

O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi

Al-Xorazmiy nomidagi Urganch Davlat

universiteti

Matematika fakulteti

«Funksiyalar nazariyasi» kafedrası

matematika yo'nalishi

401 matematika guruh talabasi

Qo'chqorov Shermuhammadning

«Psevdoqavariq sohalar»

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ish ko'rildi va himoyaga

berildi «Funksiyalar

nazariyasi»

kafedrası mudiri:

f.-m.f.n.dots.Madraximov R.M

«__» _____2010 y.

Ilmiy rahbar:

ass.Vaisova M.D

Taqrizchi:

dots. Boltayev J.

Urganch-2010 yil.

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1-§. Lokal psevdoqavariq sohalar.....	7
2-§ Global psevdoqavariq sohalar.....	13
3-§. Golomorf qavariq sohalar va psevdoqavariq sohalar orasidagi bog'lanish.....	23
Foydalanilgan adabiyotlar.....	31

ANNOTATSIYA

Маълумки, D соҳа голоморф қавариқ бўлса, у голоморфлик соҳаси бўлади. ва аксинча. Комплекс анализда голоморф қавариқ соҳаларнинг геометриясини очиб берувчи, айти пайтда фундаментал ҳисобланган қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳанинг голоморф қавариқ (голоморфлик соҳаси) бўлиши учун унинг псевдоқавариқ бўлиши зарур ва етарли.

Битирув малакавий ишида локал псевдоқавариқлик, глобал псевдоқавариқлик тушунчалари батафсил ўрганилган. Псевдоқавариқ соҳаларга мисоллар келтирилган, голоморфлик ва голоморфлик соҳалри ҳам ўрганилиб, голоморф қавариқлик ва псевдоқавариқлик орасидаги боғланиш очиб берилган.

Kirish.

1997 yil 29 avgustda O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida qabul qilingan hamda bugungi kunda g'oyalari amaliyotga keng ko'lamda muvaffaqiyatli tadbiq etilayotgan O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni va «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga etkazish jarayonining mohiyati to'laqonli ochib berilgandir. Malakali kadrlar tayyorlash jarayonining har bir bosqichi o'zida ta'lim jarayonini samarali tashkil etish, uni yuqori bosqichlarga ko'tarish, shu bilan birga jaxon ta'limi darajasiga etkazish borasida muayyan maqsad va vazifalarni amalga oshirish lozim.

Ushbu maqsadlarning ijobiy natijaga ega bo'lishi, eng avvalo, yosh avlodga ilmiy bilimlar asoslarini puxta o'rgatish, ularda keng dunyoqarash hamda tafakkur ko'lamini hosil qilish, ma'naviy axloqiy sifatlarni shakllantirish borasidagi ta'limiy tarbiyaviy ishlarni samarali tashkil etishga bog'liqdir. Zero, yurtning porloq istiqbolini yaratish, uning nomini jahonga keng yoyish, ulug' ajdodlar tomonidan yaratilgan milliy madaniy merosni jamiyatga namoyish etish, ularni boyitish, mustaqil Respublikamizning rivojlangan mamlakatlar qatoridan joy egallashini ta'minlash yosh avlodni komil inson hamda malakali mutaxassis qilib tarbiyalashga bog'liqdir.

Ana shu vazifalardan kelib chiqqan xolda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o'rganish uchun uning asosi bo'lgan tushunchalarni mukammal o'zlashtirishimiz kerak.

Ma'lumki, tekislikdagi ixtiyoriy $D \subset C$ soha quyidagi muhim xossaga ega:

D sohada golomorf bo'lgan shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya topiladiki, u ∂D chegara yaqinida chegaralanmagan bo'ladi. Bu quyidagini anglatadi: ixtiyoriy $\xi \in \partial D$ nuqta olinganda ham shu nuqtaga intiluvchi shunday $z_k \in D$

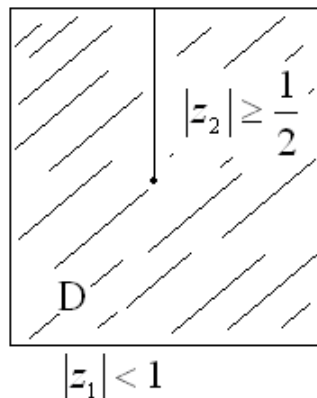
ketma – ketligi topiladiki, $z_k \rightarrow \xi$ da $f(z_k) \rightarrow \infty$ bo'ladi. Odatda, bunday $\xi \in \partial D$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deyiladi. Bunday $f(z)$ funksiya D sohaning tashqarisiga analitik davom qildirilmaydi.

$\mathbf{C}^n$, $n > 1$ bo'lgan holda yuqoridagi vaziyat boshqacharoq bo'ladi.

M i s o l: $\mathbf{C}^2$ fazoda ushbu Xartogs sohasi

$$D = \{ |z_1| < 1 \} \times \{ |z_2| < 1 \} \setminus \{ 0 \times |z_2| \geq \frac{1}{2} \}$$

ni qaraylik (1 – chizma).



1 – ch i z m a

Bu soha uchun ' $D = \{ |z_1| < 1 \}$ doira bo'lib,

$$r(z_1) = \begin{cases} 1, & z_1 \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & z_1 = 0 \end{cases}$$

Endi ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiyani olib, uni Xartogs qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1) z_2^k \quad (1)$$

Bu qator $\hat{D} = \{|z_1| < 1\} \times \{|z_2| < 1\}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Haqiqatan ham, (1) qatorning yaqinlashish radiusi, $z_1 \neq 0$ bo'lganda $R(z_1) \geq 1$ bo'lib, $-\ln R_*(z_1)$ funksiya plyurisubgarmonik. Maksimumlar prinsipiga ko'ra $R_*(0) \geq 1$ tengsizlik bajarilib, qatorning $\hat{D}$ da yaqinlashishi kelib chiqadi.

Bundan ko'rinadiki, ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya $\hat{D}$ sohaga analitik davom qiladi.

Ta'rif . $\mathbf{C}^n$ fazoda D soha berilgan bo'lsin: $D \subset \mathbf{C}^n$. Agar bu soha uchun shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya mavjud bo'lib, u chegara ∂D yaqinida chegaralanmagan bo'lsa, D golomorflik soha yoki analitik kengaytirilmaydigan soha deyiladi.

