

O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi
Al-Xorazmiy nomidagi Urganch Davlat universiteti

Matematika fakulteti
«Funksiyalar nazariyasi» kafedrası
matematika yo`nalishi
403 matematika guruh talabasi

Qutlimuratov Jasurbekning

«C da ko'p qiymatli analetik funksiyalar»
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ish ko`rildi va himoyaga

berildi «Funksiyalar
nazariyasi»

kafedrasi mudiri:

f.m.f.n.dots.Madraximov R.M

«__» _____ 2010 y.

Ilmiy rahbar:

ass.Vaisova M.D

Taqrizchi:

f.m.f.n.dots. Allaberganov O.

Urganch-2010 yil.

A NNO TATSIYA

Golomorf funksiyalarning asosiy xossalaridan biri yagonalik xossasi alohida ahamiyatga ega va bu xossaga binoan sohada golomorf bo'lgan ikkita funksiya sohadagi biror nuqtaning etarlicha kichik atrofida ustma-ust tushsa, unda ular shu sohada bir-biriga aynan teng bo'ladi. Bu xossadan kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasida (kompleks analizda) muhim bo'lgan funktsiyalarni analitik davom ettirish tushunchasini o'rganishda foydalaniladi.

Funksiyalarni analitik davom ettirishda D sohada $(D \subset \bar{D})$ berilgan golomorf funksiya ko'ra D sohadan kengroq bo'lgan D' sohada $(D \subset D')$ golomorf va D sohada berilgan funksiya bilan ustma-ust tushadigan funktsiyani aniqlash masalasi qaraladi. Ayni paytda, analitik davom ettirishlar ko'p qiymatli golomorf (analitik) funksiya tushunchasini kiritish imkonini beradi.

Eng sodda masalalar ham ko'p qiymatli funktsiyalarni o'rganish zaruriyatini taqozo etadi. Masalan, $z = w^2$ tenglama ixtiyoriy fiksirlangan $z \neq 0$ da bir-biridan ishorasi bilan farq qiladigan ikkita yechimga ega. Bu yechimlar to'plamini $\sqrt{z}$ deb belgilasak, funksiya ta'rifga ko'ra bir qiymatli bo'lgani uchun uni funksiya sifatida qarab bo'lmaydi. Agar funksiya ta'rifidagi bir qiymatlilik sharti olib tashlansa, unda juda ko'p noqulayliklarga duch kelinadi. Bunday ko'p qiymatli funktsiyalar ustida eng sodda amallarni kiritish ham katta qiyinchiliklarga duchor qiladi. Analitik davom ettirish tushunchasi shu kabi qiyinchiliklarni bartaraf qilish imkonini beradi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi ko'p qiymatli funktsiyalar va ularning Riman sirtlarini o'rganishga bag'ishlangan.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1-§. Kanonik elementlar. Yo`l bo`yicha davom ettirish.....	5
2-§. Analitik funksiya tushunchasi.....	18
3-§ Elementar funksiyalar.....	21
4-§. Riman sirtlari.	27
Foydalanilgan adabiyotlar.....	31

Kirish

1997 yil 29 avgustda O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida qabul qilingan hamda bugungi kunda g'oyalari amaliyotga keng ko'lamda muvaffaqiyatli tadbiriq etilayotgan O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni va «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga etkazish jarayonining mohiyati to'laqonli ochib berilgandir. Malakali kadrlar tayyorlash jarayonining har bir bosqichi o'zida ta'lim jarayonini samarali tashkil etish, uni yuqori bosqichlarga ko'tarish, shu bilan birga jaxon ta'limi darajasiga etkazish borasida muayyan maqsad va vazifalarni amalga oshirish lozim.

Ushbu maqsadlarning ijobiy natijaga ega bo'lishi, eng avvalo, yosh avlodga ilmiy bilimlar asoslarini puxta o'rgatish, ularda keng dunyoqarash hamda tafakkur ko'lamini hosil qilish, ma'naviy axloqiy sifatlarni shakllantirish borasidagi ta'limiy tarbiyaviy ishlarni samarali tashkil etishga bog'liqdir.

Ana shu vazifalardan kelib chiqqan xolda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o'rganish uchun uning asosi bo'lgan tushunchalarni mukammal o'zlashtirishimiz kerak.

Golomorf funksiyalarning asosiy xossalaridan biri yagonalik xossasi alohida ahamiyatga ega va bu xossaga binoan sohada golomorf bo'lgan ikkita funksiya sohadagi biror nuqtaning etarlicha kichik atrofida ustma-ust tushsa, unda ular shu sohada bir-biriga aynan teng bo'ladi. Bu xossadan kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasida (kompleks analizda) muhim bo'lgan funktsiyalarni analitik davom ettirish tushunchasini o'rganishda foydalaniladi.

Funksiyalarni analitik davom ettirishda D sohada ($D \subset \bar{C}$) berilgan golomorf funksiya ko'ra D sohadan kengroq bo'lgan D' sohada ($D \subset D'$) golomorf va D sohada berilgan funksiya bilan ustma-ust tushadigan funksiyaning aniqlash masalasi qaraladi. Ayni paytda, analitik davom ettirishlar ko'p qiymatli golomorf (analitik) funksiya tushunchasini kiritish imkonini beradi.

Eng sodda masalalar ham ko'p qiymatli funksiyalarni o'rganish zaruriyatini taqozo etadi. Masalan, $z = w^2$ tenglama ixtiyoriy fiksirlangan $z \neq 0$ da bir-biridan

ishorasi bilan farq qiladigan ikkita yechimga ega. Bu yechimlar to'plamini $\sqrt{z}$ deb belgilasak, funktsiya ta'rifga ko'ra bir qiymatli bo'lgani uchun uni funktsiya sifatida qarab bo'lmaydi. Agar funktsiya ta'rifidagi bir qiymatlilik sharti olib tashlansa, unda juda ko'p noqulayliklarga duch kelinadi. Bunday ko'p qiymatli funktsiyalar ustida eng sodda amallarni kiritish ham katta qiyinchiliklarga duchor qiladi. Analitik davom ettirish tushunchasi shu kabi qiyinchiliklarni bartaraf qilish imkonini beradi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi ko'p qiymatli funktsiyalar va ularning Riman sirtlarini o'rganishga bag'ishlangan.

1-§. Kanonik elementlar. Yo'l bo'yicha davom ettirish

$f(z)$ funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lib, $F(z)$ funksiya D sohada ($E \subset D$) golomorf va $\forall z \in E$ da

$$F(z) \equiv f(z)$$

tenglik bajarilsin. Unda $F(z)$ funktsiya $f(z)$ funksiyaning E to'plamdan D sohaga analitik davomi deyiladi.

Bu holda $f(z)$ funksiya E to'plamdan D sohaga analitik davom ettirilladi deb ataladi.

Ma'lumki, analitik element deb D soha ($D \subset \overline{\mathbb{C}}$) va unda golomorf $f(z)$ funksiyalardan tashkil topgan $\mathfrak{F} = (D, f)$ juftlikka aytiladi.

Aytaylik, U_a markazi $a (a \in \overline{\mathbb{C}})$ nuqtada bo'lgan radiusi R_a ga teng doira, f_a esa shu doirada yaqinlashuvchi darajali qator yig'indisi bo'lsin.

1-ta'rif. Ushbu $\mathfrak{F}_a = (U_a, f_a)$ juftlik kanonik element deyiladi, U_a doira esa $\mathfrak{F}_a$ elementning yaqinlashish doirasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $a \in \mathbb{C}$ bo'lsin. U holda $\mathfrak{F}_a$ kanonik elementning yaqinlashish doirasi

$$U_a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R_a \ (R_a \leq \infty)\}$$

bo'lib, $f_a(z)$ esa

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

bo'ladi.

Agar $a = \infty$ bo'lsa, unda

$$U_a = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R_a\} \ (R_a \geq 0)$$

bo'lib,

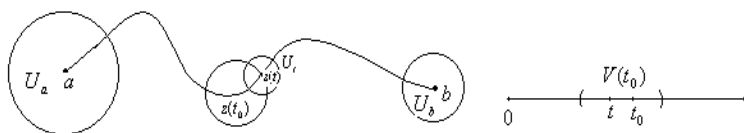
$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$$

bo'ladi.

2-ta'rif. Agar markazlari $a_t = z(t)$ nuqtada, yaqinlashish radiuslari noldan farqli shunday kanonik elementlar to'plami

$$\mathfrak{F}_t = (U_t, f_t) \quad (t \in [0, 1])$$

mavjud bo'lsaki, $t_0 \in [0,1]$ nuqtaning bog'lamli $V(t_0) \subset [0,1]$ atrofi olinganda, $t \in V(t_0)$ uchun $z(t) \in U_{t_0}$ bo'lib, ixtiyoriy $t \in V(t_0)$ dagi $\mathfrak{S}_t = (U_t, f_t)$ element $\mathfrak{S}_{t_0} = (U_{t_0}, f_{t_0})$ elementning bevosita analitik davomi bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}_0 = (U_0, f_0)$ element γ yo'l bo'yicha davom ettiriladi deyiladi. (2-chizma).



