow \{\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\}$.

Bu yerda $(\vec{F}', \vec{F}'')$ qo`shilgan juft kuch deyiladi.

Mazkur kuchning momenti (11.2) ga ko`ra quyidagicha bo`ladi:

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{AO} \times \vec{F}$$

yoki

$$\vec{M} = \vec{m}_0(\vec{F}).$$

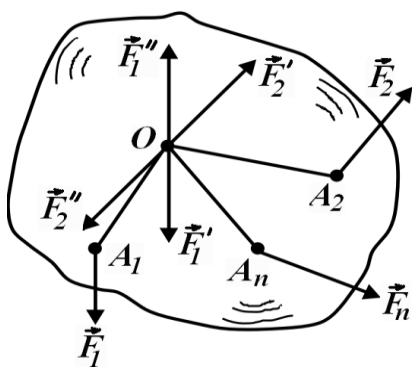
Demak:

$$\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}', \vec{M}) \Leftrightarrow (\vec{F}, \vec{M}).$$

Shu bilan lemma isbotlandi.

18 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish

Faraz qilaylik, jismga $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar qo`ilgan bo`lsin. 17-§ ga asoslanib, Puanso lemmasini qo`llaymiz (42-rasm).



42 - rasm

Natijada O nuqtada $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ kuchlar, $\{\vec{m}_0(\vec{F}_1) = \vec{M}_1, \vec{m}_0(\vec{F}_2) = \vec{M}_2, \dots, \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \vec{M}_n\}$ qo`shilgan juft kuchlar hosil bo`ladi. Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlarning ta`sir chiziqlari fazoda bo`lsa, $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n)$ juft kuch momenti vektorlari geometrik; tekislikda bo`lsa, algebraik qo`shiladi.

5-§ dan ma`lumki,  $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$  kuchlar kesishuvchi kuchlar sistemasi bo`lgani uchun ular geometrik qo`shiladi.

Natijada:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}'_v, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_v. \quad (18.1)$$

Bunda $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ bo`lgani uchun (18.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_v, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_v. \quad (18.2)$$

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo`lsa, (18.2) ni shunday yozamiz:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_v, \quad M = \sum M_v = \sum m_0(\vec{F}_v). \quad (18.3)$$

(18.2) va (18.3) ifodadagi $\vec{R}$ kuchlar sistemasining bosh vektori, $\vec{M}$ esa bosh moment deyiladi.

Demak, ixtiyoriy kuchlarni berilgan markazga keltirish orqali bitta bosh vektor ($\vec{R}$) va bitta bosh moment ($\vec{M}$) hosil bo`ladi (43-rasm).

Bosh vektor va bosh momentni analitik usulda quyidagicha hisoblash mumkin:

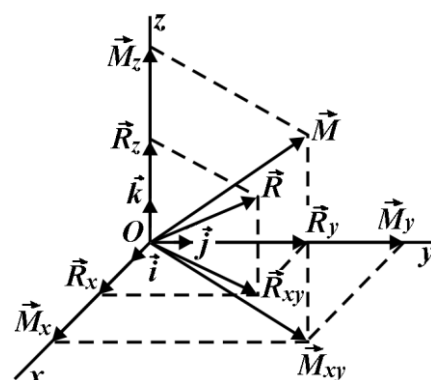
$$R_x = \sum F_{vx}, \quad R_y = \sum F_{vy}, \quad R_z = \sum F_{vz}, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (18.4)$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_v), \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_v), \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_v), \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad (18.5)$$

$$\cos(\vec{M}, \vec{i}) = \frac{M_x}{M}, \quad \cos(\vec{M}, \vec{j}) = \frac{M_y}{M}, \quad \cos(\vec{M}, \vec{k}) = \frac{M_z}{M}.$$

Bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchakni aniqlash uchun bu vektorlarni skalyar ko`paytiramiz:



43 - rasm

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = R \cdot M \cdot \cos \varphi$$

yoki

$$\cos \varphi = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}} \quad (18.6)$$

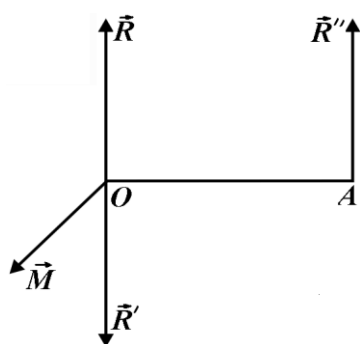
kelib chiqadi.

19 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini sodda holga keltirish

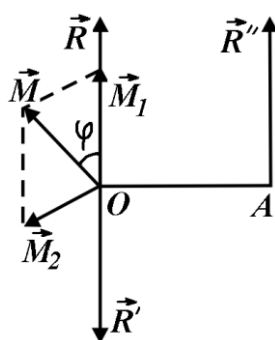
Ixtiyoriy kuchlarni sodda holga keltirishda quyidagi hollarni ko'ramiz:

1. Bosh vektor $\vec{R} = 0$, bosh moment $\vec{M} \neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh momentga keltiriladi.

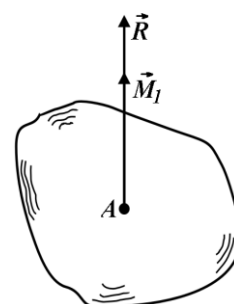
2. Agar bosh moment $\vec{M} = 0$, bosh vektor $\vec{R} \neq 0$ bo'lsa, kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi.



44-rasm



45 - rasm



46 - rasm

3. Bosh vektor $\vec{R} \neq 0$ hamda bosh moment $\vec{M} \neq 0$ bo'lib, ular o'zaro ($\vec{R} \perp \vec{M}$) perpendikular bo'lganda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh vektorga keltiriladi.

Haqiqatdan ham, bu holni to'g'riligini ko'rsatish uchun bosh momentning tashkil etuvchilarini shunday o'zgartiramizki, $R' = R'' = R$ bo'lib, $\vec{R}'$ esa bosh vektor $\vec{R}$ yo'nalgan chiziq bo'yicha qarama - qarshi yo'nalsin (44-rasm).

Bu holda $(\vec{R}, \vec{R}') \Leftrightarrow 0$ bo'lib, O nuqtadan $AO = M/R$ masofada $\vec{R}'' = \vec{R}$ joylashadi. Demak, A nuqtada bitta bosh vektor hosil bo'ladi.

4. Bosh vektor bilan bosh moment bir to'g'ri chiziq bo'ylab joylashsa, bunday hol *dynamo (dinamik vint)* deyiladi.

Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo'lmay va ular perpendikular bo'lmasa, kuchlar sistemasi dinamoga keltiriladi. Buning to'g'riligini isbotlash uchun bosh momentni tashkil etuvchilarga ajratamiz. Bu tashkil etuvchilardan biri bosh vektor bo'ylab, ikkinchisi bosh vektorga perpendikular bo'lsin (45-rasm).

Endi $\vec{R}$ bilan $\vec{M}_2$ ga 3-holni qo'llasak, O nuqtadan $AO = M \cdot \sin \varphi / R$ masofada bosh vektor $\vec{R}'' = \vec{R}$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy kuchlar sistemasining O nuqtadagi momenti $M \cdot \cos \varphi$ bo'lgan $\vec{M}_1$ juft kuch momenti vektoriga hamda A nuqtadagi $\vec{R}''$ bosh vektorga keltiriladi. Juft kuchning momenti vektori erkin bo'lgani uchun $\vec{M}_1$ ni A nuqtaga ko'chirish mumkin. Demak, kuchlar sistemasi dinamoga keltiriladi (46-rasm).

$\vec{M}_1$ va $\vec{R}$ vektorlar yo'nalgan o'q markaziy vint o'qi deyiladi.

5. Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo'lsa, ixtiyoriy kuchlar sistemasi muvozanatlashadi.

20 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Fazoda joylashgan ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlarning bosh vektori hamda bosh momenti nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M} = 0. \quad (20.1)$$

(20.1) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$R_x = \sum F_{vx} = 0, \quad R_y = \sum F_{vy} = 0, \quad R_z = \sum F_{vz} = 0; \quad (20.2)$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_v) = 0, \quad M_y = \sum m_y(\vec{F}_v) = 0, \quad M_z = \sum m_z(\vec{F}_v) = 0.$$

Ixtiyoriy kuchlar tekislikda joylashgan bo'lsa, ularning muvozanat shari quyidagicha bo'ladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \quad \sum F_{vy} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_v) = 0. \quad (20.3)$$

Agarda kuchlar sistemasi fazo (tekislik) da kesishuvchi kuchlardan iborat bo'lsa, ularning muvozanat shartlari mos ravishda quyidagicha yoziladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \quad \sum F_{vy} = 0, \quad \sum F_{vz} = 0; \quad (20.4)$$

$$\sum F_{vx} = 0, \quad \sum F_{vy} = 0. \quad (20.5)$$

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi Oz o'qqa parallel bo'lsa, (20.2) ning birinchi ikkitasi va oxirgisi aynan nolga teng bo'ladi. Natijada fazodagi parallel kuchlarning muvozanat sharti quyidagicha bo'ladi:

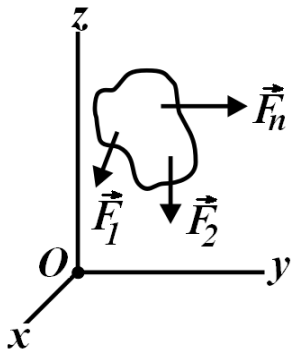
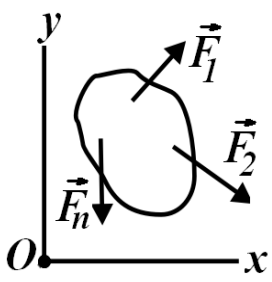
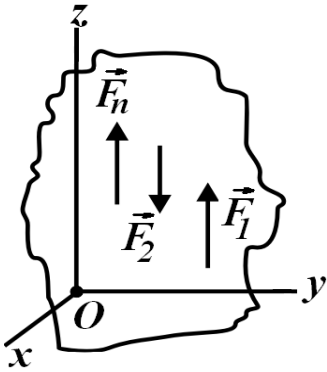
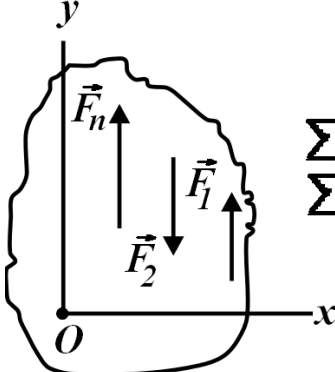
$$\sum F_{vz} = 0, \quad \sum m_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_v) = 0. \quad (20.6)$$

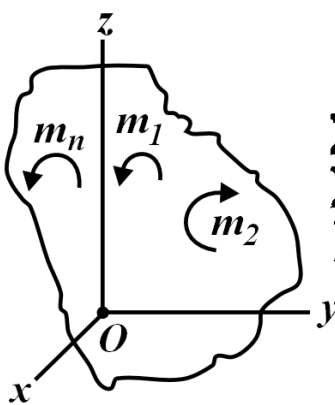
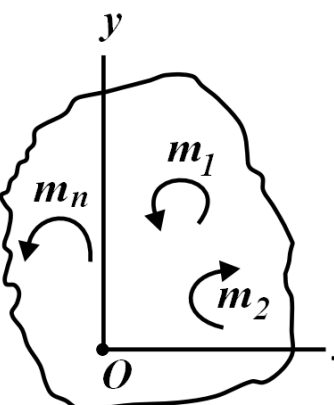
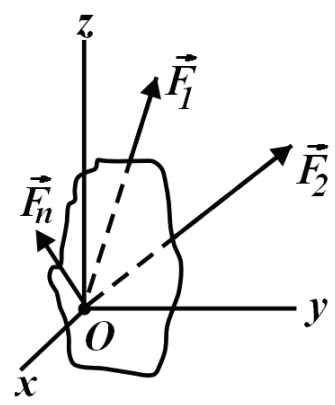
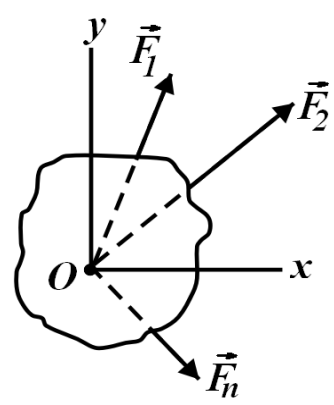
Agar parallel kuchlar tekislikda joylashgan bo'lsa, (20.3) ni shunday yozish mumkin:

$$\sum F_{vy} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_v) = 0. \quad (20.7)$$

bunda kuchlar Oy o'qiga paralleldir.

21 - §. Turli kuchlar ta'siridagi jismning muvozanat shartlari jadvali

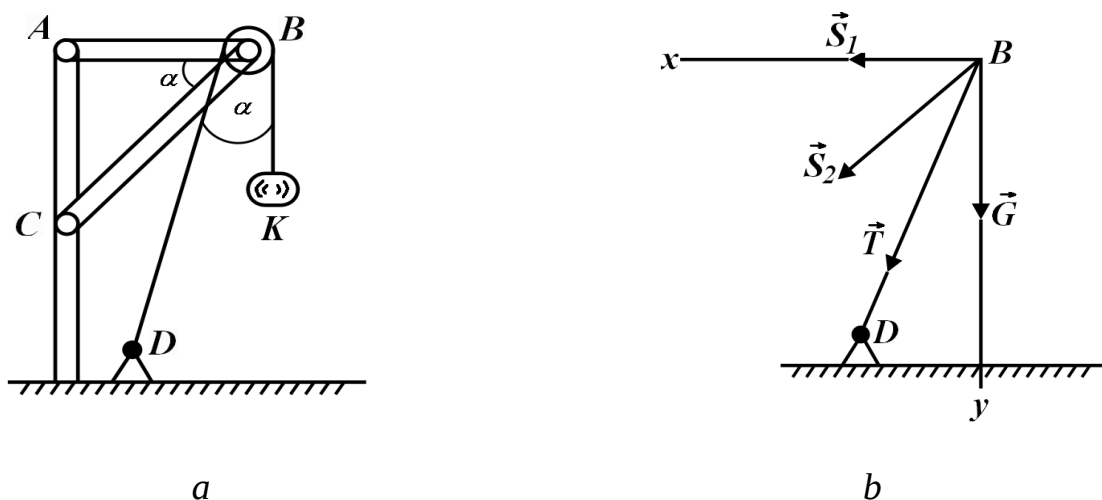
	Fazoda joylashgan kuchlar	Tekislikda joylashgan kuchlar
Ixtiyoriy	 $\begin{aligned} \sum F_{vx} &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0, \\ \sum F_{vz} &= 0; \\ \sum m_x(\vec{F}_v) &= 0, \\ \sum m_y(\vec{F}_v) &= 0, \\ \sum m_z(\vec{F}_v) &= 0. \end{aligned}$	 $\begin{aligned} \sum F_{vx} &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0, \\ \sum m_0(\vec{F}_v) &= 0. \end{aligned}$
Parallel	 $\begin{aligned} \sum F_{vz} &= 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_v) &= 0, \\ \sum m_y(\vec{F}_v) &= 0. \end{aligned}$	 $\begin{aligned} \sum F_{vy} &= 0, \\ \sum m_0(\vec{F}_v) &= 0. \end{aligned}$

Juft	 $\begin{aligned}\sum m_x(\vec{E}_y) &= 0, \\ \sum m_y(\vec{E}_x) &= 0, \\ \sum m_z(\vec{E}_y) &= 0.\end{aligned}$	 $\begin{aligned}\sum M_y &= 0 \\ \text{yoki} \\ \sum m_0(\vec{E}_y) &= 0.\end{aligned}$
Kesishuvchi	 $\begin{aligned}\sum F_{vx} &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0, \\ \sum F_{vz} &= 0.\end{aligned}$	 $\begin{aligned}\sum F_{vx} &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0.\end{aligned}$

22 - §. Masalalar

1-masala. Og'irligi $G = 2N$ bo'lgan K yukni B blokdan o'tkazilgan arqon yordamida D chig'iriq ushlab turadi. Blokdagi ishqalanishni hisobga olmay AB va BC bruslar zo'riqishi aniqlansin. $\angle ABC = \angle DBK = \alpha = 30^\circ$ (47 - rasm).

Yechish. B tugun muvozanatini tekshiramiz. Buning uchun (47-rasm, b) dagidek Bxy koordinata sistemasini tanlab olamiz. B tugunga K yukning og'irligi (aktiv kuch) qo'yilgan, uni bog'lanishdan qutqaramiz. Bog'lanishlar AB , BC sterjenlar hamda BD arqondan iborat. Ularning reaksiyalari mos ravishda $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ va $\vec{T}$. Sterjenlar cho'zilayapti deb faraz qilamiz. (47-rasm, b) dan ko'rinib turibdiki, B tugundagi kuchlar tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasidir. Ularning muvozanat sharti quyidagicha:



47 - rasm

$$\sum F_{vx} = 0; \quad S_1 + S_2 \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \alpha = 0, \quad (22.1)$$

$$\sum F_{vy} = 0; \quad S_2 \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \alpha + G = 0.$$

(22.1) dan:

$$S_2 = -\frac{G + T \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (22.2)$$

$$S_1 = -S_2 \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha.$$

(22.2) ga son qiymatlarni qo'ysak,

$$S_1 = 5,45N, S_2 = -7,46N \quad (22.3)$$

kelib chiqadi.

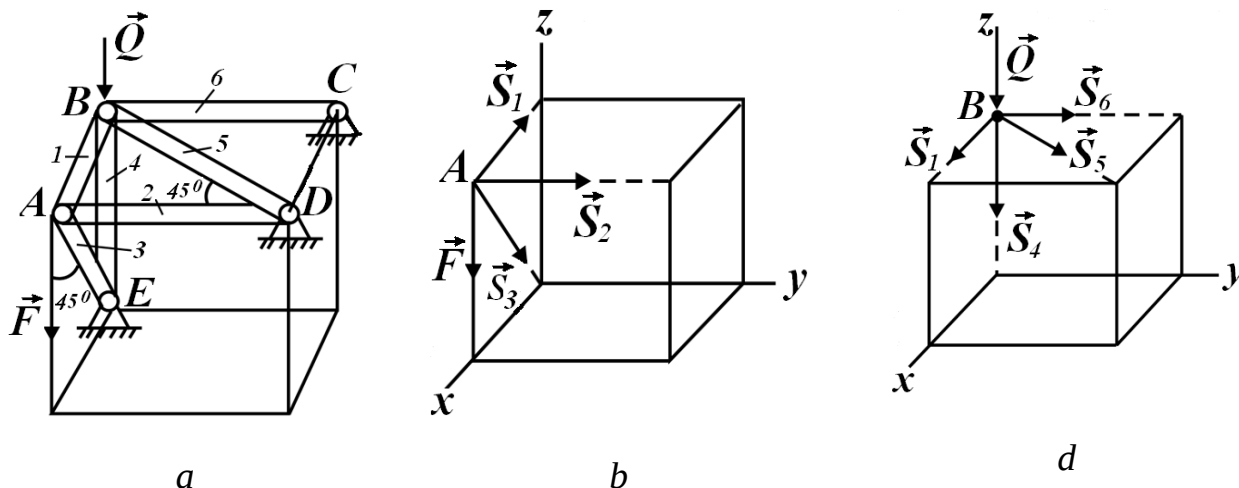
Bu yerda (+) ishora sterjen cho'zilishini, (-) ishora esa siqilishini bildiradi.

2-masala. Sterjenli sistema bir-biri bilan sharnirli bog'langan 6 ta sterjendan iborat. A tugunga $\vec{F}$ kuch, B tugunga $\vec{Q}$ kuch qo'yilgan. Sterjenlar zo'riqishi

aniqlansin. Ularning og'irligi hisobga olinmasin (48-rasm); C , D , E nuqtalari qo'zg'almas sharnirli tayanchlardir.

Yechish. 48-rasm, a da ko'rsatilgan sistema muvozanatini tekshirish uchun A va B tugunlar muvozanatini alohida - alohida tekshiramiz.

A tugunga $\vec{F}$ kuch, 1, 2 va 3- sterjenlar zo'riqishlari ta'sir qiladi. Ular fazoda joylashgan kesishuvchi kuchlar sistemasidan iborat. Sanoq sistemasini 48-rasm, b dagidek tanlab, fazodagi kesishuvchi kuchlar muvozanat shartlarini tuzamiz:



48 – rasm

$$\begin{aligned}\sum F_{vx} &= 0; & -S_3 \cdot \cos 45^\circ - S_1 &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0; & -S_2 &= 0, \\ \sum F_{vz} &= 0; & -F - S_3 \cdot \cos 45^\circ &= 0.\end{aligned}\tag{22.4}$$

(22.4) dan:

$$S_1 = F, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = -F \cdot \sqrt{2}$$

kelib chiqadi.

Endi B tugunga qo'yilgan $\vec{Q}, \vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ kuchlarning muvozanat shartlarining tenglamalarini tuzamiz (48-rasm, d).

$$\begin{aligned}\sum F_{vx} &= 0; & S_1 + S_5 \cdot \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0; & S_6 + S_5 \cdot \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{vz} &= 0; & -Q - S_4 &= 0.\end{aligned}\tag{22.5}$$

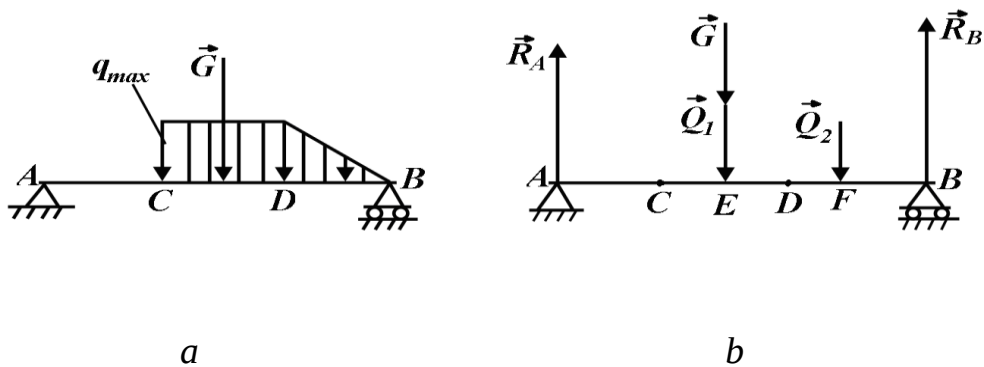
(22.5) ni yechsak:

$$S_4 = -Q, \quad S_5 = -F\sqrt{2}, \quad S_6 = F$$

hosil bo'ladi.

3-masala. AB balkaga intensivligi $q_{\max} = 2\text{kN/m}$ bo'lgan tekis taqsimlangan yuk qo'yilgan. AB balkaning A va B tayanchlaridagi reaksiyalari aniqlansin. $AC=CD=DB=2\text{m}$. AB balka og'irligi $G = 4\text{kN}$ (49-rasm, a).

Yechish. Masalani yechish uchun avval CD va DB qismlarga qo'yilgan tekis taqsimlangan yukning teng ta'sir etuvchisini topib olamiz. CD qismdagi tekis taqsimlangan yuk teng ta'sir etuvchisining moduli $Q_1 = q_{\max} \cdot CD$, ya'ni $Q_1 = 4\text{kN}$ bo'lib, u CD ning o'rtasiga qo'yilgan; $CE = CD/2$ yoki $CE = 1\text{m}$. DB qismdagi tekis taqsimlangan yuk teng ta'sir etuvchisining moduli $Q_2 = q_{\max} \cdot DB/2$ ya'ni, $Q_2 = 2\text{kN}$. U $DF = DB/3 = 2/3\text{m}$ bo'lgan F nuqtaga qo'yilgan (49-rasm, b).