Ta'rif. Ushbu

$$K = \{z \in D : |f(z)| \leq \|f\|_K, \forall f(z) \in \mathcal{O}(D)\}$$

to'plam kompakt K ning D dagi golomorf qavariq qobig'i deyiladi. Agar $K = D$ bo'lsa, K kompakt D sohada golomorf qavariq kompakt deyiladi. Agar ixtiyoriy $K \subset\subset D$ kompakt uchun $\hat{K} \subset\subset D$ bo'lsa, D soha golomorf qavariq soha deyiladi.

D soha golomorf qavariq bo'lsa, u golomorflik sohasi bo'ladi. va aksincha.

Kompleks analizda golomorf qavariq sohalarning geometriyasini ochib beruvchi, ayni paytda fundamental hisoblangan quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning golomorf qavariq (golomorflik sohasi) bo'lishi uchun uning psevdoqavariq bo'lishi zarur va yetarli.

Mazkur bitiruv malakaviy ishida psevdoqavariq sohalar batafsil o'rganilgan.

1-§. Lokal psevdoqavariq sohalar

Chegarasi C^2 sinfga tegishli $D = \{x \in R^n : \varphi(x) < 0\}$ sohaning odatdagi geometrik qavariqligi deganda a chegaraviy nuqtaning biror yetarlicha kichik U atrofida sohaning $T = T_a(\partial D)$ urinma tekislikdan bir tomonda yotishi tushuniladi. Umumiylikka hilof qilmagan holda $a = 0$ deb hisoblashimiz mumkin. φ ning $a = 0$ nuqtadagi Teylor yoyilmasi

$$\varphi(x) = L_0(x) + \frac{1}{2} H_0(x) + o(|x|^2) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $L_0(x)$ – chiziqli hadlarning to'plami,

$$H_0(x) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \Big|_0 x_\mu x_\nu \quad (2)$$

T da chiziqli qism $L_0(x) \equiv 0$ ligidan qavariqlik H_0 kvadratik formaning T da sujeniyasi bilan aniqlanadi.

Agar D soha 0 nuqtada qavariq bo'lsa $H_0(x)|_T \geq 0$ va agar $x \neq 0$ da $H_0(x)|_T > 0$ bo'lsa u holda qavariq bo'ladi. Lokal psevdoqavariqlik bu kriteriyaning kompleks analogini qurish natijasida yuzaga keladi. a chegaraviy nuqtaning U atrofida $D \subset C^n$ soha

$$D \cap U = \{z \in U : \varphi(z) < 0\} \quad (3)$$

shart bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $\varphi \in C^2(U)$, barcha $z \in U$ uchun

$\nabla_z \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \right)_z \neq 0$, φ funksiyaning bu xossa bilan U atrofda D sohaning

lokal aniqlovchisi deb ataymiz.

Lemma. Agar $U \subset \mathbf{R}^n$ sohada $\varphi \in C^k$, $k \geq 1$ funksiya va

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \right)_z \neq 0 \quad \psi \in C^k(U) \text{ funksiya esa } \varphi = 0 \text{ bo'lgan barcha joyda}$$

nolga aylansa, u holda shunday $h \in C^{k-1}(U)$ funksiya topiladiki barcha $x \in U$ uchun $\psi(x) = h(x)\varphi(x)$ bajariladi.

Agar U yetarlicha kichik bo'lsa bunday φ va ψ funksiyalar bir-biridan $h \in C^1(U)$ musbat ko'paytuvchisiga farq qiladi. $(\psi(x) = h(x)\varphi(x))$ o'z navbatida, yuqoridagi lemmaga ko'ra shunday $h \in C^1(U)$ topiladiki $\psi = h \cdot \varphi$ bo'ladi, shu bilan birga φ va ψ ikkalasi ham $U \cap D$ da manfiy va $U \setminus \bar{D}$ da musbatligidan $U \setminus \partial D$ da $h > 0$. Yana shu lemmaga ko'ra $\varphi = h_1 \psi$, bu yerda $h_1 = \frac{1}{h} \in C^1(U)$ shuning uchun U da $h > 0$ bo'ladi.

φ ning $a = 0$ nuqta atrofida Teylor yoyilmasi

$$\varphi(z) = 2 \operatorname{Re} L_0(z) + \operatorname{Re} K_0(z) + \frac{1}{2} H_0(z) + O(|z|^2) \quad (4)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$L_0(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} \bigg|_0 z_\nu$$

$$K_0(z) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu} \bigg|_0 z_\mu z_\nu$$

$$H_0(z) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} \Big|_{z_\mu \bar{z}_\nu} \quad (5)$$

Bu yoyilmani hosil qilish uchun φ ni $z_\nu, \bar{z}_\nu$ o'zgaruvchisi bo'yicha Teylor yoyilmasiga yoyish va φ ning haqiqiyligidan foydalanib $\bar{z}_\nu$ bo'yicha hosilalar gruppasi z_ν bo'yicha hosilalari hadlarga kompleks qo'shma bo'lganligi uchun yig'indida ikkilangan hadlarni olish kerak.

Biz ko'rishimiz mumkinki, (1) dan farqli ravshda (4) yoyilmada ikkinchi tartibli hadlar ikkita gruppaga yoyiladi:

$$\operatorname{Re} K_0(z), \quad \frac{1}{2} H_0(z)$$

Ulardan ikkinchisini boshqacha ko'rinishda belgilaymiz:

$$H_z(\varphi, \omega) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} \Big|_z \omega_\mu \bar{\omega}_\nu \quad (6)$$

va uni φ funksiyaning z nuqtadagi Levi formasi deb ataymiz. φ ning

haqiqiyligidan bu forma finit $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} \right)$ va barcha $\omega \in C^n$ vektorlarda

haqiqiy qiymat qabul qiladi.