2-chizma

Endi yo'l bo'yicha analitik davom ettirishning ayrim xossalarini keltiramiz. Bu xossalar teoremlar orqali ifodalanadi.

Aytaylik, $\gamma = \{z = z(t), t \in I = [0,1]\}$ yo'l berilgan bo'lsin, bunda $z(t)$ funksiya I da uzluksiz.

1-teorema. Agar $\mathfrak{S}_0 = (U_0, f_0)$ kanonik element γ yo'l bo'yicha analitik davom ettiriladigan bo'lsa, davom ettirishi natijasida, uni bajaruvchi $\mathfrak{S}_t$ sistemaning olinishiga bog'liq bo'lmagan holda tayin element hosil bo'ladi.

1-lemma. Faraz qilaylik, $\mathfrak{S}_t, t \in I$ γ yo'l bo'yicha analitik davom ettirishni bajaruvchi sistema bo'lsin. Agar $\mathfrak{S}_t = (U_t, f_t)$ sistemaning barcha yaqinlashish doiralari U_t kompakt to'plamlar bo'lsa, sistemadagi $\mathfrak{S}_t$ elementning yaqinlashish radiusi $R(t)$, $I = [0,1]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Faraz qilaylik, $\mathfrak{S}_t$ sistema ($t \in I$) $\mathfrak{S}$ elementni γ yo'l bo'yicha G elementga analitik davom ettiradigan bo'lsin. U holda $\mathfrak{S}_t$ sistemadan ($t \in I$) chekli sonda

$$\mathfrak{S}_{t_1}, \mathfrak{S}_{t_2}, \dots, \mathfrak{S}_{t_n}$$

elementlarni ajratish mumkinki, bu elementlar zanjiri ham $\mathfrak{S}$ elementni γ yo'l bo'yicha shu G elementga analitik davom ettiradi.

3- teorema. Agar $\mathfrak{S}$ element ixtiyoriy $\gamma_t (t \in I)$ yoʻl boʻyicha analitik davom ettiriladigan boʻlsa, u holda γ_0 va γ_1 gomotopik yoʻllar boʻyicha analitik davom ettirish natijalari bir xil boʻladi.

2-§. Analitik funksiya tushunchasi.

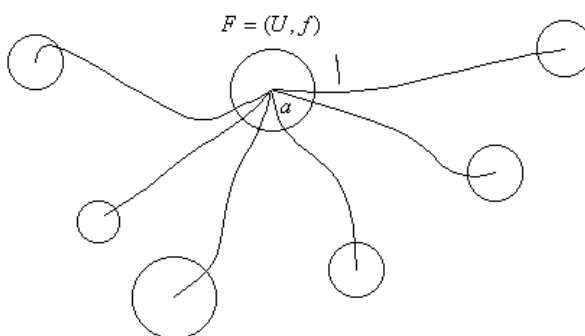
Biz avvalgi paragrafda funksiya ni analitik davom ettirish tushunchasi bilan tanishdik, yoʻl boʻyicha davom ettirishning xossalarini oʻrgandik. Ular kompleks analizda muhim oʻrin tutadi.

Analitik davom ettirish golomorf funksiyalarni umumlashtirishga - koʻp qiymatli analitik funksiya tushunchasiga olib keladi.

Markazi $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nuqtada boʻlgan $F = (U, f)$ kanonik element berilgan boʻlsin. Bunda f yaqinlashuvchi darajali qator yigʻindisi (golomorf funksiya), U esa shu qatorning yaqinlashish doirasi.

a nuqtadan chiqqan shunday γ yoʻllarni qaraymizki, bu yoʻllar boʻyicha F elementni analitik davom ettirish mumkin boʻlsin. Bunday yoʻllar toʻplamini Γ deylik.

Agar F elementni Γ toʻplamdagi har bir γ yoʻl boʻyicha analitik davom ettirilsa, natijada kanonik elementlar toʻplami $\mathfrak{S} = \{F; \gamma \in \Gamma\}$ hosil boʻladi. (3-chizma).



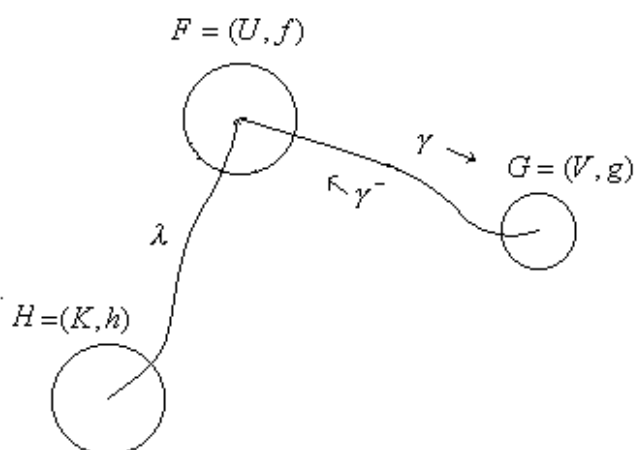
3-chizma

1-taʼrif: Ushbu $\mathfrak{S} = \{F; \gamma \in \Gamma\}$ toʻplam analitik funksiya deyiladi.

Demak, analitik funksiyaning aniqlanishi uchun avvalo boshlang'ich element F ning berilishi, so'ng bu boshlang'ich elementni analitik davom ettirish mumkin bo'ladigan yo'llarning berilishi kerak bo'lar ekan.

Ayni paytda analitik funksiya ning aniqlanishi boshlang'ich elementning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmaydi. Shuni isbotlaymiz:

Analitik funksiya $\mathfrak{F} = \{F; \gamma \in \Gamma\}$ da ixtiyoriy $G = (V, g)$ elementni olaylik. Unda analitik funksiya ta'rifiga ko'ra G element F elementning γ yo'l bo'yicha analitik davomi bo'ladi. F elementning o'zi G elementni γ^- yo'l bo'yicha analitik davomi deb qaralishi mumkin: Agar $H = (K, h)$ shu $\mathfrak{F} = \{F; \gamma \in \Gamma\}$ analitik funksiya ning ixtiyoriy elementi bo'lib, u F elementni λ yo'l bo'yicha davom ettirish natijasida yuzaga kelgan bo'lsa, u $G = (V, g)$ elementni $\gamma^- \cup \lambda$ yo'l bo'yicha davom ettirish natijasida ham hosil bo'ladi. (4-chizma).



4-chizma

Bu esa yuqoridagi tasdiqni isbotlaydi.

Kanonik elementlar yordamida aniqlangan ikkita analitik funksiya berilgan bo'lsin.

2-ta'rif: Agar bu analitik funksiylar kamida bitta umumiy elementga ega bo'lsa, bu analitik funksiya lar bir-biriga teng deyiladi.

Ravshanki, bu holda yo'l bo'yicha davom ettirishda yagonalik teoremasiga ko'ra analitik funksiya larning boshqa elementlari ham mos ravishda teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror analitik funksiya berilgan bo`lib, uni tashkil etgan elementlari  $(U_\alpha, f_\alpha)$ ,  $\alpha \in A$  bo`lsin, bunda A – α indekslarning ixtiyoriy to`plami.

1-teorema: *Analitik funksiya elementlarining yaqinlashish doiralari U_α larning yig`indisi  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  soha bo`ladi.*

Isbot: Aytaylik, D analitik funksiya elementlarining yaqinlashish doiralari birlashmasi bo`lsin:

$$D = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Har bir U_α doira ochiq to`plam bo`lganligi sababli, D ochiq to`plamlar birlashmasi sifatida ochiq to`plam bo`ladi. Ayni paytda  $D$  bog`lamli to`plam ham bo`ladi. D to`plamga tegishli ixtiyoriy ikki  $a$  va  $b$  nuqtalarni olamiz:  $a \in D$ ,  $b \in D$ . Unda analitik funksiya da markazlari  $a$  va  $b$  nuqtalarda bo`lgan kanonik elementlar topiladi. Bu elementlar a va b nuqtalarni birlashtiruvchi γ yo`l bo`yicha bir-birining analitik davomi bo`ladi. Binobarin,  $\gamma$  yo`l D to`plamga tegishli bo`ladi.

SHunday qilib, D ning ochiq hamda bog`lamli to`plam ekanligi ko`rsatildi. Demak,  $D$  - soha. Teorema isbot bo`ldi. ►

D soha bir bog`lamli bo`lgan holda ushbu teorema o`rinli bo`ladi.

2-teorema: *Agar D bir bog`lamli soha bo`lib, undagi biror $F = (U, f)$ element D sohaga tegishli ixtiyoriy yo`l bo`yicha analitik davom ettiriladigan bo`lsa, u holda bunday yo`llar bilan davom ettirilishdan hosil bo`lgan analitik funksiya  $D$  sohada bir qiymatli bo`ladi.*

Isbot. Aytaylik, $a \in D$ nuqta D sohadagi (U, f) elementning markazi bo`lib,  $z$  esa  $D$  ning ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin.

Endi a va z nuqtalarni birlashtiruvchi va D sohaga tegishli bo`lgan barcha yo`llarni qaraymiz. (U, f) elementni bunday yo`llar bo`yicha analitik davom ettirilishidan hosil bo`lgan analitik funksiya ni $\approx$ deylik.