49 – rasm

Endi AB balka muvozanatini tekshiramiz (49-rasm, b). Balkaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda joylashgan parallel kuchlar sistemasidan iborat. Ularning muvozanat sharti tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{vy} = 0; \quad R_A - Q_1 - G + R_B - Q_2 = 0, \quad (22.6)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0; \quad -Q_1 \cdot AE - Q_2 \cdot AF - G \cdot \frac{AB}{2} + R_B \cdot AB = 0.$$

49-rasm, b dan:

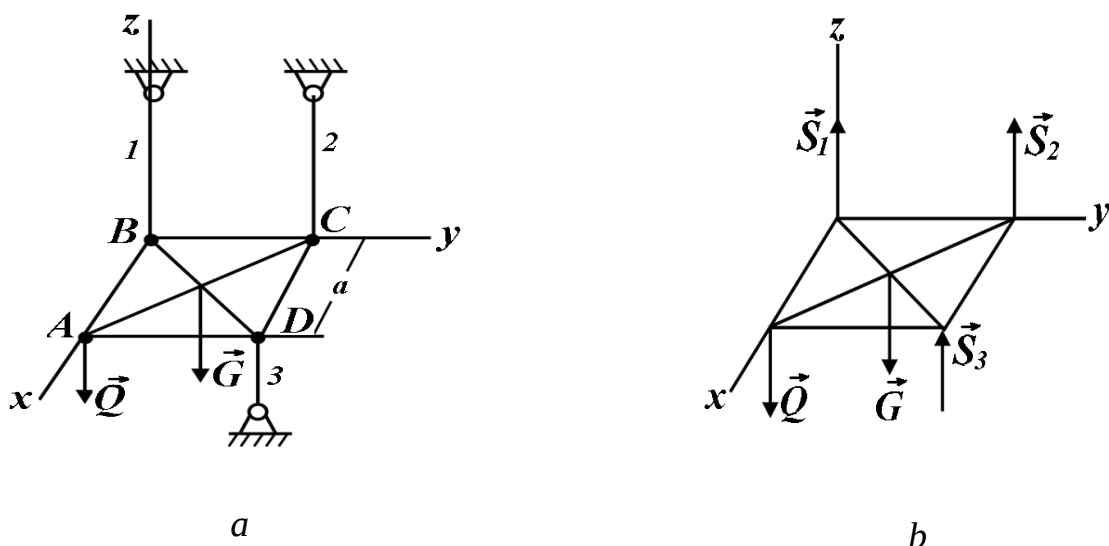
$$AE = AC + CE, \quad AE = 2 + 1 = 3\text{m}, \quad AF = AD + DF, \quad AF = 4 + 2/3 = 14/3\text{m}.$$

(22.6) ga son qiymatlarni qo'ysak,

$$R_A = 4,44\text{kN}, \quad R_B = 5,56\text{kN}$$

kelib chiqadi.

4-masala. Og'irtigi $G = 115\text{N}$ bo'lgan $ABCD$ kvadrat plastinka 3 ta sterjen yordamida gorizontol holda ushlab turiladi. A nuqtaga $Q = 185\text{N}$ kuch qo'yilgan. Sterjenlardagi zo'riqish aniqlansin (50-rasm).



50 – rasm

Yechish. Sanoq sistemasini (50-rasm, b) dagidek tanlaymiz. Sterjenlar reaksiyasini mos ravishda $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ va $\vec{S}_3$ deb olamiz. $ABCD$ plastinkaga ta'sir etuvchi kuchlar Oz o'qiga parallel joylashgan. Ularning muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\sum F_{vz} = 0; \quad S_1 + S_2 + S_3 - Q - G = 0, \quad (22.7)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_v) = 0; \quad -G \cdot a/2 + S_2 \cdot a + S_3 \cdot a = 0, \quad (22.8)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_v) = 0; \quad G \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot a - S_3 \cdot a = 0. \quad (22.9)$$

(22.9) dan:

$$S_3 = G/2 + Q, \quad S_3 = 115/2 + 185 = 242,5N.$$

(22.7) va (22.8) dan:

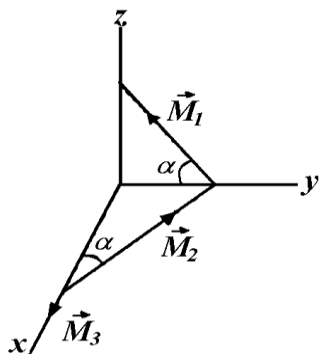
$$S_1 = Q + G - S_2 - S_3, \quad S_2 = G/2 - S_3.$$

Son qiymatlarni qo'ysak:

$$S_1 = 242,5N, \quad S_2 = -185N, \quad S_3 = 242,5N.$$

5-masala. 51-rasmda ko'rsatilgan juft kuch momentlarining teng ta'sir etuvchisining moduli topilsin. $M_1 = M_2 = 1Nm$, $M_3 = 0,707Nm$. $\alpha = 45^\circ$.

Yechish. 51-rasmda ko'rsatilgan juft kuch momentlari fazoda joylashgan. Bizga ma'lumki, fazodagi juft kuch momentlarining geometrik yig'indisi ularning bosh momentidan iborat edi. Juft kuch momentlarini Ox , Oy , Oz o'qlariga proyeksiyalar yig'indisini aniqlaymiz:



51-rasm

$$M_x = -M_2 \cdot \cos \alpha + M_3,$$

$$M_y = -M_1 \cdot \cos \alpha + M_2 \cdot \sin \alpha,$$

$$M_z = M_1 \cdot \sin \alpha.$$

Son qiymatlarni qo'ysak:

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0,707 Nm.$$

Natijada,

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad M = 0,707 Nm$$

kelib chiqadi.

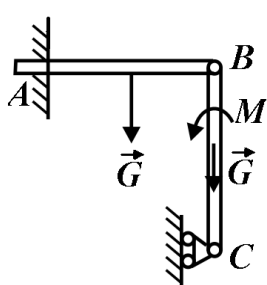
6-masala. Og'irligi G bo'lgan balkaning A uchi devorga kirgizib mahkamlangan, B uchiga BC balka sharnir yordamida biriktirilgan.

BC balkaning C uchi qo'zg'aluvchi tayanchga mahkamlangan. BC balka og'irligi AB balka og'irligi bilan bir xil. A, B, C tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. BC balkaga momenti M bo'lgan juft kuch qo'yilgan. $AB = BC = a$ (52-rasm, a).

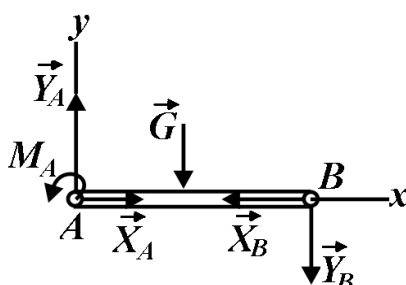
Yechish. Sanoq sistemasini (52-rasm; b, d) dagidek tanlaymiz. AB va BC balkalar muvozanatini alohida-alohida tekshiramiz. Ularga ta'sir etuvchi kuchlar rasmda ko'rsatilgan.

AB balkaning muvozanat shartlari quyidagicha bo'ladi (52-rasm, b):

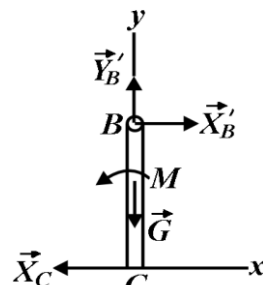
$$\begin{aligned} \sum F_{vx} &= 0; & X_A - X_B &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0; & Y_A - G - Y_B &= 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_v) &= 0; & M_A - G \cdot \frac{AB}{2} - Y_B \cdot AB &= 0. \end{aligned} \quad (22.10)$$



a



b



d

52 – rasm

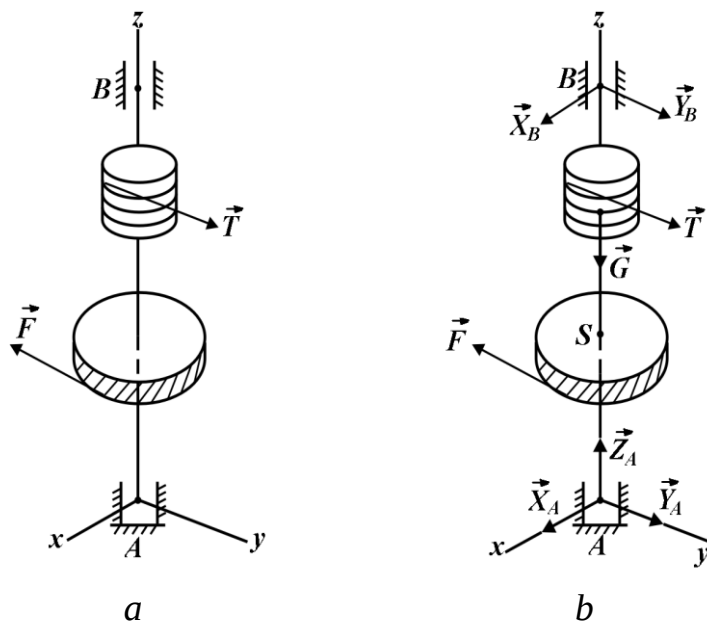
BC balkaning muvozanat shartlari quyidagicha yoziladi (52-rasm, d):

$$\begin{aligned} \sum F'_{vx} &= 0; & X'_B - X'_C &= 0, \\ \sum F'_{vy} &= 0; & Y'_B - G &= 0; \\ \sum m_B(\vec{F}_v) &= 0; & M - X'_C \cdot BC &= 0. \end{aligned} \quad (22.11)$$

(22.10), (22.11) tenglamalarni yechsak:

$$X_A = X_B = X_C = \frac{M}{a}, \quad Y_A = 2 \cdot G, \quad Y_B = G, \quad M_A = \frac{Ga}{2}.$$

7-masala. Og'rligi $G = 1,6kN$ bo'lgan baraban o'qiga zanjir o'ralgan bo'lib, uning tarangligi $T = 20kN$, $r_1 = 20sm$ (53-rasm, *a*). Baraban S shesternyaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch ta'sirida muvozanatda turadi. $\vec{F}$ va $\vec{T}$ Oy o'qiga parallel, $r_2 = 40sm$. Shesternya markazi A podpyatnikdan $AS = 10sm$ uzoqlikda joylashgan. $AB = 120sm$, $SD = 40sm$. A podpyatnik, B podshipnik reaksiyalari hamda $\vec{F}$ kuch miqdori topilsin.



53 – rasm

Yechish. 53-rasm, *a* dagi baraban muvozanatini tekshiramiz. A podpyatnik, B podshipnik ta'sirini mos ravishda $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. U holda baraban $\vec{T}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Bu kuchlar fazodagi ixtiyoriy kuchlar sistemasidan iborat. Demak, muvozanat tenglamalar quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{vx} &= 0; & X_A + X_B &= 0, \\
 \sum F_{vy} &= 0; & Y_A + Y_B + T - F &= 0, \\
 \sum F_{vz} &= 0; & Z_A - G &= 0, \\
 \sum m_x(\vec{F}_v) &= 0; & 10 \cdot F - 50 \cdot T - 120 \cdot Y_B &= 0, \\
 \sum m_y(\vec{F}_v) &= 0; & 120 \cdot X_B &= 0, \\
 \sum m_z(\vec{F}_v) &= 0; & 20 \cdot T - 40 \cdot F &= 0.
 \end{aligned} \tag{22.12}$$

Son qiymatlarni qo'ysak:

$$X_A = 0, \quad Y_A = -2,5kN, \quad Z_A = 1,6kN, \quad X_B = 0, \quad Y_B = -7,5kN, \quad F = 10kN.$$

bu erdagi (-) ishora Y_A, Y_B larning haqiqiy yo'nalishi 53-rasm, *b* dagiga teskari bo'lishini bildiradi.

Nazorat savollari

1. Puanso lemmasi qanday ta'riflanadi?
2. Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga keltirishni tushuntiring.
3. Bosh vektor va bosh moment nima?
4. Qanday holda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi?
5. Qanday holda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bosh momentga keltiriladi?
6. Dinamo nima?
7. Teng ta'sir etuvchining yo'naltiruvchi kosinuslari qanday aniqlanadi?
8. Bosh momentning yo'naltiruvchi kosinuslari qanday topiladi?
9. Bosh moment bilan bosh vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
10. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday ta'riflanadi va yoziladi?
11. Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar muvozanat shartlarini ta'riflang va yozing.

VI BOB. ISHQALANISH KUCHI

23 - §. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi

Bir jism ikkinchi bir jism ustida sirpanganida hosil bo'ladigan qarshilik *sirpanishdagi ishqalanish* kuchi deyiladi.

Ishqalanish kuchining jism normal bosimiga to'g'ri proporsional (mutanosib) ekanligi tajribalarda aniqlangan:

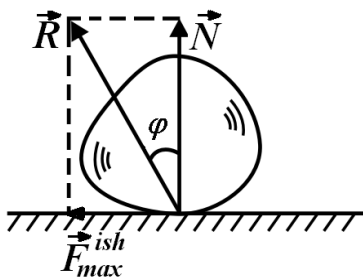
$$F^{ish} = N, \quad (23.1)$$

bunda N — tekshirilayotgan jismning normal bosimi; f — sirpanish ishqalanish koefitsiyenti.

Agar ishqalanuvchi jismlar tinch turgan bo'lsa, ularning ishqalanish kuchi statik ishqalanish kuchi deb ataladi:

$$F_{\max}^{ish} = f_0 \cdot N, \quad (23.2)$$

bu yerda: f_0 — jismning tinch turgan vaqtdagi ishqalanish koefitsiyenti.



54 - rasm

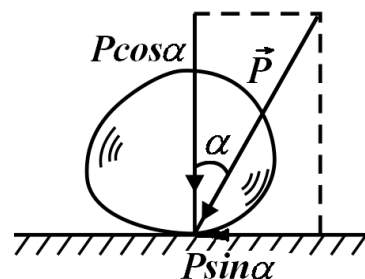
Jism g'adir-budir tayanch tekislik ustida muvozanatda turgan bo'lsa, tayanchning reaksiya kuchi normal reaksiya hamda ishqalanish kuchidan iborat bo'ladi (54-rasm).

Normal reaksiya kuchi bilan maksimal ishqalanish kuchiga to'g'ri keladigan to'la reaksiya kuchi $\vec{R}$ orasidagi burchak φ *ishqalanish burchagi* deyiladi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}^{ish}}{N} = \frac{f_0 \cdot N}{N} = f_0. \quad (23.3)$$

Agarda g`adir-budir sirt ustida turgan jismga normal reaksiya bilan  $\alpha$  burchak hosil qiluvchi  $\vec{P}$  kuch qo`yilganda jismni harakatga keltiruvchi $P \cdot \sin \alpha$ kuch maksimal ishqalanish kuchidan katta bo`lishi kerak (55-rasm), ya`ni

$$P \cdot \sin \alpha > f_0 \cdot P \cdot \cos \alpha,$$



55 – rasm

bundan

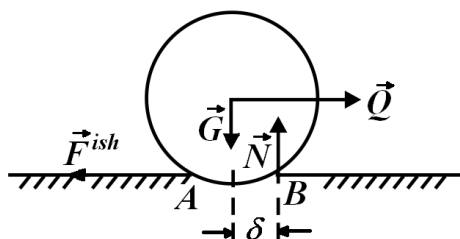
$$\operatorname{tg} \alpha > f_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{yoki} \quad \alpha > \varphi$$

kelib chiqadi.

Ishqalanish kuchi yuzaga keladigan holatlarni tekshirishga oid statika masalalari ishqalanish kuchi hisobga olinmaydigan masalalar singari, ya`ni muvozanat tenglamalarini tuzish yo`li bilan yechiladi. Lekin ishqalanish kuchlari ham jismga ta`sir qiluvchi kuchlar qatoriga kiradi.

24 - §. Dumalanishdagi ishqalanish kuchi

Bir jismning ikkinchi jism ustida dumalanishga qarshilik qiluvchi kuch *dumalanishdagi ishqalanish kuchi* deyiladi. Og`irligi  $G$ , radiusi  $R$  bo`lgan g`ildirakka  $\vec{Q}$  kuch ta`sir qilsin (56-rasm).



56–rasm

$\vec{Q}$ kuch ta`sirida g`ildirak bilan sirtning tegib turgan nuqtasida sirpanishdagi ishqalanish kuchi hosil bo`ladi. Modul jihatidan teng bo`lgan $\vec{Q}$ va $\vec{F}^{\text{ish}}$ kuchlar yelkasi g`ildirak radiusiga teng bo`lgan juft kuch hosil qiladi va u g`ildirakni dumalatishga harakat qiladi.

G`ildirakning sirtga ko`rsatayotgan bosim kuchi $\vec{G}$ ta`sirida ikki jismning tegib turgan yuzasi deformatsiyalanadi. Natijada normal reaksiya kuchlarining teng ta`sir etuvchisi A nuqtadan o`ng tomonda joylashgan  $B$  nuqtaga qo`yilgan bo`ladi. Bosim kuchi  $\vec{G}$  va normal reaksiya kuchi  $\vec{N}$  yelkasi  $AB = \delta$  bo`lgan juft kuchni hosil qilib, u g`ildirak dumalanishiga qarshilik ko`rsatadi. δ – *dumalanishdagi ishqalanish koeffitsiyenti* deyiladi.

Shunday qilib, g`ildirakka momentlari bir-biriga qarama-qarshi yo`nalgan $(\vec{Q}, \vec{F}^{\text{ish}})$ va $(\vec{G}, \vec{N})$ juft kuchlar ta`sir etadi. G`ildirak dumalashi oldida

$$m_A(\vec{Q}) = m_A(\vec{N})$$

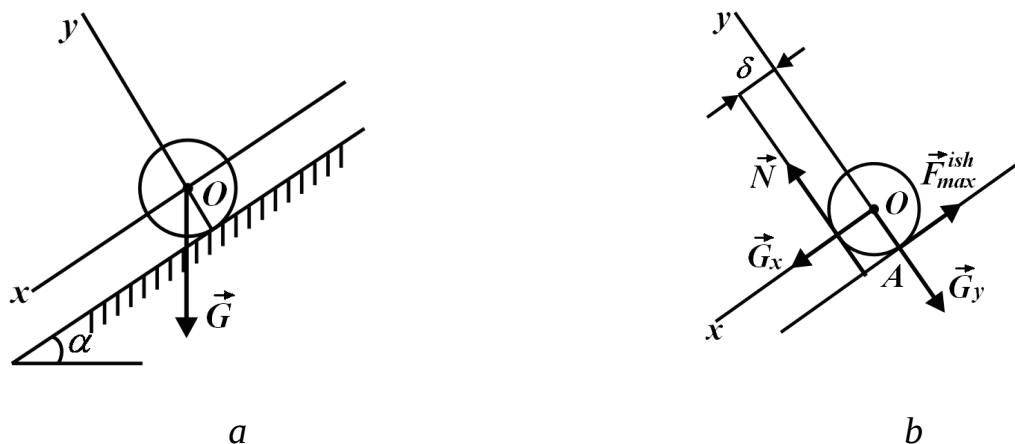
yoki

$$Q \cdot R = N \cdot \delta \quad (24.1)$$

bo`ladi.

$$(24.1) \text{ dan: } Q = \frac{\delta}{R} \cdot N. \text{ Agarda } Q > \frac{\delta}{R} \cdot N \text{ bo`lsa, g`ildirak dumalaydi.}$$

8-masala. Og'irligi G , diametri $1m$ bo'lgan g'altak g'ildiramasligi uchun og'ma tekislikning gorizontga eng katta og'ish burchagi topilsin. Dumalanish ishqalanish koeffitsiyenti $\delta = 0.0005m$ (57-rasm, a).



57 – rasm

Yechish. G'altak muvozanatini tekshiramiz. Unga aktiv $\vec{G}$ og'irlik kuchi, $\vec{N}$, $\vec{F}^{ish}$ reaksiyalar ta'sir qiladi (57-rasm, b).

$\vec{G}$ og'irlik kuchini $\vec{G}_x$, $\vec{G}_y$ tuzuvchilarga ajratamiz:

$$G_x = G \cdot \sin \alpha, \quad G_y = -G \cdot \cos \alpha.$$

G_x g'altakni aylantirishga harakat qilsa, G_y esa unga qarshilik ko'rsatadi. G'altakka ta'sir qiluvchi kuchlarni muvozanat yaqinidagi muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \sum F_{vx} &= 0; & G \cdot \sin \alpha - F^{ish} &= 0, \\ \sum F_{vy} &= 0; & -G \cdot \cos \alpha + N &= 0; \\ \sum m_A(\vec{F}_v) &= 0; & G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha - N \cdot \delta &= 0. \end{aligned}$$

Mazkur tenglamalarni yechsak,

$$N = G \cdot \cos \alpha, \quad G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha - G \cdot \delta \cdot \cos \alpha = 0$$

kelib chiqadi.

$$\text{Bundan:} \quad \tan \alpha = 2\delta / d; \quad \tan \alpha = 0,001; \quad \alpha = 0,057^\circ.$$

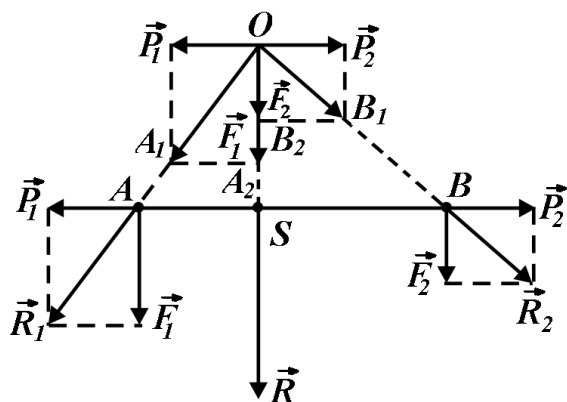
Nazorat savollari

1. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi nima?
2. Dumalashdagi ishqalanish kuchi nima?
3. Ishqalanish burchagi deb nimaga aytiladi?
4. Jism harakatga kelishi uchun ta'sir qilayotgan kuchning normal bilan tashkil qilgan burchagi va ishqalanish burchagi orasidagi munosabat qanday bo'lishi kerak?
5. Jism dumalanishi oldida qanday shart bajarilishi kerak?

VII BOB. PARALLEL KUCHLAR. OG'IRLIK MARKAZI.

25- §. Bir tomonga yo`nalgan ikki parallel kuchni qo`shish

Faraz qilaylik, jismning A va B nuqtalariga mos ravishda bir tomonga qarab yo`nalgan  $\vec{F}_1$  va  $\vec{F}_2$  kuchlar qo`yilgan bo`lsin (58-rasm).  $A$  va  $B$  nuqtalarga ta'sir chiziqlari  $AB$  da joylashgan  $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \Leftrightarrow 0$  sistemani qo`yamiz. Natijada A nuqtada $\vec{F}_1$ va $\vec{P}_1$, B nuqtada esa $\vec{F}_2$ va $\vec{P}_2$ kuchlar hosil bo`ladi. Ularni 4-aksiomaga asosan qo`shib $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1$ hamda $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2$ kuchlarni hosil qilamiz. $\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasini O deb belgilab, ularni 3-aksiomadagi teorema ko`ra  $O$  nuqtaga ko`chiramiz. So`ngra $\vec{R}_1$ ni $\vec{F}_1, \vec{P}_1$, shuningdek $\vec{R}_2$ ni $\vec{F}_2, \vec{P}_2$ kuchlarga ajratamiz.



58 - rasm

Demak, O nuqtada bir to`g`ri chiziq bo`ylab yo`nalgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar hosil bo`ladi. Ularni algebraik qo`shib, teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:

$$R = F_1 + F_2. \quad (25.1)$$

Endi $\vec{R}$ ni ta'sir chizig'i bo`ylab  $S$  nuqtaga ko`chiramiz.

58-rasmdagi $\triangle OAS$, $\triangle OA_1A_2$ va $\triangle OBS$, $\triangle OB_1B_2$ o`xshash bo`lgani uchun

$$\frac{F_1}{OS} = \frac{P_1}{AS}, \quad \frac{F_2}{OS} = \frac{P_2}{SB} \quad (25.2)$$

bo`ladi.

$$(25.2) \text{ dan: } \frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS}. \quad (25.3)$$

(25.3) dan hosiloviy proporsiya tuzsak:

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{F_1 + F_2}{SB + AS}$$

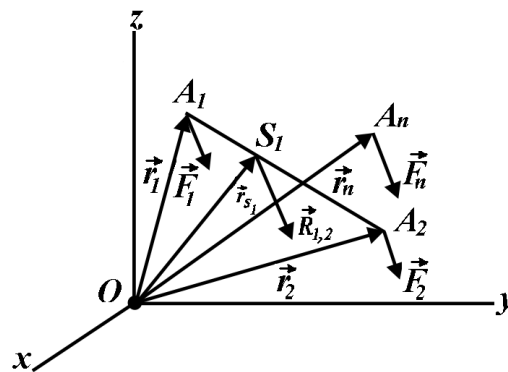
yoki

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{R}{AB}. \quad (25.4)$$

Demak, bir tomonga qarab yo`nalgan ikki parallel kuchning teng ta'sir etuvchisi ularning algebraik yig`indisiga teng bo`lib, yo`nalishi mazkur kuchlar yo`nalishida, ta'sir chizig'i esa kuchlar qo`yilgan nuqtalar orasidagi masofani shu kuchlarga teskari proporsional bo`laklarga bo`lib o`tadi.

