

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
AI-XORAZMIY NOMIDAGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

**Matematika fakul'teti "Funksiyalar nazariyasi" kafedrası
matematika ta'lim yo'nalishi 401 – matematika guruhi tolibi**

Dushamov Diyorbekning

**"Umumlashgan funksiyalar va ularning xossalari"
mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

ISH KO'RILDI VA HIMOYAGA

TAVSIYA QILINDI

"Funksiyalar nazariyasi"

kafedrası mudiri : f.-m.f.d. Imomqulov S.A.

«_____» _____2009 y.

Ilmiy rahbar: f.-m.f.n. Yarmetov J.R

Taqrizchi: dots. Yaxshimuratov A

Urganch 2010

ANNOTATSIYA

Umumlashgan funksiya klassik funksiya tushunchasini umumlashmasidir. Bu umumlashma, masalan, moddiy nuqta zichligini, nuqtaviy zaryad zichligini matematik formada ifodalashga imkon beradi.

Birlik massaga ega bo'lgan moddiy nuqtani zichligini hisoblaymiz. Birlik massani $U_\varepsilon = \{x \in R^n : |x| < \varepsilon\}$ sharga teng taqsimlaymiz, natijada

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

o'rtacha zichlikka ega bo'lamiz.

$f_\varepsilon(x)$ o'rtacha zichlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi nuqtali limitini izlayotgan zichlik $\delta(x)$ sifatida qabul qilamiz, ya'ni

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$\delta(x)$ zichlik funksiyasi uchun

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in V \\ 0, & 0 \notin V \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'lishi kerak, bunda $V \subset R^n$. (1) munosabatga ko'ra, bu tenglikning chap tomoni nolga teng bo'ladi, demak $f_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi nuqtali limitini $\delta(x)$ zichlik funksiya sifatida qabul qilib bo'lmaydi.

Endi $f_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi sust limitini hisoblaymiz ya'ni R^n da ixtiyoriy $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya uchun $\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx$ sonli ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitini hisoblaymiz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, $\varphi(x)$ funksiya uzluksizligidan $\forall \eta > 0$ uchun $\exists \varepsilon_0 > 0$, $|x| < \varepsilon_0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x larda $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ bo'ladi, bundan $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ larda

$$\begin{aligned} \left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x|<\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta \end{aligned}$$

Demak, $f_\varepsilon(x)$ ketma- ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi sust limiti har bir uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga $\varphi(0)$ sonini mos qo'yuvchi funksionallardan iborat ekan, ushbu funksionalni $\delta(x)$ zichlik funksiya ta'rifi sifatida qabul qilamiz, bu Dirakning δ – funksiyasidir.

Ixtiyoriy $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$:

$$\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

bo'ladi, bunda (δ, φ) δ funksionalni φ funksiyadagi $\varphi(0)$ qiymati.

M u n d a r i j a

Kirish.....	3
1-§. Asosiy funksiyalar fazosi.....	5
2-§. Umumlashgan funksiyalar fazosi va umumlashgan funksiyalar ustida amallar.....	8
3-§. Umumlashgan funksiya hosilasi va uning xossalari.....	17
4-§. Umumlashgan funksiyalarning to'g'ri ko'paytmasi va o'ramasi...21	
5-§. Musbat umumlashgan funksiyalar va o'lchovlar.....	25
Foydalanilgan adabiyotlar.....	27

Kirish

Umumlashgan funksiya klassik funksiya tushunchasini umumlashmasidir. Bu umumlashma, masalan, moddiy nuqta zichligini, nuqtaviy zaryad zichligini matematik formada ifodalashga imkon beradi.

Birlik massaga ega bo'lgan moddiy nuqtani zichligini hisoblaymiz. Birlik massani $U_\varepsilon = \{x \in R^n : |x| < \varepsilon\}$ sharga teng taqsimlaymiz, natijada

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

o'rtacha zichlikka ega bo'lamiz.

$f_\varepsilon(x)$ o'rtacha zichlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi nuqtali limitini izlayotgan zichlik $\delta(x)$ sifatida qabul qilamiz, ya'ni

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$\delta(x)$ zichlik funksiyasi uchun

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in V \\ 0, & 0 \notin V \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'lishi kerak, bunda $V \subset R^n$. (1) munosabatga ko'ra, bu tenglikning chap tomoni nolga teng bo'ladi, demak $f_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi nuqtali limitini $\delta(x)$ zichlik funksiya sifatida qabul qilib bo'lmaydi.

Endi $f_\varepsilon(x)$ ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi sust limitini hisoblaymiz ya'ni R^n da ixtiyoriy $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya uchun $\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx$ sonli ketma-ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ da limitini hisoblaymiz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, $\varphi(x)$ funksiya uzluksizligidan $\forall \eta > 0$ uchun $\exists \varepsilon_0 > 0$, $|x| < \varepsilon_0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x larda $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ bo'ladi, bundan $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ larda

$$\left| \int f_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x|<\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta$$

Demak, $f_{\varepsilon}(x)$ ketma- ketlikni $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi sust limiti har bir uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga $\varphi(0)$ sonini mos qo'yuvchi funksionallardan iborat ekan, ushbu funksionalni $\delta(x)$ zichlik funksiya ta'rifi sifatida qabul qilamiz, bu Dirakning δ – funksiyasidir.

Ixtiyoriy $\varphi(x)$ uzluksiz funksiya uchun $\varepsilon \rightarrow 0$ da $f_{\varepsilon}(x) \rightarrow \delta(x)$:

$$\int f_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

bo'ladi, bunda (δ, φ) δ funksionalni φ funksiyadagi $\varphi(0)$ qiymati.