U quyidagi xossalarga ega :

a) agar z nuqta atrofida $h \in C^2$ va haqiqiy bo'lsa

$$H_z(h\varphi, \omega) = hH_z(\varphi, \omega) + \varphi H_z(h, \omega) + 2 \operatorname{Re} \partial \varphi(\omega) \partial \bar{h}(\omega), \quad (7)$$

bu yerda $\partial \varphi(\omega) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \omega_\nu$ va $\partial h(\omega) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_\nu} \omega_\nu$

b) Agar $\varphi(z)$ nuqta atrofida $\psi \in C^2 - \varphi$ o'zgaruvchining haqiqiy funksiyasi bo'lsa, u holda

$$H_z(\psi\varphi, \omega) = \psi'(\varphi)H_z(\varphi, \omega) + \psi''(\varphi)|\partial\varphi(\omega)|^2 \quad (8)$$

v) Agar $f:U \rightarrow C^m$ – golomorf akslantirish bo'lsa, $f(z)$ nuqta atrofida $\psi \in C^2$ bo'lsa,

$$H_z(\psi f, \omega) = H_{f(z)}(\psi, f_*\omega) \quad (9)$$

bu yerda $f_* = df - f$ akslantirishning z nuqtadagi differensial.

Keyingi xossa Levu formasi bigolomorf akslantirishga nisbatan invariantligini bildiradi.

1-lemma. Agar D soha chegarasi a nuqta yaqinida ikki marta silliq bo'lsa, u holda U atrofning shunday f , $f(a) = 0$ bigolomorf akslantirish mavjudki, $G = f(D \cap U)$, $\omega = 0$ nuqta atrofida

$$\psi(\omega) = \operatorname{Re} \omega_n + \frac{1}{2}H_0(\psi, \omega) + o(|\omega|^2)$$

taylor yoyilmali aniqlovchi funksiyaga ega.

Isbot. $a = 0$ va uning atrofida D sohani lokal aniqlovchisi –bu (4) Teylor yoyilmasi φ funksiya mavjud bo'lsin. $0 \in U$ atrofda yangi ω kordinatalarini shunday aniqlaymizki, $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ o'zgaruvchilar $\{L_0(z) = 0\}$ kompleks urinma tekislik koordinatalari, $\omega_n = L_0(z) + \frac{1}{2}K_0(z)$ bo'lsin. K_0 –kvadrat hadlardan tuzilgani uchun $\omega = f(z)$ akslantirish U yetarlicha kichik bo'lganda bigolomorf bo'ladi. $G = f(D \cap U)$ ning obrazi $\psi(\omega) < 0$ tengsizlik bilan beriladi, bu yerda

$\psi = \varphi \circ f^{-1}$ $z = f^{-1}(\omega)$ ni (5) yoyilmaga qo'yib

$\varphi(z) = 2 \operatorname{Re} f_n(z) + \frac{1}{2} H_0(\varphi, z) + o(|z|^2)$ ko'rinishda yoyish mumkin va bundan (9)

ga asosan $\psi(z) = 2 \operatorname{Re} \omega_n + \frac{1}{2} H_0(\psi, \omega) + o(|\omega|^2)$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib lokal aniqlovchi funksiyaning Teylor yoyilmasidagi ikkinchi tartibli hadlar orasida kompleks analizda Levi formasi muhim ro'l o'ynaydi.

Aynan u qavariqlikning kompleks analogini qurish asosida yotadi:

Barcha ikkinchi tartibli hadlarning barcha gruppasini $T_a(\partial D)$ urinma tekislikka sujeniyasi o'rnida bu formani kompleks urinma tekislik $T_a^c(\partial D)$ ga sujeniyasi qaraladi.

1-ta'rif. *a nuqta atrofida ikki marta silliq chegarali D soha bu nuqtada psevdoqavariq deyiladi, agar a nuqta atrofida D sohaning shunday lokal aniqlovchisi φ topilsaki, barcha $\omega \in T_a^c(\partial D)$ uchun*

$$H_a(\varphi, \omega) \geq 0 \quad (11)$$

bo'lsa va qat'iy psevdoqavariq deyiladi, agar barcha $\omega \in T_a^c(\partial D), \omega \neq 0$ uchun

$$H_a(\varphi, \omega) > 0 \quad (12) \text{ bo'lsa.}$$

Bir qancha misollar keltiramiz

1. **Polikrug** $U^n = \{z \in C^n : \|z\| < 1\}$.

$S_v = \{z_v : |z_v| = 1\}$ chegaraga tegishli, lekin ostovga tegishli bo'lmagan $a \in \partial U^n$

nuqtalarda aniqlovchi funksiyaning $\varphi(z) = z_v \bar{z}_v - 1$ qilib aniqlaymiz.

Levi formasi $H_a(\varphi, \omega) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu} \Big|_a \omega_\mu \bar{\omega}_\nu = |\omega|^2$ nomanfiy, lekin $\omega_\nu = 0$

bo'lgan ω vektorlar uchun 0 ga aylanadi, yani $T_a^c(\partial U^n)$ kompleks urinma tekislikda $\bar{a}_\nu(z_\nu - a_\nu) = 0$ yoki $\bar{a}_\nu \omega_\nu = 0$ shu bilan birga $a_\nu \neq 0$ chunki $\omega_\nu = 0$ Shuning uchun bunday nuqtalarda polikrug psevdoqavariq, lekin qat'iy psevdoqavariq emas.

2. Shar $B^n = \{z \in C^n : |z| < 1\}$

Bu yerda $\forall a \in \partial B^n$ nuqta uchun aniqlovchi funksiyani $\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^n z_\nu \bar{z}_\nu - 1$

ko'rinishda topamiz, uning Levi formasi

$$H_a(\varphi, \omega) = \sum_{\nu=1}^n \omega_\nu \bar{\omega}_\nu = |\omega|^2 > 0, \quad \omega \neq 0$$

demak, shar qat'iy psevdoqavariq soha.

2-§. Global psevdokavariq sohalar.

1-ta'rif. $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada plyurisubgarmonik deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) u funksiya D da yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa;

2) ixtiyoriy $z^0 \in D$ nuqta uchun va ixtiyoriy $z = l(\xi) = z^0 + w \cdot \xi$, bunda $w \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{C}$ analitik to'g'ri chiziqli uchun, u funksiyani shu chiziqqa sujeniyasi, ya'ni $u(l(\xi))$ ochiq $\{\xi \in \mathbb{C}, l(\xi) \in G\}$ to'plamda subgarmonik bo'lsa.

Plyurisubgarmonik funksiyalar ko'p o'zgaruvchili golomorf funksiyalar bilan ham bog'liq. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf bo'lgan ixtiyoriy funksiya uchun

$$u(z) = \ln |f(z)| \quad (1)$$

funksiya shu sohada plyurisubgarmonik bo'ladi.

Aytaylik, $\mathbb{C}^n$ fazoda biror D soha berilgan bo'lsin: $D \subset \mathbb{C}^n$.