26 - §. Parallel kuchlar markazi

Fazoda bir tomonga qarab yoʻnalgan parallel $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar jismning $A_1, A_2, \dots, A_n$ nuqtalariga qoʻyilgan boʻlsin (59-rasm). Kuchlar qoʻyilgan nuqtalarning $Oxyz$ sanoq sistemasiga nisbatan radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ deb belgilaymiz. Yuqoridagi mavzuga asoslanib, avval $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ ni qoʻshamiz:



59-rasm

$$R_{1,2} = F_1 + F_2, \quad F_1 \cdot A_1 S_1 = F_2 \cdot S_1 A_2.$$

S_1 nuqta radius-vektorini $\vec{r}_{S_1}$ desak:

$$F_1 \cdot (\vec{r}_{S_1} - \vec{r}_1) = F_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_{S_1}),$$

bundan $\vec{r}_{S_1} = \frac{F_1 \cdot \vec{r}_1 + F_2 \cdot \vec{r}_2}{F_1 + F_2}$ kelib chiqadi.

25 - § dagidek qoʻshishni davom ettirsak:

$$\vec{r}_S = \frac{F_1 \cdot \vec{r}_1 + F_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + F_n \cdot \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} \quad \text{yoki} \quad \vec{r}_S = \frac{\sum F_v \cdot \vec{r}_v}{\sum F_v} \quad (26.1)$$

hosil boʻladi.

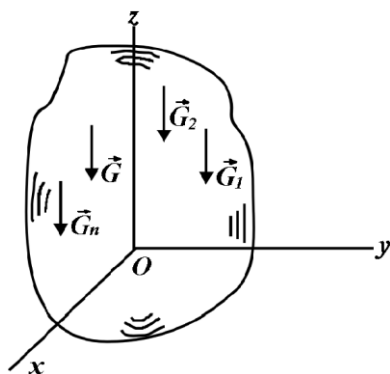
(26.1) formula yordamida aniqlanadigan S nuqta *parallel kuchlar markazi* deyiladi.

27 - §. Qattiq jismning ogʻirlik markazi

Yer sirtiga yaqin boʻlgan qattiq jismning har qaysi boʻlagiga Yer markaziga qarab yoʻnalgan ogʻirlik kuchi taʼsir etadi. Tekshirilayotgan jism oʻlchamlari Yer oʻlchamlariga nisbatan juda kichik boʻlgani uchun taʼsir etuvchi ogʻirlik kuchlarini

parallel kuchlar deb qarash mumkin (60-rasm). Demak, parallel kuchlar markazi jismning ogʻirlik markazidan iborat boʻladi. Shunday qilib jism ogʻirlik markazi (26.1) formuladan aniqlanadi.

Jism boʻlaklariga taʼsir etuvchi ogʻirlik kuchlarining teng taʼsir etuvchisini G desak,



60-rasm

$$G = \sum G_v.$$

Natijada (26.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum G_v \cdot \vec{r}_v}{\sum G_v}$$

yoki

$$x_s = \frac{\sum G_v \cdot x_v}{\sum G_v}, \quad y_s = \frac{\sum G_v \cdot y_v}{\sum G_v}, \quad z_s = \frac{\sum G_v \cdot z_v}{\sum G_v}. \quad (27.1)$$

28 - §. Bir jinsli jismlar og'irlik markazining koordinatalari

Bir jinsli jism biror bo'lagining og'irligi uning hajmiga proporsional bo'lsin. Bu holda:

$$G_v = \gamma \cdot V_v, \quad (28.1)$$

bunda γ — bir birlik hajm og'irligi; V_v — jism v bo'lagining hajmi.

(28.1) ni (27.1) ga qo'ysak:

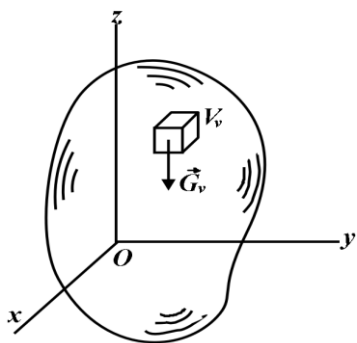
$$x_s = \frac{\sum V_v \cdot x_v}{\sum V_v}, \quad y_s = \frac{\sum V_v \cdot y_v}{\sum V_v}, \quad z_s = \frac{\sum V_v \cdot z_v}{\sum V_v}. \quad (28.2)$$

Koordinatalari (28.2) formula bilan aniqlanadigan nuqta jism hajmining og'irlik markazi deyiladi (61-rasm).

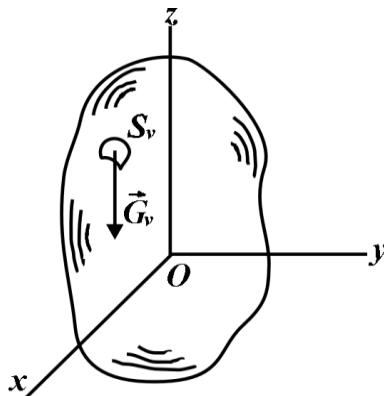
Jism yuzasining og'irlik markazini aniqlash uchun undan S_v — yuzani ajratib olamiz (62-rasm). Bu yuza og'irligi:

$$G_v = \delta \cdot S_v, \quad (28.3)$$

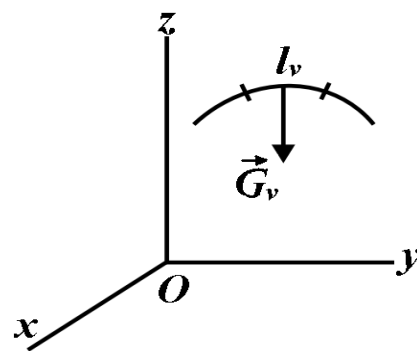
bunda δ — bir birlik yuza og'irligi; S_v — jism v bo'lagining yuzi.



61 - rasm



62 - rasm



63 - rasm

(28.3) ni (27.1) ga qo'ysak:

$$x_s = \frac{\sum S_v \cdot x_v}{\sum S_v}, \quad y_s = \frac{\sum S_v \cdot y_v}{\sum S_v}. \quad (28.4)$$

(28.4) jism yuzasi og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash formulasidir.

Chiziq og'irlik markazining koordinatalarini topish uchun undan l_v — yoyni ajratamiz. Bu yoyni og'irligi:

$$G_v = \rho \cdot l_v, \quad (28.5)$$

bunda ρ - bir birlik yoy og'irligi; l_v – jism v bo'lagining uzunligi (63-rasm).

(28.5) ni (27.1) ga qo'yamiz:

$$x_s = \frac{\sum l_v \cdot x_v}{\sum l_v}, \quad y_s = \frac{\sum l_v \cdot y_v}{\sum l_v}, \quad z_s = \frac{\sum l_v \cdot z_v}{\sum l_v}. \quad (28.6)$$

(28.6) dan chiziqli og'irlik markazining koordinatalari aniqlanadi.

29 - §. Jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash usullari

Jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlashning quyidagi usullari bor:

1. Simmetriya usuli. Agar jism simmetriya tekisligiga, simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lsa, uning og'irlik markazi mos ravishda simmetriya tekisligida, o'qida, markazida yotadi.

2. Ajratish usuli. Agar jismni og'irlik markazi ma'lum bo'lgan chekli bo'laklarga ajratish mumkin bo'lsa, (28.2), (28.4), (28.6) formulalardan foydalanib jism og'irlik markazining koordinatalarini aniqlash mumkin.

3. To'ldirish usuli. Bu holda jismni og'irlik markazi ma'lum bo'lgan chekli bo'laklar bilan to'ldiriladi, shunga (28.2), (28.4), (28.6) formulalar yordamida jism og'irlik markazining koordinatalari topiladi.

4. Integrallash usuli. Agar yuqoridagi usullarni qo'llash mumkin bo'lmasa, jismdan elementar bo'lakcha ajratib olinadi. Bu holda (28.2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x_s = \frac{\sum \Delta V_v \cdot x_v}{\sum \Delta V_v}, \quad y_s = \frac{\sum \Delta V_v \cdot y_v}{\sum \Delta V_v}, \quad z_s = \frac{\sum \Delta V_v \cdot z_v}{\sum \Delta V_v}.$$

Bundan ΔV_v larni nolga intiltirib limitga o'tsak, yuqoridagi keltirilgan formulaning suratlari jism hajmi bo'yicha tarqalgan integralni, maxraji esa jism hajmini beradi:

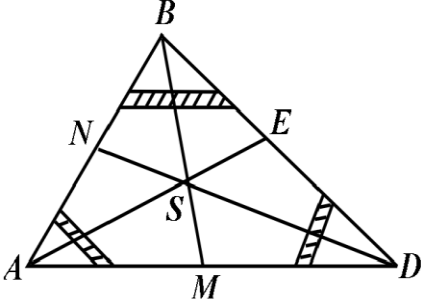
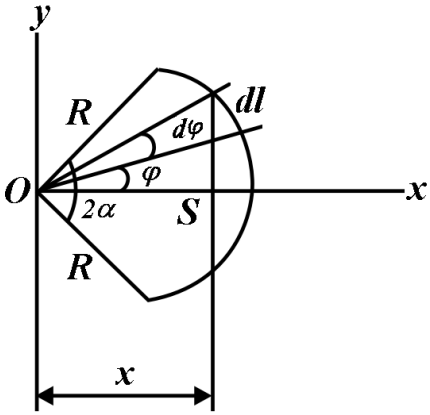
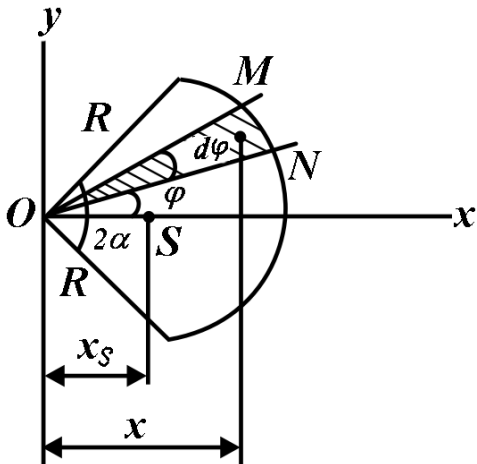
$$x_s = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV, \quad y_s = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV, \quad z_s = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV. \quad (29.1)$$

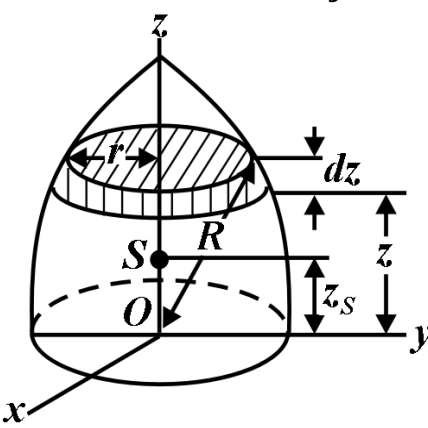
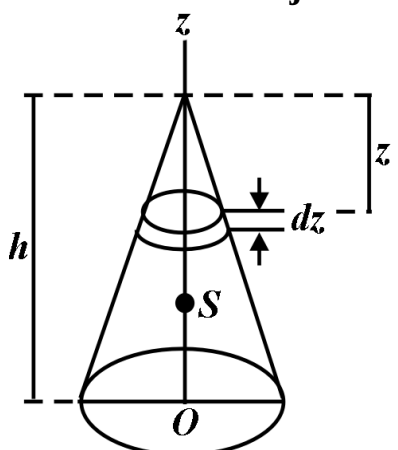
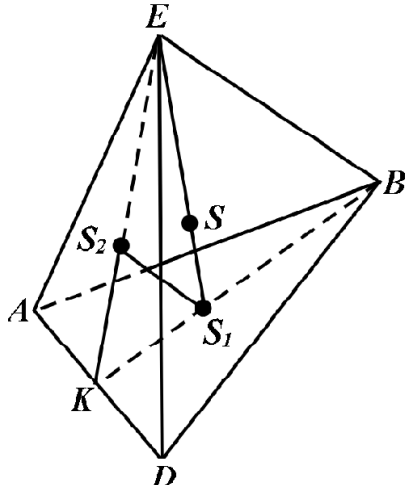
(28.4) va (28.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_s = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS, \quad y_s = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS; \quad (29.2)$$

$$x_s = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_s = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad z_s = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (29.3)$$

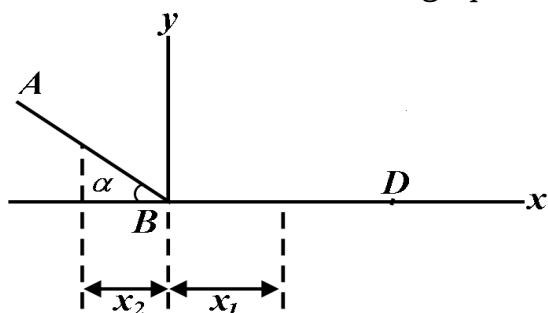
30 -§. Oddiy shaklli ba'zi bir jinsli jismlarning og'irlik markazlari

T/R	Jismlar shakli	Og'irlik markazi
1	2	3
1	Uchburchak yuzi 	$SM = \frac{BM}{3}, \quad SN = \frac{DN}{3},$ $SE = \frac{AE}{3}.$
2	Aylana yoyi 	$dl = R d\varphi, \quad x = R \cos \varphi,$ $x_S = \frac{\int x dl}{L}, \quad L = \int_{-\alpha}^{\alpha} R d\varphi,$ $x_S = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$ Yarim aylana uchun: $x_S = \frac{2R}{\pi}.$
3	Doira sektori yuzi 	$dS_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} R^2 d\varphi,$ $x = \frac{2}{3} R \cos \alpha, \quad S = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\varphi,$ $x_S = \frac{\int x dS}{S} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$

1	2	3
4	Yarim shar hajmi 	$x_s=0, y_s=0, z_s = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV,$ $r=\sqrt{R^2-z^2},$ $dV=\pi r^2 dz=\pi(R^2-z^2) dz,$ $\int_{-R}^R 2\pi(R^2-z^2) dz = \int_{(V)} z dV,$ $V=\frac{2}{3}\pi R^3, z_s=\frac{3}{8}R.$
5	Konus hajmi 	$Vz_s = \int_{(V)} z dV, V=\frac{1}{3}Sh,$ $dV=\frac{S}{h^2}z^2 dz,$ $\frac{1}{3}Shz_s = \int_0^h \frac{Sz^3}{h^2} dz, z_s=\frac{3}{4}h.$
6	Piramida hajmi 	$SS_1=\frac{1}{3}SE=\frac{1}{4}S_1E.$

31 - §. Masalalar

9-masala. ABD kronshteyn AB va BD sterjenlardan tashkil topgan. Ikkala sterjen og'irligi bir xil $BD=20\text{ sm}$, $\alpha=60^\circ$. Kronshteyn og'irlik markazining absissasi $x_s=0$ bo'lishi uchun AB uzunligi qanday bo'lishi topilsin (64-rasm).



64-rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 64-rasmdagidek tanlaymiz. ABD kronshteyn og'irlik markazi (28.6) formuladan foydalanib aniqlanadi.

$$x_s = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}, \quad y_s = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2}{l_1 + l_2}. \quad (31.1)$$

Masala shartiga ko'ra $x_s = 0$ bo'lishi so'ralgan. Shuning uchun (31.1) formulaning birinchisidan foydalanamiz.

Tekshiralayotgan masalada:

$$x_1 = \frac{BD}{2}, \quad x_2 = -\frac{AB}{2} \cos \alpha, \quad l_1 = BD = 20\text{ sm}, \quad l_2 = AB.$$

Natijada:

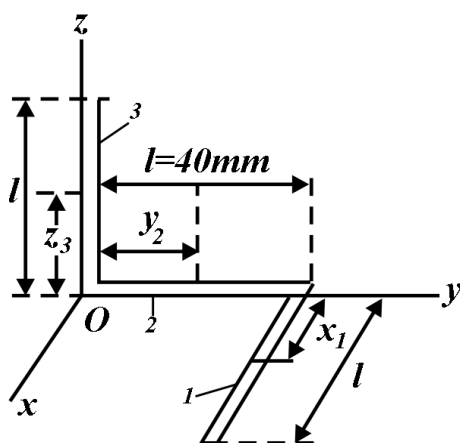
$$x_s = \frac{l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{2} \cdot l_2 \cos \alpha}{l_1 + l_2} = 0.$$

Son qiymatlarni qo'ysak,

$$20 \cdot 10 - \frac{l_2^2}{4} = 0, \quad l_2^2 = 800, \quad l_2 = 20\sqrt{2} = 28,2\text{ sm}$$

kelib chiqadi.

10-masala. Uzunligi 120 sm bo'lgan to'g'ri burchak ostida egilgan (65-rasm) simning og'irlik markazi aniqlansin. O'lchovlar rasmda berilgan.



65 - rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 65-rasmdagidek tanlaymiz. Simning og'irlik markazi (28.6) ga asosan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \\ y_s &= \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \\ z_s &= \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3}{l_1 + l_2 + l_3}. \end{aligned} \quad (31.2)$$

65-rasmdan:

$$\begin{aligned} x_2 = x_3 = y_1 = y_3 = z_1 = z_2 &= 0, \\ x_1 = y_2 = z_3 &= 20\text{ mm}. \end{aligned} \quad (31.3)$$

(31.3) ni (31.2) ga qo'ysak:

$$x_s = 0,67\text{ sm}, \quad y_s = 2\text{ sm}, \quad z_s = 0,67\text{ sm}.$$

11-masala. Radiusi $R_1 = a$ boʻlgan chorak aylana bilan radiusi $R_2 = \frac{a}{2}$ boʻlgan aylana chegaralangan yuzaning ogʻirlik markazi aniqlansin (66-rasm).

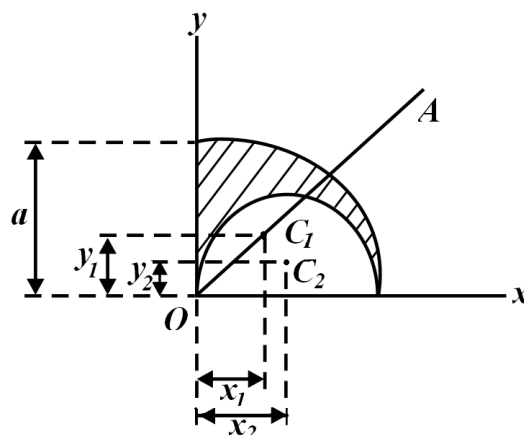
Yechish. Sanoq sistemasini 66-rasmdagidek tanlaymiz. Chorak doira yuzining ogʻirlik markazi C_1 simmetriya oʻqi OA da yotadi:

$$x_1 = y_1 = OC_1 \cdot \cos 45^\circ.$$

30-§ ga asosan:

$$OC_1 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \quad \text{yoki} \quad OC_1 = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}.$$

$$\text{Natijada} \quad x_1 = y_1 = \frac{4a}{3\pi}. \quad (31.4)$$



66 – rasm

Yarim doira ogʻirlik markazining koordinatalari quyidagicha boʻladi:

$$x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot R_2 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{3\pi}. \quad (31.5)$$

Endi chorak aylana bilan yarim aylana chegaralangan yuza ogʻirlik markazini aniqlaymiz. U (28.4) ga asosan:

$$x_s = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \quad y_s = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}. \quad (31.6)$$

bunda

(31.7)

$$S_1 = \frac{\pi R_1^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

(31.4), (31.5), (31.7) ni (31.6) ga qoʻysak, $x_s = 0,349a$ (uzun.bir.), $y_s = 0,636a$ (uzun.bir.) kelib chiqadi.

Nazorat savollari

1. Ikkita parallel kuch qanday qoʻshiladi?
2. Birqancha parallel kuchlar qanday qoʻshiladi?
3. Jismning ogʻirlik markazi nima?
4. Uchburchak va trapetsiya yuzining ogʻirlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Aylana yoyi uzunligi ogʻirlik markazini aniqlash formulasini yozing.
6. Doira boʻlagi ogʻirlik markazini aniqlash formulasini yozing.
7. Murakkab jismlar ogʻirlik markazi qanday topiladi?
8. Ogʻirlik markazini aniqlash usullarini taʼriflang.

IKKINCHI BO`LIM

K I N E M A T I K A

Asosiy tushinchalar

Jismning vaqt o'tishi bilan o'z holatini jism bilan bog'langan sanoq sistemasiga nisbatan uzluksiz ravishda o'zgartirishi *mexanik harakat* deyiladi.

Kinematikada jism harakati faqat geometrik nuqtayi nazardan, ya'ni unga ta'sir etuvchi kuchlar e'tiborga olinmay tekshiriladi. Harakat tushunchasi fazo, vaqt va harakatlanuvchi jism tushunchalariga bog'liq. Istalgan vaqtda jismning fazodagi holatini aniqlash mumkin bo'lgandagina uning harakati ma'lum bo'ladi. Mexanikada fazo uch o'lchovli deb qaraladi. Vaqt hech qanday sanoq sistemasiga bog'lanmasdan, har qanday sistema uchun bir xil va harakatning nisbiyligidan qat'i nazar deb hisoblanadi. Uni uzluksiz o'zgaruvchi deb, t bilan belgilanadi. Xalqaro (SI) sistemasida vaqtning o'lchov birligi sekund, masofaning o'lchov birligi esa metr deb qabul qilingan.

VIII BOB. MODDIY NUQTA KINEMATIKASI

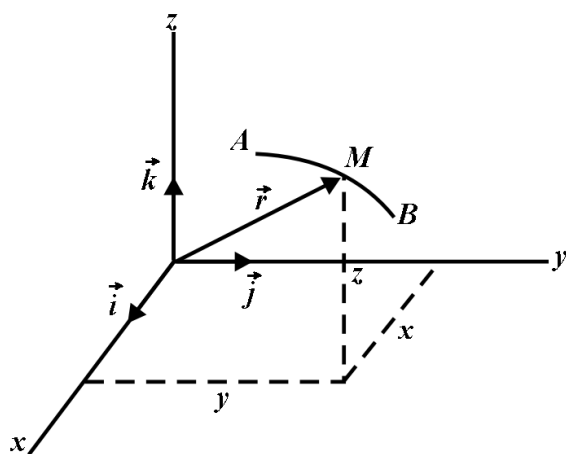
32 -§. Moddiy nuqta harakatining berilish usullari

Moddiy nuqtaning harakati davomida fazoda qoldirgan izi *trayektoriya* deb ataladi. Trayektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, *to'g'ri chiziqli harakat*; egri chiziqdan iborat bo'lsa, *egri chiziqli harakat* deyiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning holatini aniqlash ko'rsatilgan bo'lsa, nuqta harakati berilgan deb hisoblanadi.

Moddiy nuqta harakati 4 ta usulda beriladi:

1) vektor; 2) koordinata; 3) tabiiy; 4) qutb.

Biz, asosan, uchta usul bilan tanishib chiqamiz.



67-rasm

1. Vektor usuli. Faraz qilaylik, M nuqta $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan AB trayektoriya bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. O va M nuqtalarni tutashtiruvchi vektor $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ nuqtaning *radius-vektori* deyiladi (67-rasm)

Vaqt o'tishi bilan M nuqta holati o'zgarib boradi, natijada uning radius-vektori ham miqdor va yo'nalishi jixatidan o'zgaradi. Agar M nuqtaning radius-vektori vaqt funksiyasi sifatida berilgan bo'lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan vaqt uchun aniqlangan bo'ladi,

ya'ni:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (32.1)$$

(32.1) tenglama moddiy nuqta harakatining vektor usulida berilishidir.

2. Koordinata usuli. Chizma geometriyadan, matematikadan ma'lumki, M nuqta holatini x, y, z Dekart koordinatalar orqali aniqlash mumkin. Nuqta harakatlanganda koordinatalar vaqt o'tishi bilan o'zgaradi, ya'ni ular vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \quad (32.2)$$

(32.2) ma'lum bo'lsa, nuqtaning fazodagi holatini istalgan paytda aniqlash mumkin.

(32.2) tenglama moddiy nuqta harakatining koordinata usuldagi berilishidan iborat.

(32.2) dan vaqtni yo'qotsak, nuqtaning trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi. M nuqta harakati Oxy tekisligida sodir bo'lsa, (32.2) quyidagicha bo'ladi:

$$x=x(t), \quad y=y(t). \quad (32.3)$$

Nuqta harakati to'g'ri chiziqli bo'lsa, harakat yo'nalishini Ox o'qi deb qarasak, (32.2) ni

$$x=x(t) \quad (32.4)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

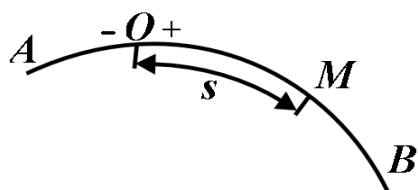
Agar $Oxyz$ koordinata sistemasi o'qlarining birlik yo'naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ desak, M nuqta radius-vektorini quyidagicha yozish mumkin (67-rasm):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (32.5)$$

(32.5) tenglama nuqta harakatining vektor usulda berilishi bilan nuqta koordinatalari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

3. Tabiiy usul. Faraz qilaylik, M nuqta ma'lum AB trayektoriya bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsin (68-rasm). Trayektoriyadagi biror O nuqtani sanoq markazi deb, musbat va manfiy yo'nalishlarni belgilab olamiz. U holda nuqtaning trayektoriyadagi holati s egri chiziqli koordinata bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$s = s(t). \quad (32.6)$$



68-rasm

(32.6) tenglama M nuqtaning trayektoriya bo'ylab harakat qonuni yoki harakatni tabiiy usulda berilishidan iborat.