Endi birlik massani hosil qilish uchun $\delta(x)$ funksionalni $\varphi(x)=1$ funksiyadagi qiymatini hisoblaymiz: $(\delta, 1)=1(0)=1$.

Agar $x=0$ nuqta m massaga ega bo'lsa, u holda zichlik $m \cdot \delta(x)$ ga teng bo'ladi, agarda m massa x_0 nuqtada bo'lsa zichlik $m \cdot \delta(x - x_0)$, umuman har xil $x_k, k=1,2,...,N$ nuqtalarga m_k massa qo'yilgan bo'lsa, zichlik funksiya

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Moddiy nuqtadagi zichlik klassik funksiya tushunchasi orqali ifodalanmas ekan, u chiziqli uzluksiz funksionallar (umumlashgan funksiyalar) yordamida ifodalanar ekan [2].

Ushbu Bitiruv malakaviy ishida umumlashgan funksiyalar (§ 1), ularning xossalari (§ 2), ular ustida amallar (§ 3) o'rganilgan. Oxirgi § 5 da esa musbat umumlashgan funksiyalar va o'lchovlar orasidagi munosabat o'rganilgan.

1-§. Asosiy funksiyalar fazosi.

Kirish qismida keltirilgan misoldan ko'rinadiki δ -funksiya uzluksiz funksiyalar orqali chiziqli uzluksiz funksional sifatida aniqlandi, ya'ni uzluksiz funksiyalar δ -funksiya uchun asosiy funksiya hisoblanadi. Umumlashgan funksiyalarni chiziqli uzluksiz funksiyalar sifatida aniqlash maqsadida asosiy funksiyalar fazosini aniqlash zarur.

$G \subset R^n$ soha va unda $\varphi(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar biror $G_1 \subset G$ sohadan tashqarida $\varphi(x) \equiv 0$ bo'lsa, $\varphi(x)$ funksiya G sohada finit deyiladi. $\varphi(x) \neq 0$ nuqtalar to'plamining yopilmasi $\varphi(x)$ funksiyaning tashuvchisi deyiladi:

$$\text{supp}\varphi(x) = \overline{\{x : x \in R^n, \varphi(x) \neq 0\}}$$

R^n fazoda aniqlangan cheksiz marta differentsiallanuvchi finit funksiyalar asosiy funksiyalar to'plami deyiladi. Asosiy funksiyalar to'plamini $D = D(R^n)$ bilan belgilaymiz.

D to'plamda yaqinlashish tushunchasini quyidagicha kiritamiz: D dan olingan $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ funksiyalar ketma-ketligi $\varphi \in D$ funksiya yaqinlashadi deyiladi, agar

1) $\exists R > 0 : \text{supp}\varphi_k \subset U_R$

2) har bir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ multiindeks uchun

$$\partial^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{\rightarrow} \partial^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

1) va 2) shartlar bajarilganda D da $\varphi_k(x) \rightarrow \varphi, \quad k \rightarrow \infty$ kabi yoziladi.

Chiziqli D to'plam yuqorida kiritilgan yaqinlashish tushunchasi bilan birgalikda asosiy funksiyalar fazosi deyiladi.

Asosiy funksiyalar fazosida $\partial^\beta \varphi(x)$ differentsiallashtirish amali D dan D ga uzluksiz akslantirish bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $\varphi_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$, bo'lsa, u holda

1) Biror $R > 0$ uchun $|x| > R$ da $\varphi_k(x) = 0$,

2) Har bir α uchun $\partial^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{\rightarrow} 0, \quad k \rightarrow \infty$.

Demak, $\text{supp} \partial^\beta \varphi_k(x) \subset U_R$ va $\partial^\alpha [\partial^\beta \varphi_k(x)] = \partial^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, ya'ni

$$\partial^\beta \varphi_k(x) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Xuddi shunday $\varphi(Ay + b)$ va $a(x) \cdot \varphi(x)$, $a(x) \in C^\infty(R^n)$ amallar ham D dan D ga uzluksiz akslantirish bo'ladi.

Tashuvchisi biror $G \subset R^n$ sohaga tegishli bo'lgan asosiy funksiyalar to'plamini $D(G)$ orqali belgilaymiz.

$$D(G) \subset D(R^n) = D \quad (\text{ta'rifga ko'ra}).$$

Noldan farqli asosiy funksiyaga quyidagi "shapkacha" funksiya misol bo'ladi:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

bunda C_ε o'zgarmas son

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$$

shart bilan tanlangan, ya'ni

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int_{U_1} e^{\frac{1}{1-|\xi|^2}} d\xi = 1.$$

Lemma 1. Ixtiyoriy $G \subset R^n$ soxa va $\varepsilon > 0$ son uchun $\exists \eta(x) \in C^\infty(R^n)$
 $0 \leq \eta(x) \leq 1$; $\eta(x) = 1$, $x \in G_\varepsilon$; $\eta(x) = 0$ $x \notin G_{3\varepsilon}$, bunda $G_\varepsilon = \bigcup_{x \in G} U(x, \varepsilon) - G$
sohaning ε atrofi.

Teorema 1.1. $D(G)$ to'plam $L_2(G)$ fazoda zich.

Isbot. $f \in L_2(G)$ va $\forall \varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin. Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasiga ko'ra $\exists G' \subset G$:

$$\int_{G \setminus G'} |f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}.$$

Ko'phadlar to'plami $L_2(G)$ da zichligidan $\exists P$:

$$\int_{G'} |f(x) - P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}.$$

$G'' \subset G'$ sohani shunday tanlaymizki,

$$\int_{G' \setminus G''} |P(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{5}.$$

Lemmaga ko'ra $\exists \eta \in D(G')$: $0 \leq \eta \leq 1$ $\eta(x) = 1$, $x \in G''$. U holda $P_\eta \in D(G)$ va

$$\begin{aligned} \|f - P_\eta\|^2 &= \int_G |f - P_\eta|^2 dx + \int_{G \setminus G'} |f|^2 dx \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{5} + 2 \int_{G'} |f - P|^2 dx + 2 \int_{G'} |P - P_\eta|^2 dx < \frac{3}{5} \varepsilon^2 + 2 \int_{G' \setminus G''} |P|^2 dx < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

2-§. Umumlashgan funksiyalar fazosi va umumlashgan funksiyalar ustida amallar.

