

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
AL-XORAZMIY NOMIDAGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

Matematika fakulteti "Funksiyalar nazariyasi" kafedrası
matematika ta'lim yo'nalishi 401 – matematika guruhi talabasi
Eshchanova Gulchehraning

"Gonchar kvazianalitik funksiyalari uchun yagonalik teoremasi"
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

ko'rildi va himoyaga

siya qilindi.

unksiyalar nazariyasi» kafedrası

diri:

i.f.n., dots. Madraximov R.M.

Ilmiy rahbar: ass. Ibragimov Z.







10 » 04

2012 y.

Taqrizchi: Ph.D. Boltayev J.

Urganch - 2012

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1- §. Analitik funksiyalarni ratsional funksiyalar yordamida yaqinlashtirish.....	4
2 -§. Gonchar kvazianalitik funksiyalarni sinfi.....	17
3-§. Gonchar kvazianalitik funksiyalari uchun yagonalik teoremasi	20
Foydalanilgan adabiyotlar.....	29

KIRISH

Funksiyani polinomlar yoki umumiyroq aytadigan bo'lsak ratsional funksiyalar ko'rinishida ifodalash nazariyasi juda katta tushuncha hisoblanadi. Ushbu bitiruv malakaviy ishda analitik funksiyalarni maxsusliklarini oldindan berilgan ratsional funksiyalar ko'rinishida ifodalanishi o'rganiladi. Ushbu ishda Teylor qatorlari asosiy vazifani bajaradi, chunki ular almashtirish va yaqinlashtirish xossalariga ega.

Bernshteyn birinchi bo'lib (1) kvazianalitik funksiyalar sinfini kiritdi. Bu sinf funksiyalari eng yaxshi yaqinlashish xossasi bilan xarakterlanadi, ya'ni

$$B(\Delta) = \left\{ f \in C(\Delta) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e_n(f)} < 1 \right\},$$

bu erda $e_n(f) = \inf \|f - p_n\|$ va $\Delta = [a, b]$.

A.A. Gonchar ishlarida quyidagi funktsiyalar sinfi

$$R(\Delta) = \left\{ f \in C(\Delta) : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n(f)} < 1 \right\}$$

analitik funksiyalar sinfining ajoyib xossasiga ega bo'ladi, agarda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n(f)} < 1$$

bo'lib lagarifmik sig'im musbat bo'lgan biror $E \subset \Delta$ to'plamda $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda Δ da $f(x) \equiv 0$ bo'lishi isbotlangan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi uch paragrafdan iborat bo'lib uning birinchi paragrafida analitik funksiyalarni ratsional funksiyalar yordamida yaqinlashtirish haqida to'liq ma'lumot keltirilgan. Ikkinchi paragrafda Gonchar ma'nosida kvazianalitik funksiyalar sinfiga ta'rif berilgan va uchinchi paragrafda Gonchar ma'nosida kvazianalitik funksiyalar uchun yagonalik teoremasi keltirilgan.

1-§. Analitik funksiyalarni ratsional funksiyalar yordamida yaqinlashtirish

Ushbu paragrafda polyuslari oldindan berilgan ratsional funksiyalar ketma ketligining yaqinlashishi va yaqinlashish tartibi, hamda ratsional funksiyalar yordamidagi eng yaxshi yaqinlashtirish o'rganiladi.

Birlik aylanada o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish.

$|z|=1$ birlik aylanada ko'phadlar yordamida o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish Teylor qatorlari bilan juda yaqin bog'langan. Ratsional funksiyalar yordamida o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish ham ratsional funksiyalarning polyuslari bilan bog'liq bo'lishi mumkin. Quyidagi teorema ushbu masalaga biroz oydinlik kiritadi.

Teorema 1.1. $f(z)$ funksiya $C:|z|=1$ birlik aylanada analitik bo'lsin. U holda

$$r_n(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)} \quad |\alpha_n| > 1, \quad (1)$$

(bu yerda α_n mahsusliklar oldindan berilgan) ko'rinishdagi yagona $f(z)$ funksiya C to'plamda o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashadigan va $f(z)$ funksiya

$0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ nuqtalarga almashtiradigan ratsional funksiyalar bo'ladi.

(1) ko'rinishdagi ixtiyoriy funksiya ushbu

$$B_0 + \frac{B_1}{z - \alpha_1} + \frac{B_2}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{B_n}{z - \alpha_n} \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ushbu teoremani isbotlashda

$$1, \frac{1}{z - \alpha_1}, \frac{1}{z - \alpha_2}, \dots, \frac{1}{z - \alpha_n} \quad (3)$$

Funksiyalar toplami uchun ortogonalashtirish usulidan foydalanamiz.

Lemma 1.1. Agar $\varphi(z)$ funksiya $C:|z|=1$ birlik aylanada analitik bo'lib, $z = \frac{1}{\alpha}$ nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda $\varphi(z)$ funksiya C toplamda

$\frac{1}{z - \alpha}$, $|\alpha| > 1$ funksiya ortogonal bo'ladi.

Isbot. $\int_C \varphi(z) \frac{|dz|}{z-\alpha} = \frac{i}{\alpha} \int_C \varphi(z) \frac{dz}{z-\alpha}$ tenglikda kelib chiqadi. Tenglikning o'ng

tomonida turgan ifoda Koshining integral fo'rmulasiga ko'ra 0 ga teng.

Lemma 1.2. Agar $\varphi(z)$ funksiya $C: |z|=1$ birlik aylanada analitik bo'lsa va koordinatalar boshida nolga teng bo'lsa, u holda $\varphi(z)$ funksiya C da (1) funksiyaga ortogonal bo'ladi. Agar $\varphi(z)$ funksiya $z = \frac{1}{\alpha}$ nuqtada k -tartibli noli bo'lsa, u holda $\varphi(z)$ funksiya C da

$$\frac{1}{(z-\alpha)} \cdot \frac{1}{(z-\alpha)^2} \dots \frac{1}{(z-\alpha)^k} \quad |\alpha| > 1$$

funksiyalarning har biri bilan ortogonal bo'ladi.

