

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM

VAZIRLIGI

AL-XORAZMIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT

UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

«Funksiyalar nazariyasi» kafedrası

5460100-matematika ta'lim yo`nalishi

Boltayeva Malikaning

« Analitik to'plamlar va uning xossalari »

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ish ko`rildi va himoyaga

berildi «Funksiyalar

nazariyasi»

kafedrası mudiri:

f.-m.f.n.dots.Madraximov R.M.



« 20 » oy 2012 y.

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n. Vaisova M.D



Taqrizchi:

dots. Mamedov Q.



Urganch-2012 yil

MUNDARIJA

Kirish	3
1-§. Golomorf funksiyalar va ularning xossalari.....	5
2-§. Veyershtrassning boshlang'ich teoremasi	9
3-§. Analitik to'plamlarning xossalari	14
4-§. Analitik to'plamlarning strukturasi (tuzilishi).....	19
Adabiyotlar.....	24

Kirish

1997 yil 29 avgustda O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida qabul qilingan hamda bugungi kunda g'oyalari amaliyotga keng ko'lamda muvaffaqiyatli tadbiq etilayotgan O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni va «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga etkazish jarayonining mohiyati to'laqonli ochib berilgandir. Malakali kadrlar tayyorlash jarayonining har bir bosqichi o'zida ta'lim jarayonini samarali tashkil etish, uni yuqori bosqichlarga ko'tarish, shu bilan birga jaxon ta'limi darajasiga etkazish borasida muayyan maqsad va vazifalarni amalga oshirish lozim.

Ushbu maqsadlarning ijobiy natijaga ega bo'lishi, eng avvalo, yosh avlodga ilmiy bilimlar asoslarini puxta o'rgatish, ularda keng dunyoqarash hamda tafakkur ko'lamini hosil qilish, ma'naviy axloqiy sifatlarni shakllantirish borasidagi ta'limiy tarbiyaviy ishlarni samarali tashkil etishga bog'liqdir. Zero, yurtning porloq istiqbolini yaratish, uning nomini jahonga keng yoyish, ulug' ajdodlar tomonidan yaratilgan milliy madaniy merosni jamiyatga namoyish etish, ularni boyitish, mustaqil Respublikamizning rivojlangan mamlakatlar qatoridan joy egallashini ta'minlash yosh avlodni komil inson hamda malakali mutaxassis qilib tarbiyalashga bog'liqdir.

Ana shu vazifalardan kelib chiqqan xolda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o'rganish uchun uning asosi bo'lgan tushunchalarni mukammal o'zlashtirishimiz kerak.

Analitik to'plamlar nazariyasi ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning zamonaviy geometrik nazariyasining qismi hisoblanadi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi analitik to'plamlar nazariyasini o'rganishga bag'ishlangan. Analitik to'plamlar nazariyasini o'rganish Veyershtrassning boshlang'ich teoremasini o'rganishdan boshlanadi. Veyershtrassning bu teoremasi 1879 yilda chop qilingan. Bu teorema kompleks analiz bilan algebraning bog'liqligi asosida yotadi. U bir kompleks o'zgaruvchili golomorf funksiyaning nolga aylanishi haqidagi quyidagi teoremani umumlashtiradi:

Agar $f(a)=0$ bo'lsa ($f(z) \not\equiv 0$), u holda a nuqtaning biror atrofida

$f(z) = (z - a)^k \varphi(z)$ bo'ladi, bu yerda $\varphi(z)$ -golomorf va nolga aylanmaydi.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi paragrafida golomorf funksiyalarning nollari, ikkinchi paragrafida Veyershtrassning boshlang'ich teoremasi, uchinchi paragrafida analitik to'plamlarning xossalari o'rganilgan, to'rtinchi paragrafi esa analitik to'plamlarning lokal strukturalarini o'rganishga bag'ishlangan.