Demak, M nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun: 1) trayektoriya; 2) trayektoriyadagi sanoq markazi; 3) harakat yo'nalishi; 4) trayektoriya bo'ylab harakat qonuni berilishi kerak. Ko'rinish turibdiki, trayektoriya ma'lum bo'lsa, qo'yilgan masalani hal etishda bu usuldan foydalanish qulay.

33 -§. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilishidan tabiiy usuldagi berilishiga o'tish

Faraz qilaylik, moddiy nuqta harakati (32.2) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin, ya'ni:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \quad (*)$$

Matematikadan ma'lumki:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (33.1)$$

(*) ni vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dz = \dot{z} dt. \quad (33.2)$$

(33.2) ni (33.1)ga qo'ysak:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (33.3)$$

$t=0$ va $t=t$ oraliqda (33.3) ni integrallasak,

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = s(t) \quad (33.4)$$

kelib chiqadi.

Demak, (*) dan foydalanib, nuqtaning trayektoriya bo'yicha tenglamasini aniqladik. Boshqacha aytganda nuqta harakati koordinata usulida berilganda uning tabiiy usuldagi berilishini keltirib chiqardik.

34 - §. Moddiy nuqtaning tezlik va tezlanish vektori

Moddiy nuqtaning holati va harakat yo'nalishining o'zgarishini uning tezligi belgilab beradi.

Moddiy nuqta harakati vektor usulda berilganda tezlik qanday aniqlanishini ko'rib chiqaylik. Aytaylik, $t=t_0$ da tekshirilayotgan nuqta M_0 da bo'lib, radius-vektori

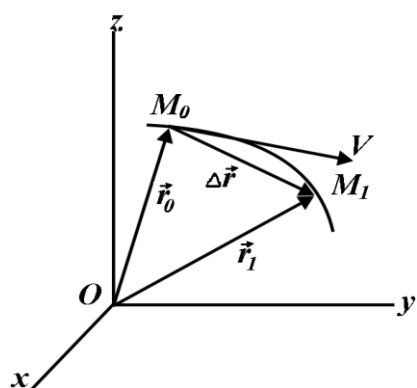
$\vec{r}_0$; $t=t_1$ da nuqta M_1 da, radius-vektori $\vec{r}_1$ bo'lsin.

Bu holda $t_1 - t_0 = \Delta t$ vaqt o'zgarishi, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta \vec{r}$ esa radius-vektor o'zgarishi bo'ladi.

Radius-vektor o'zgarishini vaqt o'zgarishiga nisbati nuqtaning o'rtacha tezlik vektorini beradi (69-rasm):

$$\vec{V}_{or} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (34.1)$$

(34.1) dan $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, nuqtaning haqiqiy tezlik vektori kelib chiqadi:



69-rasm

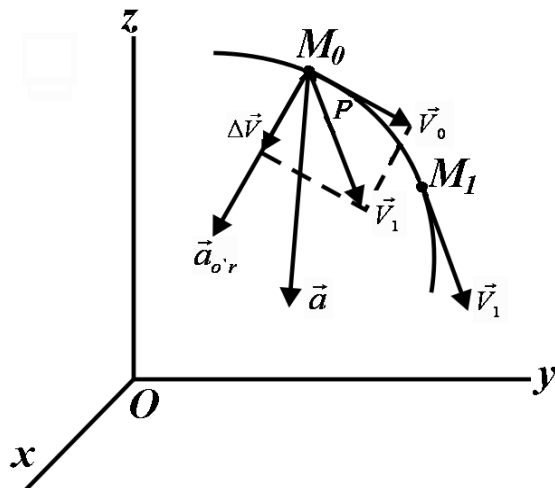
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad \text{yoki} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (34.2)$$

(34.2) dan ko`ramizki, moddiy nuqtaning tezlik vektori uning radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Δt nolga intilganda $\vec{V}_{o'r}$ M_0 nuqta atrofida aylanib urinmaga yaqinlashadi. Natijada tezlik vektori trayektoriyaga urinma bo'lib, harakat yo'nalishi tomon yo'naladi. Tezlik xalqaro SI sistemada m/s da o'lchanadi.

Moddiy nuqta tezligi yo'nalishi va miqdori qanchalik tez o'zgarishini aniqlaydigan kattalik uning tezlanishidir.

Faraz qilaylik, tekshirilayotgan nuqta $t = t_0$ da M_0 da bo'lib, uning tezligi $\vec{V}_0$; $t = t_1$ da M_1 da bo'lib, tezligi $\vec{V}_1$ bo'lsin. Tezlik o'zgarishi $\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_0$ ni aniqlash uchun M_1 nuqta tezligi $\vec{V}_1$ ni M_0 nuqtaga, mazkur tezlikka parallel qilib ko'chiramiz, so'ngra parallelogramm qursak, shu parallelogramm bir tomoni $\Delta \vec{V}$ dan iborat bo'ladi (70-rasm).



70-rasm

Nuqtaning o'rtacha tezlanish vektori quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{a}_{o'r} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (34.3)$$

(34.3) ning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti haqiqiy tezlanish vektorini beradi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (34.4)$$

Demak, moddiy nuqtaning tezlanish vektori tezlik vektoridan vaqt bo'yicha birinchi, radius-vektoridan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Agar nuqta bir tekislikda yotuvchi chiziq bo'ylab harakatlansa, $\vec{a}$ trayektoriya tekisligida yotib, trayektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi.

Agar nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqdan iborat bo'lsa, $\vec{a}_{o'r}$ parallelogramm tekisligi P da yotadi. $\Delta t \rightarrow 0$ bo'lganda, ya'ni, M_1 nuqta M_0 ga yaqinlashganda, P tekislikning egallagan holati yopishma tekislik deyiladi. Demak, M nuqtaning tezlanish vektori yopishma tekislikda yotadi va trayektoriyaning botiq tomoniga yo'naladi (70-rasm). SI sistemada tezlanish m/s^2 da o'lchanadi.

35 - §. Moddiy nuqtaning tezlik va tezlanishini koordinata usulida aniqlash

Moddiy nuqta harakati Dekart koordinatalarida (32.2) tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Tezlik vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda V_x , V_y , V_z desak:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}. \quad (35.1)$$

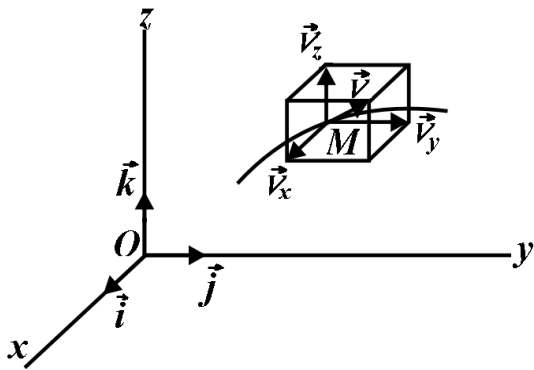
(34.2) ga ko'ra (32.5) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}. \quad (35.2)$$

(35.2) bilan (35.1) ni solishtirsak,

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (35.3)$$

kelib chiqadi.



71-rasm

Demak, tezlik vektorini koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi nuqtaning mazkur o'qdagi mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Tezlik vektori proyeksiyalari mos ravishda Ox , Oy , Oz o'qlariga parallel (71-rasm).

$\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ larni parallelogramm usulini qo'llab qo'shsak, $\vec{V}$ tezlik $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ larga qurilgan parallelepiped diagonali bo'ylab yo'naladi.

Matematikadan ma'lumki:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (35.4)$$

Tezlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (35.5)$$

Tekshirilayotgan nuqta tezlanish vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini a_x , a_y , a_z desak:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (35.6)$$

(34.4) ga ko'ra (35.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}. \quad (35.7)$$

(35.6) bilan (35.7) ni taqqoslasak,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

yoki

$$a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z} \quad (35.8)$$

kelib chiqadi.

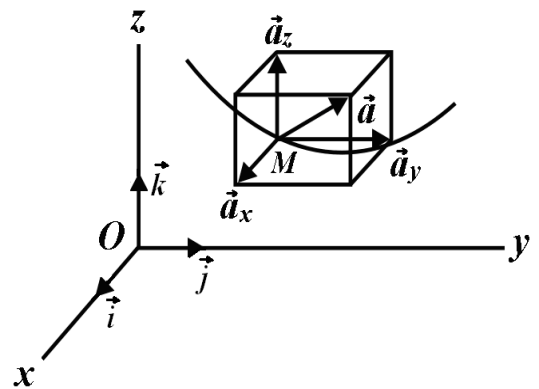
Nuqta tezlanishini proyeksiyalari (35.8) ma'lum bo'lsa, tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (35.9)$$

formuladan, yo'naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a} \quad (35.10)$$

formulalardan aniqlanadi (72-rasm).



72-rasm

36 - §. Tabiiy usulda berilgan nuqta harakatining tezligini aniqlash

Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda (32.6) tenglama bilan berilgan. Nuqtaning radius-vektori $\vec{r}$ ni egri chiziqli koordinata s ning funksiyasi deb qarash mumkin, ya'ni $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Bu holda $\vec{r}$ vaqtning murakkab funksiyasi bo'ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

bu yerda

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

trayektoriyaga o'tkazilgan urinmaning birlik vektorini beradi. Bu vektorni $\vec{\tau}$ deb belgilaymiz.

$$\text{Natijada} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \quad (36.1)$$

hosil bo'ladi. Haqiqatdan ham, biz bilamizki,

$$\vec{V} = V \vec{\tau}. \quad (36.2)$$

Birlik vektori $\vec{\tau}$ doimo sanoq boshidan nuqtagacha bo'lgan masofaning o'sishi tomon yo'naladi.

(36.1) bilan (36.2) ni solishtirsak,

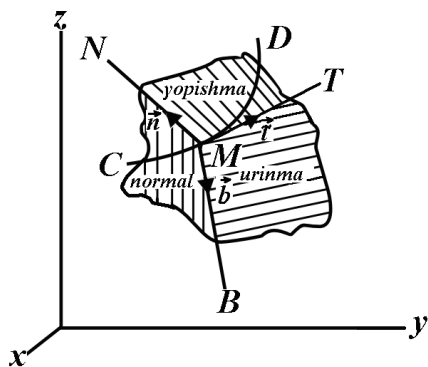
$$V = \frac{ds}{dt} \quad (36.3)$$

kelib chiqadi.

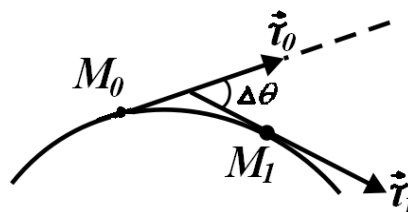
Demak, nuqta tezligining algebraik qiymati uning egri chiziqli koordinatasidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilaga teng.

37 - §. Tabiiy koordinatalar sistemasi. Chiziqling egriligi. Egrilik radiusi

Qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan M nuqta bir tekislikda yotmaydigan CD egri chiziq bo'ylab harakat qilsin. (73-rasm).



73- rasm



74 – rasm

M nuqtadan egri chiziqli koordinataning o'sishi tomon yo'nalgan MT urinmani o'tkazamiz. MT ga perpendikular qilib o'tkazilgan tekislik normal tekislik deb atalib, unda bir qancha normallar yotadi. Ulardan ikkitasi ahamiyatga ega. Biri MT ga perpendikular bo'lib, chiziqling botiq tomoniga qarab yo'nalgan bosh normal MN , ikkinchisi esa MT va MN ga perpendikular bo'lgan binormal MB dan iborat.

MT , MN , MB yo'nalishlardagi o'qlar tabiiy koordinata o'qlari deyiladi. Ularning musbat yo'nalishi o'ng sistema tashkil etadigan qilib tanlanadi. Mazkur o'qlarning birlik vektorlarini mos ravishda $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{e}$ deb belgilaymiz. $\vec{\tau}$ va $\vec{e}$ yotgan tekislik urinma, $\vec{\tau}$ va $\vec{n}$ yotgan tekislik yopishma, $\vec{n}$ va $\vec{b}$ yotgan tekislik normal tekislik deb ataladi. Bu tekisliklardan tashkil topgan uchyoqlik tabiiy uchyoqlik deyiladi. M nuqtaning trayektoriyasida bir-biriga juda yaqin bo'lgan M_0 va M_1 nuqtalardan $M_0\tau_0$ va $M_1\tau_1$ urinmalarni o'tkazamiz (74-rasm). Ular orasidagi burchakni $\Delta\theta$, M_0M_1 yoyni Δs desak,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k$$

chiziqling egriligini beradi.

Egrilikning teskari qiymati egrilik radiusi deb ataladi va u quyidagicha ifodalanadi:

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

38 - §. Moddiy nuqta tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Tezlanishni tabiiy usulda aniqlash uchun (36.2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

yoki

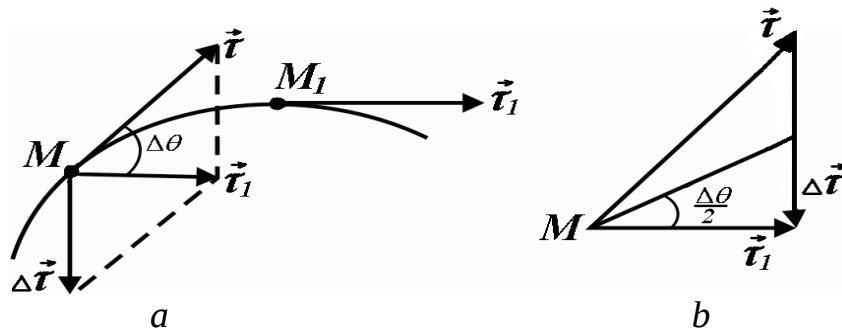
$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (38.1)$$

(38.1) dagi $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ning miqdori va yoʻnalishini aniqlash uchun uni quyidagicha

yozamiz:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s},$$

bu yerda $\Delta\vec{\tau}$ trayektoriyadagi bir-biriga yaqin boʻlgan M_0 va M_1 nuqtalardan oʻtkazilgan urinmalar birlik vektorlarining ayirmasidan iborat (75-rasm, a).



75-rasm

$|\vec{\tau}_0| = |\vec{\tau}_1| = 1$ boʻlgani uchun $\vec{\tau}, \vec{\tau}_1$ va $\Delta\vec{\tau}$ lardan tashkil topgan uchburchak tengyonli boʻladi (75-rasm, b); bu uchburchakdan:

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2}.$$

M_1 ni M_0 ga juda yaqin deb qarasak, $\Delta\theta$ juda kichik boʻladi. Bu holda $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$ ni $\frac{\Delta\theta}{2}$ bilan almashtirish mumkin, yaʼni:

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{2} \quad \text{yoki} \quad \Delta\theta = |\Delta\vec{\tau}|.$$

Natijada

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k \quad \text{yoki} \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \quad (38.2)$$

kelib chiqadi. ρ – egrilik radiusi, k – chiziqning egriligi. $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ vektor $\vec{\tau}$ ga perpendikulyar, haqiqatdan ham $\vec{\tau}$ ning kvadrati birga teng:

$$(\vec{\tau})^2 = 1.$$

Bu tenglikdan vaqt boʻyicha hosila olamiz:

$$2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0. \quad (38.3)$$

Matematikadan ma'lumki, $\vec{\tau}$ bilan $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ perpendikular bo'lgan holda (38.3) to'g'ri bo'ladi. Demak,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| \vec{n} \quad \text{yoki} \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{\rho} \vec{n}. \quad (38.4)$$

(38.4) ni (38.1) ga qo'ysak:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}. \quad (38.5)$$

Moddiy nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda a_τ , a_n , a_θ desak,

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + a_\theta \vec{\theta} \quad (38.6)$$

bo'ladi. (38.5) bilan (38.6) ni solishtirsak,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_\theta = 0 \quad (38.7)$$

kelib chiqadi.

(38.7) dan foydalanib, to'la tezlanishni aniqlash

mumkin:

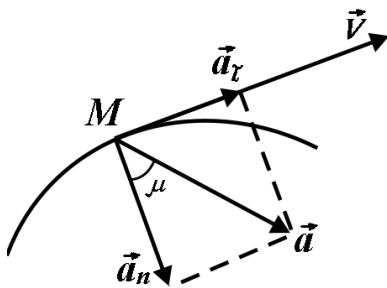
$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \quad (38.8)$$

yoki

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (38.9)$$

Urinma tezlanish $\vec{a}_\tau$ bilan normal tezlanish $\vec{a}_n$

orasidagi burchak $\text{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}$ bilan aniqlanadi (76-rasm).



76-rasm

Agar moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilib egrilik radiusini aniqlash talab etiladigan bo'lsa, tezlik ifodasini Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozamiz:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2. \quad (38.10)$$

(38.10) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$2V \frac{dV}{dt} = 2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt} + 2V_z \frac{dV_z}{dt},$$

bu yerdan

$$Va_\tau = V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z$$

yoki

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V} \quad (38.11)$$

kelib chiqadi.

$$(38.8) \text{ ga asosan: } a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad (38.12)$$

bunda

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

(38.12) ni (38.7) ning ikkinchisiga qo'ysak, chiziqlarning egirlik radiusi

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} \quad (39.13)$$

kelib chiqadi.

39 - §. Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari

Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari (38.5) formuladan foydalanib aniqlanadi.

1. Agar nuqta harakati davomida $\vec{a} = 0$, ya'ni $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo'lsa, $\frac{dV}{dt} = 0$, $\frac{V^2}{\rho} = 0$ bo'ladi. Bundan $V = \text{const}$, $\rho = \infty$ kelib chiqadi. Bu holda nuqta harakati to'g'ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo'ladi.

2. Agar $a_\tau \neq 0$, $a_n = 0$ bo'lsa, nuqta tezligining yo'nalishi o'zgarmas bo'lib, moduli $v = \left| \frac{ds}{dt} \right|$ bo'ladi; $\rho = \infty$. Bu holda nuqta harakati to'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakatdan iborat.

3. Agar $a_\tau = 0$ bo'lib, $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$ bo'lsa, $V = \text{const}$ bo'ladi. Natijada moddiy nuqta egri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

Nuqtaning boshlang'ich vaqtdagi tezligi V_0 , egri chiziqli koordinatasi $s = s_0$ bo'lsin.

Bularni nazarda tutib, (38.7) ning birinчисini integrallasak,

$$s = s_0 + V_0 t \quad (39.1)$$

kelib chiqadi.

(39.1) tenglama moddiy nuqtaning egri chiziqli tekis harakati tenglamasi deb ataladi.

4. Agar $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$ bo'lsa, nuqta harakati egri chiziqli o'zgaruvchan harakatdan iborat bo'ladi. $a_\tau = 0$ bo'lgan hol tekis o'zgaruvchan harakat deyiladi. Boshlang'ich paytda $s = s_0$, $V = V_0$ deb, (38.7) ning birinчисini integrallaymiz:

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau, \quad V = a_\tau t + V_0. \quad (39.2)$$

(39.2) ni yana integrallasak:

$$s = \pm a_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0. \quad (39.3)$$

Moddiy nuqta harakati tekis o'zgaruvchan bo'lsa, (39.3) dan a_τ oldidagi musbat ishora; sekinlanuvchi bo'lsa, minus ishora olib masala hal etiladi.

40 - §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda uning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo'yicha tenglamasi, tezlik va tezlanishini aniqlash

Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda talab etiladigan kinematik elementlar quyidagi tartibda aniqlanadi:

1. Moddiy nuqtaning trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (32.2) dan vaqt chiqarib tashlanadi.
2. Trayektoriya bo'yicha tenglamasini aniqlash uchun (32.2) dan vaqt bo'yicha hosila olinib, (33.4) ga qo'yiladi.
3. (35.3), (35.4) va (35.5) dan foydalanib tezlik aniqlanadi.
4. (35.8), (35.9) va (35.10) ga asoslanib tezlanish topiladi.
5. Tezlik va tezlanish yo'nalishlari trayektoriyada ko'rsatiladi.

12-masala. Moddiy nuqta harakati

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{aligned} \quad (40.1)$$

tenglamalar bilan berilgan (x, y – metr, t – sekund hisobida). Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, shuningdek $t=1$ sekundagi nuqta tezligi hamda tezlanishi topilsin, yo'nalishlari trayektoriyada ko'rsatilsin.

Yechish. Trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (40.1) ni kvadratga ko'tarib ayiramiz:

$$x^2 - y^2 = 1. \quad (40.2)$$

(40.2) formula $x=1, y=0$ nuqtadan boshlanadigan giperbola o'ng tarmog'ining yuqori qismidan iborat (77-rasm).

$t = 1$ sekundda: $x=1,54$ m, $y=1,18$ m.

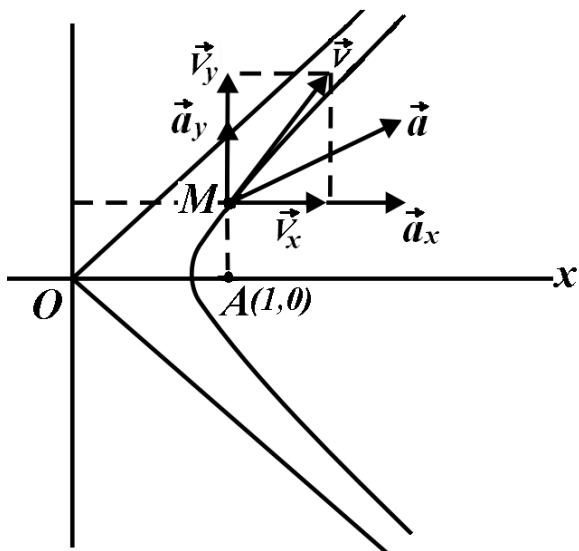
Nuqta tezligini aniqlash uchun (40.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \quad \dot{y} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

$t=1$ sekundda

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}(2,7183 - 1,3679) = 1,18 \text{ m/s},$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = 1,54 \text{ m/s};$$



77-rasm

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad V = \sqrt{1,3924 + 2,3716} = 1,94 \text{ m/s},$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{1,18}{1,94} = 0,61, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = 0,7938; \quad (\vec{V}, \vec{i}) = 52^\circ 25', \quad (\vec{V}, \vec{j}) = 37^\circ 27'.$$

Tezlanish quyidagicha bo'ladi.

$$a_x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad a_y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

$t = 1$ sekundda: $a_x = 1,54$, $a_y = 1,18$; $a = 1,94 \text{ m/s}^2$;

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = 0,7938, \cos(\vec{a}, \vec{j}) = 0,61; \quad (\vec{a}, \vec{i}) = 37^\circ 27', (\vec{a}, \vec{j}) = 52^\circ 25'.$$

Tezlik va tezlanishlar yo`nalishlari 77-rasmda ko`rsatilganidek bo`ladi.

13-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t \quad (40.3)$$

tenglamalar bilan berilgan. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo`ylab harakat qonuni aniqlansin (x, y, z – metr, t – sekund hisobida).

Yechish. (40.3) dan vaqtni yo`qotish uchun  $z = e^t$  ni (40.3) ning birinchi ikkitasiga qo`yamiz:

$$x = z \cos t, \quad y = z \sin t.$$

Bu tenglikni ikkala tomonlarini kvadratga ko`tarib qo`shamiz:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (40.4)$$

(40.4) tenglamadan ko`ramizki, trayektoriya ikkinchi tartibli doiraviy konusdan iborat ekan.

Nuqtaning trayektoriya bo`yicha tenglamasini aniqlash uchun (40.3) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^t \cos t - e^t \sin t, \\ \dot{y} &= e^t \sin t + e^t \cos t, \\ \dot{z} &= e^t, \end{aligned}$$

bundan:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3e^{2t}. \quad (40.5)$$

(40.5) ni (33.4) ga qo`ysak,

$$s = \int_0^t e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} e^t \quad (40.6)$$

kelib chiqadi.

(40.6) nuqtaning trayektoriya bo`ylab harakat qonunini ifodalaydi.