Lemma 1.2. da $\alpha = \infty$ bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Agar $\varphi(z)$ funksiya koordinatalar boshida k -tartibli nolga teng bo'lsa, u holda $\varphi(z)$ funksiya C da $1, z, \dots, z^{k-1}$ funksiyalarning har biri bilan ortogonal bo'ladi. Endi teorema 1.1 isbotiga o'tamiz. Agar $r_n(z)$ (1) ko'rinishdagi $f(z)$ funksiyani $0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ nuqtalardagi interpolatsiyasidan olingan funksiya bo'lsa, u holda $f(z) - r_n(z)$ ayirma ushbu nuqtalarning har birida 0 ga teng, shuningdek C to'plamda (3) ko'rinishdagi har bir funksiyaga ortogonal. Bundan kelib chiqadiki, $r_n(z) - f(z)$ funksiyaning C da o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashadigan (2) ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasi ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Natija 1.1. Agar teorema 1.1. dagi $f(z)$ funksiya yopiq birlik doirada analitik bo'lishi shart bo'lmasa, ammo C ning ichkarisida uni

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_1(t) dt}{t-z}, \quad (4)$$

(bu yerda C da $f_1(z) \in L^2$) integral ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda (1) ko'rinishdagi funksiya $f_1(z)$ funksiyaning C da o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashish bo'ladi va $f_1(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning $0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ nuqtalardagi interpolatsiyasi bo'lgan (1) ko'rinishdagi funksiya bilan ustma-ust

tushadi. Xususan, (4) fo'rmla o'rinli bo'lishi uchun $f(z)$ funksiyaning H_2 sinfdan bo'lishi va C da $f_1(z) \equiv f(z)$ bo'lishi yetarli.

Ushbu holni qaraymiz. $f(z) \in H_2$, va C da $f_1(z) \equiv f(z)$ bo'lsin. Bu yerda (4) ga mos quyidagi fo'rmulani o'rinli ekanligini ko'ramiz.

$$z^m f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^m f_1(t) dt}{t-z}, \quad (5)$$

$m \geq 0$ va z nuqta C ni ichida joylashgan. Bu fo'rmla quyidagi tenglikdan kelib chiqadi.

$$z^m f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^m f_1(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^m - t^m) f_1(t) dt}{t-z}, \quad (6)$$

bu yerda z nuqta C to'plam ichidan olingan. (6)- fo'rmulaning o'ng tomonidagi ifoda teorema 2 ga ko'ra nolga teng. teorema 1 va lemmalarni xususiy holda isbotlashda $\varphi(z)$ va $z^m \varphi(z)$ lar uchun Koshining integral fo'rulasidan foydalanildi.

Endi $f_1(z)$ funksiya C da L^2 sinfdan bo'lgan umumiy holni qaraymiz. $f_1(z)$ funksiyaning C ning deyarli hamma joyida H_2 va G_2 sinflar funksiylarining yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bizga ma'lumki, G_2 sinfga tegishli funksiylar C da H_2 sinfnining funksiylariga ortogonal bo'ladi, shuningdek (3) ko'rinishdagi har bir funksiya ortogonal bo'ladi. Demak, teorema 1.1. ni isbotlashdagi fikrimiz ushbu natija uchun ham o'rinli ekan. Agar α_k nuqtalar bir xil bolmasa isbotda $f_1(z)$ funksiyaning L^2 sinfdan bo'lishi talab qilinmaydi. $f_1(z)$ funksiyaning C da Lebek ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi va $f(z)$ funksiyaning C da (4)- ko'rinishda bo'lishi yetarli. Lekin ushbu holda (1) ko'rinishdagi interpolatsiyalangan funksiya C da $f_1(z)$ funksiyaning ortogonal funksiylar yoyilmasidan olinadi. Bunda o'rta kvadratlik xassasi bajarilmasligi mumkin, chunki $f_1(z)^2$ funksiya C da integrallanuvchi bo'lishi shart emas.

Teorema 1.2. $f(z)$ funksiya $C: z \in \mathbb{D}$ aylanada analitik bo'lsin, yoki umumiyroq qilib aytsak C da (4) fo'rmla orqali ifodalansin va bunda $f_1(z)$ funksiya L^2 sinfdan bo'lsin. U holda C da o'rta kvadratlik ma'noda $f'(z)$,

funksiyaga eng yaxshi yaqinlashishini amalgam oshiruvchi α_k maxsusliklari bilan berilgan

$$\frac{c_0 z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \dots + c_{n-1}}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)}, \quad |\alpha_k| > 1 \text{ ko'rinishdagi funksiya } f(z) \text{ funksiyaning}$$

$\frac{1}{\alpha_k}$ nuqtadagi interpolatsiyasida joylashgan.

Teorema 1.1 yuqoridagi lemmalarning to'gridan-to'g'ri natijasi hisoblanadi. Agar α_k nuqtalarning cheksiz ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda teorema 2.1. ularni interpolatsion qatorga olib keladi va birinchi $n+1$ ta hadining yig'indisi $f(z)$ funksiyaning $0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ nuqtalardagi interpolatsiyasida joylashgan (1) ko'rinishdagi funksiyalardan iborat bo'ladi;

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{z - \alpha_1} + \frac{a_2 z(1 - \alpha_1 z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} + \frac{a_3 z(1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)} + \dots, \quad \alpha_k > 1 \quad (1)$$

Teorema 1.3. $f(z)$ funksiya C' da $|z| = 1$ aylanada analitik bo'lsin, yoki umumiyroq qilib aytganda C' da (4) ko'rinish integral orqali ifodalansin va bunda $f(z)$ funksiya L^2 -sinfda bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiyaning $0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \dots$ nuqtalardagi interpolatsiyasi (1) ko'rinishdagi yoyilmasi $f_1(z)$ funksiyaning C' da ortogonal funksiyalar (7) ko'rinishdagi yoyilmasi o'zaro teng.

Teorema 1.3. ning isboti to'g'ridan to'g'ri lemmalardan kelib chiqadi. (1) interpolatsiyalangan qatorning dastlabki $(n+1)$ ta hadning yig'indisi $S_n(z)$ $f(z)$ funksiyaning $0, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ nuqtalarda interpolatsiyalaydi. Shuningdek, lemmalarga asosan $f_1(z) - S_n(z)$ funksiya C' da (3) ning har bir funksiyasi bilan ortogonal. Demak, har bir

$$1, \frac{z}{z - \alpha_1}, \frac{z(1 - \alpha_1 z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}, \dots, \frac{z(1 - \alpha_1 z) \dots (1 - \alpha_{n-1} z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)}$$

funksiyalar bilan ortogonal. Shunday qilib, (7) interpolatsiyalangan qator $f_1(z)$ funksiyaning C' da ortogonal funksiyalari bo'yicha yoyilgan qator bilan ustma-ust tushar ekan. (7) ni ortogonal funksiyaning yoyilmasi sifatida qarashdan quyidagi

natijaga kelamiz.

Natija 1.2. Teorema 1.3. ga ko'ra quyidagilarga erishamiz:

$$\frac{2\pi\alpha_n}{\alpha_n\alpha_n-1} = \int_C f(z) \frac{z(1-\alpha_1z)\dots(1-\alpha_{n-1}z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)} dz \quad (n > 0)$$

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n\alpha_n-1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)}{z(1-\alpha_1z)\dots(1-\alpha_{n-1}z)} dz$$

$\alpha_n \rightarrow \infty$ bo'lgan holda $\alpha_n\alpha_n-1$ ko'paytma 1 ga almashtiriladi.