1-§. Golomorf funksiyaning nollari

Faraz qilaylik, biror $f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislik $\bar{C}$ da berilgan bo'lib, $a \in \bar{C}$ bo'lsin. Agar $f(a)=0$ bo'lsa, a kompleks son $f(z)$ funksiyaning noli deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu funksiyaning a nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (1)$$

Agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda

$$f(a) = C_0 = 0$$

bo'lib, (1) formula ushbu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik (1) da

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{m-1} = 0 \quad (2)$$

bo'lib,

$$C_m \neq 0$$

bo'lsin. U holda (1) tenglikdan

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} C_n (z-a)^n = (z-a)^m [C_m + C_{m+1}(z-a) + \dots]$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki, $C_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ va yuqoridagi (2) munosabatni etiborga olib,

$$f^{(i)}(a) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

bo'lishini topamiz.

Bu holda $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli deyiladi.

Shunday qilib, $z = a$ funksiyaning m karrali noli bo'lsa, u holda

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

bo'lib,

$$g(z) = C_m + C_{m+1}(z - a) + \dots$$

$g(a) \neq 0$ funksiya $z = a$ nuqtada holomorfl bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

ifodalanib, $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada holomorfl bo'lsa, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada holomorfl bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiya ushbu

$$f(z) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{z^n} \quad (3)$$

qatorga yoyiladi. $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin. Ravshanki, u holda

$$C_0 = f(\infty) = 0$$

bo'lib, (3) formula ushbu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{z^n} \quad (4)$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (4) formulada

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{m-1} = 0$$

bo'lib,

$$C_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi. U holda (4) dan

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} C_n \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^m} (C_m + C_{m+1} \frac{1}{z} + \dots) = \frac{1}{z^m} \varphi(z)$$

bo'lishini topamiz. Bu yerda

$$\varphi(z) = C_m + C_{m+1} \frac{1}{z} + \dots$$

funksiya uchun

$$\varphi(\infty) = C_m \neq 0$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \varphi(z)$$

ifodalanib, $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

Teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lib, shu $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin, $f(a) = 0$, u holda yo $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aynan nolga teng, $f(z) \equiv 0$, yoki a nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa noli bo'lmaydi.

Isbot. Shunday qilib, $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lgani uchun funksiya $z = a$ nuqta atrofida qatorga yoyiladi.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (5)$$

Aytaylik, (5) da barcha C_n lar nolga teng bo'lsin.

$$C_0 = C_1 = C_2 = \dots = 0$$

ravshanki, bu holda funksiya $z = a$ nuqta atrofida $f(z) \equiv 0$ bo'ladi. Endi (5) da

$C_0 = \dots = C_{m-1} = 0$ bo'lib, $C_m \neq 0$ bo'lsin. Bu holda $z = a$ nuqta $f(z)$

funksiyaning m karrali noli bo'lib, u quyidagicha $f(z) = (z - a)^m g(z)$ ifodalanadi. Bu erda $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada uzluksiz ham bo'ladi. Unda $g(a) \neq 0$ bo'lganligi sababli $z = a$ nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $g(z) \neq 0$ bo'ladi. Binobarin shu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa nollari bo'lmaydi. Bu xossa holomorf funksiya nollari yakkalangan bo'lishini bildiradi.

2-§. Veyershtrassning boshlang'ich teoremasi

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf $f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada aynan nolga teng bo'lmasin: $f(z) \not\equiv 0$

1-ta'rif. $f(z)$ funksiyaning nollari to'plami $A = \{z \in D : f(z) = 0\}$ ga $(n-1)$ o'lchovli analitik to'plam deyiladi ($\dim A = n-1$).

Faraz qilaylik, biror $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada yopiq $A \subset D$ to'plam berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $a \in A$ nuqta uchun shunday $U \ni a$ atrof va bu atrofda golomorf $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$ ($m \geq 1$) funksiyalar mavjud bo'lib,

$$\begin{aligned} A \cap U &= \{z \in U : f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\} = \\ &= \{f_1(z) = 0\} \cap \{f_2(z) = 0\} \cap \dots \cap \{f_m(z) = 0\} \end{aligned} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A to'plam D sohada aniqlangan analitik to'plam deyiladi.