D soha bir bog`lamli bo`lgani uchun a va z nuqtalardan o`tuvchi va shu sohaga tegishli ixtiyoriy  $\gamma_1$  va  $\gamma_2$  yo`llar gomotop bo`ladi.

Unda 1-§ dagi 3-teorema ko'ra $\exists$ analitik funksiya ning markazi z nuqtada bo'lgan barcha elementlari ustma-ust tushadi. Ularning z nuqtadagi qiymatlarini shu z nuqtaga mos qo'yamiz. Olingan z nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi edi. Demak, analitik funksiya D sohadagi har bir nuqtada bittadan qiymatga ega. Teorema isbot bo'ldi. (Odatda bu teorema **monodromiya** haqidagi teorema deb yuritiladi).

Agar yuqorida keltirilgan teoremaning shartlari bajarilmasa, ya'ni D bir bog'lamli soha bo'lmasa yoki D sohada olingan har qanday kanonik element D sohadagi barcha yo'llar bo'yicha davom ettiriladigan bo'lmasa, u holda z nuqtadagi analitik funksiyaning bir qancha qiymatlari mos kelishi mumkin.

Bunday holda analitik funksiya D sohada ko'p qiymatli analitik funksiya deyiladi.

Aytaylik, D sohada $\exists$ ko'p qiymatli analitik funksiya bo'lib, G soha D ning qismi bo'lsin: $G \subset D$.

Ba'zan F elementni G sohadagi yo'llar bo'yicha davom ettirishdan hosil bo'lgan analitik funksiya bir qiymatli bo'lib qolishi mumkin. Unda bu funksiya G sohada **golomorf** funksiyaning ifodalaydi. Bunday funksiyalar **analitik funksiyaning tarmoqlari** deyiladi.

Xususan, analitik funksiyaning har bir (U, f) elementi uning tarmog'i bo'ladi (bunda tarmoq f funksiya bo'ladi).

Endi D sohaning tayin bir nuqtasida analitik funksiya qancha qiymat qabul qilishi mumkinligini ifodalovchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

3-teorema: (Puankare-Volterra teoremasi) analitik funksiyaning markazi tayinlangan nuqtada bo'lgan turli elementlari to'plami sanoqli to'plamdan oshib ketmaydi.

Monodromiya haqidagi teoremadan foydalanib, ko'p qiymatli analitik funksiyalarining bir qiymatli tarmoqlarini ajratishning sodda va qulay algoritmini qurish mumkin. Aytaylik, $F(z)$ funksiya ko'p bog'lamli D sohada analitik bo'lgan funksiya bo'lsin. Bu sohani bir bog'lamli $\tilde{D}$ sohaga aylantiruvchi kesimlar o'tkazamiz. $z_0 \in \tilde{D}$ nuqta va $\sigma_{z_0} \subset D$ atrof olib, tayinlangan $(\sigma_{z_0}, f_0(z))$ element olamiz. Monodromiya

haqidagi teorema ko'ra bu element $\tilde{D}$ sohada $F_0(z)$ golomorf funksiya ni aniqlaydi. $F_0(z)$ funksiya ko'p qiymatli analitik $F(z)$ funksiya ning bir qiymatli tarmog'i bo'ladi. z_0 nuqtaning atrofida aniqlangan turli elementlar ko'p qiymatli $F(z)$ funksiya ning turli bir qiymatli tarmoqlarini aniqlaydi. SHunday qilib, $F(z)$ funksiya $\tilde{D}$ sohada bir qiymatli tarmoqlarga ajraladi. Ko'p bog'lamli D sohani bir bog'lamli sohaga aylantiruvchi kesimlarni har xil o'tkazish mumkinligini e'tiborga olsak, ko'p qiymatli analitik funksiya ning bir qiymatli tarmoqlarini ham turli usullar bilan ajratish mumkin ekanligi kelib chiqadi. Ko'p qiymatli analitik funksiyalar va ularning bir qiymatli tarmoqlarini ajratishga doir misollarga keyingi paragrafda batafsil to'xtalamiz.

Ko'p qiymatli analitik funksiya lar bir qiymatli golomorf funksiya larda mavjud bo'lmagan maxsus nuqtalarga ham ega bo'lishi mumkin.

3-ta'rif: Agar $F(z)$ funksiya a nuqtaning o'yilgan atrofida analitik bo'lib, shu atrofda bir qiymatli bo'lmasa, unda a nuqta $F(z)$ funksiya uchun yakkaalangan tarmoqlanish nuqtasi deyiladi.

Tarmoqlanish nuqtasini tekshirishning mezoni sifatida quyidagini olish mumkin. Aytaylik, $F(z)$ funksiya $\{0 < |z - a| < r\}$ halqada analitik bo'lsin. SHu halqada z_0 nuqta olib, bu nuqtadagi $f_0(z)$ elementni boshi va oxiri z_0 nuqtada bo'lgan ushbu

$$|z - a| = |z_0 - a|$$

aylana bo'ylab analitik davom ettiramiz. Analitik davom ettirish natijasida hosil bo'lgan $f_1(z)$ element $f_0(z)$ element bilan ustma-ust tushmasa, unda a nuqta $F(z)$ funksiya ning yakkaalangan tarmoqlanish nuqtasi bo'ladi.

4-ta'rif: $F(z)$ funksiya $K = \{0 < |z - a| < r\}$ halqada analitik bo'lib, shu halqaning har bir nuqtasida $F(z)$ funksiya roppa-rosa n ($n \geq 2$) ta turli elementga ega bo'lsin. Unda a nuqta $F(z)$ funksiya ning n - tartibli yakkaalangan tarmoqlarining nuqtasi deyiladi.

Agar n chekli bo'lsa, a nuqta, shuningdek, **algebraik tarmoqlanish nuqtasi** ham deyiladi. Agar $n = \infty$ bo'lsa, a nuqta **logarifmik tarmoqlanish nuqtasi** deyiladi.

Analitik funksiya lar ustidagi amallar ularning boshlang'ich elementlari ustida bajariladigan amallar yordamida kiritiladi. Aytaylik, $f(z)$ va $g(z)$ lar bitta z_0 nuqtada berilgan ikkita element bo'lib, $F(z)$ va $G(z)$ lar shu elementlar yordamida aniqlangan analitik funksiya lar bo'lsin. Unda ushbu

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z) \cdot g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z_0) \neq 0)$$

funksiya lar ham z_0 nuqtadagi elementlar bo'ladi. Bu elementlar analitik funksiya larni aniqlaydi. Ularni mos ravishda ta'rifga ko'ra

$$F(z) \pm G(z), \quad F(z) \cdot G(z), \quad \frac{F(z)}{G(z)}$$

deb qabul qilamiz.

Faqat bu ta'rif **korrekt** bo'lishi kerak, ya'ni u boshlang'ich elementning tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi kerak. Bu shart esa har doim ham bajarilavermaydi.

Masalan, shu bobning boshida ko'rilgan $\sqrt{z}$ funksiya sidan monodromiya haqidagi teoremaga ko'ra, $z = 0$ nuqtani o'z ichida saqlaydigan ixtiyoriy bir bog'lamli $D \subset \mathbb{C}$ sohada ikkita bir qiymatli f_1 va f_2 tarmoqlarni ajratish mumkin. ($z = 0$ nuqta $\sqrt{z}$ funksiya uchun 2-tartibli tarmoqlanish nuqtasi bo'ladi). Bu tarmoqlar bir-biridan ishorasi bilan farq qiladi. Turli tarmoqlarni tanlash hisobiga $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ yig'indining elementlari sifatida $(D, 2f_1)$, $(D, 2f_2)$ va $(D, 0)$ elementlarni hosil qilamiz. Birinchi ikkita elementni davom ettirish natijasida bitta analitik funksiya ni hosil qilamiz va uni $2\sqrt{z}$ deb belgilash mumkin. Uchinchi elementni davom ettirish natijasida esa boshqa funksiya -aynan nol hosil bo'ladi. Demak, $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ amali korrekt aniqlangan emas.

z_0 nuqtadagi $f'_0(z)$ element yordamida aniqlangan analitik funksiya ni $F'_0(z)$ deb belgilaymiz.

4-teorema: Agar $F(z)$ va $G(z)$ funksiya lar D sohada analitik bo'lsa, unda

$$F(z) \pm G(z), F(z) \cdot G(z), \frac{F(z)}{G(z)} \quad (G(z) \neq 0, \quad z \in D),$$

$$F'(z), G'(z)$$

funksiya lar ham D sohada analitik bo`ladi.

