

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

**NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI**

qo'lyozma huquqida
UDK 517.11

Qaimova Laylo Hakimovna

“INTEGRALLARNI ASIMPTOTIK BAHOLASH”

5A460101 - Matematik tahlil

Magistr
akademik darajasini olish uchun yozilgan
dissertatsiya

Himoyaga tavsiya etaman
Magistratura bo'limi boshlig'i
_____ **M.Esanov**

2012 y. «_____»

“Matematik analiz” kafedrası
mudiri_____ **J.O.Taxirov**

Ilmiy rahbar _____

f.-m.f.n.,dots. M.Xushvaqtov

Toshkent – 2012 yil

Mundarija:

KIRISH.....	3
-------------	---

I-BOB. ASIMPTOTIK BAHOLAR VA ASIMPTOTIK YOYILMALAR

1.1 Asimptotik baholar.....	12
1.2 Asimptotik ketma-ketliklar.....	14
1.3 Asimptotik yoyilmalar va ular ustida amallar.....	16
Birinchi bob bo'yicha xulosalar.....	20

II-BOB. ASIMPTOTIK METODLAR

2.1 Laplas metodi.....	21
2.2 Statsionar fazolar metodi.....	32
2.3 Pereval metodi.....	40
Ikkinchi bob bo'yicha xulosalar.....	48

III-BOB. INTEGRALLARNI ASIMPTOTIK BAHOLASH

3.1-§ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash.....	49
3.2-§ $\Phi(x) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, x) dx$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash.....	57
Uchinchi bob bo'yicha xulosalar.....	60

XULOSA.....	61
-------------	----

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	62
--------------------------------	----

ANNOTATSIYA

GLOSSARY

KIRISH

Vatanimiz mustaqillikka erishgach, Prezidentimiz Islom Karimov rahnamoligida ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish, yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi.

Prezidentimiz ushbu sohada respublikamiz mustaqillikka erishish arafasidan e'tibor qaratdilar: "Fan mustahkam bazis negizidagina samarali rivojlanishi mumkin. Shu munosabat bilan sizlarning e'tiboringizni xalq ta'limi butun sistemasini, eng avvalo, oliy maktabni isloh qilish zarurligiga qaratmoqchiman" [1].

Prezidentimiz ta'limning jamiyat rivojidagi o'rniga "Shuni unutmashimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq" [2] deya baho berdilar.

Bosib o'tilgan 20 yil mobaynida ta'lim sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar samaralari, to'plangan tajribalar bilan keng jamoatchilikni tanishtirish maqsadida 16-17 fevral kunlari Toshkentda "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash – mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzuidagi xalqaro konferensiya katta muvaffaqiyat bilan o'tdi. Prezidentimiz ushbu konferensiyada so'zlagan nutqlarida ta'lim sohasida amalga oshirilgan ishlar, qo'lga kiritilgan yutuqlarni ta'kidlab o'tar ekanlar, kelgusida amalga oshirilishi lozim bo'lgan vazifalarni ham belgilab berdilar.

Yoshlarning bilim olishlari uchun yaratilayotgan sharoit, katta e'tibor ularga katta mas'uliyat ham yuklaydi [3].

Ta'lim O'zbekiston xalqi ma'naviyatiga yaratuvchilik faolligini baxsh etadi. O'sib kelayotgan avlodning barcha eng yaxshi imkoniyatlari unda namoyon bo'ladi, kasb-kori, mahorati, uzluksiz takomillashadi, katta avlodlarning dono

tajribasi anglab olinadi va yosh avlodga o'tadi. Yoshlar, ularning iqtidorliligi va bilim olishga chanqoqligidan ta'lim va ma'naviyatni tushunib yetish boshlanadi [4].

“Ma'rifat – ma'naviyatga olib keladigan yo'l”. Bugun qilayotgan yaxshi ishlarimiz kelgusi avlod barkamolligi uchun xizmat qilishi shubhasiz. Bugun qanday ko'chat eksak, ertaga shunday meva olamiz. Yosh avlodni el-yurtga, Vatanga sadoqatli, iymon-e'tiqodli, mard va jasur, yuqori malakali, ma'naviyati yuksak insonlar qilib tarbiyalashda ta'lim o'choqlarining alohida o'rni bor [5].

“Fazandlarimiz bizdan ko'ra bilimli, kuchli, dono va albatta baxtli bo'lishlari shart”. Takror aytaman: manashu ezgu maqsad bugungi kunda har birimizning hayotimiz mazmuniga aylanishi darkor [6].

Ilmda hamjihatlik va hamkorlik, tug'ilgan yangi g'oyalarni vaqtida to'g'ri baholay bilish, eng maqbul va samarali g'oyalarni qo'llab-quvvatlash oliy fazilatdir. Bu - ijod kishisining nufuzini oshiradigan noyob imkoniyat [7].