Demak, ixtiyoriy o'lchovdagi analitik to'plam $(n-1)$ o'lchovli to'plamlarning kesishmasi sifatida ta'riflanadi. Agar (1) tenglikda barcha $f_j(z) \equiv 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) bo'lsa, $A \cap U = U$ bo'lib, sodda (trivial) holga kelamiz. Shu sababli, ko'pincha, (1) da aynan nolga teng bo'lgan funksiyalar yo'q deb qaraladi va deb olinadi.

Ma'lumki, golomorf funksiyalarning yagonolik teoremasiga ko'ra $\{f(z) = 0\}$ to'plam D da zich emasligi, ya'ni ichki nuqtalarga ega emasligini isbotlagan edik. Bundan ixtiyoriy analitik $A \subset D$ to'plamning ham shu xossaga ega ekanligi kelib chiqadi.

1-Teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $a = (a, a_n) \in \mathbb{C}^n$ nuqtada (nuqtaning biror atrofi $U \ni a$ da) golomorf bo'lib, $f(a) = 0$, $f(a, z_n) \not\equiv 0$ bo'lsin. U holda a nuqtaning biror $V = V \times V_n$ atrofida

$$f(z) = [(z_n - a_n)^k + c_1(z)(z_n - a_n)^{k-1} + \dots + c_k(z)] \varphi(z)$$

bo'ladi, bunda

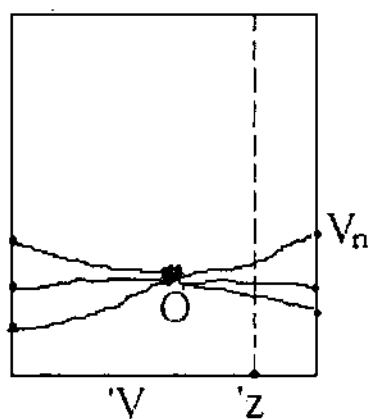
$$k \geq 1, \quad c_j(z) \in \mathcal{O}(V), \quad c_j(a) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

va $\varphi(z)$ funksiya V atrofda nolga ega bo'lmagan holomorflik funksiya:
 $\varphi(z) \neq 0, \quad z \in V$.

E s l a t m a. Teoremadagi $f(a, z_n) \neq 0$ shart muhim bo'lmasdan, u bajarilmagan taqdirda, chiziqli akslantirish yordamida har doim bu shart bajariladigan yangi koordinatalar tizimiga o'tish mumkin.

Veyershtrassning boshlang'ich teoremasi analitik to'plamlarning strukturasi (tuzulmasi) ni o'rganishda katta ahamiyatga ega.

Teoremaning isboti. Chiziqli almashtirish $(z, z_n) \rightarrow (z, z_n - a_n)$ yordamida $a_n = 0$ bo'lishiga erishamiz. Teoremaning shartidan foydalanib, shunday $r_n > 0$ topish mumkinki, $\{0 < |z_n| < r_n\}$ teshik doirada $f(a, z_n) \neq 0$ bo'ladi. Ayni paytda, $f(z)$ funksiyaning uzluksizligidan shunday $V \ni a$ atrof topiladiki, $z \in V, |z_n| = r_n$ da $f(z, z_n) \neq 0$ bo'ladi.



1 - chizma

Endi $V_n = \{|z_n| < r_n\}$ deb, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z, z)}{f('z, z_n)} dz_n = k('z)$$

integralni qaraylik. Bu integral ostidagi funksiya $'z \in 'V$, $z_n \in \partial V_n$ da uzluksiz. Binobarin, $k('z)$ funksiya $'V$ da uzluksiz bo'ladi. Ikkinchi tomondan argumentlar prinsipiga ko'ra $k('z)$ funksiya $f('z, z_n)$ funksiyaning tayinlangan $'z \in 'V$ da z_n bo'yicha nollari (karralari e'tiborga olinganda) soniga teng. Bundan $k('z)$ ning uzluksiz va faqat butun qiymatlarni qabul qilishi kelib chiqadi. Demak, $k('z) \equiv k = const$. Tayinlangan $'z \in 'V$ da $f('z, z_n)$ funksiyaning nollarini $\alpha_j('z)$ ($j=1,2,...,k$) deb ushbu

$$P_k('z, z_n) = \prod_{j=1}^k (z_n - \alpha_j('z)) = z_n^k + c_1('z)z_n^{k-1} + \dots + c_k('z)$$

psevdopolinomni qaraylik.