Umumlashgan funksiyalar fazosi.

Ta'rif 2.1. Asosiy funksiyalar fazosida aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional umumlashgan funksiya deyiladi.

f funksionalning φ asosiy funksiyadagi qiymati (f, φ) bilan belgilanadi yoki $f(x)$ kabi belgilanadi. (x, φ asosiy funksiya argumentlari).

Umumlashgan funksiyalar fazosi $D' = D'(R^n)$ bilan belgilanadi.

1- ta'rifga asosan

1) f umumlashgan funksiya D dagi har bir φ ga (f, φ) (kompleks) sonni mos qo'yadi.

2) f umumlashgan funksiya D da aniqlangan chiziqli funksional, ya'ni agar $\varphi \in D, \psi \in D$ va $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ bo'lsa,

$$f(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3) f umumlashgan funksiya D da aniqlangan uzluksiz funksional, ya'ni agar D dagi $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, ketma - ketlik uchun $(f, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Agar D' da f va g umumlashgan funksiyalarni $\lambda f + \mu g$ chiziqli kombinatsiyasini quyidagicha aniqlasak D' chiziqli to'plam tashkil qiladi :

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in D.$$

$\lambda f + \mu g$ funksionalni D da chiziqli va uzluksizligini tekshiramiz, ya'ni D' ga tegishlilikini. Haqiqatan ham, agar $\varphi \in D, \psi \in D$ va $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha(\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)) + \beta(\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)) = \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi) \end{aligned}$$

ya'ni bu funksional chiziqli.

f va g uzluksizligidan D dagi $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ketma - ketlik uchun

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

bo'lib, $\lambda f + \mu g$ funksionalning uzluksizligi kelib chiqadi.

D' da sust yaqinlashish tushunchasini aniqlab olamiz:

$f_1, f_2, \dots$ D' da aniqlangan ketma - ketlik uchun $\forall \varphi \in D$ da $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), k \rightarrow \infty$, bo'lsa f_k umumlashgan funksiyalar ketma - ketligi $f \in D'$ umumlashgan funksiyaga yaqinlashadi deyiladi va $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ kabi yoziladi.

Ushbu yaqinlashish tushunchasi bilan birgalikda D' umumlashgan funksiyalar fazosi deyiladi.

Umumlashgan funksiyalar fazosining to'laligi.

Teorema 2.1. D' dan olingan $f_1, f_2, \dots$ ketma - ketlik uchun $\forall \varphi \in D$ da (f_k, φ) sonli ketma - ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi), \varphi \in D,$$

tenglik bilan aniqlangan f funksional D da chiziqli va uzluksiz bo'ladi.

$$\begin{aligned} \text{Isbot. } (f, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \psi) = \\ &= \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi) \end{aligned}$$

munosabatdan f funksionalning chiziqliligi kelib chiqadi. Uni uzluksizligini isbotlaymiz, ya'ni D dagi $\varphi_v \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ ketma - ketlik uchun $(f, \varphi_v) \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$, bo'lishini isbotlaymiz.

Teskari faraz qilamiz, ya'ni barcha $v=1,2,\dots$ uchun $\exists a > 0$ bo'lib, $|f, \varphi_v| \geq 2a$ bo'lsin.

$$(f, \varphi_v) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi_k)$$

munosabatdan har bir v uchun shunday k_v topilib, $|f_{k_v}, \varphi_v| \geq a$ bo'ladi, ikkinchi tomondan teorema shartiga ko'ra $(f_k, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Demak, farazimiz noto'g'ri.

Teorema isbotlandi.

Izoh. Teorema shartini qanoatlantiruvchi $f_1, f_2, \dots$ ketma - ketlik uchun D dan olingan $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ nolga intiluvchi ketma - ketlik uchun $(f_k, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ekanligi quyidagi lemmada isbotlangan.

Lemma 2.1. Teorema shartlarini qanoatlantiruvchi D' dan olingan $f_1, f_2, \dots$ funkcionallar ketma - ketligi bo'lib, D dan olingan nolga intiluvchi $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ketma - ketlik bo'lsa, u holda $(f_k, \varphi_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, bo'ladi.

Umumlashgan funksiya tashuvchisi.

Umumlashgan funktsiyalar umuman aytganda alohida olingan nuqtada qiymatga ega bo'lmaydi. Lekin uni biror sohada nolga tengligi haqida mulohaza yuritish mumkin.

Ta'rif 2.2. f umumlashgan funksiya G sohada nolga teng deyiladi, agar $\forall \varphi \in D(G)$ uchun $(f, \varphi) = 0$ bo'lsa.

Agar $(f, \varphi) = 0, \varphi \in D(G)$ bo'lsa $f = 0, x \in G$ yoki $f(x) = 0, x \in G$ ko'rinishda yoziladi.

Ushbu ta'rifga asosan G sohada f va g umumlashgan funktsiyalar teng deyiladi, agar $f - g = 0, x \in G$ bo'lsa: xususan agar $\forall \varphi \in D$ uchun $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ bo'lsa.

f umumlashgan funksiya G sohada nolga teng bo'lsa, u holda G sohaning ixtiyoriy nuqtasini biror atrofida ham nolga teng bo'ladi. Teskarisi ham o'rinli.