Kadrlar tayyorlash tizimiga ilm-fanning uzviy ravishda kirib borishi uchun quyidagilar zarur:

kadrlar tayyorlash milliy dasturini samarali tarzda bajarishni ta'minlash yuzasidan ilmiy-tadqiqot ishlarini olib borish;

yuqori malakali kadrlar tayyorlash sifatini oshirish, yoshlarning ilmiy ijodiyotini har tomonlama qullab quvvatlash [8].

O'zbekiston Respublikasining ta'lim tizimi quyidagilarni o'z ichiga oladi:

davlat ta'lim standartlariga muvofiq ta'lim dasturlarini amalga oshiruvchi davlat va nodavlat ta'lim muassasalari;

ta'lim tizimining faoliyat ko'rsatishi va rivojlanishini ta'minlash uchun zarur bo'lgan tadqiqot ishlarini bajaruvchi ilmiy-pedagogik muassasalar;

ta'lim sohasidagi davlat boshqaruv organlari, shuningdek ularga qarashli korxonalar, muassasalar va tashkilotlar.

O'zbekiston Respublikasining ta'lim tizimi yagona va uzluksizdir [9].

- **Mavzuning dolzarbligi:** Fan va texnikaning turli muammolarini o'rganishda maxsus funksiyalar uchraydi. Bunday noelementar funksiyalarning qiymatlarini hisoblash uchun jadvallar tuzilgan va bu jadvallardan amaliyotda keng foydalanib kelinmoqda. Biroq cheksiz jarayonlarni o'rganishda bu ma'lumotlar kamlik qiladi. Bunday hollarda asimptotik metodlar beqiyos ahamiyatga ega bo'ladi. Ular yordamida argumentning yetarli katta va yetarli kichik qiymatlarida funksiyaning o'zgarish xususiyatlari haqida ma'lumotlar olishimiz mumkin.

Matematik analiz masalalarida asimptotik metodlarni qo'llash asosan A.Puankare ilmiy tadqiqotlaridan boshlanadi. Bu masala bilan taniqli olimlar D.Stirling, A.M.Lejandr, P.S.Laplas, M.V.Fedoryuk, A.I.Prilepko, Yu.I.Sidirov, va boshqalar shug'ullangan. Integral va yig'indi shaklida berilgan funksiyalarni asimptotik baholash analiz, fizika, texnik masalalarni yechishda dolzarb bo'lib qolmoqda.

- **Tadqiqot maqsadi:** Asimptotik metodlarni o'rganish va Laplas metodi yordamida $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(x) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, \lambda) dx$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash.

- **Tadqiqotning maqsadini amalga oshirish uchun quyidagi vazifalarni hal etish nazarda tutilgan:**

a) mavzuga oid adabiyotlarni yig'ish va tahlil qilish.

b) asimptotik metodlarni o'rganish.

v) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(x) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, \lambda) dx$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash.

- **Tadqiqot obyekti:** $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(x) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, \lambda) dx$ tipdagi integrallar.

- **Tadqiqot predmeti:** Asimptotik metodlarning integrallarni baholashdagi roli va o'rnini aniqlash.

- **Tadqiqotning ishlanganlik darajasi:** Tabiatshunoslikning ko'pchilik masalalarida katta parametrga bog'liq bo'lgan integral va qatorlar uchraydi. Parametrning yetarli katta qiymatlarida bunday integrallar va qatorlarni hisoblash o'ta qiyin masala hisoblanadi, bunday masalalarni yechishda hatto eng zamonaviy elektron hisoblash mashinalari ham yordam berolmaydi. Bunday hollarda asimptotik metodlarni qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi.

Asimptotik metodlar nafaqat matematik analiz masalalarida, shuningdek, fan va texkaning analiz metodlarini qo'llash bilan bog'liq turli masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega.

Funksiyalarni asimptotik baholash masalalari bo'yicha ko'plab tadqiqotlar olib borilgan. Bunday masalalar bilan taniqli olimlar A.Puankare, D.Stirling, A.M.Lejandr, P.S.Laplas, E.Ya.Riyekstinish, M.V.Fedoryuk, A.I.Prilepko, Yu.I.Sidirov, M.Xushvaqto'v va boshqalar shug'ullangan. Lekin hozirgi vaqtda bu yo'nalishda yechilmagan masalalar mavjud. Dissertatsiya ana shu masalalarni yechishga bag'ishlangan.

- **Tadqiqotning ilmiy yangiligi:** Mavjud asimptotik metodlarni o'rganib ularning integrallarga tatbiqi tahlil qilingan va yangi asimptotik formulalar yaratilgan.

- **Tadqiqotning amaliy ahamiyati:** Matematik analizning asimptotik metodlarini o'rganishda talabalarga, magistr'larga, o'qituvchilarga foydali bo'ladi va ayrim maxsus funksiyalarni ilmiy tadqiq qilishda asimptotik formulalardan foydalanish imkonini beradi.

- **Tadqiqotning tajriba- sinov maydoni OTM bo'lib xizmat qildi:** Olingan ilmiy natijalar matematik analiz kafedrası seminarida, ilmiy-amaliy anjumanlarda ma'ruza qilindi.