Isbot. $F(z) + G(z)$ funksiya ning analitikligini isbotlaymiz; qolgan funksiya larning analitikligini ham shu kabi ko`rsatiladi. Faraz qilaylik,  $f(z)$  va  $g(z)$  lar berilgan funksiya larning  $z_0 \in D$  nuqtadagi boshlang`ich elementlari bo`lsin.  $\gamma$  egri chiziq  $z_0$  nuqtadan chiqqan va  $D$  sohada yotuvchi ixtiyoriy chiziq bo`lsin. $f(z)$ va $g(z)$ elementlarni γ chiziq bo`ylab analitik davom ettirish natijasida, har bir  $\xi \in \gamma$  nuqtada  $f_\xi(z)$  va  $g_\xi(z)$  elementlarni hosil qilamiz. Ularning yig`indisi $h_\xi(z) = f_\xi(z) + g_\xi(z)$ ξ nuqtada golomorf. Bu esa z_0 nuqtadagi $h(z) = f(z) + g(z)$ elementning ixtiyoriy γ egri chiziq bo`ylab analitik davom etishini anglatadi. Demak, $F(z) + G(z)$ funksiya D sohada analitik .

3-§ Elementar funksiya lar.

Biz yuqorida ko`p qiymatli analitik funksiya tushunchasi bilan tanishdik. Endi bunday funksiya larga misollar keltiramiz.

1. Ildiz.

Kengaytirilgan kompleks tekislik $\overline{\mathbf{C}}$ dagi $D_0 = \overline{\mathbf{C}} \setminus R_-$ sohada ushbu

$$w = f_0(z) = \sqrt[n]{re^{i\frac{\varphi}{n}}}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (1)$$

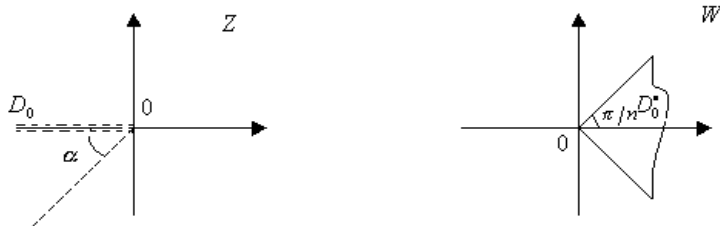
funksiya ni qaraymiz. Ravshanki, bu funksiya D_0 sohada uzluksiz.

$w = f_0(z)$ funksiya D_0 sohani (w) tekislikdagi

$$D_0^* = \left\{ w = \rho e^{i\psi} : -\frac{\pi}{n} < \psi < \frac{\pi}{n}, \rho > 0 \right\}$$

sohaga akslantiradi. Bu akslantirish o`zaro bir qiymatli bo`ladi. (Bu holda

$w^n = re^{i\varphi}$, $f_0(z) = \sqrt[n]{z}$ bo`ladi)(1 -chizma).



Ayni paytda $f_0(z)$ funksiya D_0 sohada hosilaga ega bo'ladi. Teskari funksiya ning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$f'_0(z) = \frac{1}{n[f_0(z)]^{n-1}}$$

bo'ladi. Natijada D_0 soha va unda golomorf bo'lgan

$$f_0(z) = \sqrt[n]{re^{i\frac{\varphi}{n}}}, \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

funksiyaga ega bo'lamiz. Ulardan tuzilgan (D_0, f_0) juftlik analitik elementni ifodalaydi: $\mathfrak{I}_0 = (D_0, f_0)$.

Endi bu $\mathfrak{I}_0 = (D_0, f_0)$ boshlang'ich elementni quyidagicha analitik davom ettiramiz:

Kompleks tekislikda

$$D_0 = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sohani hamda bu sohada golomorf bo'lgan

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{re^{i\frac{\varphi}{n}}}, \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha,$$

funksiya ni qaraymiz. Natijada ulardan tuzilgan $\mathfrak{I}_\alpha = (D_\alpha, f_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, analitik elementlar hosil bo'ladi. Barcha α larda $\mathfrak{I}_\alpha$ element $\mathfrak{I}_0$ elementning analitik davomi bo'ladi.

Bunday $\mathfrak{I}_\alpha$ elementlardan tashkil topgan analitik funksiya z ning n -darajali ildizi deyiladi: $w = \sqrt[n]{z}$.

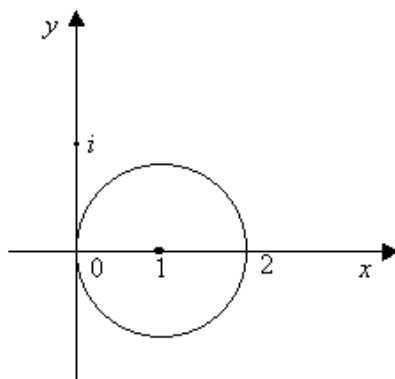
Bu holda $\mathfrak{I}_\alpha$ elementlarning sohalari birlashmasi bo'lgan $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$ ushbu soha

$\overline{C} \setminus \{z=0, z=\infty\}$ ni ifodalaydi. ($z=0, z=\infty$ nuqtalar birorta D_α sohaga tegishli bo'lmay,

barcha D_α sohalarning chegaralariga tegishli bo`ladi, bu nuqtalar  $w = \sqrt[n]{z}$  analitik funksiya uchun  $n$ -tartibli tarmoqlanish nuqtasi bo`ladi).

Keltirilgan $w = \sqrt[n]{z}$ analitik funksiyaning kanonik elementlar yordamida ham aniqlash mumkin.

Markazi $z=1$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo`lgan doira $U = \{|z-1| < 1\}$ ni olamiz (2-chizma)



Bu doiradagi $(0,2)$ oraliqda, ya'ni $\{z=x, 0 < x < 2\}$ da $f(z) = \sqrt[n]{x}$ funksiya ni qaraymiz. Bu funksiya $(0,2)$ oraliqda yaqinlashuvchi

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} &= [1 + (x-1)]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}-1\right) \dots \left(\frac{1}{n}-k+1\right) \cdot (x-1)^k \end{aligned} \quad (2)$$

binominal qatorga yoyiladi. Abel teoremasiga ko`ra (2) qator  $z \in U$  nuqtalarda ham yaqinlashuvchi bo`ladi. Binobarin, bunday qator U da holomorf bo`lgan funksiya ni ifodalaydi. Bu funksiya  $\sqrt[n]{x}$  funksiya bilan  $(0,2)$  oraliqda ustma ust tushadi. Yagonalik teoremasiga ko`ra U da ular bir xil bo`ladi. Demak,  $U$  da holomorf bo`lgan

$$g_0(z) = [1 + (z-1)]^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}-1\right) \dots \left(\frac{1}{n}-k+1\right) \cdot (z-1)^k$$

funksiya ga ega bo`lamiz. Natijada quyidagi  $F_0 = (U, g_0)$  kanonik element hosil bo`ladi.

$\mathfrak{F}_0 = (D_0, f_0)$ hamda $F_0 = (U, g_0)$ elementlar ekvivalent bo'ladi: $\mathfrak{F}_0 \sim F_0$.
 Chunki $z = x \in (0, 2)$ da $z = x$, $\varphi = 0$ va demak, $f_0(x) = g_0(x) = \sqrt[n]{x}$ bo'lib, $f_0(z)$ va $g_0(z)$ holomorf funksiya lar bo'lganligidan yagonalik teoremasiga $\forall z \in U$ da $f_0(z) = g_0(z)$ bo'ladi. Unda $\mathfrak{F}_0$ va F_0 elementlar ustma-ust tushadi.

Demak, F_0 kanonik element yordamida yuzaga keladigan analitik funksiya ham $w = \sqrt[n]{z}$ ni aniqlaydi.

Endi D sohadan olingan har bir nuqtada $w = \sqrt[n]{z}$ analitik funksiyaning qiymatlarini qaraymiz.

Aytaylik, $z_0 \in D$ bo'lsin ($z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$). Unda $w = \sqrt[n]{z}$ analitik funksiya ning $\mathfrak{F}_0$ elementlaridagi barcha holomorf funksiya larning qiymatlari ushbu

$$w = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\frac{i\varphi_0 + 2k\pi}{n}} \quad (3)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda $r_0 = |z_0|$, φ_0 -argument-ning qabul qilishi mumkin bo'lgan biror $\arg z_0$ qiymati, k – ixtiyoriy butun son. (3) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$w = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\frac{i\varphi_0}{n}} \cdot e^{\frac{i2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4)$$

So'ng $w_0 = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{\frac{i\varphi_0}{n}}$ deymiz. Unda (4) munosabatdan ko'rinadiki, $w_k = \sqrt[n]{z}$ funksiya ning boshqa qiymatlari w_0 ni

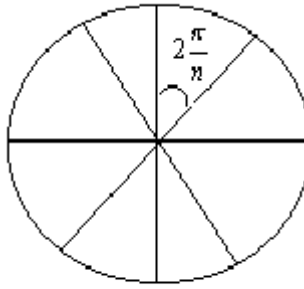
$$e^{\frac{i2\pi}{n}k}$$

ko'paytuvchiga ko'paytirishdan hosil bo'ladi, ya'ni

$$w = w_0 \cdot e^{\frac{i2\pi}{n}k}$$

$$\text{Ma'lumki, } e^{\frac{i2\pi}{n}k} = \sqrt[n]{1}.$$

$\sqrt[n]{1}$ ning n ta turli qiymatlari bo'lib, ular birlik vektorni $\frac{2\pi}{n}$ ga karrali burchakka burishdan hosil bo'ladi: (3-chizma).