Agar (3) ko'paytmadagi funksiyalar to'plami orqali emas balki, $\frac{1}{z-\alpha_1}, \frac{1}{z-\alpha_2}, \dots, \frac{1}{z-\alpha_k}$ funksiyalar to'plami orqali berilsa, u holda qisman yig'ndilari (5) ko'rinishda bo'lgan quyidagi interpolyatsiyalangan qatorga ega bo'lamiz:

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{z-\alpha_1} + \frac{\alpha(1-\alpha_1z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)} + \frac{\alpha_1(1-\alpha_1z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)} + \dots \quad (\alpha_k > 1) \quad (8)$$

Birlik aylana; yaqinlashish teoremlari

Endi biz (1) ko'rinishdagi ketma-ketliklarni va (6) ko'rinishdagi qatorlarni α_n nuqtaga har xil shartlar berilganda yaqinlashishini o'rganamiz va oldiniga ushbu maxsusliklarga faqat geometrik shart qo'yamiz.

Teorema 1.4. $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nm}$ - moduli $A > 1$ dan nuqtaga ega bo'lmagan to'plam bo'lsin va $f(x)$ funksiya $|z| < T > 1$ da analitik bo'lsin.

$$r_n(z) = \frac{b_{n0}z^n + b_{n1}z^{n-1} + \dots + b_{nm}}{(z-\alpha_{n1})(z-\alpha_{n2})\dots(z-\alpha_{nm})}$$

$C: z=1$ aylanada o'rta kvadراتik ma'noda $f(z)$ funksiya eng yaxshi yaqinlashadigan ratsional funksiyalar bo'lsin. U holda $r_n(z)$ ketma-ketlik $f(z)$ funksiya $|z| < \left(\frac{A^2T+T+2A}{2AT+A^2+1} \right)$ to'lganda yaqinlashadi $|z| < Z < \left(\frac{A^2T+T+2A}{2AT+A^2+1} \right)$ bo'lganda tekis yaqinlashadi.

Teorema 1.4. ni isbotini quyidagi lemmani isbotidan boshlaymiz.

Lemma 1.3. $|t| = T > 1$, $|\alpha| \geq A > 1$ va $|z| = Z > 1$, $Z < A$ lar uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$\frac{t-\alpha}{\alpha t-1} \leq \frac{A+T}{1+AT}, \quad \frac{\alpha t-1}{\alpha} \leq \frac{AZ+1}{A+Z} \quad (9)$$

$\omega = \frac{(\alpha t-1)}{(t-\alpha)}$ akislantirish fiksirlangan α da birlik aylanani o'ziga akislantiradi va $t = \infty$ nuqtani $\omega = \alpha$ ga $t = \alpha$ nuqtani $\omega = \infty$ ga $t = 0$ nuqtani $\omega = \frac{1}{\alpha}$ ga o'tkazadi. $|t| = T$ aylana C' dan tashqarida yotibdi, shuningdek, u C' aylanadan tashqaridagi C' aylanaga o'tadi. Bundan tashqari $\omega = \alpha$ va $\omega = \frac{1}{\alpha}$ nuqtalar C' aylanaga nisbatan qo'shma hisoblanadi. Agar $T > \alpha$ bo'lsa, u holda $|t| = T$ aylana $t = \alpha$ va $t = \infty$ nuqtalarni ajratadi, shuning uchun C' aylana $\omega = \infty$ va $\omega = \alpha$ nuqtalarni ajratadi. Demak, $\omega = \alpha$ nuqta C' aylana ichida joylashga. Agar $T < \alpha$ bo'lsa, u holda $|t| = T$ aylana $t = \alpha$ va $t = \infty$ nuqtalarni ajratmaydi, shuning uchun C' aylana $\omega = \infty$ va $\omega = \alpha$ nuqtalarni ajratmaydi. Shuningdek, $\omega = \alpha$ C' aylana ichida joylashmaydi. $t = 0, \alpha, \infty$ nuqtalardan o'tuvchi t -tekislikdagi to'g'ri chiziqqa $\omega = \frac{1}{\alpha}, \infty, \alpha$ nuqtlardan otuvchi yani koordinatalar boshi va $\omega = \alpha$ nuqtalardan o'tuvchi tenglik mos kelishi kerak. Ushbu to'g'ri chiziq C' aylananing ikki nuqtasidan o'tadi, yani koordinatalar boshiga eng yaqin va eng uzoq nuqtalardan. Shuningdek, ushbu C' dagi nuqtalar $t = T \frac{\alpha}{\alpha}$ va $t = T \frac{\alpha}{\alpha}$ nuqtalarga mos kelishi kerak. C' aylananing ushbu nuqtalarga $\omega = \frac{(T\alpha - \alpha)}{(T\alpha - \alpha\alpha)}$ va $\omega = \frac{(T\alpha + \alpha)}{(T\alpha + \alpha\alpha)}$ nuqtalar mos hisoblanadi. Mos nuqtalarni taqqoslash shuni ko'rsatadiki, ikkinchi nuqtalarda $T > \alpha$ dan katta, kichik yoyi teng bo'lishidan qat'iy nazar absolyut qiymat jihatdan kichik. Shunday qilib,

$$\frac{\alpha t-1}{t-\alpha} \geq \frac{\alpha T+1}{\alpha+T} \geq \frac{AT+1}{A+T}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Lemma 1.3. isbot bo'ldi.

Teorema 1.4. ning isboti endi oson kelib chiqadi, yani yetarlicha katta n lar uchun

$$f(z) - r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{z(\alpha_m \cdot t - 1) \dots (\alpha_m \cdot t - 1)(t - \alpha_{n1}) \dots (t - \alpha_{nm}) f(t) dt}{t(\alpha_{n1}t - 1) \dots (\alpha_{nm}t - 1)(z - \alpha_{n1}) \dots (z - \alpha_{nm})(t - z)} \quad (10)$$

bu yerda $z \in \Gamma' : |t| = T' < T$ aylana ichidan olingan. Yetarlicha katta n larda $|\alpha_{nk}| \geq A' < A$, $A' > 1$ tengsizlikga egamiz. (10) tenglikning o'ng tomoni (9) tenglikga ko'ra $|z| = z$, $z < A'$, $z < T'$, $\frac{A' + T'}{1 + A'T'} \cdot \frac{A' \cdot z - 1}{A' - z} < 1$, bo'lganda nolga tekis yaqinlashadi, ya'ni