Bu psevdopolinomning koeffitsienlari $c_j('z)$, $j=1,2,...,k$, $'V$ da golomorf bo'ladi. Haqiqatan ham, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} z_n^\nu \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} f('z, z)}{f('z, z_n)} dz_n, \quad \nu = 0,1,2,...$$

integrallar integral ostidagi funksiya $'z \in 'V$ bo'yicha golomorf bo'lganligi uchun $'V$ da golomorf bo'ladi. Ikkinchi tomondan, umumlashgan argumentlar prinsipiga

ko'ra, u $S_\nu = \sum_{j=1}^k \alpha_j^\nu('z)$ simmetrik polinomga teng bo'ladi. Algebra kursidan

ma'lumki, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ larga nisbatan simmetrik bo'lgan har qanday polinom asosiy simmetrik polinom $S_1, S_2, \dots$ lar orqali ko'phad shaklida ifodalanadi.

Jumladan, $C_1, C_2, \dots, C_k$ koeffitsientlar cheklita $S_1, S_2, \dots$ larning kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Bu esa $C_1, C_2, \dots, C_k$ koeffitsientlarning V da golomorf bo'lishini bildiradi. Endi ushbu

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{P_k(z)}$$

funksiyani qaraylik. Har bir tayinlangan $z \in V$ da $\varphi(z, z_n)$ funksiya V_n da golomorf bo'lib, quyidagi

$$\varphi(z, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} \frac{\varphi(\xi, z_n)}{\xi - z_n} d\xi$$

Koshi formulasi o'rinli. Integral ostidagi funksiya $\varphi(z, z_n)$ bo'yicha $V \times V_n$ golomorf bo'lganligi uchun integral ham golomorf bo'ladi. Demak, $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ bo'lib, V da $\varphi(z) \neq 0$ bo'ladi teorema isbotlandi.

Isbot etilgan teoremadan ko'rinadiki, golomorf funksiylarning nollarini, lokal ravishda, a nuqtaning atrofida o'rganish

$$P_k(z, z_n) = (z_n - a_n)^k + c_1(z)(z_n - a_n)^{k-1} + \dots + c_k(z)$$

psevdopolinomning nollarini o'rganishga kelar ekan. Teoremada k soni $f(a, z_n)$ funksiyaning $z_n = a_n$ nuqtadagi nolining karrasiga teng va

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_n} \right|_{z=a} \neq 0$$

bo'lganda $k = 1$ bo'ladi. Bu holda

$$f(z) = [(z_n - a_n) + c(z)]\varphi(z)$$

bo'lib, $A: \{f(z) = 0\}$ analitik to'plam $z_n = a_n - c(z)$ grafikni ifodalaydi.

Agar $f(z, z_n) = 0$ tenglamaga oshkormas funksiya sifatida qarasak, u

$z_n = a_n - c('z)$ yechimga ega bo'lishini ko'ramiz. Bunday nuqtalar A to'plamning *regulyar* nuqtalari deyiladi. Regulyar nuqtalar to'plami A^0 kabi belgilanadi.

Umumiy holda, $A \subset D$ analitik to'plamni qaraylik. Ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $a \in A$ nuqta atrofida A quyidagicha ifodalanadi:

$$A \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$$

Endi $a = 0$ deb, koordinatalar o'qini shunday tanlaymizki, $f_j(0, z_n) \neq 0$ bo'lsin, $j = 1, 2, \dots, m$. Veyershtrassning boshlang'ich teoremasiga ko'ra,

0 ning biror $V \ni 0$ atrofida f_j funksiya

$$f_j(z) = P_j(z) \cdot \varphi_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(V)$, $\varphi_j \neq 0$ va

$$P_j(z) = z_n^{k_j} + c_1^j('z) z_n^{k_j-1} + \dots + c_k^j('z)$$

psevdopolinomlar, $j = 1, 2, \dots, m$. Demak, V atrofida A to'plam $P_1, P_2, \dots, P_m$ psevdopolinomlarning umumiy nollaridan iborat bo'ladi.