Demak, (3) formula bilan aniqlanadigan w n ta turli qiymatga ega bo'lar ekan: $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$. Ular $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ bo'lganda hosil bo'ladi.

Demak, $z_0 \in D$ nuqtada $w = \sqrt[n]{z}$ funksiya n ta qiymatga ega bo'lar ekan. SHunday qilib $w = \sqrt[n]{z}$ analitik funksiya $D = \{0 < |z| < \infty\}$ sohada n qiymatli funksiya bo'ladi.

Endi ko'p qiymatli analitik $w = \sqrt[n]{z}$ funksiya ning bir qiymatli tarmoqlarini qanday ajratish mumkinligini o'rganamiz.

Monodromiya haqidagi teorema ko'ra $\sqrt[n]{z}$ ning tarmoqlarini uning $z = 0$ va $z = \infty$ tarmoqlanish nuqtalarini o'zida saqlamaydigan ixtiyoriy bir bog'lamli D sohada ajratish mumkin. Masalan, bunday soha sifatida $z = 0$ va $z = \infty$ nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy chiziq bo'yicha kesilgan tekislikni olish mumkin (soha bir bog'lamli bo'lishi uchun uning chegarasi bog'lamli bo'lishi kerak).

Umuman, $w = \sqrt[n]{z}$ ning bir qiymatli tarmog'ini $z = 0$ nuqtani o'rovchi birorta ham chiziqni o'z ichida saqlamaydigan ixtiyoriy sohada ajratish mumkin. Darhaqiqat, faqat shunday chiziqlar bo'ylab $z = 0$ nuqtaning atrofida to'liq aylanilgandagina $\arg z$ ning qiymati 2π ga karrali songa o'zgaradi. Demak, berilgan element shunday chiziqlar bo'ylab analitik davom ettirilganda boshqa elementga o'tib qolishi mumkin. YUqoridagi shartni qanoatlantiruvchi sohalarda $w = \sqrt[n]{z}$ analitik funksiya ning n ta turli bir qiymatli tarmoqlarini ajratish mumkin. Ajratilgan har bir tarmoq boshqasidan $e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ ko'paytuvchiga farq qiladi hamda o'zi aniqlangan soha va shu sohaning biror nuqtalisidagi qiymatining ko'rsatilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Amaliyotda ko'p qiymatli analitik funksiyalar keng qo'llaniladi. $w = \sqrt[n]{z}$ funksiyani konform akslantirish nuqtai nazaridan o'rganamiz.

$$D = \mathbb{C} \setminus R_+$$

soha va $\forall z \in D$ nuqta olamiz. Unda $w = \sqrt[n]{z}$ funksiya bu nuqtaga (4) tenglikka ko'ra n ta

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

qiymatni mos qo'yadi. Agar bu tenglikda $k = 0$ desak, har bir $z \in D$ nuqtaga bitta

$\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z}{n}}$ nuqta mos keladi. Bu moslik

$$w = (\sqrt[n]{z})_0 = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}$$

bir qiymatli funksiya ni aniqlaydi. Bu funksiya $w = \sqrt[n]{z}$ funksiya ning bir qiymatli tarmog'i bo'lib, u berilgan funksiya ning **O-tarmog'i deyiladi.**

$$w = (\sqrt[n]{z})_0 \quad \text{tarmoq} \quad D \quad \text{sohani} \quad G_0 = \left\{ w : 0 < \arg w < \frac{2\pi}{n} \right\} \quad \text{sohaga} \quad \text{konform}$$

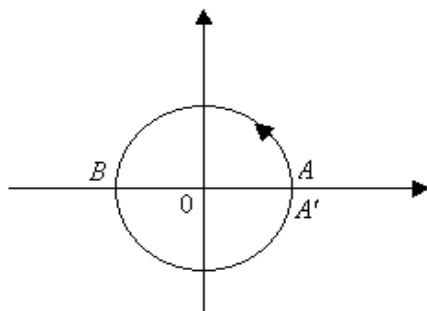
akslantiradi. Har bir tayinlangan $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ uchun aniqlangan bir qiymatli

$w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}$ funksiya ga $\sqrt[n]{z}$ ning **k-tarmog'i deyiladi.** Har bir $w = (\sqrt[n]{z})_k$,

$k = 0, 1, \dots, (n-1)$, tarmoq D da bir qiymatli va uni

$$G_k = \left\{ w : \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}$$

sohaga konform akslantiradi Bu tarmoqlarning o'zaro bog'langanligini ko'rish uchun (z) tekisligida r radiusli aylana γ bo'ylab musbat yo'nalishda z nuqtani harakatlantiraylik (4-chizma).



z nuqta A dan B orqali A' ga qarab harakatlenganda

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_0 = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\arg z}{n}i}$$

funksiya ning qiymatlari $\sqrt[n]{r}$ dan $\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$ gacha o'zgarib, oldingi qiymatga qaytib kelmasdan, $\left(\sqrt[n]{z}\right)_1$ tarmoqning boshlang'ich qiymatiga keladi. SHunday qilib, z nuqta γ aylana bo'ylab bir marta aylansa, $w = \sqrt[n]{z}$ funksiya ning qiymatlari 0-tarmoqdan 1-tarmoqqa o'tadi; agar γ bo'ylab 2-marta aylansa, qiymatlar $\left(\sqrt[n]{z}\right)_2$ tarmoqqa mos o'zgaradi va hokazo. Bu jarayon z nuqta γ bo'ylab n marta aylanguncha davom qiladi; n – marta harakat qilib A^1 nuqtaga kelganda $\sqrt[n]{z}$ ning qiymatlari yana qaytib $\left(\sqrt[n]{z}\right)_0$ tarmoqqa keladi.

2. Logarifm.

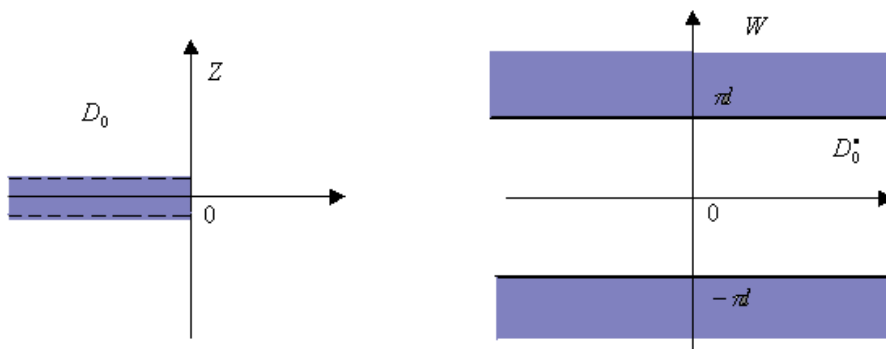
Kompleks tekislikdagi $D_0 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ sohada ushbu

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi, \quad z = re^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < \pi \quad (5)$$

funksiya ni qaraymiz. Bu funksiya D_0 sohani (w) tekislikdagi

$$D_0^* = \{w : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$$

sohaga (yo'lakka) akslantiradi (5-chizma)



Ravshanki, $e^w = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = z$. Demak, (5) funksiya e^w funksiya ga nisbatan teskari funksiya ekan. Unda D_0 sohaning har bir z_0 nuqtasida

$$\frac{d}{dz} (\ln z) = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

bo'ladi.

Natijada, D_0 soha va unda golomorf bo'lgan $f_0(z) = \ln z$ funksiya ga ega bo'lamiz. Ular $\mathfrak{S}_0 = (D_0, f_0)$ analitik elementni aniqlaydi.

Endi kompleks tekislikda

$$D_a = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}, \quad \alpha \in R$$

soha va unda golomorf bo'lgan

$$f_a(z) = \ln r + i\varphi, \quad -\pi + a < \varphi < \pi + a$$

funksiya ni qaraymiz.

Ravshanki, ular $\mathfrak{S}_a = (D_a, f_a)$, $a \in R$, analitik elementlar sistemasini hosil qiladi. Barcha a larda $\mathfrak{S}_a$ element $\mathfrak{S}_0$ elementning analitik davomi bo'ladi. $\mathfrak{S}_a$ elementlar sistemasi yordamida aniqlangan analitik funksiya **logarifmik funksiya** deyiladi va u $\ln z$ kabi belgilanadi: $w = \ln z$.

Bu holda $\mathfrak{S}_a$ elementlar sohalarining birlashmasi bo'lgan ushbu $D = \bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha$ soha

$$\overline{C} \setminus \{z=0, z=\infty\}$$

ni ifodalaydi.

Keltirilgan $w = \ln z$ analitik funksiya ni kanonik elementlar yordamida ham aniqlash mumkin.

Markazi $z=1$ nuqtada, radiusi 1 ga teng $U = \{|z-1| < 1\}$ doirani olib, undagi $(0, 2)$ oraliqda ($z=x$, $0 < x < 2$) $f(z) = \ln x$ funksiya ni qaraymiz.