Lemma 2.2. Agar f umumlashgan funksiya G sohani ixtiyoriy nuqtasi atrofida nolga teng bo'lsa, u holda G sohada nolga teng bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varphi \in D(G)$ ni fiksirlaymiz. Aniqlanishiga ko'ra $\text{supp } \varphi \subset G$.

$\text{supp } \varphi$ kompakt to'plam ekanligidan Geyne – Borel' lemmasiga ko'ra uni chekli sondagi $U(x_k, r_k)$, $k=1,2,\dots,N(\varphi)$ sharlar bilan qoplash mumkin. Lemma shartiga ko'ra bu sharlarda f nolga teng. $U(x_k, r'_k)$, $r'_k < r_k$, sharlarni shunday tanlash mumkinki, ular $\text{supp } \varphi$ ni qoplaydi. Asosiy funksiyalar haqidagi lemmaga ko'ra $h_k(\alpha)$: $h_k(x)=1$, $x \in U(x_k, r'_k)$, $\text{supp } h_k \subset U(x_k, r_k)$, funksiyalar mavjud. Bu funksiyalar orqali

$$h(x) = \sum_{k=1}^N h_k(x), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}$$

funksiyalarni quramiz. Qurilishiga ko'ra $\text{supp } \varphi$ atrofida $h(x) \geq 1$.

Demak,

$$\varphi_k \in D(U(x_k, r_k)) \quad \text{va} \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x)$$

Bundan

$$(f, \varphi) = \left(f, \sum_{k=1}^N \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) = 0.$$

Lemma isbotlandi.

$f \in D'$ bo'lsin. $f=0$ atroflar birlashmasi Q_f ochiq to'plam f umumlashgan funksiyani nollik to'plami deyiladi.

Q_f to'plamni R^n gacha to'ldiruvchisi f ni tashuvchisi deyiladi. $\text{supp } f$ yopiq to'plam bo'ladi. Agar $\text{supp } f$ chegaralangan to'plam bo'lsa, u finit deyiladi.

Regulyar umumlashgan funksiyalar.

$f(x)$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi bo'lsin.

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D \quad (*)$$

funksionalni qaraymiz. Integralning chiziqliligidan

$$\begin{aligned} (f, \lambda \varphi + \mu \psi) &= \int f(x) (\lambda \varphi(x) + \mu \psi(x)) dx = \\ &= \lambda \int f(x) \varphi(x) dx + \mu \int f(x) \psi(x) dx = \lambda (f, \varphi) + \mu (f, \psi); \end{aligned}$$

Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremaga asosan $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, $\varphi_k \in D$ asosiy funksiyalar ketma – ketligi uchun

$$(f, \varphi_k) = \int_{U_R} f(x) \varphi_k(x) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

bo'ladi. Demak, (f, φ) chiziqli uzluksiz funksional.

Ta'rif 2.3. R^n da lokal integrallanuvchi funksiyalar orqali aniqlangan (*) umumlashgan funksiyalar regulyar umumlashgan funksiyalar deyiladi.

Lemma 2.3. (Dyu Bua - Reymon). G sohada lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiya umumlashgan ma'noda G da nolga teng bo'lishi uchun $f(x)$ funksiya G sohada deyarli nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

(*) munosabatga asosan R^n da lokal integrallanuvchi funksiya regulyar umumlashgan funksiyaning aniqlaydi. Dyubua – Reymon lemmasiga ko'ra regulyar umumlashgan funksiya R^n da lokal integrallanuvchi funksiya orqali yagona ravishda aniqlanadi. Demak, R^n da lokal integrallanuvchi va regulyar umumlashgan funksiyalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bu moslik (*) munosabat orqali amalga oshiriladi. Shu ma'noda R^n da lokal integrallanuvchi funksiyalar regulyar umumlashgan funksiya bo'ladi.

Ta'rif 2.4. f umumlashgan funksiya $C^p(G)$ sinfga tegishli deyiladi, agar u G sohada $C^p(G)$ sinfga tegishli $f_G(x)$ funksiya bilan ustma – ust tushsa, ya'ni $\forall \varphi \in D(G)$

$$(f, \varphi) = \int f_G(x) \varphi(x) dx$$

Singulyar umumlashgan funksiyalar.

Ta'rif 2.5. Regulyar bo'lmagan umumlashgan funksiyalar singulyar umumlashgan funksiya deyiladi.

Ushbu ta'rifga ko'ra singulyar umumlashgan funksiyaning lokal integrallanuvchi birorta ham funksiyaga mos qo'yib bo'lmaydi.

Singulyar umumlashgan funksiyaga oddiy misol Dirakning δ – funksiyasidir.

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D,$$

ma'lumki $\delta \in D'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, $\text{supp} \delta = \{0\}$ $\delta(x)$ singulyar umulashgan funksiya ekanligini isbotlaymiz. Teskari faraz qilamiz, ya'ni shunday R^n da lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiya mavjud bo'lsinki, $\forall \varphi \in D$ uchun

$$\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

bo'lsin. $x_1 \cdot \varphi(x) \in D$ ekanligidan

$$\int f(x)x_1\varphi(x)dx = x_1\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0 = (x_1 \cdot f, \varphi)$$

Bundan ko'rinadiki, R^n da lokal integrallanuvchi $x_1 \cdot f(x)$ funksiya umumlashgan ma'noda nolga teng bo'ladi. dyu Bua – Reymon lemmasiga ko'ra deyarli barcha nuqtalarda $x_1 \cdot f(x) = 0$, ya'ni $f(x) = 0$.

Bu esa $\int f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ ekanligiga ziddir. Demak, farazimiz noto'g'ri.