3-§. Analitik to'plamlarning xossalari

Endi analitik to'plamlarning xossalarini keltiramiz:

1-xossa. *Ixtiyoriy kompleks tekislik Π ($\dim \Pi = k$) uchun $\Pi \cap D$ analitik to'plam bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, $a \in A$ nuqta va $U \ni a$ atrof uchun

$$A \cap U = \{f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$$

bo'lsa,

$$A \cap \Pi \cap U = \{f_1|_{\Pi} = \dots = f_m|_{\Pi} = 0\}$$

bo'ladi. Bu yerda $f_j|_{\Pi}$, $j = 1, 2, \dots, m$, f_j funksiyaning Π tekislikdagi kesimi bo'lib, u $\Pi \cap D$ da golomorf bo'ladi.

2-xossa. *$D \subset C$ sohada analitik to'plam ($n = 1$ bo'lgan hol) D da diskret bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $a \in A$ nuqtaning $U \ni a$ atrofi topiladiki,

$$A \cap U = \{f_1(z) = f_2(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$$

bo'ladi. Demak, $A \cap U \subset \{f_1(z) = 0\}$.

Tekislikda golomorf funksiyalar nollarining xossasiga ko'ra $\{f_1(z) = 0\}$ to'plam, demak, $A \cap U$ to'plam ham U da diskret bo'ladi.

$a \in A$ nuqtaning ixtiyoriy bo'lishi va A to'plamning D da yopiqligidan A to'plamning D da diskret ekanligi kelib chiqadi.

3-xossa. *Analitik to'plam sohani bo'laklarga ajrata olmaydi, yani ixtiyoriy $B \subset D$ atrof olinganda ham $B \setminus A$ to'plam bog'lamli bo'ladi.*

Isbot. $B \setminus A$ to'plamdan ixtiyoriy $p, q \in B \setminus A$ nuqtalarni olaylik va shu nuqtalardan o'tuvchi l kompleks to'g'ri chiziqni qaraylik. Ravshanki, $l \cap B \cap A$ to'plam $l \cap B$ da analitik to'plam bo'ladi. Yuqoridagi 2-xossadan uning diskretligi kelib chiqadi. Demak, p va q nuqtalarini B da kesishmaydigan siniq chiziq bilan

birlashtirish mumkin.

4-xossa. D sohada kompakt bo'lgan analitik to'plam chekli to'plam bo'ladi.

Isbot. Ravshanki,

$$\overline{A} \cap \partial D = \emptyset$$

bo'lganligidan A to'plamning $\mathbb{C}^n$ fazoga nisbatan ham analitik bo'lishi kelib chiqadi. Demak, A to'plam $\mathbb{C}^n$ da ham kompakt analitik to'plam bo'ladi.

$n = 1$ holda 2- xossaga ko'ra A diskret bo'lib, uning kompaktligidan, A to'plamning chekli bo'lishligini ko'ramiz. Endi $n \geq 2$ bo'lgan holni qaraylik. Aytaylik, $A \subset \mathbb{C}^n$ to'plamning $\mathbb{C}^{n-1}$ fazodagi proektsiyasi $\pi(A)$ bo'lsin: $\pi('z, z_n) = 'z$. Biz $\pi(A)$ ning $\mathbb{C}^{n-1}$ da analitik ekanligini ko'rsatamiz.