2-ta'rif. Agar D soha uchun shunday plurisubgarmonik $u(z) \in Psh(D)$ funksiya topilib,

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} u(z) = +\infty$$

bo'lsa, D ga psevdokavariq soha deyiladi.

Bu ta'rifdagi $\lim_{z \rightarrow \partial D} u(z) = +\infty$ shart ixtiyoriy M soni uchun ushbu

$\{z \in D : u(z) < M\}$ ochiq to'plamning D sohada kompakt bo'lish sharti bilan ekvivalent.

3-ta'rif. Agar D soha uchun shunday plyurisubgarmonik $u(z) \in Psh(D)$ funksiya mavjud bo'lsa, $\lim_{z \rightarrow \partial D} u(z) = 0$ bo'lsa, D kuchli psevdoqavariq soha deyiladi.

$\mathbb{C}$ tekislikda ixtiyoriy soha psevdoqavariq. O'z navbatida $\bar{C}/\{\xi\}$ uchun u funksiya sifatida $u(z) = \frac{1}{|z - \xi|}$, $\xi \neq \infty$ $u(z) = |z|$, $\xi = \infty$ ya'ni

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z - \xi|}, & \xi \neq \infty \\ |z|, & \xi = \infty \end{cases}$$

funksiyani olish mumkin. Umumiy holda ta'rif shartini

$$u(z) = |z| + \sup_{\xi \in \partial D} \frac{1}{|z - \xi|} = |z| + \frac{1}{\delta(z, \partial D)}$$

funksiya qanoatlantiradi, chunki u uzluksiz va subgarmonik funksiyalarning (yuqoridan egiluvchan) oilasining yuqoridan egiluvchisini ifodalaydi.

$a \in D$ nuqtada $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning *Xartogs radiusi* deb D sohani z_n o'qqa parallel $l = \{z = a, z_n = \xi\}$ kompleks to'g'ri chiziq bilan kesishmasida yotuvchi markazi a nuqtada bo'lgan eng katta doira radiusi $R(a)$ ga aytiladi.

$$R(a) = \delta(a, \partial D \cap l)$$

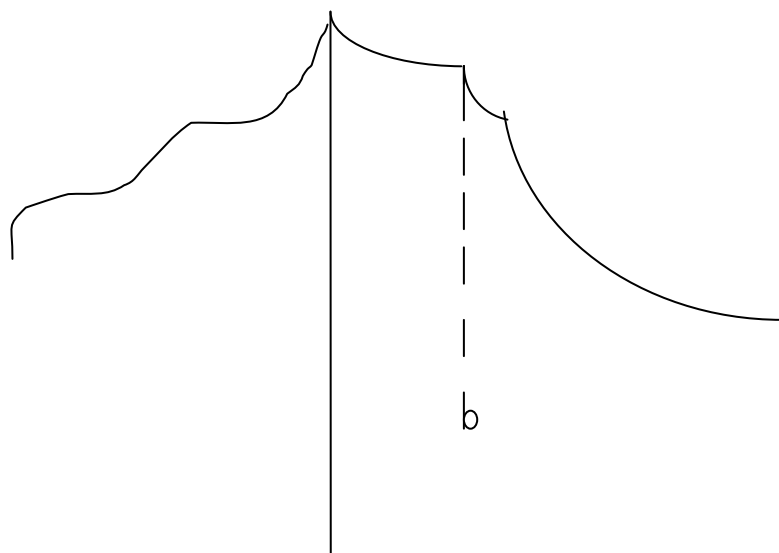
1-lemma. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ soha barcha chegaraviy nuqtalarda psevdoqavariq bo'lsa, u holda $u(z) = -\ln R(z)$ D sohada plyurisubgarmonik bo'ladi, bu yerda $R(z)$ – D sohaning z nuqtadagi *Xartogs radiusi*.

Isbot. $\forall D \subset C^n$ soha uchun Xartogs radiusi R quyidan yarim uzluksiz.

$u(z) = -\ln R(z)$ funksiya esa D da yuqoridan yarim uzluksiz. O'z navbatida istalgan

$a \in D$ nuqta uchun (1-rasmga qarang)

$$\lim_{z \rightarrow a} R(z) \geq R(a)$$



(1-rasm)

Lemma shartida $u(z) = -\ln R(z)$ funksiyaning istalgan kompleks to'g'ri chiziq

$$l_w = \{z \in C^n : z = l(\xi) = a + w\xi\} \quad (3)$$

ga sujeniyasi $\xi = 0$ nuqta atrofida subgarmonik funksiyaning ifodalashini

ko'rsatamiz. Bu yerda $a \in D, w \in C^n$. Agar $w = 0$ yani l_w z_n o'qqa parallel

bo'lsa, uholda biz tekislikdagi holatga ega bo'lamiz:

$$R|_{l_w} = \inf_{z' \in \partial D \cap l_w} |z_n - z'_n| \quad \text{va} \quad u|_{l_w} = -\ln R|_{l_w} = \sup_{z' \in \partial D \cap l_w} \{-\ln |z_n - z'_n|\}$$

funksiya subgarmonik, chunki u subgarmonik funksiyalarning yuqoridan yarim uzluksiz yuqoridan egiluvchisini ifodalaydi. $w \neq 0$ holda teskarisidan isbotlaymiz. Agar

$$u|_{l_w} = -\ln R \circ l(\xi) = \mathcal{G}(\xi) \quad (4)$$

funksiya $\xi = 0$ nuqta atrofida subgarmonik bo'lmasa, u holda $U = \{f | < R\}$ doira va $\bar{U}$ da uzluksiz, U da garmonik bo'lgan shunday h funksiya topiladiki, ∂U da $\mathcal{G}(\xi) \leq h(\xi)$, lekin biror $\xi_0 \in U$ nuqtada

$$h(\xi_0) - \mathcal{G}(\xi_0) = \inf_U \{h(\xi) - \mathcal{G}(\xi)\} = -\varepsilon < 0$$

Biz bu yerda $h - \mathcal{G}$ quyidan yarim uzluksiz funksiya o'zining aniq quyi chegarasiga kompaktda erishishidan foydalandik.