$\varepsilon \rightarrow +0$ da $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham D' da yaqinlashish tushunchasiga asosan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

$\varphi(x)$ uzluksizligidan $|x| < \varepsilon_0$ uchun $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$\text{Demak } \left| \int \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| \leq \int \omega_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x)dx = \eta.$$

Endi Soxotskiy formulalarini keltirib chiqaramiz.

$$\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(R).$$

$\mathcal{P} \frac{1}{x}$ funksional D da uzluksiz. Haqiqatan ham, D da $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, ketma -

ketlik berilgan bo'lsin. U holda

$$\left| \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} \right), \varphi_k \right| = \left| Vp \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx \right| = \left| Vp \int_{-R}^R \frac{\varphi_k(0) + \varphi'_k(x')}{x} dx \right| \leq$$

$$\int_{-R}^R |\varphi'_k(x')| dx < 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi'_k(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Shunday qilib $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in D'$

$x \neq 0$ da $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ umumlashgan funksiya $\frac{1}{x}$ bilan ustma – ust tushadi. $\mathcal{P} \frac{1}{x}$

umumlashgan funksiya $\frac{1}{x}$ funksiya integralining bosh qismi (Vp) deyiladi.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = -i\pi\varphi(0) + Vp \int \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D$$

tenglikni isbotlaymiz.

Haqiqatan ham, $|x| > R$ da $\varphi(x) = 0$ ekanligidan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx =$$

$$\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx =$$

$$-2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg \operatorname{tg} \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = -i\pi\varphi(0) + v p \int \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Ushbu tenglik $\varepsilon \rightarrow +\infty$ da $\frac{1}{x + i\varepsilon}$ ketma- ketlikni D' da limiti mavjudligini

ko'rsatadi. $\frac{1}{x + i\varepsilon}$ ni $\varepsilon \rightarrow +0$ dagi limitini $\frac{1}{x + i0}$ bilan belgilasak,

$$\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}$$

bo'ladi. Bu formulalar Soxotskiy formulalari deyiladi.

Umumlashgan funksiyalar ustida amallar.

Umumlashgan funksiyalarda o'zgaruvchini chiziqli almashtirish. $f(x)$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi va $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$ bo'lsin. $\forall \varphi \in D$ uchun

$$(f(Ay + b), \varphi) = \int f(Ay + b) \varphi(y) dy = \frac{1}{|\det A|} \int f(x) \varphi(A^{-1}(x - b)) dx =$$
$$\frac{1}{|\det A|} (f, \varphi(A^{-1}(x - b)))$$

Demak, $\forall f(x) \in D'$ uchun $f(Ay + b)$ umumlashgan funksiya

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|} \right), \quad \varphi \in D$$

formula orqali aniqlanadi.

Xususan, agar $A' = A^{-1}$ bo'lib, $b = 0$ bo'lsa,

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A'x));$$

$A = cI$, $c < 0$, bo'lib, $b = 0$ bo'lsa,

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c^n|} \left(f, \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right);$$

$A = I$ bo'lsa,

$$(f(y + b), \varphi) = (f, \varphi(x - b)).$$

$f(x + b)$ umumlashgan funksiya $f(x)$ umumlashgan funksiyaning b vektorga surish deyiladi. Masalan

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0).$$

Umumlashgan funksiyalarni ko'paytirish.

$f(x)$ R^n da lokal integrallanuvchi funksiya va $a(x) \in C^\infty(R^n)$ funksiya berilgan bo'lsin. $\forall \varphi \in D$ uchun

$$(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) dx = (f, a\varphi)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikni $f \in D'$ bilan $a \in C^\infty(R^n)$ funksiyalar ko'paytmasi sifatida qabul qilamiz:

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \varphi \in D.$$

D da $a \in C^\infty(R^n)$ funksiyaga ko'paytirish amali chiziqli va uzluksizligidan $af \in D'$ bo'ladi.

Xuddi shunday $a \in C^\infty(R^n)$ funksiyaga ko'paytirish amali D' da ham chiziqli va uzluksiz bo'ladi:

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), \quad f, g \in D';$$

agar D' da $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ D' da $af_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Agar $f \in D'$ bo'lib, $\eta \in C^\infty(R^n)$ funksiya f ni tashuvchisida birga teng bo'lsa, $f = \eta f$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\forall \varphi \in D$ uchun f va $(1-\eta)\varphi$ larni tashuvchilari umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi va

$$(f - \eta f, \varphi) = (f, (1-\eta)\varphi) = 0$$

Misollar.

$$1. a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

$\forall \varphi \in D$ uchun

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi).$$

$$2. x \cdot \mathcal{P} \frac{1}{x} = 1.$$

$\forall \varphi \in D(R^1)$ uchun

$$\left(x \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \left(\mathcal{P} \frac{1}{x}, x\varphi \right) = Vp \int \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi)$$

3-§. Umumlashgan funksiya hosilasi va uning xossalari.

Umumlashgan funksiya hosilasi. $f \in C^p(R^n)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$\forall \alpha, |\alpha| \leq p$, va $\forall \varphi \in D$ uchun bo'laklab integrallash formulasiga asosan

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = \int \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x) \partial^\alpha \varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif 3.1. $f \in D'$ umumlashgan funksiyaning $\partial^\alpha f$ hosilasi deb

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D$$

ifodaga aytiladi.