Biror $'a \in \pi(A)$ nuqtani olib, ushbu

$$l: 'z = 'a$$

to'g'ri chiziqni qaraylik. Unda $l \cap A$ to'plamning $l \approx C$ tekislikda kompakt va analitik bo'lishidan uning chekli to'plam ekanligi kelib chiqadi:

$$l \cap A = \{('a, p_1), ('a, p_2), \dots, ('a, p_\mu)\}.$$

Ayni paytda $a = ('a, p_s)$, $1 \leq s \leq \mu$, nuqtaning shunday atrofi $U \ni a$ topiladiki,

$$A \cap U = \{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\} \quad (2)$$

bo'ladi, bunda $f_j \in \mathcal{O}(U)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Ma'lumki, $l \cap A$ diskret (chekli) to'plam. Unda biror f_j , masalan, f_1 uchun $f_1('a, z_n) \not\equiv 0$ bo'ladi. (2) ifodada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\psi_j(z) = \begin{cases} f_j(z), & \text{agar } f_j(a, z_n) \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ f_j(z) + f_1(z), & \text{agar } f_j(a, z_n) \equiv 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

U holda $A \cap U = \{ \psi_1(z) = \psi_2(z) = \dots = \psi_m(z) = 0 \}$ bo'lib, $\psi_j(a, z_n) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, shart bajariladi. Binobarin, ψ_j lar uchun Veyershtrassning boshlang'ich teoremasini qo'llash mumkin. Demak, shunday $V \ni a$ atrof mavjudki, V da

$$\psi_j(z, z_n) = P_j(z, z_n) \cdot \varphi_j(z)$$

bo'ladi, bunda

$$P_j(z, z_n) = (z_n - a_n)^{k_j} + c_1^j(z) (z_n - a_n)^{k_j-1} + \dots + c_{k_j}^j(z)$$

pseudopolinom, $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(V)$, $\varphi_j(z) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$. Natijada

$$A \cap U = \{ P_1 = P_2 = \dots = P_m = 0 \}$$

tenglikka kelamiz.

Biror z^0 nuqta $\pi(A \cap U)$ to'plamga tegishli, $z^0 \in \pi(A \cap U)$

bo'lishi uchun, tayinlangan $z = z^0$ nuqtada z_n argumentli $P_1(z^0, z_n), P_2(z^0, z_n), \dots, P_m(z^0, z_n)$ polinomlar umumiy nolga (ildizga) ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Algebra kursidan ma'lumki, ikkita

$$P(\xi) = a_0 \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \dots + a_m$$

$$Q(\xi) = b_0 \xi^k + b_1 \xi^{k-1} + \dots + b_k$$

polinomlarning umumiy ildizga ega bo'lishi uchun ularning rezultati

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & & & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m & \\ b_0 & b_1 & \dots & b_k & & & & & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_k & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & b_0 & b_1 & \dots & b_k & \end{vmatrix} = 0$$

(bo`sh joylar 0 lar bilan to`ldiriladi) bo`lishi zarur va etarli.

Demak,

$$\pi(A \cap U) = \{ 'z \in 'V : R(P_\nu, P_\mu) = 0, \nu, \mu = 1, 2, \dots, m \}.$$

P_ν, P_μ – psevdopolinomlarning koeffitsientlari orqali ifodalanadigan $R(P_\nu, P_\mu)$ rezultantlarning $'V$ da golomorf bo`lishidan  $\pi(A \cap U)$  proektsiyaning  $'V$  da analitik to`plam bo`lishi kelib chiqadi.

$$a = ('a, p_s) \in l \cap A, s = 1, 2, \dots, \mu,$$

nuqtaning ixtiyoriyligidan esa shunday umumiy $'V \ni 'a$ atrof topiladiki, $\pi(A) \cap 'V$ to`plam  $'V$  da analitik bo`ladi. Bu $\pi(A)$ ning $\mathbf{C}^{n-1}('z)$ da analitik to`plam bo`lishini bildiradi.

Yuqoridagilarni ketma – ket tatbiq qilib quyidagi xulosaga kelamiz. Faraz qilaylik,

$$\pi_j : (z_1, z_n, \dots, z_n) \rightarrow z_j$$

akslantirish $\mathbf{C}^n$ ning $\mathbf{C}(z_j) \approx Oz_j, j = 1, 2, \dots, n$, koordinata o`qiga proektsiyasi bo`lsin. U holda $\pi_j(A)$ to`plam  $\mathbf{C}(z_j)$  tekislikda analitik to`plam

bo'lib, shartga ko'ra u kompaktdir. Demak, $\pi_j(A)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) chekli to'plam. Undan A to'plamning ham chekli ekanligi kelib chiqadi .