41 - §. Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda berilganda tezlik va tezlanishni topish

Tabiiy usulda tezlik va tezlanish quyidagi tartibda aniqlanadi:

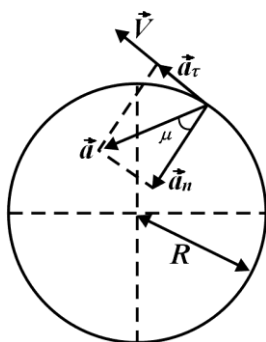
1. Tezlik miqdori (36.3) formula yordamida topiladi.
2. (38.7) va (38.9) formulalar yordamida tezlanish aniqlanadi.
3. Tezlik va tezlanish yo`nalishi rasmda ko`rsatiladi.

14-masala. Moddiy nuqta radiusi $R=2m$ bo`lgan aylana bo`ylab

$$s = 6 + 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

qonunga muvofiq harakatlanadi (s – metr, t – sekund hisobida).

Nuqtaning $t = 1$ sekunddagi tezligi va tezlanishi topilsin.



78-rasm

Yechish. (36.3) formulaga ko`ra:

$$V = 4t + t^2.$$

$$t = 1 \text{ sekundda } V = 5 \text{ m/s.}$$

(38.7) ga ko`ra:

$$a_\tau = 4 + 2t, \quad a_n = V^2/R.$$

$$t = 1 \text{ sekundda } a_\tau = 6 \text{ m/s}^2, \quad a_n = 25/2 = 12,5 \text{ m/s}^2;$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}; \quad \operatorname{tg} \mu = 0,48; \quad \mu = 25^\circ 38'.$$

(38.9) dan foydalansak: $a = \sqrt{6^2 + 12,5^2} = 13,87 \text{ m/s}^2$ kelib chiqadi (78-rasm).

15-masala. Moddiy nuqta radiusi R bo`lgan aylana bo`ylab

$$s = V_0 t - \frac{1}{2} k t^2 \quad (41.1)$$

qonunga ko`ra harakatlanadi (s , R – metr, t – sekund hisobida)

Nuqta tezlanishi, shuningdek, tezlanish qanday vaqtda k ga teng bo`lishi va bu vaqtda nuqta tezligi qanday bo`lishi aniqlansin.

Yechish. (41.1) dan vaqt bo`yicha hosila olsak:

$$V = V_0 - k t \text{ (m/s).}$$

(38.7), (38.9) ga asosan:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = k, \quad a_n = \frac{(V_0 - kt)^2}{R}, \quad a = \sqrt{k^2 - \frac{(V_0 - kt)^4}{R^2}} \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Moddiy nuqta tezlanishi k ga teng bo`lishi uchun  $a_n = 0$  bo`lishi kerak, ya'ni:

$$(V_0 - k t)^2 = 0, \quad V_0 - k t = 0,$$

bundan

$$t = \frac{V_0}{k}; \quad V = 0$$

kelib chiqadi.

42 - §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda urinma, normal tezlanish hamda egrilik radiusini aniqlash

Masala yechish tartibi quyidagicha:

1. Nuqta tezligi (35.3), (35.4) formulalar yordamida aniqlanadi.
2. (35.8), (35.9) formulalar yordamida tezlanish topiladi.
3. (38.11) dan foydalanib urinma tezlanish aniqlanadi.
4. Normal tezlanishni (38.12) dan topiladi.
5. Egrilik radiusini aniqlash uchun (38.13) formuladan foydalaniladi.

16-masala. Moddiy nuqta harakati

$$\begin{aligned}x &= 3t - 0,2 \sin(9,23t), \\ y &= 0,325 - 0,2 \cos(9,23t)\end{aligned}$$

tenglamalar bilan berilgan (x, y – metr, t – sekund hisobida).

$t = 0,054 \pi$ sekund bo'lganda trayektoriya egrilik radiusi aniqlansin.

Yechish. (35.3) va (35.4) ga asosan:

$$V_x = 3 - 0,2 \cdot 9,23 \cdot \cos(9,23t) = 3 - 1,846 \cos(9,23t),$$

$$V_y = 0,2 \cdot 9,23 \cdot \sin(9,23t) = 1,846 \sin(9,23t).$$

$t = 0,54 \pi$ sekundda

$$V_x = 3 \text{ m/s}, \quad V_y = 1,846 \text{ m/s}, \quad V = 3,52 \text{ m/s}..$$

(35.8), (35.9) formulalarga ko'ra:

$$a_x = 1,846 \cdot 9,23 \cdot \sin(9,23t) = 17 \sin(9,23t),$$

$$a_y = 1,846 \cdot 9,23 \cdot \cos(9,23t) = 17 \cos(9,23t).$$

$t = 0,054 \pi$ sekundda

$$a_x = 17 \text{ m/s}^2, \quad a_y = 0, \quad a = 17 \text{ m/s}^2.$$

(38.11) dan foydalansak:

$$a_\tau = \frac{3 \cdot 17}{5,52} = \frac{51}{3,52} = 14,5 \text{ m/s}^2.$$

Normal tezlanish esa:

$$a_n = \sqrt{289 - 210,25} = 8,87 \text{ m/s}^2.$$

Egrilik radiusini aniqlashda (38.13) dan foydalansak,

$$\rho = \frac{12,39}{8,87} = 1,39 \text{ m}$$

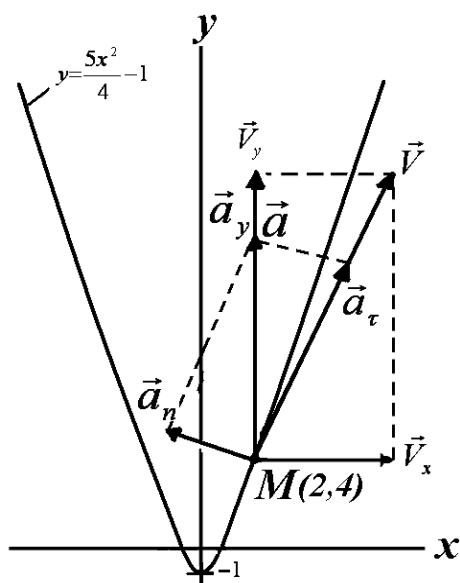
kelib chiqadi.

17-masala. Moddiy nuqta

$$\begin{aligned}x &= 2t, \\ y &= 5t^2 - 1\end{aligned} \tag{42.1}$$

tenglamalarga ko'ra harakat qiladi (x, y – metr, t – sekund hisobida).

Nuqtaning trayektoriya tenglamasi tuzilsin, $t=1$ sekunddagi tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiusi aniqlansin va ular yo'nalishi trayektoriyada ko'rsatilsin.



79-rasm

Yechish. (42.1) dan vaqt bo'yicha hosila olib, tezlik proyeksiyalarini topamiz:

$$V_x = 2, V_y = 10t. \quad (42.2)$$

$t = 1$ sekundda

$$V_x = 2, V_y = 10, V = \sqrt{4 + 100} = 10,2 \text{ m/s.}$$

(42.2) dan hosila olsak:

$$a_x = 0, a_y = 10 \text{ m/s}^2, a = 10 \text{ m/s}^2.$$

Urinma tezlanishni aniqlaymiz:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}, \quad a_\tau = \frac{2 \cdot 0 + 10 \cdot 10}{10,2} = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Normal tezlanish quyidagicha bo'ladi:

$$a_n = \sqrt{100 - 96} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Egrilik radiusi esa:

$$\rho = \frac{(10,2)^2}{4} = 26 \text{ m.}$$

(42.1) dan vaqtni yo'qotish uchun mazkur tenglamaning birinchisidan t ni topib, uni (42.1) ning ikkinchisiga qo'ysak, trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi:

$$y = \frac{5x^2}{4} - 1. \quad (42.3)$$

(42.3) dan ko'ramizki, nuqta trayektoriyasi paraboladan iborat. $t = 1$ sekunddagi barcha kinematik parametrlar yo'nalishini rasmda ko'rsatamiz (79-rasm). $t = 1$ s da nuqta koordinatalari $x = 2$ m, $y = 4$ m.

Nazorat savollari

1. Moddiy nuqtaning trayektoriya bo'yicha harakat qonuni yoki tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. Moddiy nuqta harakati qanday usullarda beriladi?
3. Moddiy nuqta harakati grafigi deganda nimani tushunasiz?
4. Nuqtaning berilgan vaqtdagi tezligining yo'nalishi qanday va miqdori nimaga teng?
5. Tekis o'zgaruvchan harakat qonuni va grafigini ta'riflang.
6. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda, trayektoriya qanday aniqlanadi?
7. Harakatdagi nuqtaning tezlik vektori bilan radius- vektori orasida qanday bog'lanish bor?
8. Moddiy nuqta tezlanishi nima? Moddiy nuqta tezlanishi vektori bilan tezlik vektori orasida qanday bog'lanish bor?
9. Moddiy nuqta tezlanishi vektori bilan radius- vektori orasida qanday munosabat bor?
10. Tezlik vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini yozing.

11. Tezlanish vektorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
12. Tezlanish yo'nalishi qanday?
13. Tezlik va tezlanish yo'naltiruvchi kosinuslari qanday aniqlanadi?
14. Urinma, normal va to'la tezlanish qanday topiladi?
15. Qanday o'qlar tabiiy koordinata o'qlari deyiladi?
16. Chiziqning egriligi nima? Egrilik radiusiga ta'rif bering.

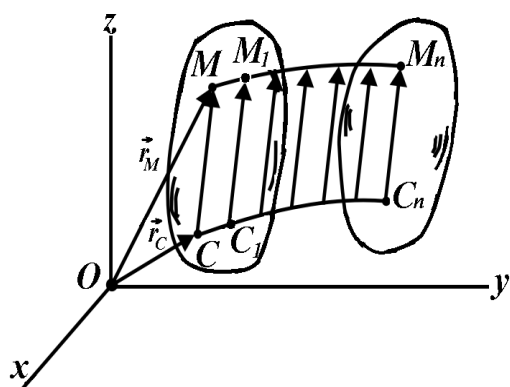
IX BOB. QATTIQ JISMNING SODDA HARAKATLARI

Jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmasdan qolsa, u absolut qattiq jism deb ataladi. Keyinchalik qattiq jism deganda absolut qattiq jism tushuniladi. Qattiq jismning sodda harakatlari uning ilgarilama va aylanma harakatlaridir.

43 - §. Qattiq jismning ilgarilama harakati

Jism harakati davrida unda olingan ixtiyoriy kesma o'z-o'ziga parallel ko'chsa, bunday harakat ilgarilama harakat deb ataladi (80-rasm). Masalan, velosiped pedalining harakati, to'g'ri uchastkada harakat qilayotgan avtomobil bortining harakati ilgarilama harakatdan iborat. Umuman ilgarilama harakatdagi jism nuqtasining trayektoriyasi egri chiziqdan iborat. Jism ilgarilama harakatining xususiyatini quyidagi teorema bilan berish mumkin.

Teorema. *Ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi, har ondagi tezliklari hamda tezlanishlari bir xil bo'ladi.*



80 – rasm

Isbot: Jism $Oxyz$ qo'zg'almas Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilama harakatda bo'lsin. Absolut qattiq jism va ilgarilama harakat ta'rifiga ko'ra jismning ixtiyoriy C nuqtasidan M nuqtasiga qarab yo'nalgan vektor $\overrightarrow{CM}$ o'zgarmas hamda $\overrightarrow{CM} \parallel \overrightarrow{C_n M_n}$ bo'ladi.

Natijada C nuqta qanday trayektoriya chizsa, $\overrightarrow{CM}$ ustidagi nuqtalar ham shunday trayektoriya chizadi (80-rasm). C va M nuqtalar radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}_C$, $\vec{r}_M$ desak:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \overrightarrow{CM}. \quad (43.1)$$

M nuqta tezligini topish uchun (43.1) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} + \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}.$$

$\overrightarrow{CM} = \text{const}$ bo'lgani uchun:

$$\frac{d\overrightarrow{CM}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{V}_M = \vec{V}_C. \quad (43.2)$$

(43.2) dan vaqt bo'yicha hosila olsak, tezlanish hosil bo'ladi:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_C}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C. \quad (43.3)$$

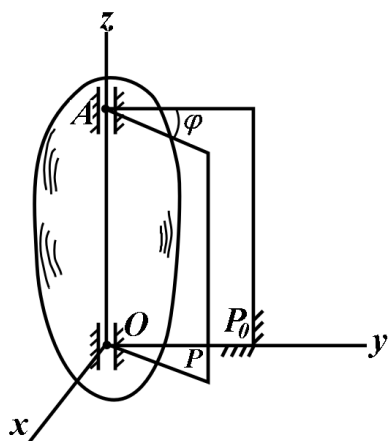
(43.2) formula ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari tezliklari bir xilliligini, (43.3) formula esa tezlanishlari bir xilliligini ko'rsatadi. Shunday qilib, teorema isbotlandi.

Demak, jism ilgarilama harakati uning ixtiyoriy nuqtasi harakati bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$\begin{aligned} x_M &= x_M(t), \\ y_M &= y_M(t), \\ z_M &= z_M(t). \end{aligned} \quad (43.4)$$

44 - §. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati. Aylanma harakat tenglamasi

Jism harakati davrida undagi ikki nuqta qo'zg'almasdan qolsa, bu harakat aylanma harakat deyiladi (81-rasm). Qo'zg'almas O va A nuqtalardan o'tuvchi o'q jismning aylanish o'qi deb ataladi.



81 – rasm

Jism aylanma harakatini tekshirish uchun qo'zg'almas P_o va jism bilan birgalikda harakatlanuvchi P tekislikni olamiz. Ular orasidagi burchak $P_o \wedge P = \varphi$ bo'lsin. Jism harakatlanganda P_o va P tekisliklar orasidagi burchak o'zgara boradi. Natijada mazkur burchak vaqtning funksiyasi bo'ladi:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (44.1)$$

(44.1) tenglama jismning burilish yoki aylanish burchagi deyiladi va u radian bilan o'lchanadi.

(44.1) tenglama qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki aylanma harakat tenglamasi deyiladi

45 - §. Aylanma harakatdagi jismning burchak tezligi va burchak tezlanishi

Faraz qilaylik, $t = t_0$ da jismning burilish burchagi φ_0 , $t = t_1$ da esa φ_1 bo'lsin. Bu holda vaqt o'zgarishi $\Delta t = t_1 - t_0$, burilish burchagi o'zgarishi $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ bo'ladi.

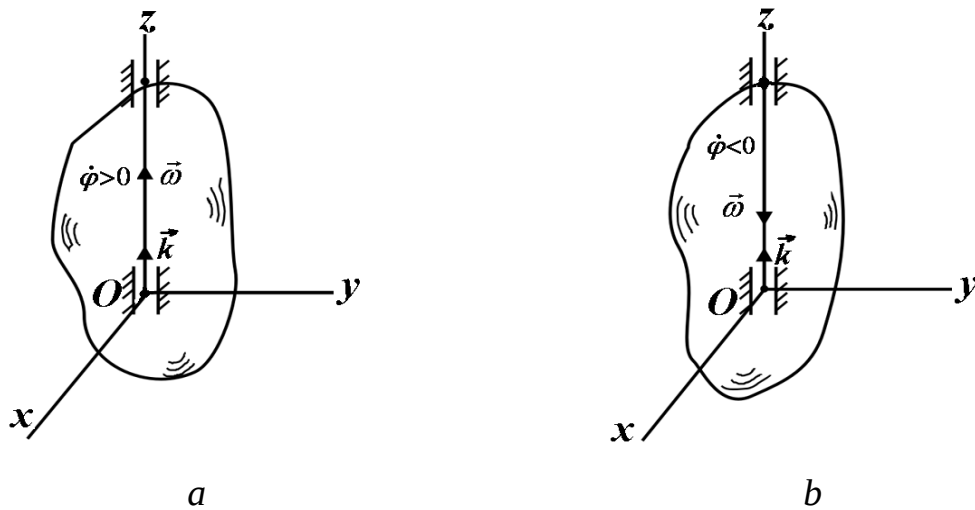
Burilish burchagi o'zgarishining vaqt o'zgarishiga nisbati jismning o'rtacha burchak tezligi deyiladi va $\omega_{o'r}$ bilan belgilanadi.

$$\omega_{o'r} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (45.1)$$

Jismning burilgan momentdagi burchak tezligini topish uchun (45.1) formuladan Δt nolga intilganda limit olamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{yoki} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (45.2)$$

Demak, jismning burchak tezligi uning burilish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Uning o'lchov birligi rad/s , yoki $1/s$ dir. Jismning burchak tezligi burilish burchagining qanchalik tez o'zgarishini va bu o'zgarish yo'nalishini aniqlaydi. Shuning uchun burchak tezligi vektor sifatida ifodalanadi. Mazkur vektorni jism aylanish o'qining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yamiz va yo'nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan turib qaralganda jism doimo soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylansin (82-rasm).



82-rasm

Oz o'qni jism aylanish o'qida olsak, burchak tezlik vektori bunday yoziladi:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}, \quad (45.3)$$

bu yerda $\vec{k}$ — Oz o'qining birlik vektori.

Umumiy holda jismning burchak tezligi vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. $t = t_0$ da burchak tezlik ω_0 , $t = t_1$ da esa ω_1 bo'lsin. Burchak tezligi o'zgarishi ($\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$) ni vaqt o'zgarishi ($\Delta t = t_1 - t_0$) ga nisbati jismning o'rtacha burchak tezlanishi deb ataladi:

$$\varepsilon_{o'r} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (45.4)$$

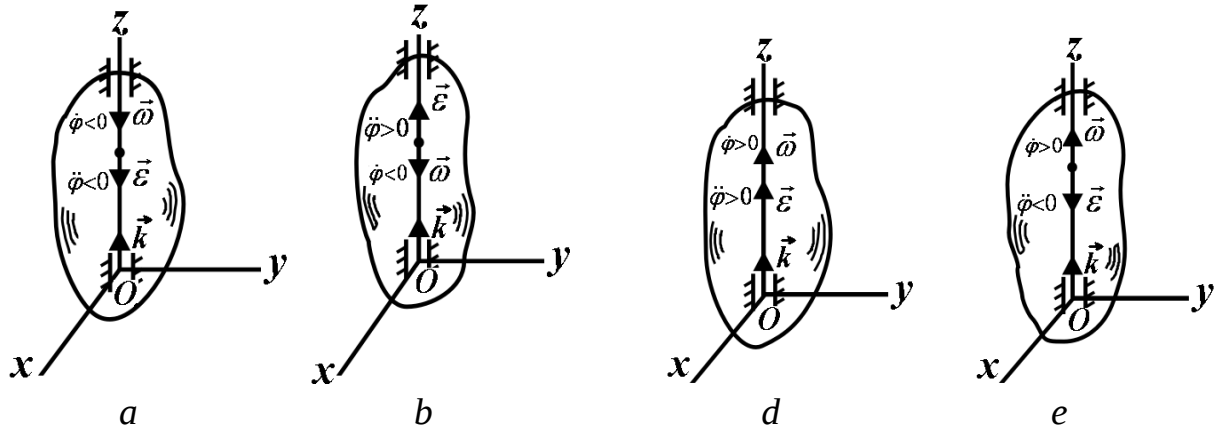
bu yerdan Δt ni nolga intiltirib limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (45.5)$$

(45.5) dan ko'ramizki, jismning burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan birinchi yoki burilish burchagidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Jism burchak tezlanishining vektori ($\vec{\varepsilon}$) ni aylanish o`qi bo`ylab tasvirlash mumkin (83-rasm):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{k} \frac{d\omega}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k} . \quad (45.6)$$



83-rasm

Jism burchak tezlanishining o`lchov birligi  $rad/s^2$  yoki  $1/s^2$  bo`ladi. Jism aylanma harakatining xususiy hollari quyidagilardan iborat:

1. Agar burchak tezligi ($\omega = const$) o`zgarmas bo`lsa, jism harakati tekis aylanma harakatdan iborat bo`ladi. Bu holda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = const ,$$

bundan

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (45.7)$$

kelib chiqadi.

(45.7) tenglama tekis aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar $\varphi_0 = 0$ bo`lsa,

$$\varphi = \omega t , \quad \omega = \frac{\varphi}{t} \quad (45.8)$$

bo`ladi.

Texnik masalalarni yechishda ko`pincha jismning 1 minutdagi aylanish soni  $n$  berilgan bo`ladi. Bu holda $\varphi = 2\pi n$, $t = 60s$ bo`lib,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (45.9)$$

bo`ladi.

Ba`zi bir masalalarda ixtiyoriy t_1 vaqtdagi aylanish sonini topish talab etiladi. Bu holda aylanish soni N bilan belgilanib, u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\varphi = 2\pi N , \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} . \quad (45.10)$$

2. Agar burchak tezlanishi ($\varepsilon = const$) o`zgarmas bo`lsa, jism harakati tekis o`zgaruvchan harakatdan iborat bo`ladi. Bu holda:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = const ,$$

bundan
$$\omega = \varepsilon t + \omega_0, \quad \varphi = \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t \quad (45.11)$$

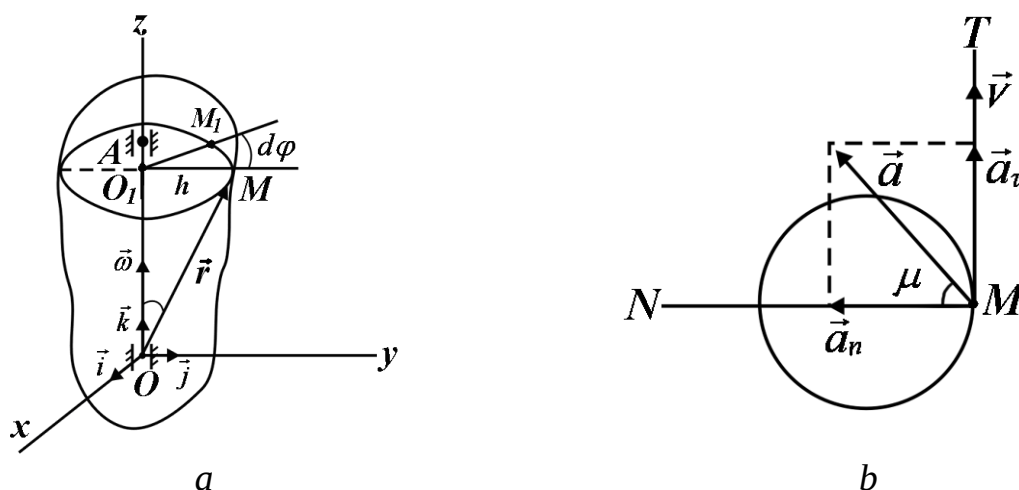
kelib chiqadi.

(45.11) ning ikkinchi tenglamasi tekis o'zgaruvchan aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar harakat tekis tezlanuvchan bo'lsa, masalani hal etishda ε oldidagi ishora musbat; tekis sekinlanuvchan bo'lsa, ε oldidagi ishora manfiy deb olinadi (83-rasm; b,e).

Jism harakati tekis tezlanuvchan bo'lganda burchak tezligi va burchak tezlanishining ishorasi bir xil bo'ladi (83-rasm; a, d).

46 - §. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi va tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Faraz qilaylik, jism Oz o'qi atrofida ω burchak tezligi bilan aylanayotgan bo'lsin. Jismning aylanish o'qida yotmaydigan nuqtalar trayektoriyalari aylanalardan iborat bo'ladi. Mazkur aylanalar markazi aylanish o'qida yotadi. Jismning ixtiyoriy M nuqtasi tezligini aniqlaymiz. (84-rasm)



84-rasm

M nuqta chizgan aylana radiusi $h = O_1M$; $ds = MM_1$.

Matematikadan ma'lumki: $ds = h d\varphi$. (46.1)

(46.1) ning ikki tomonini dt ga bo'lamiz: $\frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$,

bu yerda $\frac{ds}{dt} = V$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Natijada $V = \omega \cdot h$ (46.2)
kelib chiqadi.

Demak, aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi uning burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa ko'paytmasiga teng. Ixtiyoriy nuqta tezligi *chiziqli tezlik* deb ataladi.

Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishini urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat deb qarash mumkin:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt} h; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{\rho},$$

bu yerda
$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \quad \rho = h.$$

Shuning uchun

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot h, \quad a_n = \omega^2 \cdot h, \quad a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (46.3)$$

bo'ladi.

Demak, chiziqli tezlik, urinma, normal va to'la tezlanishlarning tabiiy usulda aniqlanishi mos ravishda (46.2) va (46.3) formulalardan iborat.

84-rasm, b-dan :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_{\tau}|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (46.4)$$

(46.4) dan ko'ramizki, burchak tezligi bilan burchak tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lgani sababli tezlanish bilan normal tezlanish (radius) orasidagi burchak μ o'zgarmasdan qoladi. Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining chiziqli tezligi hamda tezlanishi mazkur nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional ravishda o'zgaradi.