$\partial^\alpha f \in D'$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham,

1) Chiziqliligi:

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha f, \lambda \varphi + \mu \psi) &= (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha (\lambda \varphi + \mu \psi)) = (-1)^{|\alpha|} (f, \lambda \partial^\alpha \varphi + \mu \partial^\alpha \psi) = \\ &= \lambda (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) + \mu (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \psi) = \lambda (\partial^\alpha f, \varphi) + \mu (\partial^\alpha f, \psi) \end{aligned}$$

2) Uzluksizligi:

Agar D da $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, va $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, bo'lsa, u holda

$$(\partial^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

1. Umumlashgan funksiya hosilasining xossalari.

1⁰. ∂^α differensiallash amali D' dan D' ga chiziqli va uzluksiz, ya'ni D' ni D' ga chiziqli va uzluksiz akslantiruvchi:

$$\partial^\alpha (\lambda f + \mu g) = \lambda \partial^\alpha f + \mu \partial^\alpha g, \quad f, g \in D';$$

Agar $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, f_k \in D$ bo'lsa, u holda

$$\partial^\alpha f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Haqiqatan ham, hosila ta'rifiga ko'ra $\forall \varphi \in D$ uchun

$$(\partial^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_k, \partial^\alpha \varphi) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Bundan D' da $k \rightarrow \infty, \partial^\alpha f_k \rightarrow 0$ ekanligi kelib chiqadi.

∂^α chiziqliligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi.

2⁰. Ixtiyoriy umumlashgan funksiya cheksiz marta differensiallanuvchi.

Haqiqatan ham, $f \in D' \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in D' \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \in D'$ va hokazo.

3⁰. $f \in D'$ va $a \in C^\infty(R^n)$ uchun Leybnits formulasi o'rinli bo'ladi.

Masalan:

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Haqiqatan ham, $\forall \varphi \in D$ uchun

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left(af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = \\ &= - \left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} \right) + \left(f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \\ &= \left(a \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) \end{aligned}$$

4⁰. f Umumlashgan funksiya $\forall x \in G$ da $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $\forall x \in G$ uchun

$\partial^\alpha f = 0$ va $\text{supp } \partial^\alpha f \subset \text{supp } f$.

Haqiqatan ham, $\varphi \in D(G)$ bo'lsa, $\partial^\alpha \varphi \in D(G)$ bo'lib,

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in D(G),$$

bo'ladi, ya'ni $\partial^\alpha f = 0, x \in G$.

2. Umumlashgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi.

$n=1$ bo'lsin. Matematik analiz kursidan ma'lumki, har qanday uzluksiz $f(x)$ funksiya $f^{(-1)}(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega:

$$f^{(-1)}(x) = \int f(\xi) d\xi + C, \quad (f^{(-1)}(x))' = f(x).$$

ta'rif. $f^{(-1)} \in D'(R)$ umumlashgan funksiya $f \in D'(R)$ umumlashgan funksiyaning

boshlang'ichi deyiladi, agar $(f^{(-1)})' = f$ ya'ni $(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \varphi \in D$ bo'lsa.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $f(-1)$ funksiyaning barcha asosiy funksiyalarda emas, faqat

ularning hosilalarida aniqlangan. $f^{(-1)}$ funksionalni D fazoga chiziqli va uzluksiz davom qildirishga harakat qilamiz.

Faraz qilamiz $f \in D'$ ni $f^{(-1)} \in D'$ boshlang'ichi mavjud bo'lsin $\forall \varphi \in D(R)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi) d\xi$$

bunda $\omega_\varepsilon(x)$ – "shapkacha" funksiya va

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x') - \omega_\varepsilon(x') \int \varphi(\xi) d\xi] dx'$$

Endi $\psi(x) \in D(R)$ ligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham $\psi \in C^\infty(R)$ va $\varphi(x) = 0$, $x < -\max(R, \varepsilon)$, agar $\varphi(x) = 0$, $|x| > R$ $x < \max(R, \varepsilon)$ bo'lsa,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') dx' - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

Demak, $|x| > \max(R, \varepsilon)$ bo'lsa, $\psi(x) = 0$ bo'ladi, ya'ni $\psi \in D$.

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi) d\xi) = (f^{(-1)}, \psi'(x)) + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon(x)) \int \varphi(\xi) d\xi$$

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C \int \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in D$$

bunda $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)$.

Demak, agar f umumlashgan funksiya $f^{(-1)}$ boshlang'ichga ega bo'lsa, $f^{(-1)}$

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C \int \varphi(\xi) d\xi,$$

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi) d\xi,$$

formula orqali hisoblanadi va aksincha $\forall C$ o'zgarmas son uchun ushbu formula orqali aniqlangan $f^{(-1)}$ f ni boshlang'ichi bo'ladi. Haqiqatan ham, $f^{(-1)}$ chiziqli funksional. Uni uzluksizligini isbotlaymiz.

D da $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ berilgan bo'lsin, ya'ni $\varphi_k(x) = 0$, $|x| > R$, va $\varphi_k^{(\alpha)} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ ya'ni D da $\psi_k(x) \rightarrow$, $k \rightarrow \infty$, bo'ladi. f ni D uzluksizligidan

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \psi_k) + C \int \varphi_k(\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Demak, $f^{(-1)} \in D'$.

Endi $\psi(x)$ ni ifodasida φ funksiyani φ' funksiya bilan almashtirib, $\int \varphi'(\xi) d\xi = 0$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \varphi), \varphi \in D$$

bo'ladi.

4-§. Umumlashgan funksiyalarning to'g'ri ko'paytmasi va o'ramasi.

1. To'g'ri ko'paytma ta'rifi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar mos ravishda R^n va R^m fazolarda lokal integrallanuvchi funksiyalar berilgan bo'lsin. $f(x) \cdot g(x)$ ham R^{n+m} fazoda lokal integrallanuvchi bo'lib, $\varphi(x, y) \in D$ asosiy funksiyalar fazosida aniqlangan regulyar umumlashgan funksiyani aniqlaydi:

$$\begin{aligned}(f(x)g(y), \varphi) &= \int f(x)g(y)\varphi(x, y)dx dy = \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y)dx dy = \\(f(x), (g(y), \varphi(x, y))) &= \int g(y) \int f(x)\varphi(x, y)dx dy = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))).\end{aligned}$$

Ushbu tenglikni $f(x) \in D'(R^n)$ va $g(y) \in D'(R^m)$ umumlashgan funksiyalarni to'g'ri ko'paytmasi sifatida qabul qilamiz.