4-§. Analitik to'plamlarning strukturasi (tuzilishi).

Aytaylik, $a \in A$ nuqtaning biror atrofi $U \ni a$ da

$$A \cap U = \{f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0\}, m \leq n,$$

bo'lsin. So'ng (m, n) – tartibidagi Yakobi matritsasi

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{vmatrix},$$

ning rangi a nuqtada maksimal m ga teng bo'lsin. Demak, J matritsada kamida bitta minor, masalan

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_{n-m+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi. U holda biror $a \in V \subset U$ atrofda

$$f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0$$

tenglamalar sistemasi

$$z_{n-m+1} = \varphi_1(z_1, \dots, z_m), \dots, z_n = \varphi_m(z_1, \dots, z_m)$$

yechimga ega bo'ladi. Bu esa A to'plamning V atrofda $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$

vektor-funksiyaning grafigi ekanini bildiradi.

Yuqoridagi a nuqta A to'plamning *regulyar nuqtasi* deyilib, $n - m$ ga esa A ning a nuqtadagi *o'lchami* deyiladi:

$$\dim_a A = n - m, \quad \text{codim}_a A = m.$$

Odatda regulyar nuqtalar to'plami A^0 kabi belgilanadi.

Ushbu $\dim A = \max_a \dim_a A$ miqdor A to'plamning *o'lchami* deyiladi.

Ravshanki, $0 \leq \dim A < n$ bo'lib, $A = D$ bo'lgan trivial holda $\dim A = n$ deb olinadi.

Agar $m = n$ bo'lsa,

$$f_1(z) = 0, f_2(z) = 0, \dots, f_n(z) = 0,$$

tenglamalar sistemasi V atrofda yagona $z = a$ yechimga ega bo'lib, $a \in A$ yakkaalangan nuqta bo'ladi. Bundan 0 o'lchamli, $\dim A = 0$, to'plamning D da diskretligi kelib chiqadi.

Biz quyida eng sodda, $\dim A = n - 1$ bo'lgan holda A to'plamning lokal tuzilishini o'rganamiz. Faraz qilaylik,

$$A = \{f('z, z_n) = 0\}$$

bo'lib, $0 \in A$ nuqtada $f('0, z_n) \neq 0$ bo'lsin. U holda biror $V = 'V \times V_n \ni 0$ atrofda Veyershtass teoremasiga ko'ra

$$f('z, z_n) = [z_n^k + c_1('z)z_n^{k-1} + \dots + c_k('z)] \varphi(z) \quad (1)$$

bo'ladi va A ni 0 nuqta atrofida lokal o'rganish

$$P('z, z_n) = z_n^k + c_1('z)z_n^{k-1} + \dots + c_k('z)$$

psevdopolinomning nollarini o'rganishga keladi:

$$A = \{P = 0\}, \quad \deg = k.$$

1-ta'rif. Agar P psevdopolinom ikkita trivial bo'lmagan psevdopolinomlar ko'paytmasi shaklida ifodalansa, ya'ni

$P = P_1 \cdot P_2$ bo'lib, $\deg P_1 \neq 0$, $\deg P_2 \neq 0$ bo'lsa, P keltiriladigan psevdopolinom deyiladi.

Algebraik geometriyada quyidagi o'ta muhim teorema isbotlanadi: ixtiyoriy psevdopolinom P ushbu

$$P = P_1^{j_1} \cdot P_2^{j_2} \cdot \dots \cdot P_m^{j_m} \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalandi, bunda P_k keltirilmaydigan psevdopolinom, $\deg P_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$). (1) ifodadagi P ni (2) ko'rinishda yozib,

$$A = \{P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_m = 0\}$$

bo'lishini topamiz, bunda $P_1, P_2, \dots, P_m$ lar keltirilmaydigan, turli psevdopolinomlar. Bundan, $Q = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_m$ psevdopolinom uchun