47 - §. Chiziqli tezlik va tezlanish vektori

Jism ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorini $\vec{r}$ bilan belgilaymiz (84-rasm, a) $\triangle OO_1 M$ dan:

$$\sin(\vec{\omega}, \wedge \vec{r}) = \frac{h}{r},$$

$$h = r \cdot \sin(\vec{\omega}, \wedge \vec{r}). \quad (47.1)$$

(47.1) ni (46.2) ga qo'yamiz: $V = \omega r \sin(\vec{\omega}, \wedge \vec{r})$,

bundan

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (47.2)$$

kelib chiqadi.

Demak, chiziqli tezlik vektori jism burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqta radius-vektorining vektor ko'paytmasiga teng.

Chiziqli tezlanish vektorini aniqlash uchun (47.2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt},$$

bunda
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}.$$

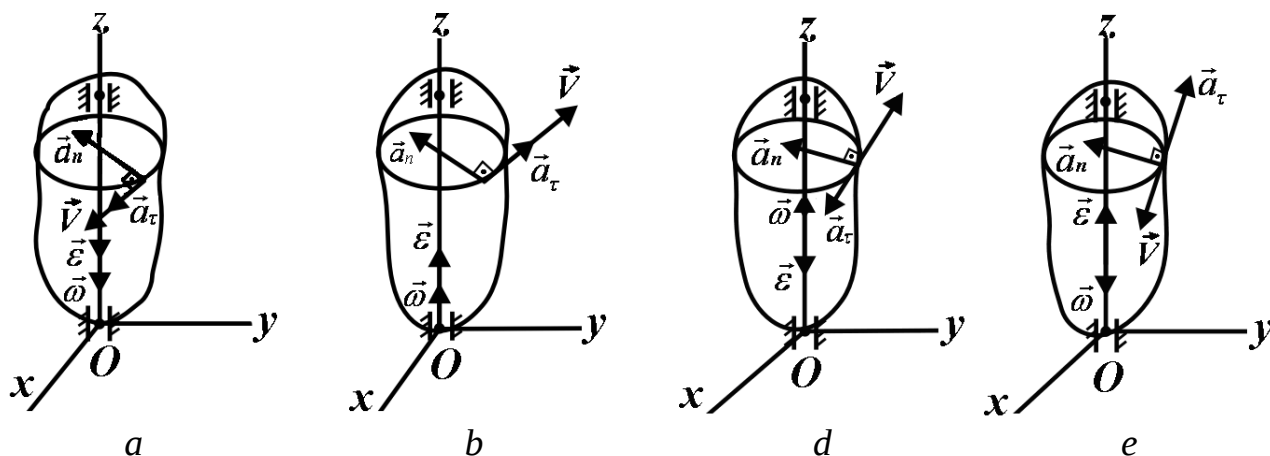
Natijada

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (47.3)$$

(47.3) formulada:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V} \quad . \quad (47.4)$$

Demak, (47.3) chiziqli tezlanish vektorini, (47.4) ning birinchisi urinma (tangensial) tezlanish va ikkinchisi esa normal (markazga intilma) tezlanish vektorini ifodalaydi. Mazkur vektorlar yo`nalishi 85-rasmda ko`rsatilgan.

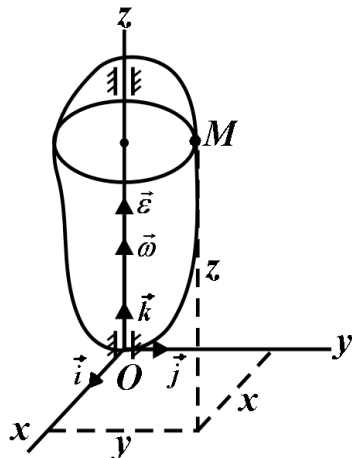


85-rasm

48 - §. Chiziqli tezlik va tezlanishni koordinata usulida aniqlash.

Faraz qilaylik, jism Oxyz Dekart koordinata sistemasining Oz o`qi atrofida aylanma harakat qilayotgan bo`lsin (86-rasm).

Jism ixtiyoriy M nuqtasining koordinatlarini x, y, z; chiziqli tezlikning Ox, Oy, Oz o`qlaridagi proyeksiyalarini V_x, V_y, V_z ; burchak tezligi proyeksiyalarini $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ desak, (47.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:



86-rasm

yoki

$$V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Bu yerda $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – mos ravishda Ox, Oy, Oz o`qlarning birlik vektorlari.

Natijada
bundan

$$V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \vec{i}(-\omega y) + \vec{j}\omega x,$$

$$V_x = -\omega y, V_y = \omega x, \quad V_z = 0; \quad V = \omega \sqrt{y^2 + x^2}. \quad (48.1)$$

Chiziqli tezlanishning urinma va normal tuzuvchilarini quyidagicha yozamiz:

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_{\tau x} \vec{i} + \vec{a}_{\tau y} \vec{j} + \vec{a}_{\tau z} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_n = a_{nx} \vec{i} + a_{ny} \vec{j} + a_{nz} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Bu yerda $a_{\tau x}, a_{\tau y}, a_{\tau z}$ — urinma; a_{nx}, a_{ny}, a_{nz} — normal, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ — burchak tezlanishning mos ravishda Ox, Oy, Oz o`qlaridagi proyeksiyalari bo`lib, $\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = \varepsilon$.

Natijada:

$$\vec{a}_{\tau x} \vec{i} + \vec{a}_{\tau y} \vec{j} + \vec{a}_{\tau z} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

$$a_{nx} \vec{i} + a_{ny} \vec{j} + a_{nz} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned} a_{\tau x} &= -\varepsilon y, a_{\tau y} = \varepsilon x, a_{\tau z} = 0, \\ a_{nx} &= -\omega V_y, a_{ny} = \omega V_x, a_{nz} = 0 \end{aligned} \quad (48.2)$$

kelib chiqadi.

(48.1) ni (48.2) ga qo`ysak:

$$a_{\tau x} = -\varepsilon y, a_{\tau y} = \varepsilon x; a_{nx} = -\omega^2 x, a_{ny} = -\omega^2 y. \quad (48.3)$$

(48.3) dan foydalanib, chiziqli tezlanish proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$a_x = a_{\tau x} + a_{nx} = -\varepsilon y - \omega^2 x, a_y = a_{\tau y} + a_{ny} = \varepsilon x - \omega^2 y. \quad (48.4)$$

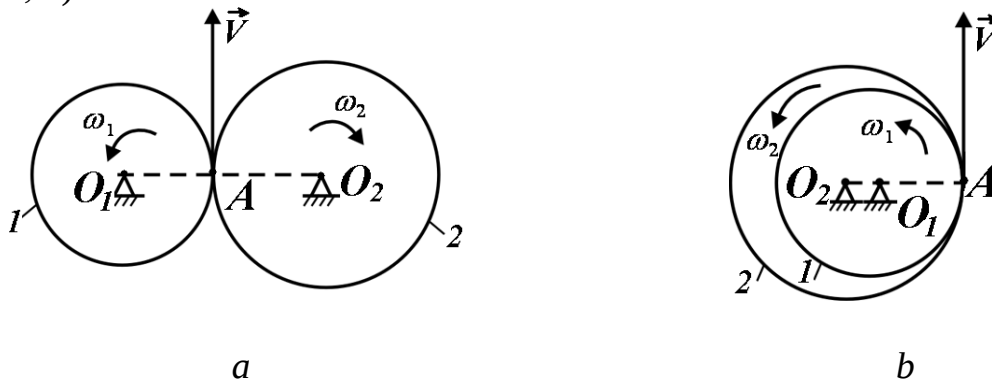
Chiziqli tezlanish miqdori esa

$$a = \sqrt{(-\varepsilon y - \omega^2 x)^2 + (\varepsilon x - \omega^2 y)^2} \quad (48.5)$$

formuladan foydalanib aniqlanadi.

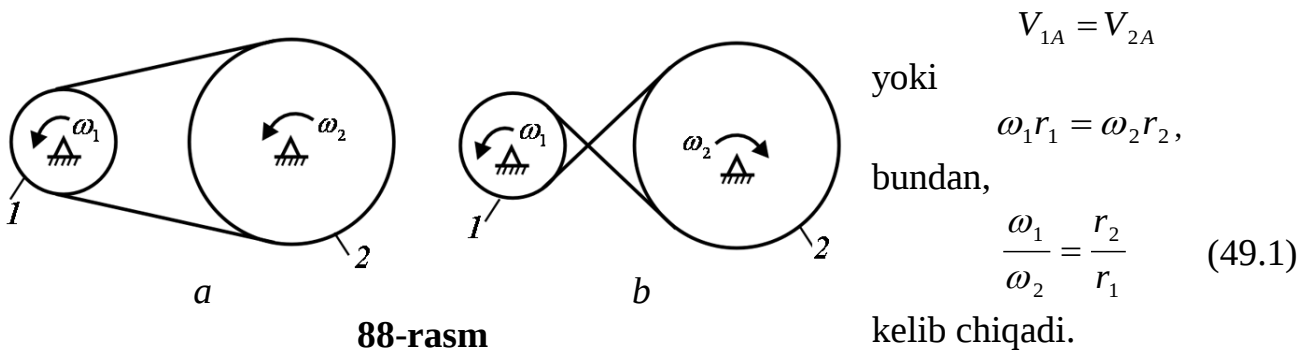
49 - §. Aylanma harakatlarni bir jismdan ikkinchi jismga uzatish.

Radiuslari r_1 va r_2 bo'lgan tishli g'ildiraklar bir-biri bilan tishlashgan bo'lsin (87-rasm; a, b).



87-rasm

Birinchi g'ildirakni yetakchi, ikkinchisini esa yetaklanuvchi deb faraz qilaylik. Ikkala g'ildiraklarning bir-biriga tegib turgan nuqtalarining tezligi miqdor va yo'nalishi jihatidan bir xildir:



88-rasm

(49.1) munosabat g'ildiraklar harakati uzatish tasmalari orqali bo'lganda ham o'rinlidir (88-rasm; a, b).

(49.1) dan ko'ramizki, g'ildiraklar burchak tezliklarining nisbati radiuslarining nisbatiga teskari proporsional ekan.

G'ildirak tishlari tashqi tomondan tishlashgan (87-rasm, a) bo'lsa yoki uzatma tasmalar ayqash bo'lsa (88-rasm, b), ular har xil tomonga aylanadi. Agar g'ildiraklar ichki tomondan tishlashgan (87-rasm, b) bo'lsa yoki uzatma tasmalar ayqash bo'lmasa (88-rasm, a), ular bir tomonga aylanadi.

G'ildiraklar burchak tezliklarining nisbati tishlar soni z_1, z_2 yoki aylanish soni n_1, n_2 orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (49.2)$$

Yetakchi g'ildirak burchak tezligini yetaklanuvchi g'ildirak burchak tezligiga nisbati *uzatish soni* deb ataladi:

$$i_{1,2} = \omega_1 / \omega_2 \quad (49.3)$$

87-rasm, *b* va 88-rasm, *a* dagi g'ildiraklar uchun uzatish soni musbat; 87-rasm, *a* va 88-rasm, *b* dagi g'ildiraklar uchun uzatish soni manfiy bo'ladi.

Tishlashgan g'ildiraklar n (bir necha) juft bo'lsa, umumiy uzatish soni har bir juft g'ildirak uzatish sonlarining ko'paytmasiga teng:

$$i_{1,n} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot \dots \cdot i_{n-1,n},$$

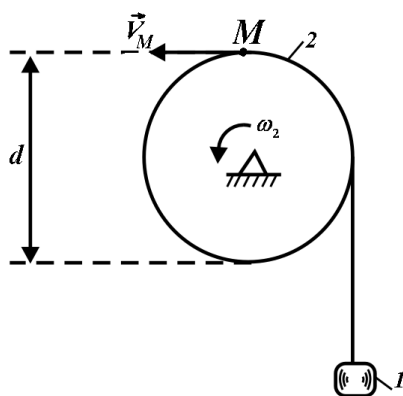
bundan

$$i_{1,n} = (-1)^m \cdot \omega_1 / \omega_n. \quad (49.4)$$

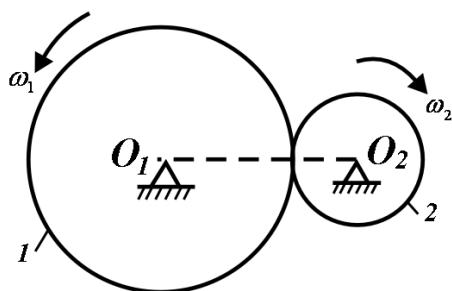
Bu yerda m -tashqi tomondan tishlashgan juftlar soni.

50 - §. Masalalar

18-masala. Diametri $d_2 = 0,8m$ bo'lgan 2-baraban $\varphi_2 = 3 + \frac{1}{4}t^4$ qonunga ko'ra aylanib, 1-yukni ko'taradi. $t=1$ sekund bo'lganda baraban M nuqtasining tezligi aniqlansin (89-rasm).



89-rasm



90-rasm

Yechish. (46.2) ga ko'ra:

$$V_M = V_1 = \omega_2 r_2 \quad \text{yoki} \quad V_M = \frac{d_2}{2} \omega_2. \quad (50.1)$$

ω_2 ni aniqlash uchun φ_2 dan vaqt bo'yicha hosila olamiz.

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = t^3. \quad (50.2)$$

(50.2) ni (50.1) ga qo'yamiz:

$$V_M = \frac{d_2}{2} \cdot t^3. \quad (50.3)$$

(50.3) ga son qiymatlarni qo'ysak, $V_M = 0,4m/s$ kelib chiqadi.

19-masala. 1 va 2-g'ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo'lib, birinchi g'ildirak $\varphi_1 = 10t$ qonunga muvofiq aylanadi. $T=3.14$ s bo'lganda ikkinchi g'ildirak aylanish soni aniqlansin. $r_1 = 0,6m$, $r_2 = 0,3m$ (90-rasm).

Yechish: (45.10) ga ko'ra:

$$\varphi_1 = 2\pi N_1,$$

bundan:
$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} . \quad (50.4)$$

(49.2) formulaga asosan:
$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{r_2}{r_1} ,$$

bundan

$$N_2 = \frac{N_1 r_1}{r_2} \quad (50.5)$$

kelib chiqadi.

(50.4) ni (50.5) ga qo'yamiz:

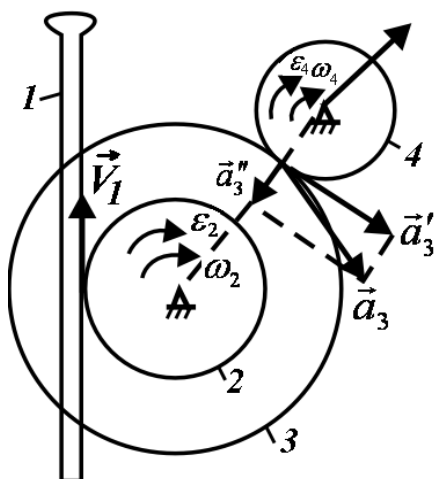
$$N_2 = \frac{\varphi_1}{2\pi} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{10t}{2\pi} \cdot \frac{r_1}{r_2} .$$

Son qiymatlarni qo'ysak,

$$N_2 = \frac{10 \cdot 3 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 14} \cdot \frac{0,6}{0,3} \quad \text{yoki} \quad N_1 = 10 \text{ ayl} .$$

kelib chiqadi.

20-masala. Strelka indikatori mexanizmida harakat o'lchov shtiftining 1-reykasidan 2-g'ildirakkka uzatiladi; 2-g'ildirakning o'qiga tishli 3-g'ildirak o'tkazilgan. 3-g'ildirak esa strelkali 4-g'ildirak bilan tishlashadi.



91-rasm

Agar shtiftning harakati $x = 2 \cos \frac{\pi}{4} t$ (sm) tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari mos ravishda $r_2 = 10\sqrt{2}$ sm, $r_3 = 30$ sm, $r_4 = 10\sqrt{2}$ sm bo'lsa, strelkaning burchak tezligi hamda burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, $t = 1$ sekunddagi 3-g'ildirak to'g'ida yotuvchi nuqta tezligi va tezlanishi aniqlansin (91-rasm).

Yechish: Shtift bilan 2-g'ildirak tishlashgan nuqtalarining chiziqli tezliklari bir-biriga teng:

$$V_1 = V_2 = \omega_2 r_2 . \quad (50.6)$$

Shtift tezligi esa

$$V_1 = \frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} t \quad (\text{sm/s}). \quad (50.7)$$

(50.7) ni (50.6) ga qo'ysak:

$$\omega_2 = -\frac{\pi}{2r_2} \sin \frac{\pi}{4} t \quad (1/s).$$

Ikkinchi va uchinchi g'ildiraklar bir o'qda joylashganligi uchun ularning burchak tezliklari teng, ya'ni

$$\omega_2 = \omega_3 = -\frac{\pi}{2r^2} \sin \frac{\pi}{4} t . \quad (50.8)$$

$t = 1$ sekund bo'lganda ,

$$\omega_2 = \omega_3 = -0,078 s^{-1}.$$

3 - va 4 - g`ildiraklarning tishlashgan nuqtalarining chiziqli tezliklari teng ($V_3 = V_4$):

$$V_3 = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4, \quad (50.9)$$

bu yerdan

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4} \omega_3$$

kelib chiqadi.

4-g`ildirak burchak tezligi strelka burchak tezligiga teng.

Demak,

$$\omega_{st} = \omega_4 = \frac{r_3}{r_4} \omega_3 = -\frac{\pi r_3}{2r_2 r_4} \sin \frac{\pi}{4} t. \quad (50.10)$$

$t = 1s$ bo`lganda  $\omega_{st} = \omega_4 = 0,2355 s^{-1}$  bo`ladi.

3- va 4-g`ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo`lgani uchun ω_{st} yo`nalishi  $\omega_3$  ga qarshi bo`ladi.

Sterlka burchak tezlanishi:

$$\varepsilon_{st} = \frac{d\omega_{st}}{dt} = -\frac{\pi^2 r_3}{8r_2 r_4} \cos \frac{\pi}{4} t.$$

$t = 1s$ da $\varepsilon_{st} = -0,18 s^{-2}$ bo`ladi.

3-g`ildirak to`g`inida yotuvchi nuqta tezligi (50.9) formulaga ko`ra aniqlanadi.

$$V_3 = -\frac{\pi r_3}{2r_2} \sin \frac{\pi}{4} t.$$

$t = 1s$ sekund bo`lganda  $V_3 = -3,3 sm/s$  bo`ladi.

(50.8) dan vaqt bo`yicha hosila olsak, 3-g`ildirak burchak tezlanishi kelib chiqadi:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\pi^2}{8r_2} \cos \frac{\pi}{4} t.$$

$t = 1s$ da $\varepsilon_3 = -0,06 s^{-2}$.

3-g`ildirak to`g`inida yotuvchu nuqtaning urinma, normal va to`la tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$a_3^{\tau} = \varepsilon_3 r_3, a_3^n = \omega_3^2 r_3; \quad a_3 = \sqrt{(a_3^{\tau})^2 + (a_3^n)^2}. \quad (50.11)$$

(50.11) ga aniqlangan son qiymatlarni qo`ysak,

$$a_3^{\tau} = -2,538 sm/s^2, a_3^n = 0,038 sm/s^2; a_3 = 2,538 sm/s^2$$

kelib chiqadi.

21-masala. Aylanma harakatni I-valdan II-valga o`tkazadigan tezlik reduktori qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi to`rtta tishli g`ildirakdan iborat. G`ildiraklar tishlarining soni mos ravishda $z_1=12, z_2=72, z_3=10, z_4=90$.

Mexanizmning uzatish soni topilsin (92-rasm).

Yechish: (49.3) formulaga ko`ra:

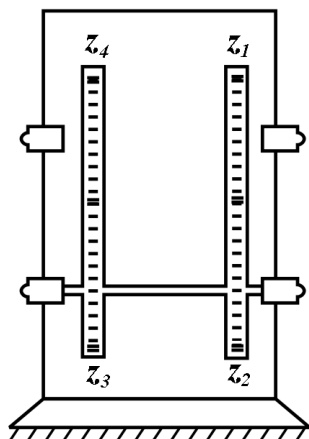
$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

2- va 3- g`ildiraklar bitta valga mahkamlangan bo`lib, tashqi tishlashgan juftlar soni 2 ga teng.

Shuning uchun $\omega_2 = \omega_3$ bo`lib, (49.4) quyidagicha bo`ladi:

$$i_{1,4} = (-1)^2 \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Son qiymatlarini qo`ysak, $i_{1,4} = 54$ kelib chiqadi.



92-rasm

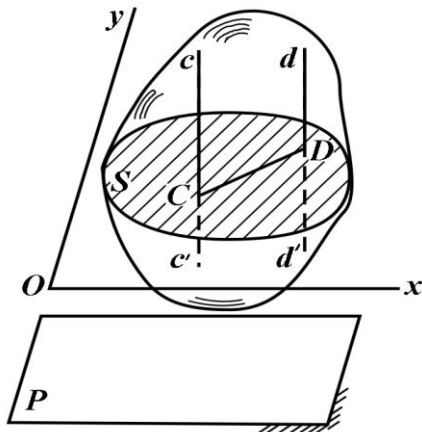
Nazorat savollari

1. Jismning ilgarilanma harakati qanday ta`riflanadi?
2. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining harakati haqidagi teoremani ta`riflang.
3. Qattiq jismning aylanma harakati deb nimaga aytiladi?
4. Qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki tenglamasini yozing.
5. Burchak tezligi va burchak tezlanishi nima? Ular o`lchov birliklari qanday?
6. Chiziqli tezlik qanday aniqlanadi?
7. Chiziqli tezlikning vektor ifodsi qanday?
8. Chiziqli tezlikning Dekart koordinata o`qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
9. Chiziqli tezlanish nima? Uning vektor ifodasini yozing.
10. Chiziqli tezlanish vektorini Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyasi ifodasini yozing.
11. Qo`zg`almas o`q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtasining urinma va normal (markazga intilma) tezlanishi qanday ifodalanadi?

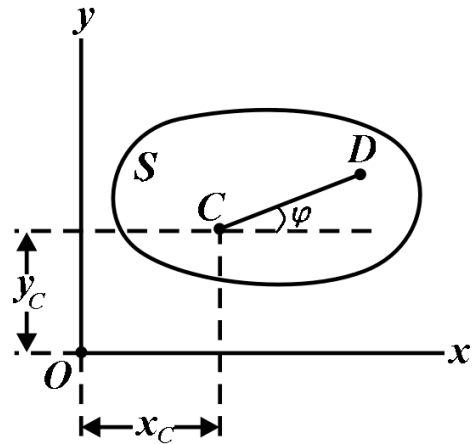
X BOB. QATTIQ JISMNING TEKIS PARALLEL HARAKATI

51 - §. Tekis parallel harakat tenglamasi

Qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari biror qoʻzgʻalmas P tekislikka parallel boʻlsa, bunday harakat *tekis parallel harakat* deyiladi (93-rasm). Bunday harakatga yoʻlning toʻgʻri chiziqli qismida harakatlanayotgan gʻildirakni, bir tekislikda harakatlanuvchi mashina va mexanizm qismlarini misol qilib keltirish mumkin.



93-rasm



94-rasm

Qattiq jism tekis parallel harakatini oʻrganish uchun qoʻzgʻalmas P tekislikka parallel qilib Oxy koordinata sistemasini oʻtkazamiz. U jismdan P tekislikka parallel boʻlgan S qirqimni ajratadi. S qirqimga (ya'ni P ga) perpendikulyar boʻlgan cc' va dd' ustidagi nuqtalar bir xil harakatlanadi.

Shuning uchun bu chiziqlar ustida yotuvchi nuqtalar harakatini oʻrganish oʻrniga S qirqimda yotuvchi C va D nuqtalarning harakatini tekshirish kifoya.

Demak, qattiq jism tekis parallel harakatini oʻrganish uchun S qirqim harakatini bilish kifoya. Keyinchalik, S qirqimni tekis shakl deb ataymiz. Tekis shaklning holati unda olingan CD kesma holati orqali aniqlanadi (94-rasm). CD kesma holatini esa quyidagicha aniqlash mumkin:

$$x_C = x_C(t) \quad , \quad y_C = y_C(t) \quad , \quad \varphi = \varphi(t) \quad , \quad (51.1)$$

bu erda C -nuqta qutb deb ataladi. φ – esa burilish burchagi boʻlib, u CD kesmaning Ox oʻqi bilan hosil qilgan burchagidir.