To'g'ri ko'paytmani $D(R^{n+m})$ da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksionalligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda quyidagi lemmani isbotsiz keltiramiz.

Lemma 4.1. Ixtiyoriy $g \in D'(R^m)$ va $\varphi \in D(R^{n+m})$ funksiyalar uchun $\psi(\alpha) = (g(y), \varphi(\alpha, y))$ funksiya $D(R^n)$ fazoga tegishli bo'lib, barcha α larda

$$\partial^\alpha \psi(x) = (g(y), \varphi(\alpha, y))$$

o'rinli bo'ladi. Agar $D(R^{n+m})$ da $k \rightarrow \infty$ da $\varphi_k \rightarrow 0$ bo'lsa, Γ holda $D(R^n)$ da $\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, bo'ladi.

Ushbu lemmaga asosan barcha $\varphi \in D(R^{n+m})$ uchun $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in D(R^n)$ ekanligidan

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y)))$$

tenglikning o'ng tomoni barcha f va g umumlashgan funksiyalar uchun ma'noga ega bo'ladi va $D(R^{n+m})$ fazodagi funksionalni aniqlaydi.

f va g funksionallarning chiziqliligidan uning chiziqliligi kelib chiqadi. Uni $D(R^{n+m})$ da uzluksizligini isobotlaymiz. $D(R^{n+m})$ da $k \rightarrow \infty$ da $\varphi_k \rightarrow 0$ bo'lsin. Γ holda lemmaga ko'ra $D(R^n)$ da $(g(y), \varphi_k(x, y)) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, va f funksionalni $D(R^n)$ da uzluksizligidan $(f(x), (g(y), \varphi_k(x, y))) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ kelib chiqadi.

Demak, $f(x) \cdot g(y) \in D'(R^{n+m})$ ya'ni umumlashgan funksiya bo'ladi.

2. To'g'ri ko'paytmaning xossalari.

1⁰. Kommutativligi. $f \in D'(R^n)$, $g \in D'(R^m)$ umumlashgan funksiyalar uchun $f(x) \cdot g(y)$ kabi $g(y) \cdot f(x)$ to'g'ri ko'paytma aniqlanadi:

$$(g(y) \cdot f(x), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in D(R^{n+m}).$$

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham, $\varphi \in D(R^{n+m})$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{l=1}^N U_l(x) V_l(y), \quad U_l \in D(R^n), \quad V_l \in D(R^m)$$

asosiy funksiya $D(R^{n+m})$ fazoda zichligidan

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = \left(f, \sum_{l=1}^N U_l(g, V_l) \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^N (f, U_l)(g, V_l) = \left(g, \sum_{l=1}^N V_l(f, U_l) \right) = (g(y) \cdot f(x), \varphi).$$

2⁰. $f(x) \cdot g(y)$ to'g'ri ko'paytma f va g larga nisbatan chiziqli va uzluksiz, ya'ni masalan:

$$(\lambda f(x) + \mu f_1(x)) \cdot g(y) = \lambda(f(x) \cdot g(y)) + \mu(f_1(x) \cdot g(y)),$$

$$f, f_1 \in D'(R^n), \quad g \in D'(R^m); \quad D'(R^n) \text{ da } k \rightarrow \infty \quad f_k \rightarrow 0 \text{ bo'lsa, u holda } D'(R^{n+m}) \text{ da}$$

$$k \rightarrow \infty \text{ da } f_k(x) \cdot g(y) \rightarrow 0.$$

Haqiqatan ham, $\varphi \in D(R^{n+m})$ bo'lsin. Yuqoridagi lemmaga asosan $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y)) \in D(R^n)$ bo'lib,

$$(f_k(x) \cdot g(y), \varphi) = (f_k(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (f_k, \psi) = 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

3⁰. Assosativligi. Agar $f \in D'(R^n)$, $g \in D'(R^m)$ va $h \in D'(R^k)$ bo'lsa, u holda

$$f(x) \cdot (g(y) \cdot h(z)) = (f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z).$$

Haqiqatan ham, agar $\varphi \in D(R^{n+m+k})$ bo'lsa,

$$(f(x) \cdot (g(y) \cdot h(z)), \varphi) = (f(x), (g(y) \cdot h(z), \varphi)) =$$

$$= (f(x) \cdot g(y), (h(z), \varphi)) = ((f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z), \varphi)$$

4⁰. Hosilasi.

$$\partial_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = \partial_x^\alpha f(x) \cdot g(y)$$

Haqiqatan ham, $\varphi \in D(R^{n+m})$ bo'lsa,

$$\begin{aligned} (\partial_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)), \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (f(x) \cdot g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x, y)) = (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), \partial_x^\alpha \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (\partial_x^\alpha f(x), \varphi)) = (\partial_x^\alpha f(x) \cdot g(y), \varphi) \end{aligned}$$

3. Umumlashgan funksiyalarning o'ramasi va uning xossalari.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar R^n da lokal integrallanuvchi bo'lsin, u holda

$$h(x) = \int |g(y) f(x-y)| dy$$

funksiya ham R^n da lokal integrallanuvchi bo'ladi.

$f * g$ o'rama deb

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x)$$

funksiyaga aytiladi.