$$z < \frac{(A'^2 \cdot T' + T' + 2A')}{(2A'T' + A'^2 + 1)} \quad (11)$$

shartlar bajarilganda nolga intiladi. Ushbu oxirgi kattalik har doim A' va T' lardan kichik. Agar A' va T' lar A va T limitlariga monoton intilsa, u holda (11) ning o'ng tomoni o'sadi va mos limitlarga intiladi. Teorema isbot bo'ldi. Teorema 1.4. da $A = \infty$ va $T = \infty$ bo'lgan holni ham qarash mumkin. Bu holda $\frac{1}{z}$ uchun T va $\frac{(A^2 + 1)}{2A}$ mos ravishda limit bo'ladi. $A = \infty$ holda $r_n(z)$ funksiyalar ko'phad bo'lishi shart emas, faqat α_{nk} to'plam chekli limit nutqaga ega bo'lmasligi talab qilinadi. Teorema 2.4. dagi yaqinlashish radiusi uchun chegara qo'yish tabiiy hol hisoblanadi. Agar $|z|$ uchun limitning qandaydir katta limitga almashtirsak, teorema o'rinli bo'lmay qoladi. Haqiqatan ham, $f(z) = \frac{1}{(z + T)}$ funksiya va $\alpha_{nk} = A$ deb qarasak,

$$f(z) - r_n(z) = \frac{(A + T)^n z(Az - 1)^n}{T(AT + 1)^n (z + T)(z - A)^n} \quad (12)$$

ga ega bo'lamiz. $z = \frac{A^2 T + T + 2A}{2AT + A^2 + 1}$ qiymat uchun $\frac{(A + T)(Az - 1)}{(AT + 1)(z - A)} = 1$ ga ega bo'lamiz.

Bundan kelib chiqadiki, (12) ning ong tomoni limitga ega emas.

Natija 1.3. Teorema 1.4. uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max |f(z) - r_n(z)|, z \in C \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{A + T}{1 + AT}$$

Ushbu natija (9) va (10) lardan kelib chiqadi, chunki C da z uchun

$$\left| \frac{\alpha_{nk}z-1}{z-\alpha_{nk}} \right| = 1$$

o'rinli. (12) dan esa $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max |f(z) - r_n(z)|, z \in C \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{A+T}{1+AT}$ ga ega bo'lamiz.

Shuning uchun natijada keltirilgan baholashni yaxshilab bo'lmaydi. Shunday baholashni

$$|z| = z < \frac{A^2T + T + 2A}{2AT + A^2 + 1}, \quad z \geq 1$$

aylanadagi z uchun ham olishimiz mumkin.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max |f(z) - r_n(z)|, |z| \leq Z \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{A+T}{1+AT} \frac{Az-1}{A-z}$$

Birlik aylana, boshqa metrikalar bo'yicha yaqinlashish.

Lemma 1.4. Agar maxsusliklari $|z| = \rho, \rho > r$ aylanada yoki aylana tashqarisida yotgan $p(z)$ -ratsional funksiya uchun $|z| = r$ da $|p(z)| < L$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $|z| = rR_1, 1 < R_1 < \rho$ da

$$|p(z)| < L \left| \frac{\rho R_1 - 1}{\rho - R_1} \right| \quad (13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Lemma 1.4. ni $r=1$ bo'lgan hol uchun isbotlash yetarli. Aniqlik uchun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ lar, $m \leq n$ $p(z)$ funksiyani $|z| = 1$ aylana tashqarisida yotgan maxsusliklari bo'lsin.

$$Q(z) = p(z) \frac{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_m)}{(1 - \alpha_1 z) \dots (1 - \alpha_m z)}$$

funksiya $|z| > 1$ da analitik va $|z| \geq 1$ da uzluksizdir. $|z| = 1$ da, shuningdek $|z| > 1$ da $Q(z)$ uchun $|Q(z)| \leq L$ tengsizlik o'rinli. Lemma 1.3. ga ko'ra (chunki $|\alpha_k| > \rho$) $|z| = R_1$ uchun

$$\left| \frac{1 - \alpha_k z}{z - \alpha_k} \right| < \left| \frac{\rho R_1 - 1}{\rho - R_1} \right|$$

o'rinli. Bundan esa (13) kelib chiqadi.

Teorema 1.5. $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nm}$ lar moduli $A > 1$ dan oshmaydigan limit nuqtaga bo'lmagan to'plam va $f(z)$ funksiya $|z| < T > 1$ da analitik bo'lsin.

$$\pi_n(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{(z - \alpha_{n1})(z - \alpha_{n2}) \dots (z - \alpha_{nm})} \quad (14)$$

Ratsional funksiyalar ketma-ketligi $\{z: |z| = 1\}$ aylanada Chebishev ma'nosida, ya'ni o'rta ρ ($\rho > 0$) daraja ma'nosida $f(z)$ funksiyaga eng yaxshi yaqinlashadigan ketma-ketlik bo'lsin. Yoki har bir ushbu hollarda musbat, uzluksiz vesli funksiya $|z| \leq 1$ to'plamda o'rta ρ ($\rho > 0$) daraja ma'nosida $f(z)$ funksiyaga eng yaxshi yaqinlashadigan ratsional funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. U holda

$$\pi_n(z): |z| < \frac{A^2 T + T + 2A}{2AT + A^2 + 1}$$

da $f(z)$ funksiyaga yaqinlashadi va

$$|z| \leq z < \frac{A^2 T + T + 2A}{2AT + A^2 + 1}$$

da tekis yaqinlashadi, hamda har bir hol uchun ushbu tengsizlik o'rinli:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z) - \pi_n(z)| \right]^{1/n} \leq \frac{A + T}{1 + AT}$$

$\pi_n(z)$ C da Chebishev ma'nosida $n(z)$ $0 < n_1 \leq n(z) \leq N$ vesli funksiyasi bilan $f(z)$ funksiyaga eng yaxshi yaqinlashish bo'lsin. Agar $q > \frac{(A + T)}{(1 + AT)}$ son ixtiyoriy bo'lsa, u holda teorema 1.4 ning 1.3-natijasiga ko'ra $r_n(z)$ uchun

$$|f(z) - r_n(z)| \leq Mq^n, \quad z \in C \quad (16)$$

tengsizlik o'rinli. Shuningdek,

$$\left. \begin{aligned} n(z)|f(z)-r_n(z)| &\leq MNq^n, \quad z \in C \\ n(z)|f(z)-\pi_n(z)| &< MNq^n, \quad z \in C \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\Rightarrow |r_n(z)-\pi_n(z)| < \frac{2MN}{n_1} q^n, \quad z \in C.$$

Yetarlicha katta n larda $\{\alpha_{mk}\}$ ixtiyoriy $A' < A$, $A' > 1$ sonidan oshadi, shuning uchun lemma 1.4 ga ko'ra

$$|r_n(z)-\pi_n(z)| \leq \frac{2MN}{n_1} q^n \left(\frac{A'R_1-1}{A'-R_1} \right)^n, \quad |z| \leq R_1 < A' < A, \quad R_1 > 1$$

Bundan kelib chiqadiki, $r_n(z)-\pi_n(z)$ ketma-ketlik nolga tekis yaqinlashadi, agarda

$\frac{q(A'R_1-1)}{A'-R_1} < 1$ yoki $R_1 < \frac{A'+q}{1+A'q}$ tengsizliklardan biri bajarilsa. Biz endi A' ni A ga

va q ni $(A+T)/(1+AT)$ ga intiltirishimiz mumkin. $\frac{A'+q}{1+A'q}$ ning limiti $\frac{A^2T+T+2A}{2AT+A^2+1}$

ga teng. Bizga $r_n(z)$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashish radiusi ma'lum bo'lgani uchun $\pi_n(z)$ ketma-ketlikning tekis yaqinlashish radiusini topamiz. (15) tengsizlik (16) va (17) lardan kelib chiqadi. Teorema 2.5 ning boshqa tasdiqlari ham shu metod bo'yicha isbotlanadi.