$g(\xi) = -h(\xi) - \varepsilon$ orqali U da garmonik va $\bar{U}$ da uzluksiz funksiyani belgilaymiz;

$$\partial \bar{U} \text{ da } g(\xi) < -\mathcal{G}(\xi),$$

$$\bar{U} \text{ da } g(\xi) \leq -\mathcal{G}(\xi),$$

$$g(\xi_0) = -\mathcal{G}(\xi_0) \quad (5)$$

ga ega bo'lamiz. (3) da funksiya $l(\xi) = (l(\xi), \lambda(\xi))$ ko'rinishda, bu yerda $l(\xi) = a + w\xi, \lambda(\xi) = a_n + w_n\xi$ Xartogs radiusi ta'rifiga ko'ra shunday $b = (b, b_n) \in \partial D$ nuqta topiladiki, $b = l(\xi_0)$ va $|b_n - \lambda(\xi_0)| = R \circ l(\xi_0)$.

U da $G = g + ig_*$ golomorf funksiyani shunday quramizki, $G(\xi_0)$ biror $\ln(b_n - \lambda(\xi_0))$ qiymat bilan ustma-ust tushsin, buni qurish mumkin chunki (4) va (5) ga ko'ra

$$\ln|b_n - \lambda(\xi_0)| = -g(\xi_0) = g(\xi_0)$$

Endi golomorf disklar oilasini qaraymiz.

$$S_t = \{z \in \mathbb{C}^n : z = \gamma(\xi), z_n = \lambda(\xi) + t \cdot e^{G(\xi)}, \xi \in \overline{\mathcal{D}}\} \quad (6)$$

$\forall z \in S_t, 0 \leq t \leq 1$ nuqta uchun $z = \gamma(\xi)$ ga ega bo'lamiz va (5) dagi ikkinchi tengsizlikdan $|z_n - \lambda(\xi)| = t e^{g(\xi)} \leq t e^{-u(\xi)} = t R \circ l(\xi)$ Xartogs radiusining ta'rifiga ko'ra $t < 1$ da $S_t \subset D$. (5) dagi birinchi tengsizlikdan barcha $t, 0 \leq t \leq 1$ da $\partial S_t \subset D$ ni olamiz. $t \rightarrow 1$ da $S_t \rightarrow S_1$ bo'ladi. S_1 esa $b \in \partial D$ ni o'z ichida saqlaydi, chunki $\xi = \xi_0$ da $z = \gamma(\xi_0) = b$ va $z_n = \lambda(\xi_0) + e^{G(\xi_0)} = b_n$ (bizda $\ln G(\xi_0) = b_0 - \lambda(\xi_0)$).

Biz D sohaning b nuqtada lokal psevdokvariqligiga zid natijaga keldik.

Izoh.

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\mu}(z) z_n^{\mu}(z)$$

Xartogs qatoriining yaqinlashish sohasi

$$D = \{(z, z_n) : z \in D, |z_n| < R(z)\}$$

$R(z)$ – D sohaning Xartogs radiusi. $-\ln R(z)$ ning plurisubgarmonikligi-

1) $-\ln R$ ni $z = l(\xi)$ to'g'ri chiziqqa sujeniyasini qaraymiz.

2) $b = l(\xi_0)$ ni olib, b_n ni shunday tanlaymizki, $|b_n| = R(b)$ va $b = (b, b_n)$ nuqta f uchun muhim nuqta bo'lsin. Buni qilish mumkin, chunki har bir $\{z, |z_n| = r(z)\}$ aylanada, bu yerda $r(z)$ - (7) qatorning tayinlangan z nuqtadagi yaqinlashish radiusi, hech bo'lmaganda bitta f ning maxsus nuqtasi bor.

$$R(b) = \lim_{z \rightarrow b} r(z)$$

va $\{b, |b_n| = R(b)\}$ aylanada maxsus nuqtalarining limit nuqtasi bor.

3) $G = g + ig^*$ funksiyani shunday tanlaymizki $G(\xi_0) = \ln b_n$ (buni

$G(\xi_0) = \ln |b_n|$ bo'lgani uchun qilish mumkin) f ning uzluksizligidan u lemma

isbotini qo'llash orqali b nuqtaga davom qiladi. Lekin b - maxsus nuqta va ziddiyat kelib chiqadi.

4-teorema. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ soha har bir chegaraviy nuqtada lokal psevdoqavariq bo'lsa u holda u global psevdoqavariq bo'ladi.

Isbot. $u(z) = -\ln \delta(z, \partial D)$ funksiya D sohada uzluksiz va $z \rightarrow \partial D$ da $u(z) \rightarrow +\infty$. U D da plyurisubgarmonik ekanini ko'rsatamiz. l_w orqali $z \in D$

nuqtadan w yo'nalish bo'yicha o'quvchi $\xi \rightarrow z + w\xi$ to'g'ri chiziqli va

$R_w(z) = \delta(z, \partial D \cap l_w)$ ni belgilaymiz. Barcha $z \in D$ lar uchun

$\delta(z, \partial D) = \inf_w R_w(z)$ bu yerda aniq quyi chegara barcha $w \in \mathbb{C}^n, |w| = 1$ vektorlar

bo'yicha olinadi. $z \rightarrow C_z$, bu yerda $C = (C_{\mu\nu}) - n \times n$ unitar matrisa, kompleks

burilishni olamiz. U w yo'nalishni z_n o'q yo'nalishi bo'yicha o'tkazadi va R_w ga o'tadi.

Bunday burilish evklid metrikasini saqlagani va psevdoqavariqlikni saqlagani uchun 1-lemmaga ko'ra $-\ln R_w(z)$ D sohada plyurisubgarmonik ekaniga ishonch hosil qilamiz. Lekin bu holda $u(z) = -\ln \delta(z, \partial D) = \sup_w (-\ln R_w(z))$

plyurisubgarmonik funksiyalarning uzluksiz yuqoridan egiluvchsi bo'lgani uchun D sohada plyurisubgarmonik.