Ravshanki, bu funksiya $(0, 2)$ oraliqda yaqinlashuvchi ushbu

$$\ln x = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

darajali qatorga yoyiladi. Bu qator $z \in U$ nuqtalarda ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Binobarin, bunday qator U da golomorf bo'lgan funksiya ni aniqlaydi. Ayni paytda bu funksiya $\ln x$ funksiya bilan $(0, 2)$ da ustma-ust tushadi. Yagonalik teoremasiga ko'ra U da ular teng bo'ladi.

Demak, U da golomorf bo'lgan ushbu

$$g_0(z) = \ln z = \ln[1 + (z - 1)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

funksiya ga ega bo'lamiz.

Natijada quyidagi $F_0 = (U, g_0(z))$ kanonik element aniqlanadi. Bu kanonik element $F_0 = (U, g_0)$ ning analitik element $\mathfrak{F}_0 = (D_0, f_0)$ bilan ekvivalent-ligi $\mathfrak{F}_0 \sim F_0$ va $\forall z \in U$ da $f_0(z) = g_0(z)$ bo'lishi

1- bandedagidek ko'rsatiladi.

Demak, F_0 kanonik element yordamida yuzaga kelgan analitik funksiya ham $w = L n z$ ni aniqlaydi.

$w = L n z$ analitik funksiya har bir

$$z_0 \in D = \bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha$$

nuqtaga sanoqli sondagi qiymatlarni mos qo'yadi. Bu qiymatlar ushbu

$$w = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

formula yordamida topiladi. Bu qiymatlarning hammasi har xil bo'lib, ular $\operatorname{Re} w = \ln|z_0|$ vertikal to'g'ri chiziqda yotadi va bir - biridan 2π ga karrali bo'lgan masofada joylashgan bo'ladi. Bu qiymatlarning barchasi z_0 sonining logarifmi hisoblanadi. SHunday qilib, har bir chekli $z \neq 0$ son cheksiz sondagi logarifmga ega. $z = 0$ nuqta esa $w = L n z$ funksiya uchun logarfmik tarmoqlanish nuqtasi bo'ladi.

$L n z$ analitik funksiya ning bir qiymatli tarmoqlarini ham, $\sqrt[n]{z}$ funksiya ning tarmoqlari kabi, $z = 0$ nuqtani o'rovchi birorta ham chiziqni o'z ichida saqlamaydigan ixtiyoriy D sohada ajratish mumkin. SHunday har bir D sohada $L n z$ funksiya sining cheksiz ko'p sondagi bir qiymatli tarmoqlarini ajratish mumkin. Bu tarmoqlar bir - biridan $2\pi i$ ga karrali bo'lgan o'zgarmas qo'shiluvchigagina farq qiladi.

Masalan,

$$D = \mathbb{C} \setminus R_+$$

bo'lsa, $w = L n z$ funksiya ning tarmoqlari ushbu

$$w = (L n z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu har bir tarmoq D da golomorf bo`lib, uni

$$G_k = \{w \in \mathbb{C} : 2k\pi < \Im w < 2(k+1)\pi\}, k \in \mathbb{Z},$$

yo`lakka konform akslantiradi.  $k=0$  bo`lgan holdagi tarmoq.

$$w = (Lnz)_0 = \ln|z| + i \arg z = \ln z$$

logarifmning **bosh tarmog`i** deyiladi.

Qaralayotgan tarmoqlar bir - bir bilan quyidagicha bog`langandir. Agar  $\gamma = \{|z|=r\}$  aylana bo`ylab musbat yo`nalishda bir marta aylansak,  $w = Ln z$  ning qiymatlari  $k$ - tarmoqdan  $(k+1)$ - tarmoqqa o`tadi, agar manfiy yo`nalishda bir marta aylansak, unda oldingi  $(k-1)$ - tarmoqqa o`tadi.

$w = Ln z$ analitik funksiya ning bir qiymatli tarmog`ini tarmoq qaralayotgan soha va shu sohaning biror nuqtasidagi qiymatining ko`rsatilishi bilan ham ajratish mumkin.

Logarifmning hosilasi

$$(Ln z)' = \frac{1}{z}$$

bo`lib, u  $D$  sohada golomorf funksiya bo`lar ekan (chunki logarifmning barcha tarmoqlari aynan bitta $\frac{1}{z}$ ga teng bo`lgan hosilaga ega).

Amaliyotda $w = Ln z$ funksiya sidan burchakli sohalarni yo`lak sohalarga akslantirishda foydalaniladi.

3 .Teskari trigonometrik funksiya lar.

Kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasida teskari funksiya tushunchasi haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar sinfidagi kabi kiritiladi. Teskari trigonometrik funksiyalar 1- va 2-punktlarda keltirilgan ildiz hamda logarifmlar yordamida aniqlanadi. Masalan, $w = Arc \cos z$ funksiya ushbu

$$\cos w = z \tag{6}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha w larning qiymatlari to`plamidan iborat, ya`ni $\cos z$ funksiya ga teskari funksiya dir. Ma`lumki,

$$\cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}).$$

Unda $\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) = z$ bo'lib, e^{iw} ga nisbatan quyidagi

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani e^{iw} ga nisbatan echib, topamiz:

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

yoki

$$i\omega = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

bu erda ildizning barcha qiymatlari olinadi.

Demak,

$$w = \operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (7)$$

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, logarifmik funksiya kabi $\operatorname{Arc} \cos z$ funksiya ham bir qiymatli emas. (U cheksiz ko'p qiymatli funksiya dir).

$-i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$ funksiya ning bosh qiymati $w = \arccos z$ deb olinadi. SHunday qilib,

$$w = \arccos z = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

$\operatorname{Arc} \sin z$, $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z$, $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z$ va boshqa funk-tsiyalar ham shunga o'xshash aniqlanadi:

$$\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

Endi $w = \operatorname{Arc} \cos z$ funksiya yordamida konform akslantirish masalasini qaraylik. Ma'lumki, $w = \operatorname{Cos} z$ funksiya butun kompleks tekislikda aniqlangan va $\{z: -\pi < \operatorname{Re} z < 0; \operatorname{Im} z > 0\}$ yarim yo'lakda bir yaproqli bo'lib, bu yo'lakni

$$\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$$

yuqori yarim tekislikka konform akslantiradi. $\forall z \in \mathbb{C}$ uchun

$$\operatorname{Cos}(-z) = \operatorname{Cos} z$$

va

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tengliklar o'rinli bo'lgani uchun ushbu

$$\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$$

va

$$\{z : \pi < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$$

yarim yo'laklar ham $w = \cos z$ funksiya yordamida yuqori yarim tekislikka konform akslanadi. Bu jarayonni davom ettirib $w = \cos z$ funksiya

$$\{z : -\pi + 2k\pi < \operatorname{Re} z < 2k\pi, \operatorname{Im} z > 0\},$$

$$\{z : 2k\pi < \operatorname{Re} z < \pi + 2k\pi, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

yarim yo'laklarning xar birini yuqori yarim tekislikka konform akslantirishini topamiz.

Ravshanki, $w = \arccos z$ funksiya

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

yuqori yarim tekislikda cheksiz ko'p qiymatli bo'lib,

$$\arccos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

tenglikdan foydalanib uning bir qiymatli tarmoqlarini ajratish mumkin. Bu tarmoqlar

$$(\arccos z)_k = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tenglik yordamida aniqlanadi. Har bir tarmoq yuqori yarim tekislikda golomorf funksiya bo'lib, uni yuqorida keltirilgan yarim yo'laklarning biriga konform akslantiradi. Masalan, $k = 0$ bo'lsa,

$$(\arccos z)_0 = \arccos z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

funksiya

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

sohani

$$\{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \operatorname{Im} w < 0\}$$

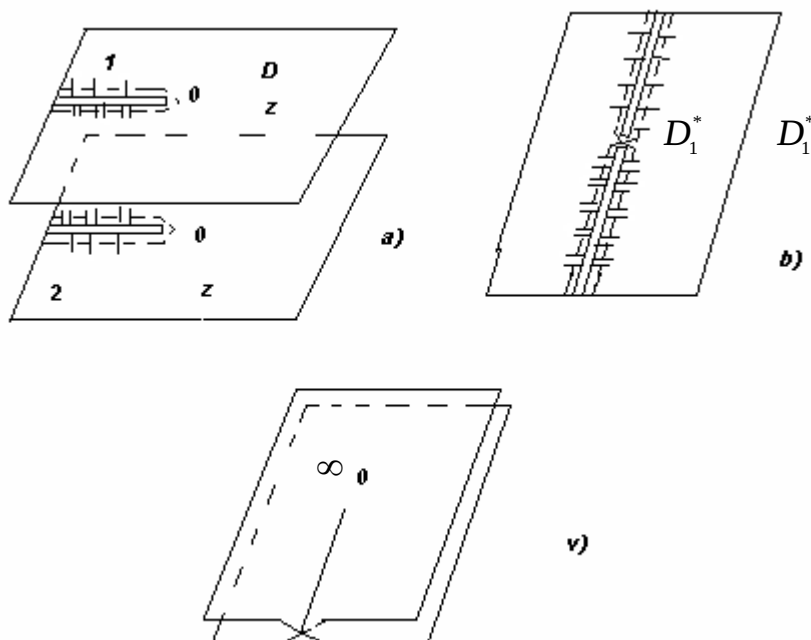
yarim yo'lakka konform akslantiradi.