Natija 1.4. $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{ni}$ lar moduli jihatdan $A > 1$ dan oshmaydigan limit nuqtalariga ega bo'lmagan to'plam va $f(z)$ funksiya $|z| < T > 1$ da analitik, C birlik aylana va $R_n(z)$ - shunday (14) ko'rinishdagi ratsional funksiya, liksirlangan q_1 uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z)-R_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} < q_1 < \frac{A+T}{1+AT}, \quad q_1 < 1.$$

U holda $|z| < \frac{A+q_1}{1+Aq_1}$ da $R_n(z) \rightarrow f(z)$ ga yaqinlashadi,

$$|z| < z < \frac{A+q_1}{1+Aq_1} \text{ da } R_n(z) \rightarrow f(z)$$

ga tekis yaqinlashadi. Bundan tashqari,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{|z|=Z} |f(z) - R_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq q_1 \frac{A+1}{A-z}$$

tenglik o'rinli.

Natija 1.5. $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nm}$ lar moduli jihatdan $A > 1$ dan oshmaydigan limit nuqtalariga ega bo'lmagan to'plam bo'lsin. C birlik aylanaga va $R_n(z) \forall n$ larda aniqlangan va $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z) - R_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq q < 1, f(z) \in C$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (14) ko'ranishdagi ratsional funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. u holda

$$|z| < \left(A + q^{\frac{1}{2}} \right) / \left(1 + Aq^{\frac{1}{2}} \right)$$

bo'lganda $R_n(z)$ - ratsional funksiyalar ketma-ketligi yaqinlashadi,

$$|z| \leq z < \left(A + q^{\frac{1}{2}} \right) / \left(1 + Aq^{\frac{1}{2}} \right)$$

bo'lganda tekis yaqinlashadi va $f(z)$ funksiya

$$|z| < \left(A + q^{\frac{1}{2}} \right) / \left(1 + Aq^{\frac{1}{2}} \right)$$

bo'lganda analitik bo'ladi.

$Q > q \forall$ son bo'lsin. oldindan tanlangan M uchun quyidagicha olamiz.

$$|f(z) - R_n(z)| \leq M(1+Q)Q^n, |f(z) - R_{n+1}(z)| < MQ^{n+1}, z \in Q$$

tenglikka egamiz. Lemma 1.1 ga asosan, yetarlicha kata n larda

$$|R_n(z) - R_{n+1}(z)| \leq M(1+Q)Q^n \left[\frac{A'R_1 + 1}{A' - R_1} \right]^{n+1}$$

Tengsizlik o'rinli. Shuningdek, $R_n(z) - R_{n+1}(z)$ n darajali, mahsusliklari $|z| < A'$ aylana tashqarisida bo'lgan. z o'zgaruvchi bo'yicha ratsional funksiya $R_n(z)$ - tekis yaqinlashadi, agarda

$$Q^{\frac{1}{2}}(A'R_1 + 1)/(A' - R_1) < 1, R_1 < \left(A' + Q^{\frac{1}{2}} \right) / \left(1 + A'Q^{\frac{1}{2}} \right)$$

bo'lsa.

A' va Q larni mos ravishda A va q larga intiltirgan holda natija 1.5 ga erishamiz.

Ushbu natija bizni yanada kuchliroq natijaga olib keladi, agarda $\alpha_{nk} = \alpha_k$ n ga bog'liq bo'lmasa, chunki $R_n(z) - R_{n+1}(z)$ ushbu holda maxsusliklari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ nuqtalarda bo'lgan, $n+1$ darajali ratsional funksiya hisoblanadi.

Natija 1.6. $\alpha_{nk} = \alpha_k$ nuqtalar n ga bog'liq bo'lmasin va $\{\alpha_k\}$ to'plam moduli jihatdan $A > 1$ dan kichik bo'lgan limit nuqtaga ega bo'lmasin. Bundan tashqari, C - birlik aylana va $R_n(z) \forall n$ larda aniqlangan va

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z) - R_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq q < 1, f(z) \in C$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi (14) ko'rinishdagi ratsional funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. U holda $|z| < (A+q)/(1+AQ)$ ga $R_n(z)$ ketma-ketlik yaqinlashadi,

$|z| \leq (A+q)/(1+AQ)$ ga $R_n(z)$ tekis yaqinlashadi va $|z| < (A+q)/(1+AQ)$ da $f(z)$ funksiya analitik bo'ladi.

Teorema 1.6. $w = (\bar{\alpha}z - 1)/(z - \alpha), |\alpha| > 1$ kasr chiziqli akslatirishga nisbatan

invariant hisoblanadi.

Natija 1.7. $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nk}$ to'plam $\left| \frac{(\alpha z + 1)}{(z - a)} \right| < A > 1, |\alpha| > 1$, doira ichida limit nuqtalarga ega bolamiz. $f(z)$ funksiya $\left| \frac{(\alpha z + 1)}{(z - a)} \right| < T > 1$ da analitik bo'lsa va $H_n(z)$ (14) ko'rinishdagi $C: |z| = 1$ birlik aylanada $f(z)$ funksiyaga Chebishev ma'nosida eng yaxshi yaqinlashadigan ratsional funksiya bo'lsin. U holda $H_n(z)$ ketma-ketlik

$$\left| \frac{\alpha z + 1}{z - a} \right| < \frac{A^2 T + T + 2A}{2AT + A^2 + 1}$$

bo'lganda $f(\alpha)$ ga yaqinlashadi va ushbu doira ichida yotgan ixtiyoriy yopiq toplamda tekis yaqinlashadi.