Ta'kidlash lozimki, $f * g$ va $|f| * |g| = h$ o'ramalar bir vaqtda mavjud bo'lib,

$|(f * g)| \leq h$ bo'ladi, ya'ni $f * g$ R^n da lokal integrallanuvchi bo'lib, regulyar umumlashgan funksiyani aniqlaydi:

$\forall \varphi \in D(R^n)$ uchun

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int (f * g)(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int \left(\int g(y) f(\xi - y) dy \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int g(y) \left(\int f(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi \right) dy = \int g(y) \left(\int f(y) \varphi(x + y) dx \right) dy. \\ (f * g, \varphi) &= \int f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy, \quad \varphi \in D(R^n). \end{aligned}$$

Xossalari

1⁰. Chiziqliligi.

$f * g$ o'rama f va g larga nisbatan D' da chiziqli, masalan

$$(\lambda f + \mu f_1) * g = \lambda(f * g), \quad f, f_1, g \in D';$$

agar $f * g$ va $f_1 * g$ o'ramalar mavjud bo'lsa. $\mu(f, *g)$

2⁰. Kommutativligi.

Agar $f * g$ o'rama mavjud bo'lsa, $g * f$ o'rama ham mavjud bo'lib,

$$f * g = g * f$$

bo'ladi.

3⁰. O'ramaning hosilasi.

Agar $f * g$ o'rama mavjud bo'lsa, $\partial^\alpha f * g$ va $f * \partial^\alpha g$ o'ramalar ham mavjud bo'lib,

$$\partial^\alpha f * g = \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g$$

bo'ladi.

5-§. Musbat umumlashgan funksiyalar va o'lchovlar.

Ta'rif 5.1. Ixtiyoriy $\varphi(x) \in D(G)$, $\varphi(x) \geq 0$, $G \subset R^n$, uchun $(f, \varphi) \geq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, $f \in D'(G)$ musbat umumlashgan funksiya deyiladi.

Musbat umumlashgan funksiyalar bilan o'lchovlar orasidagi bog'lanishni o'rganish uchun o'lchov ta'rifini keltirib o'tamiz.

Ta'rif 5.2. $G \in R^n$ sohaning barcha qism to'plamlarida aniqlangan sanoqli additiv, nomanfiy to'plam funksiyasi G sohada aniqlangan o'lchov deyiladi.

Ma'lumki G da lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiya regulyar umumlashgan funksiyaning aniqlaydi.

$$(f, \varphi) = \int_G f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(G)$$

G sohada aniqlangan μ o'lchov quyidagi

$$(\mu, \varphi) = \int_G \varphi(x) d\mu(x), \quad \varphi \in D(G)$$

funksionalni aniqlaydi. Ushbu tenglik bilan aniqlangan (μ, φ) $D(G)$ da chiziqli uzluksiz funksional bo'ladi. Dirakning δ – funksiyasi bunga misol bo'ladi.

$\forall \varphi \geq 0$ asosiy funksiya uchun $(\mu, \varphi) \geq 0$ bo'ladi, ya'ni μ o'lchov orqali aniqlangan funksional musbat umumlashgan funksiya bo'ladi. Teskarisi ham o'rinli, ya'ni har qanday $f \in D'(G)$ musbat umumlashgan funksiyaga G sohada aniqlangan yagona μ_1 o'lchov mos keladi, ya'ni

$$(f, \varphi) = \int_G \varphi(x) d\mu_1, \quad \varphi \in D(G)$$

Ushbu paragraf so'ngida subgarmonik funksiyalar haqida to'xtalib o'tamiz.

$G \subset R^n$ sohada $u(x)$ funksiya berilgan bo'lib, yuqoridan yarim uzluksiz ya'ni

1) $-\infty \leq u(x) < +\infty$

2) $\forall x \in G$ uchun $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0)$ bo'lsin.

Ta’rif 5.3. $G \subset R^n$ sohada aniqlangan $u(x)$ funksiya G da subgarmonik deyiladi agar u G sohada yuqoridan yarim uzluksiz bo’lib, $\forall x_0 \in G$ nuqta uchun shunday yetarlicha kichik $r > 0$ son mavjud bo’lib,

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma_x$$

tengsizlik o’rinli bo’lsa, bunda $S(x_0, r) = \{x \in R^n : |x - x_0| < r\}$ w_n – birlik sfera sirt yuzasi, $d\sigma_x$ – $S(x_0, r)$ sferaning yuza elementi.

G sohada subgarmonik funksiyalar sinfida $Sh(G)$ orqali belgilaymiz.

Ixtiyoriy $u(x) \in C^2(G)$ funksiya uchun Laplas operatori quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$C^2(G)$ sinfga tegishli subgarmonik funksiyalar uchun $\Delta u \geq 0$ bo’ladi, ya’ni quyidagi teorema o’rinli bo’ladi.

Teorema ([3]). $u(x) \in C^2(G)$ funksiya G sohada subgarmonik bo’lishi uchun $\Delta u \geq 0$ bo’lishi zarur va yetarli.

Ixtiyoriy subgarmonik funksiya umuman aytganda ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo’lmaydi, lekin Δu ni umumlashgan ma’noda qarash mumkin, ya’ni $\forall \varphi \in D(R^n)$ uchun umulashgan funksiya xosilasi ta’rifiga ko’ra

$$(\Delta u, \varphi) = (u, \Delta \varphi)$$

Ma’lumki (qarang[3]) Δu musbat umumlashgan funksiya bo’ladi. Yuqorida ta’kidlanganidek, har bir musbat umumlashgan funksiya shu sohada aniqlangan o’lchov mos keladi, ya’ni

$$(\Delta u, \varphi) = \int_G \varphi d\mu_u$$

Demak, $\Delta u = \mu_u$ bo’ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Част I ,II. Москва, «Наука», 1969.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва, «Наука» 1988.
3. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. Москва, «Наука», 1971.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций . II том, М. «Наука», 1968.
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. Москва, «Наука»,1969.
6. Садуллаев. А. С. Кўп аргументли голоморф функциялар. Урганч , 2004.