5-teorema. *Istalgan psevdoqavariq $D \subset \mathbb{C}^n$ soha har bir chegaraviy nuqtasida psevdoqavariq bo'ladi.*

Isbot. Teskarisidan faraz qilamiz, yani D biror $a \in \partial D$ nuqtada psevdoqavariq bo'lmasin. U holda shunday S_ν golomorf disklar oilasi topiladiki, $S_\nu \rightarrow S$, $\partial S_\nu \rightarrow \partial S$, shu bilan barcha S_ν , $\partial S \subset D$, S esa a nuqtani o'z ichida saqlaydi. D ning psevdoqavariqligidan $z \rightarrow \partial D$ da $+\infty$ ga intiluvchi plyuriysubgarmonik funksiya mavjud. Plyuriysubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipiga ko'ra
$$\sup_{S_\nu} u \leq \sup_{\partial S_\nu} u < C < \infty \quad (8)$$

Bu yerda C o'zgarmas ν ga bog'liq emas, chunki ∂S lar birlashmasi D da kompakt yotadi. Lekin boshqa tomondan shunday $z^\nu \in S_\nu$ nuqtalar ketma-ketligi mavjudki, bu nuqtalar ketma-ketligi $a \in \partial D$ nuqtaga yaqinlashadi. Lekin $u(z^\nu) \rightarrow \infty$, bu esa (8) ga zid.

4-teorema va **5-teorema** global psevdoqavariqlik sohaning uning har bir chegaraviy nuqtasida psevdoqavariqligiga ekvivalent ekanini ko'rsatadi. Quyidagi natijani ta'kidlaymiz.

Natija: $D \subset \mathbb{C}^n$ soha psevdoqavariq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $-\ln \delta(z, \partial D)$ funksiya D sohada plyuriysubgarmonik bo'lsa.

Isbot. $-\ln \delta(z, \partial D)$ funksiyaning plyuriysubgarmonikligining yetarlilik sharti psevdoqavariqlik ta'rifidan kelib chiqadi. Bu shart zaruriy hamdir. D

psevdoqavariq bo'lsin: 5-teoremaga ko'ra u har bir chegaraviy nuqtada psevdoqavariq bo'ladi, 4-teoremaning isbotidan ko'rinadiki $-\ln \delta(z, \partial D)$ funksiya D da plyuriysubgarmonik.

Chegarasi ikki marta silliq sohalar uchun global psevdoqavariqlikni aniqlovchi funksiyalar terminida berish qulay.

5-Ta'rif. φ funksiyaning $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning global aniqlovchisi deyiladi agar u barcha ∂D chegaraning biror Ω atrofida C^2 sinfga tegishli bo'lsa va bu atrofda $D \cap \Omega = \{z \in \Omega : \varphi(z) < 0\}$, barcha $z \in \partial D$ uchun $\nabla_z \varphi \neq 0$ bo'lsa.

6-Ta'rif. Chegarasi C^2 sinfga tegishli $D \subset \mathbb{C}^n$ soha (global) psevdoqavariq deyiladi, agar u global aniqlovchi φ funksiya bilan barcha $z \in \partial D$ uchun va $w \in T_z^c(\partial D)$, $w \neq 0$ uchun $H_z(\varphi, w) \geq 0$ Levi formasini qanotlantirsa;

qa'tiy psevdoqavariq deyiladi, agar u chegaralangan bo'lsa va $w \in T_z^c(\partial D)$, $w \neq 0$ uchun $H_z(\varphi, w) > 0$ ni qanotlantirsa.

Ma'lumki, bu talablar aniqlovchi funksiya tanloviga bog'liq emas ular ulardan birortasi uchun bajarilsa, qolgan barchasi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremadan quyidagi xulosaga kelish mumkin: chegarasi ikki marta silliq bo'lgan sohalar uchun aniqlovchi funksiyaning

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\delta(z, \partial D), & z \in \Omega \cap D \\ \delta(z, \partial D), & z \in \Omega \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (9)$$

ko'rinishda tanlash mumkin. Bu yerda $\delta(z, \partial D)$ -z dan ∂D gacha bo'lgan evklid masofasi, agar Ω polosa yetarlicha qisqa bo'lsa;

Global psevdoqavariqlik bilan plyurisubgarmoniklik orasidagi bog'likni ko'rsatamiz, qat'iy psevdoqavariq sohalar uchun bu juda oddiy

6-teorema. $D \subset \mathbb{C}^n$ soha qat'iy psevdoqavariq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki u qat'iy plyurisugarmonik aniqlovchi funksiyaga ega bo'lsa.

Isbot. Yetarlilik oson ko'rinadi, zaruriyligini isbotlaymiz. $\varphi - D$ sohaning biror aniqlovchisi bo'lsin masalan (9)dagi kabi; Agar Ω polosa yetarlicha qisqa bo'lsa, u holda aniqlovchi bo'lib, $\psi = \varphi + k\varphi^2$ xizmat qiladi hamda istalgan $k \geq 0$ o'zgarmas va barcha $z \in \partial D$ uchun

$$H_z(\psi, w) = H_z(\varphi, w) + 2k|\partial\varphi(w)|^2 \quad (10)$$

bo'ladi. $H_z(\psi, w)$ ning

$$E = \{(z, w) : z \in \partial D, w \in \mathbb{C}^n, |w| = 1\}$$

kompaktda musbatligini isbotlash yetarli.

$$E_0 = \{(z, w) \in E : H_z(\varphi, w) \leq 0\}$$

ni belgilaymiz;

Agar E_0 bo'sh to'plam bo'lsa $k = 0$ deb olamiz, agar bo'sh bo'lmasa $M \geq 0$

o'zgarmasni shunday tanlaymizki barcha $(z, w) \in E_0$ uchun

$$H_z(\varphi, w) \geq -M$$

bajariladi. Qat'iy psevdoqavariqlik ta'rifiga ko'ra $\partial\varphi(w) = 0$ da, ya'ni $T_z^c(\partial D)$ da

barcha $z \in \partial D$ va $w \neq 0$ uchun $H_z(\varphi, w) > 0$, binobarin E_0 da $\partial\varphi(w) \neq 0$ va

kompaktlikka ko'ra $m > 0$ topiladiki, bunda $|\partial\varphi(m)| \geq m$ bajariladi $k > M/(2m^2)$

ni tanlab, (10) dan E_0 da $H_z(\varphi, w) \geq -M + 2km^2 > 0$ formani olamiz, $E \setminus E_0$ da

uning musbatligi aniq uzluksizlikdan ko'rinadiki, Ω yetarlicha qisqa bo'lsa $w \neq 0$ da $H_z(\psi, w) > 0$ tenglik faqat ∂D da emas, barcha $z \in \Omega$ da bajariladi, bu esa ψ ning qat'iy plyurisubgarmonikligini bildiradi.

3-§. Golomorf qavariq sohalar va psevdoqavariq sohalar orasidagi bog'lanish.