Natija 1.8. Agar $r_n(z)$ ratsional funksiyalar ketma-ketligi C sohada yaqinlashsa, shuningdek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z) - r_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} = 0$$

bo'lsa, (bu yerda $f(z)$ faqat C da aniqlangan) u holda $r_n(z)$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $f(z)$ funksiya $r_n(z)$ ning maxsusliklarining limit nuqtalaridan tashqari kengaytirilgan tekislikning barcha P nuqtalarida analitik bo'ladi. Bundan tashqari, ixtiyoriy $r_n(z)$ ketma-ketlikning maxsusliklarining limit nuqtalarini saqlamaydigan P nuqtalarning yopiq C_1 to'plamda tekis yaqinlashadi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{z \in C} |f(z) - r_n(z)| \right]^{\frac{1}{n}} = 0$$

o'rinli bo'ladi.

2-§. Gonchar kvazianalitik funksiyalari sinfi.

f - $\mathbb{R}$ haqiqiy o'qning $\Delta = [a, b]$ kesmasida aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin. $\rho_m(f)$ - orqali f funksiyani Δ kesmada darajasi m dan oshmaydigan ratsional funksiyalar bilan eng kichik farqini belgilaymiz:

$$\rho_m(f) = \inf_{\{r_m\}} \|f - r_m\|_{\Delta},$$

Bu erda $\|\cdot\|_{\Delta}$ - tekis norma va quyi limit quyidagi ko'rinishdagi barcha ratsional funksiyalar sinfi bo'yicha olinadi:

$$r_m(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Odatda $e_m(f)$ - orqali f funksiyani Δ kesmada darajasi m dan oshmaydigan ko'phadlar bilan eng kichik farqini belgilaymiz. Ko'rish qiyin emaski ixtiyoriy $m = 0, 1, 2, \dots$ larda $\rho_m(f) \leq e_m(f)$

Gonchar tomonidan isbotlangan quyidagi teorema shuni ko'rsatadiki, $\rho_m(f)$ ning ixtiyor tezlikda kamayishi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentda qandaydir yaxshi differensial xossalarga ega bo'lishini ta'minlay olmas ekan:

Teorema 2.1. $\varphi(m) > 0$ va $\omega(\delta) > 0$ - ixtiyoriy monoton funksiyalar bo'lsin, shuningdek $m \rightarrow \infty$ da $\varphi(m) \rightarrow 0$ va $\delta \rightarrow 0$ da $\omega(\delta) \rightarrow 0$ bo'lsin. $[a, b]$ segmentda shunday uzluksiz $f(x)$ funksiya mavjudki,

$$\rho_m(f) < \varphi(m), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_f(\delta)}{\omega(\delta)} > 1$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu erda $\omega_f(\delta)$ - $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi uzluksizlik moduli.

Haqiqatan ham, yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k) \varepsilon_k}{2^k (x_k - x)}, \quad x_m = 1 + \varepsilon_m, \quad \varepsilon_{m-1} = \delta_m, \quad \omega^{-1}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{2^k}\right).$$

Bundan, hususiy holda $e_m(f)$ ko'phadlar bilan eng yaxshi yaqinlashis no'qga

qanchalik sekin intilsa, $\rho_m(f)$ ratsional funksiyalar bilan eng yaxshi yaqinlashish nolga shunchalik tez intiladigan funksiyaning mavjudligi kelib chiqadi.

A.Gonchar ishlarida quyidagi deyarli barcha joyda differensiallanuvchilik haqidagi teoremlar isbotlangan:

Teorema 2.4. Agar

$$\rho_m(f) \leq \frac{1}{m^{1+\varepsilon}},$$

(bunda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentning deyarli barcha joyida differensiallanuvchi bo'ladi.

Teorema 2.5. Agar

$$\rho_m(f) < \frac{1}{m^{p+\varepsilon}},$$

(bunda p - butun, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentning deyarli barcha joyida p -inchi asimptotik hosilaga ega bo'ladi.

Gonchar ishida ratsional funksiyalar bilan eng yaxshi yaqinlashish nolga tez intiladigan funksiyalar sinfi analitik funksiyalarning asosiy xossalardan biri yagonalik xossasiga ega bo'lishi ko'rsatilgan:

Teorema 2.6. Agar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\rho_m(f)} < 1.$$

va logarifmik sig'imi musbat bo'lgan $E \subset [a, b]$ to'plamda $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesmada $f(x) \equiv 0$ bo'ladi.

(f, U) , $U = \{z : |z| < 1\}$ f analitik funksiyaning elementi bo'lsin. Вейерштрассову естественную область существования функции будем обозначать через W_f - orqali f funksiyaning Veyershtross mavjudlik sohasini belgilaymiz. $U_\delta = \{z : |z| \leq \delta\}$ orqali ixtiyoriy kichik δ , $0 < \delta < 1$ radiusli yopiq doirani fiksirlab olamiz.

Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 2.7. Agar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \rho_m^{1/m} = 0, \quad \rho_m = \rho_m(f, U_\delta)$$

bo'lsa, u holda f - funksiya o'zining Veyershtrass mavjudlik sohasi W_f da birqiyimatli analitik funksiya bo'ladi.

Ushbu teoremadan bitta oddiy natijani ajratib olamiz. F - birqiyimatli yoki ko'pqiyimatli xarakterda bo'lgan, chekli sondagi maxsusliklarga ega bo'lgan analitik funksiyalar sinfi bo'lsin.

Agar (f, U) - $f \in F$ analitik funksiyaning elementi bo'lsa, u holda quyidagi shartlar ekvivalent:

1) f - birqiyimatli funksiya (W_f da).

2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m^{1/m} = 0.$

3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \rho_m^{1/m} = 0.$

E. Poletski va J. Vigerinklar ishida quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema 2.8. f - funksiya $V \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf va $U \subset \subset V \subset V$ dagi yopiq doira bo'lsin. $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ - darajasi m ga teng va qutblari V da bo'lmagan ratsional funksiyalar ketma-ketligi bolsin. Bundan tashqari, $m \rightarrow \infty$ da $\|f - r_m\|_U^{1/m} \rightarrow 0$ bo'lsin. U holda $\mathbb{C}^2$ da shunday $\mathcal{G}$ - plyurisubgarmonik funksiya mavjudki, $\{\mathcal{G} = -\infty\} \cap (V \times \mathbb{C}) = \Gamma_f$ bo'ladi, ya'ni, f - funksiyaning grafigi - Γ_f $V \times \mathbb{C}$ to'plamga nisbatan to'la plyuripolyar to'plam bo'ladi.

3-§. Gonchar kvazianalitik funksiyalari uchun yagonalik teoremasi.

f - $\mathbb{C}^n$ kompleks fazoning K kompakt to'plamida aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin. $\rho_m(f)$ - orqali f funksiyaning K kompaktda darajasi m dan oshmaydigan ratsional funksiyalar bilan eng kichik farqini belgilaymiz:

$$\rho_m(f) = \inf_{\{r_m\}} \|f - r_m\|_K,$$

bunda $\|\cdot\|_K$ - tekis norma va quyi chegara

$$r_m(z) = \frac{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha}{\sum_{|\alpha| < m} b_\alpha z^\alpha},$$

ko'rinishdagi barcha ratsional funksiyalar sinfidan olingan va $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ - multiindeks.