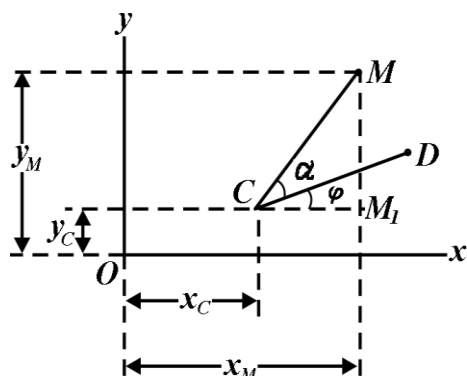
(51.1) ning birinchi ikkita tenglamasi jism ilgarilama harakatini, uchinchi esa qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Demak, jismning tekis parallel harakati C qutb nuqtaning ilgarilama va C dan rasm tekisligi P ga perpendikular oʻtgan oʻq atrofidagi aylanma harakatdan iborat.

(51.1) tekis parallel harakat qonunini ifodalaydi.

52 - §. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining trayektoriyasi

Qattiq jism S qirgimi ustidagi ixtiyoriy M nuqtaning holati $CM=b$ va $\angle MCD=\alpha$ orqali aniqlanadi (95-rasm).



95-pacm

Agar (51.1) ma'lum bo'lsa, M nuqta koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$x_M = x_C + CM_1 \quad y_M = y_C + MM_1. \quad (52.1)$$

$\triangle CMM_1$ dan :

$$CM_1 = CM \cos(\alpha + \varphi),$$

$$MM_1 = CM \sin(\alpha + \varphi)$$

$$CM_1 = b \cos(\alpha + \varphi),$$

$$MM_1 = b \sin(\alpha + \varphi). \quad (52.2)$$

(52.2) ni (52.1) ga qo'ysak:

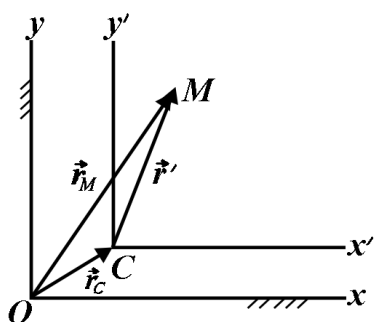
$$x_M = x_C + b \cos(\alpha + \varphi),$$

$$y_M = y_C + b \sin(\alpha + \varphi). \quad (52.3)$$

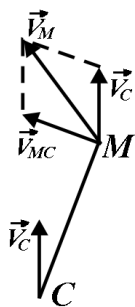
(52.3) tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi trayektoriyasining parametrik tenglamasidir.

53 - §. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi

Qattiq jism S qirgimining holatini qo'zg'almas Oxy sistemaga nisbatan tekshiramiz (96-rasm). S qirgim C nuqtasini qutb deb olib, u nuqtadan jism bilan birgalikda ilgarilama harakat qiluvchi $Cx'y'$ koordinata sistemasini olamiz. Bu holda jism ixtiyoriy M nuqtasining holatini vektor usulda quyidagicha aniqlash mumkin:



a



b

96-rasm

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}'. \quad (53.1)$$

(53.1) dan vaqt bo'yicha hosila

olsak,

$$\frac{d \vec{r}_M}{d t} = \frac{d \vec{r}_C}{d t} + \frac{d \vec{r}'}{d t}$$

$$\text{yoki} \quad \vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}'$$

kelib chiqadi. Bu yerda $\vec{V}' = \vec{V}_{MC}$ bo'lib, u M nuqtaning qutb atrofida aylanma harakat tezligidir.

Natijada :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}. \quad (53.2)$$

Demak, tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi qutb (nuqta)ning tezligi bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanma harakati chiziqli tezligining geometrik yig'indisiga teng (96-rasm, b).

(47.2) ga ko'ra:

$$\vec{V}_{MC} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{CM}, \quad \vec{V}_{MC} \perp \vec{CM}.$$

Natijada:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{CM}.$$

Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy M nuqtasi tezligining kattaligi quyidagicha aniqlanadi:

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}, \quad (53.3)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} V_{Mx} &= V_{Cx} + V_{(MC)x}, \\ V_{My} &= V_{Cy} + V_{(MC)y}. \end{aligned} \quad (53.4)$$

$\vec{V}_C \perp \vec{V}_{MC}$ bo'lsa, $V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2}$ bo'ladi.

$\vec{V}_C$ bilan $\vec{V}_{MC}$ ma'lum biror burchak hosil qilganda kosinuslar teoremasidan foydalanib, V_M kattaligi topiladi.

54 - §. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi

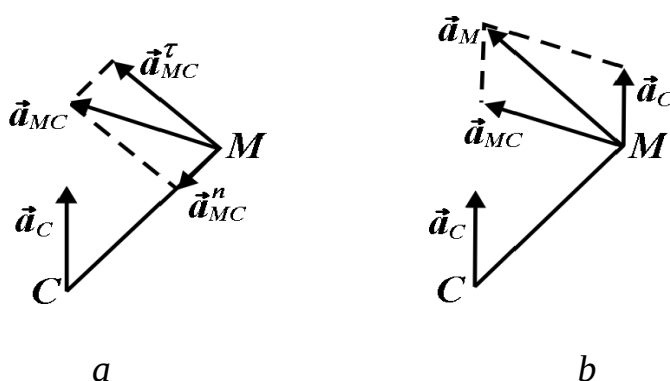
Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy M nuqtasi tezlanishini aniqlash uchun (53.2) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_C}{dt} + \frac{d\vec{V}_{MC}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}. \quad (54.1)$$

(54.1) dan ko'ramizki, M nuqta tezlanish vektori qutb nuqta tezlanish vektori bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan to'la tezlanish vektorining geometrik yig'indisiga teng (97-rasm; a, b)



97-rasm

(54.1) dagi $\vec{a}_C$ va $\vec{a}_{MC}$ larni urinma va normal tuzuvchilarga ajratib yozsak,

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_C^n, \\ \vec{a}_{MC} &= \vec{a}_{MC}^\tau + \vec{a}_{MC}^n \end{aligned}$$

bo'ladi.

Bu holda (54.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C^\tau + \vec{a}_C^n + \vec{a}_{MC}^\tau + \vec{a}_{MC}^n, \quad (54.2)$$

bu yerda:

$$a_C^\tau = \frac{dV_C}{dt}, a_C^n = \frac{V_C^2}{\rho}; a_{MC}^\tau = \varepsilon MC, a_{MC}^n = \omega^2 MC.$$

Jism tekis parallel harakatiga doir masalalarni yechishda (54.2) Dekart koordinata o'qlari Ox, Oy ga proyeksiyalanib, $\vec{a}_M$ kattaligi aniqlanadi:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}, \quad (54.3)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= a_{Cx}^\tau + a_{Cx}^n + a_{(MC)x}^\tau + a_{(MC)x}^n, \\ a_{My} &= a_{Cy}^\tau + a_{Cy}^n + a_{(MC)y}^\tau + a_{(MC)y}^n. \end{aligned} \quad (54.4)$$

55 - §. Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyasi haqidagi teorema

Teorema. Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining mazkur nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq yo'nalishidagi proyeksiyalari teng (98-rasm).

Isbot. A nuqtani qutb desak, (53.2) ga ko'ra B nuqta tezligi quyidagicha bo'ladi:

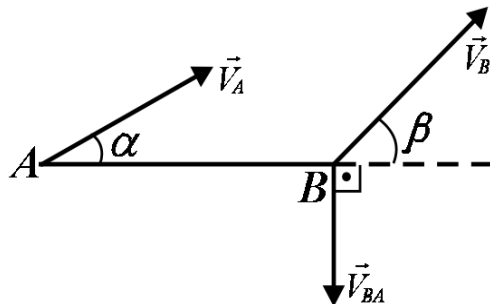
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (55.1)$$

(55.1) ni AB yo'nalishga proyeksiyalaymiz:

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha + V_{AB} \cos 90^\circ,$$

bunda $\cos 90^\circ = 0$, bo'lgani uchun

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha \quad (55.2)$$



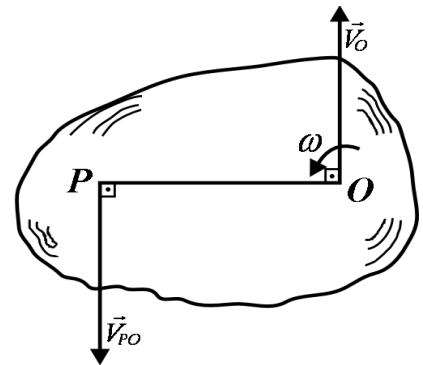
98- rasm

kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbotlanadi.

56 - §. Tezliklar oniy markazi (TOM)

Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan tekis parallel harakatdagi jism nuqtasi *tezliklar oniy markazi* deyiladi. Bunday nuqta tekis parallel harakatdagi jismda mavjud ekanini ko'rsatib o'tamiz.

Faraz qilaylik, tekis parallel harakatdagi jism biror O nuqtasining tezligi $\vec{V}_0$ hamda O nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω berilgan bo'lsin (99-rasm). O nuqtani qutb deb olib, mazkur nuqtadan aylanma harakat yo'nalishida $\vec{V}_0$ ga perpendikulyar qilib $OP = V_0/\omega$ chiziqni o'tkazamiz.



99-rasm

(53.2) ga ko'ra:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO},$$

bu yerda $\vec{V}_{PO} \perp OP$ bo'lib, $\vec{V}_O$ ga qarama-qarshi yo'naladi va

$$V_{PO} = \omega OP = \omega \frac{V_0}{\omega} = V_0$$

bo'ladi.

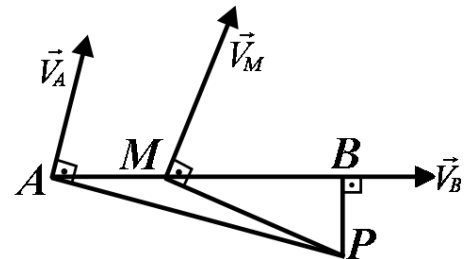
Natijada $\vec{V}_{PO} = -\vec{V}_O, \vec{V}_P = 0$ kelib chiqadi.

Demak, tekis parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari yo'nalishiga o'tkazilgan perpendikulyar chiziqlar kesishgan nuqtasi TOM bo'ladi (100-rasm).

P nuqtani qutb deb olsak, A va B nuqtalar tezliklari quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}, \quad \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}$$

$\vec{V}_P = 0$ bo'lgani uchun:



100-rasm

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AP}, \quad V_A = \omega AP; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}, \quad V_B = \omega BP. \quad (56.1)$$

(56.1) dan:

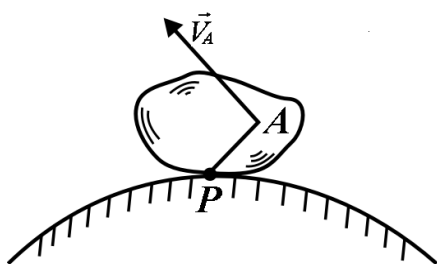
$$\omega = \frac{V_A}{AP}, \quad \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (56.2)$$

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Tekis parallel harakatdagi jism ikki nuqtasining tezliklar yo'nalishi ma'lum bo'lganda TOM aniqlanadi.
2. Tekis parallel harakatdagi jism bitta nuqtasi tezligining miqdori va mazkur nuqtadan TOM gacha bo'lgan masofa berilganda tekis parallel harakatdagi jism burchak tezligi topiladi.
3. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi tezligini aniqlash uchun uning bitta nuqtasi tezligining miqdori (kattaligi) va ikki nuqtasi tezliklarining yo'nalishi ma'lum bo'lishi kerak.

57 - §. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari

Tekis shaklning TOM quyidagi hollarda oson aniqlanadi:

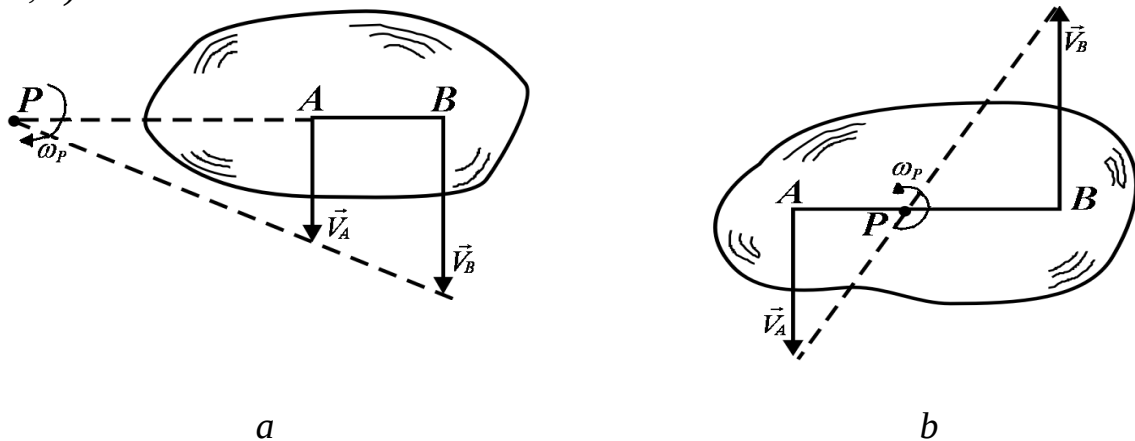


101-rasm

1) Agar tekis shakl biror qo'zg'almas sirt ustida sirpanmasdan harakatlansa, uning qo'zg'almas sirtga tegib turgan nuqtasi TOM bo'ladi (101-rasm).

2) Agar tekis shakl A va B nuqtalarining tezliklar moduli ma'lum bo'lib, ular o'zaro parallel va AB ga perpendikulyar bo'lsa, mazkur tezliklar uchlarini tutashtiruvchi chiziqni AB bilan

kesishguncha davom ettiramiz. Natijada hosil bo'lgan P nuqta TOM bo'ladi. (102-rasm; a, b)



102-rasm

3) Agar $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B, v_A = v_B$ bo'lsa, jism ilgarilama harakatda bo'lib, tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi ($AP = \infty$) (103-rasm; a, b)

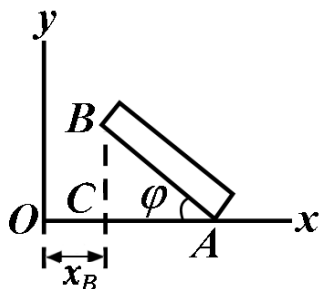
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$



103-rasm

22-masala. AB sterjen $x_A = 2 + t^2, y_A = 0$, $\varphi = 0,25\pi t$ qonunga ko'ra harakatlanadi. $t = 1$ sekund bo'lganda B nuqta absissasi aniqlansin. $AB = 3m$ (104-rasm).

Yechish: 104-rasmdan:



104-rasm

$$x_B = OA - CA, OA = x_A, x_B = x_A - AB \cos \varphi.$$

Formulaga son qiymatlarini qo'ysak:

$$x_B = 3 - 3 \cos 0,25\pi = 3 - 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

yoki

$$x_B = 0,879 \text{ m.}$$

23-masala. Uzunligi $AB=2m$ bo'lgan sterjen Oxy tekisligida $x_B = 4 \cos 0,5\pi t$, $y_B = 0$, $\varphi = 0,5\pi t$ tenglamalarga muvofiq harakatlanadi. $t=0,245s$ bo'lganda A nuqta tezlik vektorining Ox o'qidagi proyeksiyasi aniqlansin (105-rasm).

Yechish: (53.2) ga ko'ra:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}. \quad (57.1)$$

(57.1) ni Ox o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$V_{Ax} = V_{Bx} + V_{(AB)x},$$

bu yerda

$$V_{Bx} = \frac{dx_B}{dt} = -2\pi \sin 0,5\pi t,$$

$$V_{AB} = \omega AB = \frac{d\varphi}{dt} AB = 0,5\pi AB,$$

$$V_{(AB)x} = V_{AB} \sin 0,5\pi t.$$

$$t = 1 \text{ sekundda } V_{Bx} = -2\pi \sin \frac{\pi}{3} t = -\pi\sqrt{2}, \quad V_{(AB)x} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Natijada } V_{Ax} = -\pi\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = -\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{yoki} \quad V_{Ax} = -2,22 \text{ m/s}.$$

24-masala. 106-rasmda ko'rsatilgan krivoship-shatunli mexanizm B nuqtasining tezligi topilsin. A nuqta tezligi $V_A = 1 \text{ m/s}$.

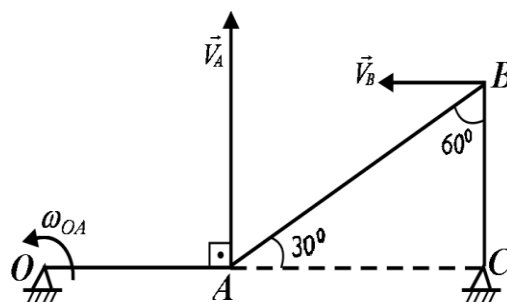
Yechish: Krivoship-shatunli mexanizm A nuqtasining tezligi OA ga perpendikulyar, B nuqtasi tezligi CB ga perpendikulyar bo'lib, yo'nalishi 106-rasmda ko'rsatilgandek bo'ladi.

(55.2) ga ko'ra:

$$V_A \cos 60^\circ = V_B \cos 30^\circ,$$

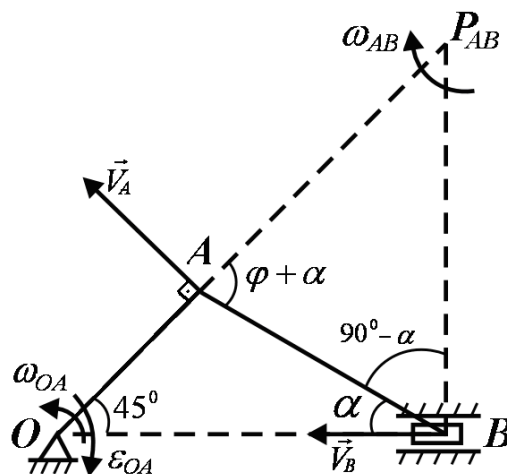
$$\text{bundan } V_B = V_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$$

yoki son qiymatlarini qo'ysak, $V_B = 0,577 \text{ m/s}$.



106-rasm

25-Masala. Krivoship-shatunli OAB mexanizmning krivoshipi o'zgarmas burchak tezlanishi bilan aylanadi va uzunligi $AB = 60 \text{ sm}$ bo'lgan shatunni harakatga keltiradi. Krivoship uzunligi $OA = 20 \text{ sm}$, boshlang'ich burchak tezligi $\omega_{OA} = \pi \text{ s}^{-1}$, burchak tezlanishi $\varepsilon_{OA} = -\pi/4 \text{ s}^{-2}$. Polzun B gorizontali bo'ylab harakat qiladi. Boshlang'ich paytda $\varphi_0 = -5\pi/4 \text{ rad}$; $t = 2 \text{ s}$ bo'lganda shatun burchak tezligi va burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, B polzun hamda AB shatun o'rtasidagi C nuqtaning tezlanishi topilsin (107-rasm).



107-rasm

Yechish: Avval $t=2$ sekunddagi aylanish burchagi φ ni aniqlaymiz. Krivoship harakati tekis o'zgaruvchan aylanma harakatdan iborat bo'lgani uchun:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{OA}t + \varepsilon_{OA} \frac{t^2}{2}$$

bo'ladi.

φ_0 va ω_{OA} ning qiymatlarini qo'ysak,

$$\varphi = -\frac{5}{4}\pi + \pi t - \frac{\pi}{8}t^2$$

kelib chiqadi.

$t_1 = 2$ sekundda $\varphi = 45^\circ$ bo'ladi. OA krivoship A nuqtasining burchak tezligi

$$\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \pi - \frac{\pi}{4}t = \frac{\pi}{4}(4-t) s^{-1}.$$

Natijada:

$$V_A = 5\pi(4-t).$$

$\vec{V}_A$ OA krivoshipga perpendikulyar, B polzun tezligi gorizontall bo'ylab yo'nalgan. $\vec{V}_A$ va $\vec{V}_B$ vektorlarga A va B nuqtalardan chiqarilgan tik chiziqlarning kesishgan P_{AB} nuqtasi AB shatunning oniy aylanishlar markazi bo'ladi.

AB shatun burchak tezligini topamiz: $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}.$

107-rasmdan:

$$\frac{OA}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \varphi}, \quad \sin \alpha = \frac{OA \sin \varphi}{l}.$$

Son qiymatlarini qo'ysak: $\sin \alpha = 0,236, \alpha = 13^\circ 40'.$

ΔABP_{AB} dan:

$$\frac{AP_{AB}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{BP_{AB}}{\sin(\varphi + \alpha)} = \frac{AB}{\sin(90^\circ - \varphi)},$$

bu yerdan

$$AP_{AB} = AB \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}, \quad BP_{AB} = AB \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi}$$

yoki

$$AP_{AB} = 60 \frac{\cos 13^\circ 40'}{\cos 45^\circ} = 82,68 \text{ sm},$$

$$BP_{AB} = 60 \frac{\sin 58^\circ 40'}{\cos 45^\circ} = 72 \text{ sm}$$

kelib chiqadi.

Demak,

$$\omega_{AB} = \frac{5\pi(4-t)}{82,68}$$

yoki $t=2$ bo'lganda

$$\omega_{AB} = 0,38 s^{-1}.$$

OA krivoship A nuqtasining tezlanishi urinma va markazga intilma (normal) tezlanishlarning geometrik yig'indisidan iborat, ya'ni:

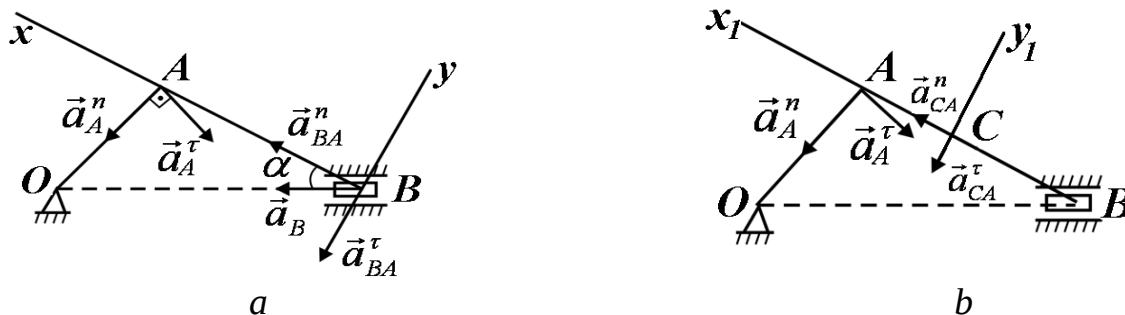
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n,$$

bu yerda $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA, a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA$

yoki $a_A^\tau = 1,57 \text{ m/s}^2, a_A^n = \frac{\pi^2}{16} (4 - t^2) \cdot 20.$

$t=1\text{s}$ bo'lganda $a_A^n = 5\pi^2 = 49,3 \text{ sm/s}^2.$

$\vec{a}_A^\tau, \vec{a}_A^n$ vektorlarning yo'nalishi 108-rasmda ko'rsatilganidek bo'ladi.



108-rasm

A nuqtani qutb deb, B polzun tezlanishini (54.2) ga ko'ra aniqlaymiz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n,$$

bu yerda $\vec{a}_B$ vektor OB bo'ylab yo'naladi.

Yuqoridagi tenglikni Bx, By o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_B \cos \alpha = -a_A^\tau \sin(\varphi + \alpha) + a_A^n \cos(\varphi + \alpha) + a_{BA}^n, \quad (57.2)$$

$$-a_B \sin \alpha = -a_A^\tau \cos(\varphi + \alpha) - a_A^n \sin(\varphi + \alpha) - a_{BA}^\tau. \quad (57.3)$$

$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB$ formuladan foydalanib, B nuqta aylanma harakatining normal tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_{BA}^n = (0,38)^2 \cdot 60 = 8,664 \text{ sm/s}^2.$$

(57.2) dan:

$$a_B = \frac{1}{\cos \alpha} [a_{BA}^n + a_A^n \cos(\varphi + \alpha) - a_A^\tau \sin(\varphi + \alpha)]$$

yoki

$$a_B = 21,5 \text{ sm/s}^2.$$

(57.3) dan:

$$a_{BA}^\tau = a_B \sin \alpha - a_A^\tau \cos(\varphi + \alpha) - a_A^n \sin(\varphi + \alpha)$$

yoki

$$a_{BA}^\tau = -45,2 \text{ sm/s}^2$$

kelib chiqadi.

Demak, $\vec{a}_{BA}^\tau$ vektor 108-rasm, a dagi yo'nalishga teskari ekan.