V sohada Q va $\frac{\partial Q}{\partial z_n}$ psevdopolinomlarning rezultanti

$$R('z) = R(Q, \frac{\partial Q}{\partial z_n}) \neq 0$$

bo'ladi. Ixtiyoriy $('z^0, z_n^0) \in A$ va $R('z^0) \neq 0$ bo'lgan nuqtada

$Q('z^0, z_n^0) = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z_n}('z^0, z_n^0) \neq 0$. Demak, bunday nuqta A to'plamning

regulyar nuqtasi bo'lib, bu nuqtaning biror atrofida A to'plam

grafikni ifodalaydi: $z_n = \alpha('z)$. Bundan esa

$$A = \{f('z, z_n) = 0\}$$

analitik to'plamda A^0 bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam va u A da zich ekanligi kelib chiqadi. Binobarin, $A \setminus A^0$ – yopiq, zich bo'lmagan to'plam. $A \setminus A^0$ to'plam A ning irregulyar nuqtalari to'plami bo'lib, u o'lchovi $(n-1)$ dan kichik bo'lgan

analitik to'plamdir.

Endi, umumiy holda, analitik to'plamlarning tuzilmasi, geometrik xossalarini keltiramiz.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $A \subset D$ analitik to'plam berilgan bo'lsin. Ravshanki, $\dim A = n$ bo'lganda $A = D$ bo'ladi. Bu trivial holni qaramaymiz. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$A_j^0 = \{a \in A : a \text{ - regulyar}, \dim_a A = j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Agar $\dim A = k$ bo'lsa, $A_k^0 \neq \emptyset$, $A_{k+1}^0 = A_{k+2}^0 = \dots = A_{n-1}^0 = \emptyset$ bo'ladi.

2-ta'rif. A_j^0 to'plamning yopig'i $\overline{A_j^0} = A_j$ to'plam A ning j o'lchovli komponentasi deyiladi. Agar $j < k$ da $A_j = \emptyset$ bo'lsa, ya'ni A to'plam bitta komponentadan tashkil topgan bo'lsa A sof k o'lchovli analitik to'plam deyiladi.

Masalan, $A = \{f(z) = 0\}$ to'plam sof $(n-1)$ o'lchovli analitik to'plam bo'ladi.

1 - t e o r e m a. Aytaylik, $A \subset D$ ixtiyoriy analitik to'plam bo'lsin, $\dim A = k$. U holda:

a) A_j komponentalar ($j = 0, 1, 2, \dots, k$) sof j o'lchamli analitik to'plam bo'ladi. A_j^0 to'plam A_j da zich va $A_k^0 \neq \emptyset$ dir;

b) $A_j \setminus A_j^0$ analitik to'plam, $\dim A_j \setminus A_j^0 < j$ bo'ladi;

v) $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$ tenglik o'rinli va ixtiyoriy j ($0 < j < k$) uchun $A_j \cap A_{j+1}$ analitik to'plamning o'lchami $\dim A_j \cap A_{j+1} < j$ bo'ladi.

Ma'lumki, D sohada berilgan chekli sondagi analitik to'plamlar yig'indisi hamda kesishmasi analitik to'plamlar bo'ladi. Quyidagi tasdiq (teorema) o'rinlidir.

2 – t e o r e m a Aytaylik, D sohada sanoqli sondagi

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

analitik to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

kesishma analitik to'plam bo'ladi.

Adabiyotlar

1. М.Эрве. Функции многих комплексных переменных . М.: Мир , 1965.
2. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М .: Наука , 1966.
3. Б.В. Шабат. Введение в комплексный анализ. 1-част , Москва , Наука, 1968г.
4. Б .В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Т.2, М.: Наука, 1976.
5. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества . М.: Наука, 1985.
6. Ш.Максудов, М.Салохиддинов, С.Сирожиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент , “Ўқитувчи” ,1996 йил.
7. Г. Худайберганов, А.Ворисов, Х.Мансуров. Комплекс анализ. Тошкент, “Университет” , 1998 йил.
8. А . Садуллаев . Кўп аргументли голоморф функциялар . Урганч, 2004 й.