Ushbu paragrafda biz $K \subset \mathbb{C}^n$ kompaktda Gonchar ma'nosida kvazianalitik funksiyalar sinfini o'rganamiz, ya'ni

$$R(K) = \{f \in C(K) : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \rho_m(f, K) < 1\}$$

sinfini o'rganamiz.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \rho_m(f, K) = 0$$

va

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \rho_m(f, K)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

bo'lgan hollarda ushbu sinflar mos ravishda $R_0(K)$ va $R^0(K)$ orqali belgilanadi.

Teorema 3.1. $K \subset \mathbb{C}^n$ plyuripolyar bo'lmagan kompakt to'plam bo'lsin. Agar $f \in R_0(K)$ funksiya plyuripolyar bo'lmagan $E \subset K$ qism to'plamda nolga teng bo'lsa, u holda $f(z) \equiv 0$ ayniyat K ning qandaydir plyuripolyar qismidan tashqari barcha joyida o'rinli bo'ladi.

Ushbu teoremani isbotlashda bizga quyidagi yordamchi lemma kerak bo'ladi:

Lemma 3.1. $K \subset \mathbb{C}^n$ - plyuripolyar bo'lmagan kompakt va $\{q_{m_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ ($\deg q_{m_k}(z) = m_k$) $\|q_{m_k}(z)\|_K = 1$ bo'lgan ko'phadlar ketma-ketligi bo'lsin. U holda,

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{k \rightarrow \infty} |q_{m_k}(z)|^{1/m_k} = 0\}$$

to'plam plyuripolyar to'plam bo'ladi.

Lemma isboti. Teskarisini faraz qilamiz. A - plyuripolyar bo'lmagan to'plam bo'lsin, ya'ni plyurisubgarmonik sig'im $\text{cap}(A) > 0$ bo'lsin.

Quyidagi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\mathcal{G}_k^*(z) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} \mathcal{G}_k(z'), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

bunda

$$\mathcal{G}_k(z) = \sup_{s \geq k} |q_{m_s}(z)|^{1/m_s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ravshanki, $\mathcal{G}_k^*(z)$ ketma-ketlik lokal tekis chegaralangan (ya'ni,

$0 \leq g_k^*(z) \leq e^{V^*(z, K)}$ va monoton o'smaydigan. Bundan tashqari, $k \rightarrow \infty$ da A to'plamning

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C}^n : g_k(z) < g_k^*(z)\}$$

plyuripolyar qismto'plamidan tashqarida $g_k^*(z) \rightarrow 0$, chunki A to'plamning aniqlanishiga ko'ra $g_k(z)$ ketma-ketlik A da nolga intiladi.

$g_k^*(z)$ ketma-ketlikning monoton ekanligidan ixtiyoriy $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \text{cap}(A)$ uchun shunday U_ε , ($\text{cap}(U_\varepsilon) < \varepsilon$) ochiq to'plam mavjudki, $A_\varepsilon = A \setminus U_\varepsilon$ to'plamda $g_k^*(z)$ ketma-ketlik tekis yaqinlashadi. Bundan esa, shunday $A_0 \subset A_\varepsilon$, $\text{cap}(A_0) > 0$ kompakt mavjudki, $g_k^*(z)$ plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligi A_0 da nolga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Shuningdek, $|q_{m_k}(z)|^{1/m_k}$ ketma-ketlik ham A_0 kompaktda nolga tekis yaqinlashadi.

Endi biz A.Sadullaem tomonidan kiritilgan τ - sig'imdan foydalanamiz.

τ - sig'im. K - qandaydir $U \subset \mathbb{C}^n$ polidoiradagi kompakt to'plam bo'lsin. $\|T_m\|_U = 1$ shart bilan normallangan va ushbu $\|T_m\|_K$ norma barcha ko'phadlar ishida eng kichik bo'lgan $T_m(z)$, ($\deg T_m(z) \leq m$) ko'phadni qaraymiz. U holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_K^{1/m} = \tau(K, U), \quad (1)$$

limit mavjud va barcha $m \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} > \tau(K, U) \quad (2)$$

Tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari,

$$\tau(K, U) = \exp\left\{-\sup_{z \in U} V^*(z, K)\right\}. \quad (3)$$

Bu erda

$$V^*(z, K) = \overline{\lim}_{z' \rightarrow z} V(z', K),$$

bunda

$$V(z, K) = \sup_m \left\{ \frac{1}{m} \ln |p_m(z)| : \|p_m\|_K < 1 \right\}$$

– Grinning ekstremal funksiyasi.

$$a = \exp\left\{-\sup_{z \in U} V^*(z, K)\right\}$$

bo'lsin.

$$\frac{1}{m} (\ln |T_m(z)| - \ln \|T_m\|_K) \leq 0$$

tengsizlik K da o'rinli ekanligidan va ekstremal funksiya ta'rifiga ko'ra barcha $m \in \mathbb{N}$ va $z \in \mathbb{C}^n$ lar uchun

$$\frac{1}{m} (\ln |T_m(z)| - \ln \|T_m\|_K) \leq V^*(z, K)$$

Tengsizlik o'rinli. Bundan esa

$$\sup_{z \in U} \left\{ \frac{1}{m} (\ln |T_m(z)| - \ln \|T_m\|_K) \right\} \leq \sup_{z \in U} V^*(z, K)$$

ekanligi, shuningdek

$$-\ln \|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} \leq -\ln a$$

va barcha $m \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} \geq a \quad (4)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi $\|T_m\|_K^{\frac{1}{m}}$ ketma-ketlikni a ga intilishini ko'rsatami. Agar qandaydir m_0 uchun norma $\|T_{m_0}\|_K = 0$ bo'lsa, u holda barcha $m \geq m_0$ lar uchun norma $\|T_m\|_K = 0$ bo'ladi. Ravshanki, ushbu holda K kompakt qandaydir analitik to'plamning qismto'plami bo'ladi. Bundan esa, $a = 0$ va

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} = 0$$

ekani kelib chiqadi.