4-§. Riman sirtlari

C dan manfiy haqiqiy o'q chiqarib tashlangan tekislikni ifodalavchi D sohada $w = \sqrt{z}$ funksiyani f_1 va f_2 tarmoqlarini qaraymiz.

f_1 funksiya $f_1(1)=1$ bilan f_2 funksiya $f_2(1)=-1$ bilan xarakterlanadi.

Ravshanki $f_2(z) = -f_1(z) \quad \forall z \in D$ uchun bu tarmoqlar bir yaproqli va chap yarim tekislikka kanform akslantiradi. Uni D_1^* va D_2^* bilan belgilanadi. D sohaning ikkita tekislikni olib ularni quyidagicha joylashtiramiz.

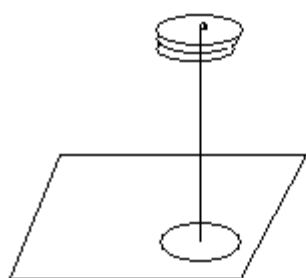


rasmda D soha qirgimlari qirg'oqlari va W tekislikning mavhum o'qi bo'laklarini mosligi ko'rsatilgan. Mos bolaklar 1-rasmda belgilangan D sohaning 1- nuqtasida qirqimning yuqori qirg'oqini 2- nusxadagi qirqimning quyi qirg'ogiga yopishtiramiz va mos ravishda D_1^* va D_2^* ni yuqori yarim oq bo'yicha birlashtiramiz. (Bu bo'laklar rasimda $-/-/-/-$ bilan belgilangan).

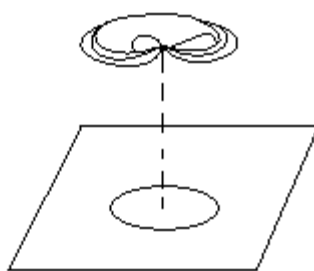
Keyi D da qirqimlarning qolgan ozod qirg'oqlarini o'zaro birlashtiramiz (ular $-//--//--$ bilan belgilansin)

b) da tasvirlangan 2 varaqli sirt $\sqrt{z}$ analetik funksiyani rima sirti deyiladi.

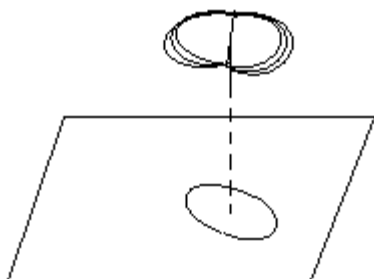
Faqat $z=0$ va $z=\infty$ da ildiz bir xil qiymat qabul qiladi, shuning uchun $z=0$ va $z=\infty$ da sirtning 1 ta nuqtasi yotadi. Bu nuqtalarda sirtning varaqlari o'zaro bog'lanadi. Ular kiritik nuqtalar yoki tarmoqlanish nuqtalari deyiladi. $W = \sqrt[n]{z}$ analetik funksiyaning Riman sirti xuddi shunday quriladi. U n - varaqli. $z \neq 0$, $z \neq \infty$ nuqtada sirtning turli n ta nuqtalari yotadi. Ular odatdagi nuqtalar $z=0$ va $z=\infty$ da sirtning 1 ta nuqtasi yotadi.



a)



b)



v)



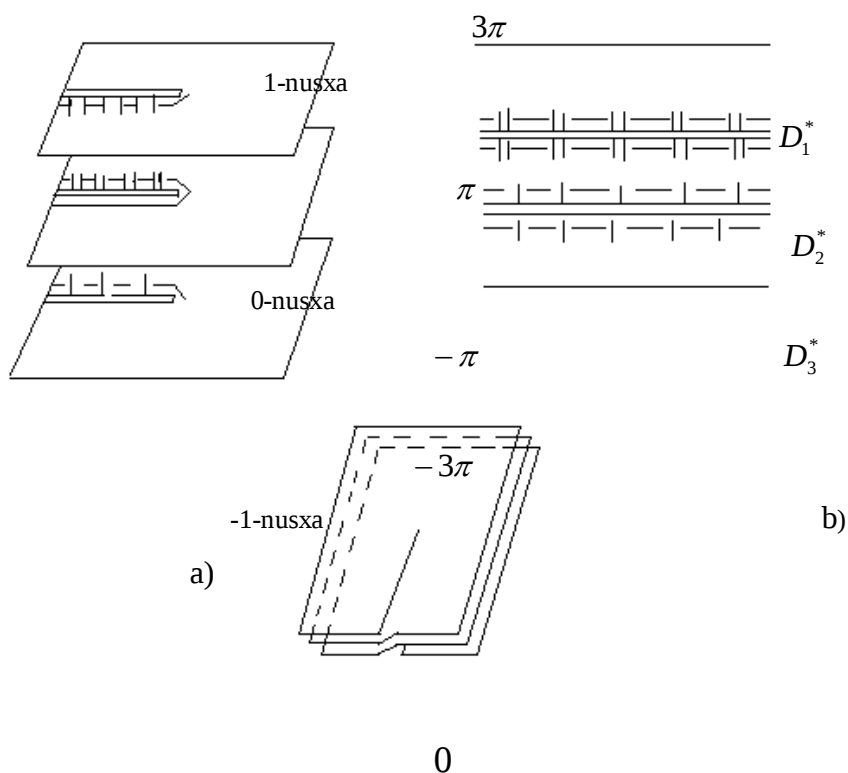
2- rasmda a), b) da $\sqrt[n]{z}$ funksiyaning turi va maxsus nuqtalari atroflarida uotuvchi sirlarning qismi ko'rsatilgan.

Manfiy yarim o'q holatini tashkil qilmaydi. Bunday nuqtalar atrofida yotuvchi nuqta sirti b) da tasvirlangan.

Sirtning o'zaro kesishishini biz hisobga olmasak, topologic manoda bu rasi a)dagidan farq qilmaydi – qaralayotgan uchta o'zaro bog'lanmagan doiralardan iborat boladi.

$W = Lnz$ logarifmning Riman sirti cheksiz varaqli bo'ladi.

Biz C tekislikdan manfiy o'q chiqarilgan iborat D sohani qaraymiz va unda logarifmning bosh tarmog'ini qaraymiz $w = f_0(z) = \ln|z| + i \arg z \ (-\pi < \arg z < \pi)$. Bu funksiya bir yaproqli va D sohani $D_0^* = \{-\pi < \text{Im} w < \pi\}$ polasaga konform akislantiradi. Qirqim qirg'oqlarining va polosa chegaralarning moslik ustidagi rasmda berilgan



v)

Logarifim D sohada cheksiz ko'p tarmoqqa ega.

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Ular D_0 ni $2\pi i$ ga butun qadamga siljitishidan hosil bolgan D_k^* polosaga akislanadi. Ularga mos holda D sohaning cheksiz ko'p nuqtasini olamiz va 0- nusxadagi qirqimining yuqori qirg'oqniq 1- nusxadagi qirqimning qusti qirg'of'iga yopishtiramiz 0- qirg'oqning qusti qirg'og'ini $(-1) -$ nusxadagi qirqimining yuqori qirg'g'iga yopishtiramiz. Qolgan bo'sh qirg'oqni mos ravishda 2- qirqimining quyi qirg'og'iga va $(-2)-$ nusxadagi qirqimning yuqori qirg'og'iga yopishtiramiz va hakoza .

Har bir $z \neq 0, z \neq \infty$ nuqta atrofida ustida sanoqli sondagi alohida doiralardan tuzilgan sirt qismi yotadi. Har bir doiraga mos nomerdagi logorifm tarmog'ini qo'yamiz.

Shuning uchun logorifmni [Riman sirtiga qurilgan] qurilgan Riman sirtida oddiy funksiya manosida qarash mumkin. $z=0$ va $z=\infty$ da logorifm aniqlanmagan shuning uchun uning Riman sirti $z=0$ va $z=\infty$ ustida nuqtaga ega emas.

Riman sirtiga eng qiyin misol sifatida $\omega = \text{Arcsin } z$ ni qarash mumkin.

$z = \sin w$ funksiya bir yaproqli va $\left\{ -\frac{\pi}{2} < \text{Re } w < \frac{\pi}{2}, \text{Im } w > 0 \right\}$ yarim polosani

z yuqori yarim tekislikka kanform akslantiradi. Bu holda $\left\{ -\frac{\pi}{2} < \text{Re } w < \frac{\pi}{2} \right\}$

polosaning o'zi $(-\infty, -1]$ va $[1, \infty)$ nurlar boyicha qurilgan tekislikka akslanadi.