Ma'lumki, tekislikdagi ixtiyoriy $D \subset \mathbb{C}$ soha quyidagi muhim xossaga ega:

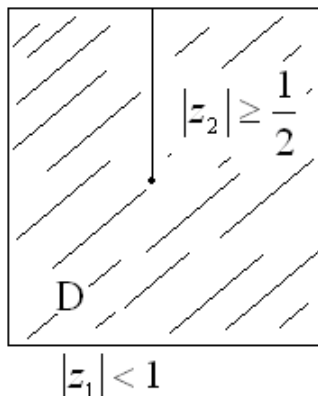
D sohada golomorf bo'lgan shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya topiladiki, u ∂D chegara yaqinida chegaralanmagan bo'ladi. Bu quyidagini anglatadi: ixtiyoriy $\xi \in \partial D$ nuqta olinganda ham shu nuqtaga intiluvchi shunday $z_k \in D$ ketma – ketligi topiladiki, $z_k \rightarrow \xi$ da $f(z_k) \rightarrow \infty$ bo'ladi. Odatda, bunday $\xi \in \partial D$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deyiladi. Bunday $f(z)$ funksiya D sohaning tashqarisiga analitik davom qildirilmaydi.

$\mathbb{C}^n$, $n > 1$ bo'lgan holda yuqoridagi vaziyat boshqacharoq bo'ladi.

M i s o l: $\mathbb{C}^2$ fazoda ushbu Xartogs sohasi

$$D = \{ |z_1| < 1 \} \times \{ |z_2| < 1 \} \setminus \{ 0 \times |z_2| \geq \frac{1}{2} \}$$

ni qaraylik (1 – chizma).



Bu soha uchun $D = \{|z_1| < 1\}$ doira bo'lib,

$$r(z_1) = \begin{cases} 1, & z_1 \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & z_1 = 0 \end{cases}$$

Endi ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiyani olib, uni Xartogs qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1) z_2^k \quad (1)$$

Bu qator $\hat{D} = \{|z_1| < 1\} \times \{|z_2| < 1\}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Haqiqatan ham, (1) qatorning yaqinlashish radiusi, $z_1 \neq 0$ bo'lganda $R(z_1) \geq 1$ bo'lib, $-\ln R_*(z_1)$ funksiya plyurisubgarmonik. Maksimumlar printsiplig ko'ra $R_*(0) \geq 1$ tengsizlik bajarilib, qatorning $\hat{D}$ da yaqinlashishi kelib chiqadi.

Bundan ko'rinadiki, ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya C sohaga analitik davom qiladi.

1-ta'rif. Aytaylik, $\mathbf{C}^n$ fazoda D soha berilgan bo'lsin: $D \subset \mathbf{C}^n$. Agar shunday $G \supset D$ soha mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya G ga analitik davom qildirilsa, G soha D ning analitik kengaytirilgan sohasi deyiladi.



2 – ch i z m a

Agar $D \subset \mathbf{C}^n$ soha D ning analitik kengaytirilgani bo'lsa, u holda $\forall f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya olinganda ham shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya topiladiki,

$$F(z)|_D \equiv f(z)$$

bo'ladi. Bunda $F(z)$ funksiya D sohada yangi qiymatlarni qabul qila olmaydi.

Haqiqatan ham, agar biror $a \in \mathbf{C} \setminus D$ nuqtada $F(a) = A$ bo'lib,

$f(z) \neq A$ ($z \in D$) bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{f(z) - A} \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$$

bo'ladi. Biroq $z = a$ nuqtada u ∞ bo'lib, D ga analitik davom qila olmaydi. Bu esa D ning ta'rifiga ziddir.

2- ta'rif . $\mathbf{C}^n$ fazoda D soha berilgan bo'lsin: $D \subset \mathbf{C}^n$. Agar bu soha uchun shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya mavjud bo'lib, u chegara ∂D yaqinida

chegaralanmagan bo'lsa, D golomorflik soha yoki analitik kengaytirilmaydigan soha deyiladi.

3- ta'rif. Aytaylik, ξ nuqta $D \subset \mathbf{C}^n$ sohaning chegarasi ∂D ga tegishli nuqta bo'lsin: $\xi \in \partial D$. Agar ixtiyoriy kompakt $K \subset\subset D$ va $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ funksiya mavjud bo'lib,

$$B(\xi, \varepsilon) \cap D$$

to'plamdagi biror p nuqtada

$$|f(p)| > \|f\|_K = \max_{z \in K} |f(z)|$$

tengsizlik bajarilsa, ξ ga D sohaning *cho'qqi* nuqtasi yoki *cho'qqisi* deyiladi.

Ravshanki, cho'qqi nuqtalar to'plami Π yopiq to'plam bo'ladi. Tekislikda $D \subset \mathbf{C}$ sohaning har bir $\xi \in \partial D$ nuqtasi cho'qqi nuqta bo'ladi, chunki

$$f(z) = \frac{1}{z - \xi}$$

funksiya aytilgan shartlarni qanoatlantiradi.

1-teorema. Agar $D \subset \mathbf{C}^n$ soha chegarasi ∂D ning har bir nuqtasi cho'qqi nuqta bo'lsa, u holda D golomorflik soha bo'ladi.

Isbot. D soha chegarasi ∂D da sanoqli va zich bo'lgan S to'plamni, $S \subset \partial D$ ni olib, uning har bir $\xi \in S$ nuqtasini ∞ martadan qatnashadigan $\{\xi_v\}$ ketma – ketlikni tuzamiz. Agar $S = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ bo'lsa $\{\xi_v\}$ deb

$\{\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ tartibda tuzilgan ketma – ketlikni olish mumkin.