Endi esa $\|T_m\|_K \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$ bo'lgan holni qaraymiz. $V^*(z, K)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $p_{m_0}(z)$ ko'phad mavjudki, $\|p_{m_0}\|_K \leq 1$ va $\frac{1}{|p_{m_0}(z_0)|^{\frac{1}{m_0}}} - a < \varepsilon$ tengsizliklar qandaydir

$z_0 \in \partial U$ nuqtada o'rinli bo'ladi. Quyidagi ko'phadni qaraymiz:

$$q_{m_0}(z) = \frac{p_{m_0}(z)}{\|p_{m_0}\|_U}.$$

Bu ko'phad normalangan $U : \|q_{m_0}\|_U = 1$.

$$\|q_{m_0}\|_K = \frac{\|p_{m_0}\|_K}{\|p_{m_0}\|_U} < \frac{1}{|p_{m_0}(z_0)|} \leq (a + \varepsilon)^{m_0},$$

ekanligidan

$$\|T_{m_0}\|_K^{\frac{1}{m_0}} < \|q_{m_0}\|_K^{\frac{1}{m_0}} \leq a + \varepsilon$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan esa, ixtiyoriy $m = km_0$, $k \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\|T_{km_0}\|_K \leq \|T_{m_0}^k\|_K < \|T_{m_0}\|_K^k \leq (a + \varepsilon)^{km_0}.$$

munosabatga ega bo'lamiz. Ixtiyoriy $m > m_0$: $m = km_0 + s$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < s < m_0 - 1$ son olamiz. U holda,

$$\|T_m\|_K = \|T_{km_0+s}\|_K \leq \frac{\|T_{km_0+s}\|_K}{\|T_{km_0}\|_K} (a + \varepsilon)^{km_0}.$$

$T_m|_K$ ketma-ketlikning monoton o'smovchiligidan

$$\|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} = \|T_{km_0+s}\|_K^{\frac{1}{km_0+s}} \leq (a + \varepsilon)^{\frac{km_0}{km_0+s}}, \quad (5)$$

$m = km_0 + s$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq m_0 - 1$ munosabatga ega bo'lamiz. (4), (5)

tengsizliklarni birlashtirishdan va limitga o'tishdan

$$a \leq \varliminf_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} \leq a + \varepsilon,$$

tengsizlikka ega bo'lamiz va bu tengsizlik $\varepsilon \rightarrow 0$ da

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m\|_K^{\frac{1}{m}} = a$$

tenglikni beradi. Соотношения (1), (2) va (3) munosabatlar isbot bo'ldi.

Ushbu munosabatlardan

$$\|q_{m_k}\|_{A_0}^{\frac{1}{m_k}} \geq \|T_{m_k}\|_K^{\frac{1}{m_k}} \geq \tau(K, U) > 0, \text{ bunda } U \supset K, \quad (6)$$

ekani kelib chiqadi, chunki $\|q_{m_k}\|_K = 1$ va $\|q_{m_k}\|_U > 1$. (6) tengsizlikdan

$|q_{m_k}(z)|^{\frac{1}{m_k}}$ ketma-ketlik A_0 to'plamda nolga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi. Shunday qilib biz qarama-qarshilikka keldik. Bu esa A to'plamning polyarligini isbotlaydi. Lemma isbot bo'ldi.

Teorema 3.1 isboti. Faraz qilaylik $E = \{z \in K : f(z) = 0\}$ va $K \setminus E \neq \emptyset$ bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra m_k - natural sonlar ketma - ketligi va unga mos

$$r_{m_k} = \frac{p_{m_k}}{q_{m_k}}$$

ratsional funksiyalar ketma-ketligi mavjudki,

$$\rho_{m_k}(f) = \|f - r_{m_k}\|_K > 0$$

bo'ladi. Umumiylikka ziyon keltirmasdan shuni faraz qilishimiz mumkinki,

$$\|f\|_K \leq \frac{1}{2}, \|p_{m_k}\|_K \leq 1 \text{ u } \|q_{m_k}\|_K = 1.$$

Bernshteyn – Uolsh tengsizligiga ko'ra, ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{N}$ uchun

$$\left| p_{m_k}(z) \right| \leq e^{m_k V^*(z, K)}, \quad \left| q_{m_k}(z) \right| \leq e^{m_k V^*(z, K)}$$

tengsizliklar o'rinli. Quyidagi yordamchi plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz:

$$u_k(z) = \frac{1}{m_k} \ln \left| p_{m_k}(z) \right|, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Ravshanki, $u_k(z) \leq V^*(z, K)$ - yuqoridan lokal chegaralangan va

$$u_k(z) = \frac{1}{m_k} \ln \left| q_{m_k}(z) \right| + \frac{1}{m_k} \ln \left| \frac{p_{m_k}(z)}{q_{m_k}(z)} \right|, \quad z \in K.$$

$f(z) \neq 0$, $z \in K \setminus E$ va $f(z) = 0$, $z \in E$ ekanligidan quyidagi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{m_k}(z)}{q_{m_k}(z)} \right|^{1/m_k} = 1, \quad z \in K \setminus E$$

va

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{m_k}(z)}{q_{m_k}(z)} \right|^{1/m_k} = 0, \quad z \in E$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bundan

$$u(z) = \overline{\lim} u_k(z), \quad z \in \mathbb{C}^n$$

funksiya uchun quyidagi

$$u(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m_k} \ln \left| q_{m_k}(z) \right|, \quad z \in K \setminus E \quad (7)$$

va

$$u(z) = -\infty, \quad z \in E \quad (8)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. E ning plyuripolyar emasligidan va (8) ko'ra

$u(z) = -\infty$ tenglik qandaydir plyuripolyar to'plamdan tashqari butun $\mathbb{C}^n$ da o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondah, lemma 3.1 ga asosan

$$A = \{z \in K \setminus E : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m_k} \ln |q_{m_k}(z)| = -\infty\}$$

to'plam plyuripolyar. agar $K \setminus E$ to'plam plyuripolyar bo'lmasa, u holda, (1) ga ko'ra $u(z) = -\infty$ tenglik qandaydir plyuripolyar to'plamdan tashqari butun $\mathbb{C}^n$ da o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $K \setminus E$ to'plam plyuripolyar to'plamdir. Teorema isbot bo'ldi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Садуллаев А.С. Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Мат. сб. - 1982. - Т. 119(1). - с. 96 - 118.
2. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНТИ, 1985.- Т. 8. - с. 65 - 111.
3. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические меры и ёмкости на комплексных многообразиях// УМН. - 1981. - Т. 36(4). - С. 53 - 105.
4. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Издательство иностранной литературы. Москва. 1961.
5. Тиман А.Ф. Теория приближения функции действительного переменного. Физмат. Москва. 1960.
6. Гончар А. А. О наилучших приближениях рациональными функциями. ДАН СССР. 1955, т. 100. №2, с. 205-208.
7. Гончар А. А. Квазианалитические классы функций, связанные с наилучшими приближениями рациональными функциями. Изв. АН Арм.ССР. 1971, VI. № 2-3, с. 148-159.
8. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара// Математические заметки, **89**, № 4, (2011), 637-640.
9. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar// The journal of analysis. Volume **18**, (2010), 233-238.