Biz ohirgi sohani G bilan belgilaymiz va $w = g_0(z)$ orqali G ni

$G_0^* = \left\{ -\frac{\pi}{2} < \text{Re } w < \frac{\pi}{2} \right\}$ polosaga akslantiruvchi tarmog'ni olamiz bu tarmoqni

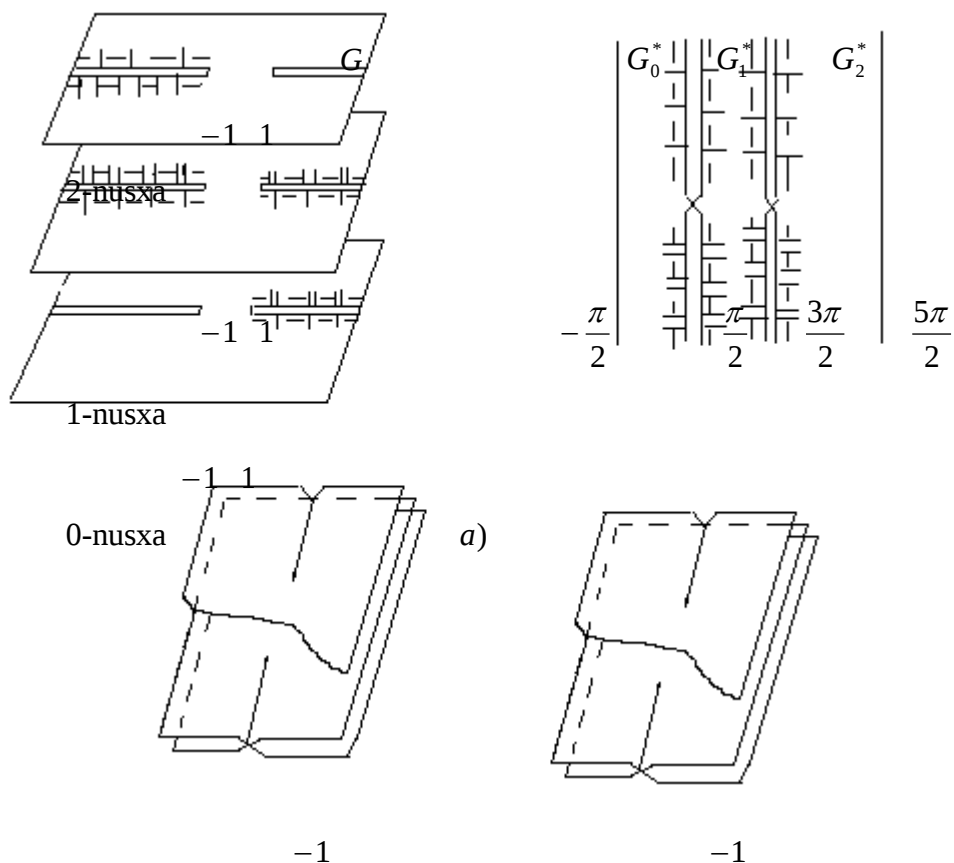
$g_0(0)=0$ deb xarakterlash mumkin.

Arcsin sanoqli sondagi tarmoqlarga ega bolganligidan Riman sirtini qurish uchun G sohaning sanoqli sondagi nuqtalarini olishmiz kerak. k - nusxaga

$(k = 0, \pm 1, \dots)$ $W = g_k(z)$ C ni $G_k^* = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \text{Re } w < \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ polosaga

akslantiruvchi k - tarmog'ini qiymatlarini qo'yamiz((uni $g_k(0) = k\pi$) bilan xarakterlash mumkin).

Endi sohalarning alohida nushalarini ularning G_k^* obrazlari qanday birlashganiga qarab birlashtiramiz. Bu quyidagi rasmda qanday bajarilishi ko'rsatilgan



Natijada $z = \pm 1$ nuqtalar ustida sanoqli sondagi tarmoqlanish nuqtasiga ega bo'lgan cheksiz (yaproqli) varaqli Riman sirtini hosil qilamiz.

$z = \infty$ da 2 ta logarifmik tarmoqlanish nuqtasiga ega bo'ladi (bittasi sohaning juft nusxalarini ifodalasa 2- si toq tuqtalarini ifodalaydi).

Bu arksinusning logarifm orqali hisoblanganidan kelib chiqadi.

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln}(\sqrt{1-z^2} + iz)$$

Biz endi Riman sirtining abstract topologic fazo sifatidagi umumiy tushunchasini beramiz .

Ta'rif 1 X toplamda topologik fazo deyiladi agar unda ochiq to'plamlar deb atalivchi qisim to'plamlar sistemasi ko'rsatilgan va shu bilan birga

1) istalgan sondagi ochiq to'plamlar birlashmasi va chekli sondagi kesishmasi yana ochiq to'plamni ifodalaydi.

2) X to'plamning o'zi va bo'sh to'plamning o'zi ochiq to'plamni ifodalaydi.

Qachonki X to'plamda ochiq to'plamlar sistemasi ko'rsatilib ular 1) va 2) talabni qanoatlantirsa X da topologic fazo strukturasini kiritilgan deyiladi. Xususan topologic fazo strukturasini hammavaqt metric fazoda kiritish mumkin. Buning uchun $x_0 \in X$ nuqta atrofini x_0 markazli va $\forall R$ radiusli shar qirgimini belgilash kifoya, yani qaralayotgan fazo metrikasidagi $\{x \in X : p(x_0, x) < R\}$ shar nuqta atrofi deb ataladi.

Ochiq to'plam deb nuqta bilan birgalikda bu nuqtaning biror atrofi ham tegishli bo'lgan to'plamga aytiladi.

Ta'rif 2 X topologic fazo xavustorf fazosi deyiladi, agar uning atrofidagi ajratilgan aksiomasi o'rinli bo'lsa: X dan olingan istalgan 2- ta turli nuqtalarining kesishmaydigan atrofi mavjud.

Xavustorf bo'lmagan fazoga misol: X sifatida R ni olamiz topologiya α chegara kiritiladi : R - ochiq to'plam, bo'sh to'plam va R dan chekli sohadagi nuqtalar istisno qilishidan hosil bo'lgan to'plamlar ochiq to'plam. Topologik fazoning aksiomalari bajaradi, lekin ajratish aksiomasi bajarmaydi

Nuqtalari $A = \{a, f_a(z)\}$ juftliklardan iborat R to'plamni qaraymiz bu yerda $a \in \overline{C}$ va

$$f_a(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, & a \in C \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}, & a = \infty \end{cases}$$

funksiya a markazli biror V_a doirada golomorf.

Ma'lumki, aksariyat hollarda analitik funksiya lar oddiy ma'noda funksiya bo'lmaydi, chunki bunday funksiya lar bir qiymatli bo'lmay, argumentning bitta qiymatiga bir nechta (ba'zi hollarda cheksiz ko'p) kompleks sonlarni mos qo'yiladi.

Bunday analitik $F(z)$ funksiya ni oddiy ma'nodagi funksiya sifatida qarash yo'lida $F(z)$ funksiya bilan bir qatorda bu funksiya ni bir qiymatli funksiya sifatida

qarash imkoniyatini beradigan R sirtini ham olamiz. Hosil qilingan R sirtga analitik $F(z)$ funksiya ning Riman sirti deyiladi. Endi Riman sirtining qat'iy matematik ta'rifini beramiz.

Aytaylik, $F(z)$ analitik funksiya berilgan bo'lib, $f_0(z)$ funksiya $F(z)$ funksiya sining $z_0 (z_0 \in \mathbb{C})$ nuqtadagi birorta elementi bo'lsin. Unda $P_0 = (z_0, f_0(z))$ juftlikka $F(z)$ analitik funksiya Riman sirti R ning nuqtasi deyiladi. Agar z_0 nuqtadagi $f_0(z)$ va $f_1(z)$ elementlar ekvivalent bo'lsa, $(z_0, f_0(z))$ va $(z_0, f_1(z))$ juftliklar Riman sirtidagi bitta nuqtani aniqlaydi deb qabul qilinadi. z_0 nuqtaga Riman sirtidagi $P_0 = (z_0, f_0(z))$ nuqtaning z tekislikdagi proektsiyasi deyiladi:

$$(z_0, f_0(z)) \rightarrow z_0.$$

Riman sirtidagi barcha $P = (\xi, f_0(z))$, bu erda $|\xi - z_0| < \varepsilon$, nuqtalar to'plamiga $P_0 = (z_0, f_0(z))$ nuqtaning ε atrofi deyiladi va U_ε kabi belgilanadi:

$$U_\varepsilon = \{P \in R : P = (\xi, f_0(z)), |\xi - z_0| < \varepsilon\}.$$

Ravshanki, Riman sirtidagi U_ε atrofning kompleks tekislikka proektsiyasi $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$ doiradan iborat bo'ladi.

Riman sirti bog'lamli bo'ladi, chunki analitik funksiyaning ixtiyoriy ikkita elementi olinganda ham, ularni birini ikkinchisini analitik davom ettirish yo'li bilan hosil qilish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2-х т. – М.: Наука, 1968. Т.2. – 624с
2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. – М. : Наука, 1976.– 540 с.
3. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. 1–част. М.Н. 1989.
4. Г. Худайберганов, А. Ворисов, Х. Мансуров. Комплекс анализ. Тошкент, «Университет», 1998.
5. Г. Худайберганов, А. Ворисов, Х. Мансуров. Комплекс анализ.Карши. «Насаф», 2003.