So'ng har bir v uchun

$$K_v \subset D - \text{kompakt, } z^v \in D \text{ nuqta, } f_v(z) \in \mathcal{O}(D)$$

larni hosil qilaylikki, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$1. K_v \subset K_{v+1}, \quad v \geq 1, \quad D = \bigcup_{v=1}^{\infty} K_v ;$$

$$2. |z^v - \xi^v| < \frac{1}{v}, \quad z^v \in K_{v+1} ;$$

$$3. \|f_v\|_{K_v} \leq 1, \quad |f_v(z^v)| > 1 .$$

Buning uchun D sohani to'ldiruvchi ixtiyoriy

$$F_v \subset F_{v+1}, \quad v \geq 1$$

kompaktlar ketma – ketligini olaylik, $D = \bigcup_{v=1}^{\infty} F_v$. $v=1$ da $K_1 = F_1$ desak,

$\xi_1 \in \partial D$ cho'qqi nuqta bo'lishdan shunday $f_v(z) \in \mathcal{O}(D)$, $|z^1 - \xi^1| < 1$ bo'lgan

$z^1 \in D \setminus K_1$ topiladiki,

$$\|f_1\|_{K_1} \leq 1, \quad |f_1(z^1)| > 1$$

bo'ladi. Demak, yuqoridagi 1) – 3) shartlar $v=1$ da bajariladi.

Ixtiyoriy $v > 1$ uchun K_v, z^v, f_v larni topishda induksiya usulidan

foydalanamiz. Aytaylik, $\mu = 1, 2, \dots, v-1$ lar uchun

$$K_\mu, z^\mu, f_\mu$$

lar topilgan bo'lsin. Ushbu $K_v = F_v \cup \{z^1, z^2, \dots, z^{v-1}\}$ kompaktni olamiz.

$\xi^v \in \partial D$ nuqtaning cho'qqiligidan shunday $|z^v - \xi^v| < \frac{1}{v}$, $f(z) \in \mathcal{O}(D)$ lar

topiladiki, $\|f\|_{K_v} \leq 1$, $|f(z^v)| > 1$ tengsizliklar bajariladi. Bu esa ixtiyoriy

v uchun biz izlayotgan K_μ , z^μ , f_μ larning mavjudligini ko'rsatadi.

Endi shunday butun $p_1 = 1, p_2, \dots, p_v$ sonlarni topamizki,

$$\frac{1}{v^2} |f_v(z^v)|^{p_v} \geq \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{j^2} |f_j(z^v)|^{p_j} + v$$

($v = 2, 3, \dots$) tengsizlik bajarilsin. Unda

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v^{p_v}(z)}{v^2}$$

qator D sohaning ichida (ixtiyoriy $K_v \subset\subset D$ da) tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Binobarin, $f(z) \in \mathcal{O}(D)$. Ikkinchi tomondan, ushbu

$$\begin{aligned} f(z^v) &\geq \frac{1}{v^2} |f_v(z^v)|^{p_v} - \\ &- \sum_{j=1}^{v-1} \frac{1}{j^2} |f_j(z^v)|^{p_j} - \sum_{j=v+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |f_j(z^v)|^{p_j} \geq v - \sum_{j=v+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak,

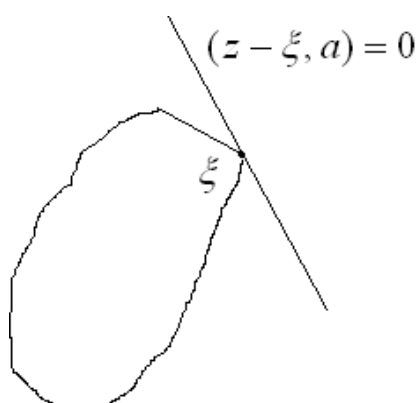
$$v \rightarrow \infty \text{ da } f(z^v) \rightarrow \infty$$

Agar $|z^v - \xi^v| < \frac{1}{v}$ shart va har bir $\xi^v \in \partial D$ nuqtaning ketma – ketlikda

∞ marta takrorlanishini e'tiborga olsak, unda $f(z)$ funksiyaning ∂D yaqinida chegaralanmagan bo'lishini topamiz.

Natija. $\mathbf{C}^n$ fazodagi qavariq $D \subset \mathbf{C}^n$ soha golomorflik soha bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, D sohaning qavariqligidan ixtiyoriy $\xi \in \partial D$ olinganda ham shu nuqtadan o'tuvchi va ayni paytda D ni kesmaydigan $(n-1)$ o'lchamli $(z - \xi, a) = 0$ kompleks tekislikning mavjud bo'lishi kelib chiqadi.



3 – ch i z m a

U holda

$$f(z) = \frac{1}{(z - \xi, a)}$$

funksiya $\xi \in \partial D$ ning cho'qqi nuqta ekanini ko'rsatadi. Demak, D golomorflik soha bo'ladi.

Aytaylik, $K \subset \mathbf{C}^n$ kompakt berilgan bo'lsin. Ushbu

$$K = \{z \in \mathbf{C}^n : |p(z)| \leq \|p\|_K\}$$

to'plam, bunda p ixtiyoriy polinom, K kompaktning *polinomial qavariq qobig'i* deyiladi. Agar $C = K$ bo'lsa, uni *polinomial qavariq kompakt* deyiladi.

$\mathbf{C}^n$ fazoda $D \subset \mathbf{C}^n$ soha va $K \subset\subset D$ kompakt berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Ushbu

$$K = \{z \in D : |f(z)| \leq \|f\|_K, \forall f(z) \in \mathcal{O}(D)\}$$

to'plam kompakt K ning D dagi *golomorf qavariq qobig'i* deyiladi. Agar $K = D$ bo'lsa, K kompakt D sohada *golomorf qavariq kompakt* deyiladi. Agar ixtiyoriy $K \subset\subset D$ kompakt uchun $\hat{K} \subset\subset D$ bo'lsa, D soha *golomorf qavariq soha* deyiladi.

Agar D soha golomorf qavariq bo'lsa, ixtiyoriy $\xi \in \partial D$ nuqta cho'qqi nuqta bo'ladi. Shuning uchun golomorf qavariq sohalar golomorflik sohalari bo'ladi. va aksincha

2 – teorema (Kartan – Tullen). *Ixtiyoriy golomorflik soha golomorf qavariq bo'ladi.*

Endi golomorf qavariq sohalarning geometriyasini ochib beruvchi, ayni paytda, kompleks analizda fundamental hisoblangan teoremlarni keltiraylik.

3 – teorema. $D \subset \mathbf{C}^n$ sohaning *golomorf qavariq (golomorflik sohasi) bo'lishi uchun uning psevdqavariq bo'lishi zarur va yetarli.*

ADABIYOTLAR

1. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М. :Наука, 1964. – 411 с.
2. Голузин Г.М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. – М. : Наука, 1976.– 540 с.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2-х т. – М.: Наука, 1968. Т.2. – 624с.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.– М.: Наука, 1985. Часть 2.– 464 с.