$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AB$ dan foydalanib, AB shatun burchak tezlanishini topamiz:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon_{AB} = \frac{45,2}{60} = 0,75 \text{ s}^{-2}.$$

C nuqta tezlanishini aniqlash uchun A nuqtani qutb deb (54.2) ni yozamiz:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{CA}^n.$$

Bu tenglikni C_x, C_y o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_{C_x}^{\tau} = -a_A^{\tau} \sin(\varphi + \alpha) + a_A^n \cos(\varphi + \alpha) + a_{CA}^n,$$

$$a_{C_{y_1}}^{\tau} = -a_A^{\tau} \cos(\varphi + \alpha) - a_A^n \sin(\varphi + \alpha) - a_{CA}^{\tau},$$

bunda

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AC = 0,75 \cdot 30 = 2,25 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 AC = (0,38)^2 \cdot 30 = 4,332 \text{ m/s}^2.$$

Natijada,

$$a_{C_{x_1}} = 16,6 \text{ m/s}^2, \quad a_{C_{y_1}} = -50,3 \text{ m/s}^2$$

kelib chiqadi.

C nuqta to'la tezlanishi

$$a_c = \sqrt{a_{C_{x_1}}^2 + a_{C_{y_1}}^2} = \sqrt{(16,6)^2 + (-50,3)^2} = 52,8$$

bo'ladi.

Javob: $\omega_{AB} = 0,38 \text{ 1/s}$, $\varepsilon_{AB} = 0,75 \text{ 1/s}$, $a_B = 21,5 \text{ m/s}^2$, $a_c = 52,8 \text{ m/s}^2$.

Nazorat savollari

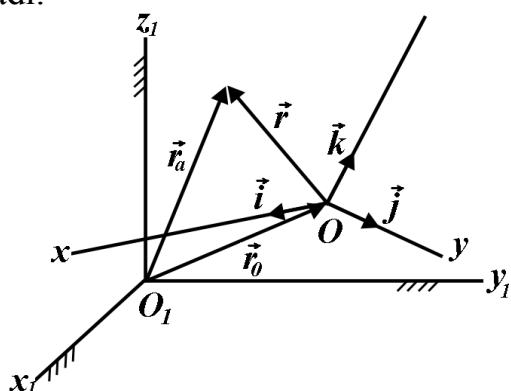
1. Qattiq jism tekis parallel harakatining ta'rifi qanday?
2. Tekis parallel harakat qonunida nima aks etgan?
3. Tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari qanday aniqlanadi?
4. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori qanday topiladi?
5. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Tezliklar oniy markaz qanday ta'riflanadi?
7. Tezliklar oniy markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?
8. Tezliklar oniy markazi tushunchasidan foydalanib jism ixtiyoriy nuqtasi tezligi qanday topiladi?
9. Tekis harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyasi haqidagi teoremani ta'riflang.
10. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik miqdori qanday aniqlanadi?
11. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish miqdori qanday topiladi?

XI BOB. MODDIY NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

58 - §. Moddiy nuqtaning nisbiy, ko`chirma va murakkab (absolut) harakati. Murakkab harakat qonuni

Yuqorida bayon etilgan mavzularda moddiy nuqta harakatini bitta qo`zg`almas sistemaga nisbatan tekshirilishini ko`rib o`tdik. Mazkur mavzuda moddiy nuqta harakatini ikkita koordinata sistemasiga, ya`ni qo`zg`aluvchi  $Oxyz$  hamda qo`zg`almas $O_1x_1y_1z_1$ sistemaga nisbatan tekshiramiz (109-rasm).

M nuqtaning qo`zg`aluvchi $Oxyz$ koordinata sistemasiga nisbatan harakati *nisbiy*; qo`zg`aluvchi sistema bilan birgalikdagi harakati *ko`chirma*; qo`zg`almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinata sistemasiga nisbatan harakati *murakkab (absolut) harakat* deb ataladi.



109-rasm

Harakatdagi sistema boshining qo`zg`almas sistemaga nisbatan radius-vektorini $\vec{r}_0$, M nuqtaning harakatdagi sistemaga nisbatan holati radius-vektorini $\vec{r}$ va qo`zg`almas sistemaga nisbatan holati radius-vektorini $\vec{r}_a$ bilan belgilaymiz.

109-rasmdan:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_0 + \vec{r} . \quad (58.1)$$

(58.1) moddiy nuqta murakkab harakatining qonunini ifodalaydi.

Tezlik va tezlanishlarni bir-biridan farq qilish uchun absolut, nisbiy, ko`chirma tezlik vektorlarini mos ravishda  $\vec{V}_a$ ,  $\vec{V}_r$ , va  $\vec{V}_e$  bilan, shuningdek tezlanish vektorlarini  $\vec{a}_a$ ,  $\vec{a}_r$  va  $\vec{a}_e$  bilan belgilanadi. Absolut tezlanishni tekshirganimizda qo`shimcha (Koriolis) tezlanish $\vec{a}_k$ kelib chiqadi.

59 - §. Murakkab (absolut) harakatdagi moddiy nuqta tezligi (tezliklarni qo`shish teoremasi)

Absolut tezlikni aniqlash uchun (58.1) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} , \quad (59.1)$$

bu yerda :

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{V}_a , \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{V}_0 . \quad (59.2)$$

$\vec{r}$ – radius-vektorini quyidagicha yozib olamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} , \quad (59.3)$$

bu yerda: x, y, z – radius-vektori $\vec{r}$ ning $Oxyz$ sistemasiga nisbatan koordinatalari; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – mos ravishda Ox, Oy, Oz o`qlarining birlik vektorlari.

(59.3) dan vaqt bo'yicha hosila olsak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}, \quad (59.4)$$

bu yerda

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (59.5)$$

(59.5) formula nuqtaning nisbiy tezligini ifodalaydi. Uni hisoblashda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar o'zgarmas deb qaraladi.

Agar qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi $\vec{\omega}_e$ ma'lum bo'lsa, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – vektorlar uchlarining tezliklari quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}. \quad (59.6)$$

(59.5) va (59.6) ni (59.4) qo'ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + x \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{i} + y \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{j} + z \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{k}$$

yoki

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}). \quad (59.7)$$

(59.3) ni (59.7) ga qo'ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (59.8)$$

(59.2) va (59.8) ni e'tiborga olib, (59.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r},$$

bu yerda

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (59.9)$$

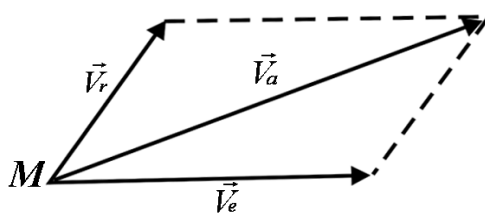
(59.9) nuqtaning ko'chirma tezligini ifodalaydi.

Natijada

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (59.10)$$

(59.10) murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo'shish haqidagi teoremani ifodalaydi: nuqtaning absolut tezligi mazkur nuqta nisbiy va ko'chirma tezliklarining geometrik yig'indisiga teng (110-rasm).

Shunday qilib, nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari miqdor va yo'nalishi jihatidan ma'lum bo'lsa, absolyut tezlikning moduli nisbiy va ko'chirma tezliklarga qurilgan parrallelogrammning dioganali bilan ifodalanadi. Absolut tezlik moduli kosinuslar teoremasidan foydalanib topiladi:



110-rasm

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\vec{V}_r, \vec{V}_e)}. \quad (59.11)$$

$$\text{Agar } \alpha = 90^\circ \text{ bo'lsa, } V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2};$$

$$\alpha = 0^\circ \text{ bo'lsa, } V_a = V_r + V_e;$$

$$\alpha = 180^\circ \text{ bo'lsa, } V_a = |V_r + V_e|$$

bo'ladi.

60 - §. Murakkab (absolut) harakatdagi nuqta tezlanishi (tezlanishlarni qo'shish teoremasi)

Absolut tezlanishni aniqlash uchun (59.10) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_e}{dt} . \quad (60.1)$$

(59.5) dan foydalanib, $\frac{d\vec{V}_r}{dt}$ ni aniqlaymiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt} . \quad (60.2)$$

(59.6) ni (60.2) ga qo'ysak :

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) , \quad (60.3)$$

bu yerda $\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} . \quad (60.4)$

(60.4) nuqtaning nisbiy tezlanishini ifodalaydi.

(59.5) va (60.4) ni (60.3) ga qo'yamiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r . \quad (60.5)$$

Bundagi $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ ifoda nisbiy harakatdagi ko'chirma tezlik o'zgarishini xarakterlaydi.

(59.9) dan foydalanib , $\frac{d\vec{V}_e}{dt}$ ni topamiz :

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt} ,$$

bu yerda $\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0 , \quad \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e . \quad (60.6)$

Natijada: $\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt} . \quad (60.7)$

(59.8) ni (60.7) ga qo'ysak:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r} . \quad (60.8)$$

Bunda $\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ ko'chirma tezlanishni, $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ esa ko'chirma harakatdagi nisbiy tezlik o'zgarishini xarakterlaydi. Bularni e'tiborga olsak, (60.8) quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{a}_e + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r . \quad (60.9)$$

(60.5) va (60.9) ni (60.1) ga qo`ysak :
$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

yoki
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k, \quad (60.10)$$

bu yerda
$$2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r = \vec{a}_k. \quad (60.11)$$

(60.11) Koriolis (qo`shimcha) tezlanishni ifodalaydi .

(60.10) tezlanishlarni qo`shish teoremasidan iborat.

**Ta`rif.** Murakkab harakatdagi nuqta absolut tezlanishi uning nisbiy, ko`chirma va qo`shimcha tezlanishlarining geometrik yig`indisiga teng.

Absolut tezlanish modulini hisoblash uchun (60.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_k, \quad (60.12)$$

bu yerda

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt}, \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}, \quad a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h, \quad a_e^n = \omega_e^2 \cdot h, \quad (60.13)$$

$$a_k = 2\omega_e V_r \cdot \sin(\vec{\omega}_e, \wedge \vec{V}_r). \quad (60.14)$$

(60.12) formuladagi $\vec{a}_r^\tau$ nisbiy harakat trayektoriyasiga urinma, $\vec{a}_r^n$ esa $\vec{a}_r^\tau$ ga perpendikulyar bo`lib, trayektoriyaning botiq tomoni bo`ylab yo`naladi;  $\vec{a}_e^\tau$  ko`chirma harakat trayektoriyasiga urinma, $\vec{a}_e^n \perp \vec{a}_e^\tau$ bo`lib, trayektoriyaning botiq tomoni bo`ylab yo`nalinadi.

Koriolis tezlanish yo`nalishi Jukovskiyo qoidasi bo`yicha topiladi:

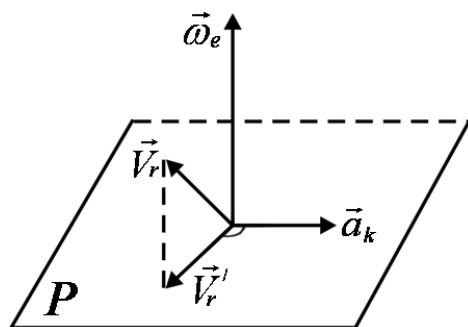
1) ko`chirma harakat burchak tezligi yo`nalishiga perpendikulyar P tekislik o`tkazamiz;

2) nisbiy harakat tezligi ($\vec{V}_r$) ni P tekislikka proyeksiyalab, uni $\vec{V}_r'$ deb belgilaymiz;

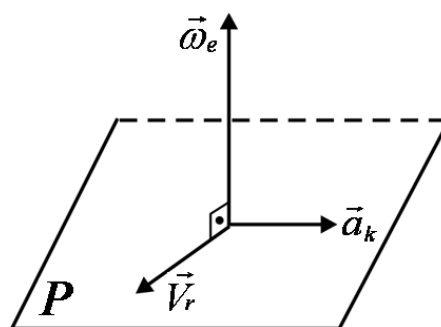
3) $\vec{V}_r'$ ni ko`chirma harakat aylanish tomoniga 90° ga buramiz.

Natijada hosil bo`lgan yo`nalish Koriolis tezlanish yo`nalashini ifodalaydi (111-rasm, a).

Agarda $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$ bo`lsa,  $\vec{a}_k$  yo`nalishini topish uchun $\vec{V}_r$ ni ko`chirma harakat aylanish tomoniga 90° ga buramiz (111-rasm, b).



a



b

111-rasm

(60.13) va (60.14) formulalarga ko'ra tezlanishlar modullari hamda barcha tezlanishlar yo'nalishi aniqlangandan so'ng, (60.12) tanlab olingan Ox , Oy , Oz o'qlariga proyeksiyalanadi, ya'ni:

$$a_{ax} = a_{rx}^{\tau} + a_{rx}^n + a_{ex}^{\tau} + a_{ex}^n + a_{kx},$$

$$a_{ay} = a_{ry}^{\tau} + a_{ry}^n + a_{ey}^{\tau} + a_{ey}^n + a_{ky},$$

$$a_{az} = a_{rz}^{\tau} + a_{rz}^n + a_{ez}^{\tau} + a_{ez}^n + a_{kz}$$

bu yerdan

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}$$

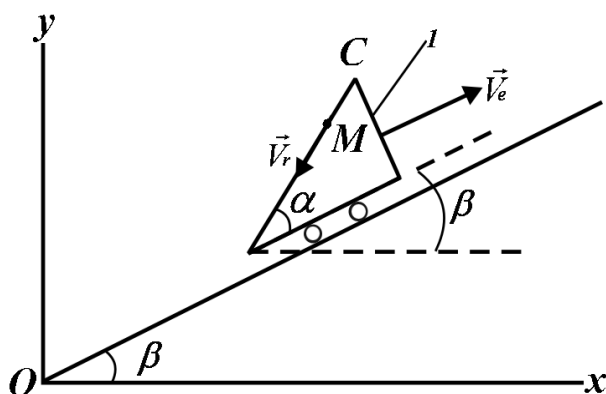
kelib chiqadi.

(60.14) dan foydalanib quyidagi xususiy hollarni keltirib chiqaramiz:

1. Qo'zg'aluvchi koordinata sistemasi ilgarlama harakatda ($\omega_e = 0$) bo'lsa $a_k = 0$ bo'ladi.
2. Berilgan onda nuqtaning nisbiy tezligi nolga teng bo'lsa $a_k = 0$, bo'ladi.
3. Berilgan onda ko'chirma harakat burchak tezligi nisbiy harakat tezligiga parallel [$(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 0$, $(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 180^\circ$] bo'lsa $a_k = 0$ bo'ladi.

61 - §. Masalalar

26-masala. Rasmda ko'rsatilgan 1-jism qiya tekislik bo'ylab $v_e = 2 \text{ m/s}$ tezlik bilan tekis harakat qiladi. Mazkur jismga nisbatan M nuqta $CM = s_r = 0,5 \text{ t(m)}$ qonunga ko'ra harakatlanadi. $t = 2$ sekund bo'lganda M nuqta absissasi aniqlansin. $t = 0$ da $x = 0$; $\alpha = \beta = 30^\circ$ (112-rasm).



112-rasm

Yechish: 112-rasmda ko'rsatilgan 1-jism tekis harakatda bo'lgani uchun: $s_e = V_e \cdot t$. M nuqta absissasini aniqlash uchun uning nisbiy va ko'chirma harakatdagi ko'chishlarini Ox o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$s_{rx} = -CM \cos(\alpha + \beta),$$

$$s_{ex} = V_e \cdot t \cos \beta.$$

Natijada:

$$x = s_{rx} + s_{ex} = -CM \cos(\alpha + \beta) + V_e t \cos \beta.$$

Son qiymatlarni qo'ysak $x = 2,96 \text{ m}$ kelib chiqadi.

27-masala. M nuqta radiusi $R=0,1m$ bo'lgan disk gardishi bo'ylab $OM=s_r=0,3t(m)$ qonuniga ko'ra harakat qiladi. Diskning O o'q atrofidagi aylanishi $\varphi_e=0,4t$ qonun bilan berilgan. M nuqta absolt tezligi aniqlansin (113- rasm).

Yechish: M nuqta nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi R bo'lgan aylanadan iborat bo'lib, nisbiy tezligining yo'nalishi 113-rasmdagidek bo'ladi.

Nisbiy tezlik miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 0,3(m/s).$$

M nuqtaning ko'chirma harakat trayektoriyasi radiusi OM bo'lgan aylana bo'lib, tezlik OM ga perpendikulyar ravishda harakat aylanishi tomon yo'naladi.

Ko'chirma tezlik moduli:

$$V_e = \omega_e \cdot OM = \frac{d\varphi_e}{dt} \cdot OM,$$

bu yerda

$$\frac{d\varphi_e}{dt} = 0,4(rad/s) \quad , \quad OM = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Natijada:

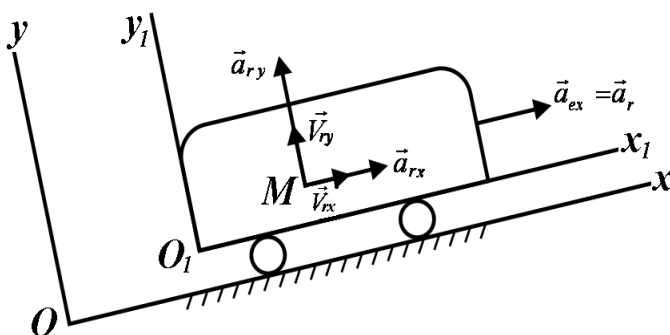
$$V_e = 0,4 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{2} = 0,0564(m/s).$$

$\triangle OMO_1$ tengyonli bo'lgani uchun $OM, \wedge OM_1 = 45^\circ$ bo'lib, $\vec{V}_r, \wedge \vec{V}_e = 45^\circ$. (59.11) ga ko'ra:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos 45^\circ}.$$

Son qiymatlarni qo'ysak, $V_a = 0,342(m/s)$ kelib chiqadi.

28-masala. Aravacha qiya tekislik bo'ylab $a_e = 2m/s^2$ ($\vec{a}_e \parallel Ox$) tezlanish bilan harakat qiladi. Aravachadagi M nuqta $x_1 = 3t^2$, $y_1 = 4t^2$ qonunga muvofiq harakatlanadi ($Ox_1 \parallel Ox$). M nuqtaning absolt tezlanishi topilsin (114-rasm) (x_1, y_1 – metr, t – sekund hisobida).



114-rasm

Yechish: M nuqta nisbiy tezligini aniqlaymiz. Masala shartiga ko'ra:

$$\begin{aligned} x_r &= x_1 = 3t^2, \\ y_r &= y_1 = 4t^2, \end{aligned}$$

bu yerda:

$$\begin{aligned} V_{rx} &= \dot{x}_1 = 6t, \\ V_{ry} &= \dot{y}_1 = 8t. \end{aligned}$$

Nisbiy harakat tezlanishining Ox , Oy o'qlaridagi proyeksiyalari:

$$a_{rx} = \frac{dV_{rx}}{dt} = 6 \text{ m/s}^2, a_{ry} = \frac{dV_{ry}}{dt} = 8 \text{ m/s}^2. \quad (61.1)$$

Ko'chirma harakat tezlanishining Ox , Oy o'qlaridagi proyeksiyalari :

$$a_{ex} = 2 \text{ m/s}^2, a_{ey} = 0. \quad (61.2)$$

Ko'chirma harakat ilgarihlama harakatdan iborat bo'lgani uchun $a_k = 0$ bo'ladi. Shuning uchun (60.10) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e. \quad (61.3)$$

(61.3) ni Ox , Oy o'qlariga proyeksiyalasak :

$$a_{ax} = a_{rx} + a_{ex}, a_{ay} = a_{ry} + a_{ey}. \quad (61.4)$$

(61.1) va (61.2) ni (61.4) ga qo'ysak :

$$a_{ax} = 6 + 2 = 8 \text{ m/s}^2, a_{ay} = 8 \text{ m/s}^2.$$

Demak, $a_a = 8\sqrt{2} = 11,28 \text{ m/s}^2$.

29-masala. Vertikal OO_1 o'q atrofida $\omega_e = 2t$ (1/s) burchak tezligi bilan aylanayotgan disk diametri bo'ylab M nuqta $V_r = 4t$ (m/s) tezlik bilan harakatlanadi. $t=2$ sekund bo'lganda M nuqtaning Koriolis tezlanishi aniqlansin (115-rasm).

Yechish: Bizga ma'lumki Koriolis tezlanish (60.14) formuladan aniqlanar edi, ya'ni:

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \wedge \vec{V}_r).$$

Masala shartiga ko'ra $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$ bo'lgani uchun

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ \quad (61.5)$$

bo'ladi. Berilganlarni (61.5) ga qo'ysak:

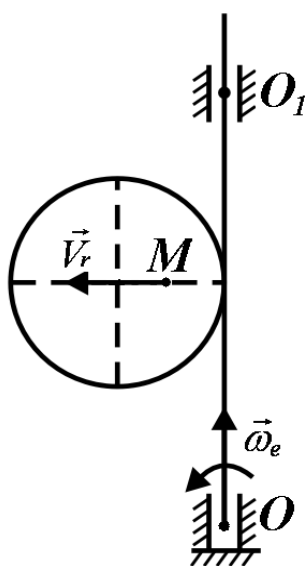
$$a_k = 2 \cdot 2t \cdot 4t = 16t^2$$

kelib chiqadi.

$t=2$ sekund bo'lganda

$$a_k = 16 \cdot 4 = 64 \text{ m/s}^2$$

bo'ladi.



115-rasm

30-masala. Radiusi $r = 0,5 \text{ m}$ bo'lgan halqa $\omega_e = 4(\text{rad/s})$ o'zgarmas burchak tezligi bilan rasm tekisligida aylanadi. Halqa bo'ylab M nuqta $V_r = 2 \text{ m/s}$ o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi. M nuqtaning 116-rasmda ko'rsatilgan holati uchun absolut tezlanishi topilsin (116-rasm).

Yechish: M nuqta nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi r bo'lgan aylanadan iborat bo'lib, o'zgarmas tezlik bilan harakat qiladi ($V_r = \text{const}$). Shu sababli:

$$a_r^r = 0, \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{r}$$

yoki

$$a_r^r = 0, \quad a_r^n = \frac{2}{0,5} \text{ m/s}^2. \quad (61.6)$$

M nuqta ko'chirma harakat trayektoriyasi radiusi $2r$ bo'lgan aylana bo'lib $\omega_e = \text{const}$.

Shuning uchun:

$$a_e^r = 0, \quad a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM$$

yoki

$$a_e^r = 0, \quad a_e^n = 16,2 \cdot 0,5 = 16 \text{ m/s}^2.$$

Halqa rasm tekisligida aylangani sababli $\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e$ bo'lib,

$$a_k = 2\omega_e V_r \cdot \sin 90^\circ$$

yoki

$$a_k = 16 \text{ m/s}^2$$

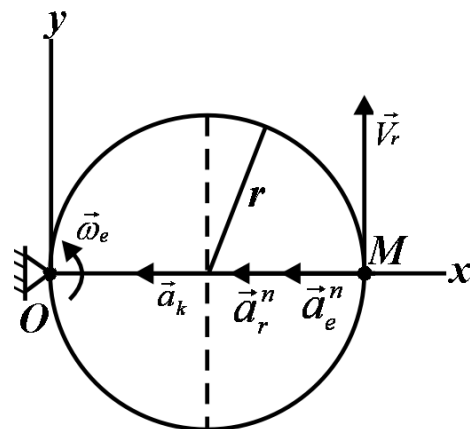
bo'ladi.

Rasmga $\vec{a}_r^n$, $\vec{a}_e^n$, $\vec{a}_k$ yo'nalishlarini qo'ysak, ular Ox o'qi bo'ylab joylashadi. Demak, M nuqta absolut tezlanishining moduli quyidagicha bo'ladi:

$$a_a = a_r^n + a_e^n + a_k$$

yoki

$$a_a = 40 \text{ m/s}^2.$$



116-rasm

Nazorat savollari

1. Moddiy nuqtaning qanday harakati nisbiy harakat deyiladi?
2. Moddiy nuqtaning qanday harakati ko`chirma harakat deyiladi?
3. Moddiy nuqtaning murakkab harakat qonuni qanday?
4. Moddiy nuqtaning absolut tezligi qanday aniqlanadi?
5. Moddiy nuqtaning absolut tezlanishi qanday aniqlanadi?
6. Koriolis (qo`shimcha) tezlanish nima?
7. Nuqtaning nisbiy va ko`chirma tezlanishi nima?
8. Tezliklarni qo`shish teoremasi haqida nimalarni bilasiz?
9. Tezlanishlarni qo`shish teoremasini ta`riflang.
10. Moddiy nuqtaning ko`chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo`lganda absolut tezlanishi qanday topiladi?
11. Qanday holda Koriolis tezlanish nolga teng bo`ladi?
12. Koriolis tezlanish yo`nalishi qanday aniqlanadi?