- **Tadqiqotni amalga oshirish bosqichlari:**

I-bosqich: adabiyotlar axborot resurs markazi va internet tizimidan izlab topildi;

II-bosqich: mavzu bo'yicha yig'ilgan materiallar tahlil qilindi;

III-bosqich: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(x) = \int_a^{+\infty} \varphi(x, \lambda) dx$ tipdagi integrallar uchun asimptotik formulalar yaratildi.

- **Tadqiqotning metodologik asosi:** Tadqiqotning metodologik asosi bo'lib, respublikamizdagi ta'lim to'g'risidagi qonunlar, kadrlar tayyorlash milliy dasturi, prezident asarlari, farmon va farmoyishlari xizmat qiladi.

- **Dissertatsiyaning tuzilishi va tarkibi:** Ushbu magistrlik dissertatsiyasi kirish qism va uchta bob, jami sakkizta paragrafdan iborat bo'lib, 64 betni tashkil qiladi.

Kirish qismida mavzuning dolzarbligi, ishlanganlik darajasi, tadqiqot maqsadi, vazifalari, tadqiqotning amaliy ahamiyati va ilmiy yangiligi, tadqiqot obyekti, predmeti, tajriba sinov maydoni, tadqiqotni amalga oshirish bosqichlari berilgan.

Birinchi bob uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda asimptotik baholar keltirilgan. o , O , $\sim$ belgilar haqida ma'lumotlar berilgan:

$f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$, ko'rinishdagi munosabatlarga asimptotik baholash deyiladi.

Aytaylik $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror M to'plamda aniqlangan bo'lsin. a nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bo'lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \rightarrow a$ da M to'plamda asimptotik teng deyiladi va $f(x) \sim g(x)$ kabi yoziladi [10,(20-21)].

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida asimptotik ketma-ketliklar haqida tushunchalar berilgan:

Aytaylik, M qandaydir nuqtalar to'plami (masalan, haqiqiy o'q yoki kompleks tekisligida), a nuqta M to'plamning limit nuqtasi. a nuqtaning biror atrofini olib, bu atrofdagi $x \in M$ nuqtalarda aniqlangan $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (1)$$

funksiyalar ketma-ketligini qaraylik. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x \rightarrow a$ da

$$\varphi_{n+1} \ll \varphi_n \ll \varphi_{n-1} \ll \dots \ll \varphi_0 \ll 1, \quad \varphi_n \in M$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (1) funksiyalar ketma-ketligi asimptotik ketma-ketlik deyiladi [13,(15-17)].

Birinchi bobning uchinchi paragrafida asimptotik yoyilmalar va ular ustida amallar keltirilgan.

Aytaylik, $x \rightarrow a$, $x \in M$ da $\{\varphi_n \ll\}$ asimptotik ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlik yordamida ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \ll = a_0 \varphi_0 \ll + a_1 \varphi_1 \ll + \dots + a_n \varphi_n \ll + \dots$$

formal qatorni hosil qilamiz, bu yerda a_n -o'zgarmas sonlar.

T a' r i f. Agar $x \rightarrow a$, $x \in M$ da ixtiyoriy $N \geq 0$ son uchun

$$f \ll = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n \ll + o(\varphi_N \ll)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \ll = a_0 \varphi_0 \ll + a_1 \varphi_1 \ll + \dots + a_n \varphi_n \ll + \dots$$

qator $f \ll$ funksiyaning asimptotik yoyilmasi deyiladi, va

$$f \ll \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \ll, \quad (x \rightarrow a, x \in M)$$

kabi yoziladi [18,(385-387)].

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda Laplas metodi bayon qilingan. Bunda biz Laplas integrali deb ataluvchi ushbu

$$F \ll = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx,$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $I = [a, b]$ -kesma va λ -katta parametr. $f \ll \equiv 0$ yoki $S \ll \equiv const$ bo'lgan hollarni trivial qaramaymiz. Bu yerda $S \ll$ funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. $f \ll$ funksiya kompleks qiymatli bo'lishi mumkin. Bizga $\forall x \in I$ nuqtada uzluksiz bo'lgan $f \ll$ va $S \ll$ funksiyalar berilgan. Bizni

$\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ integralning asimptotik ko'rinishi qiziqtiradi. $S(\lambda)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga I kesmaning $x_0 \in I$ nuqtasida erishsin.

T e o r e m a. $f(x)$ va $S(x)$ funksiyalari $x=a$ nuqta atrofida cheksiz differensiallanuvchi va

$$S'(a) \neq 0, \quad x \neq a, \quad S'(x) \neq 0,$$

bo'lsin. U holda $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \in S_\varepsilon$) da quyidagi asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi:

$$F(\lambda) \sim e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1}.$$

Bu yoyilmani ixtiyoriy marta hadlab differensiallash mumkin; c_n koeffitsiyentlar

$$c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=a}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Asimptotikaning bosh qismi quyidagi ko'rinishda

$$F(\lambda) = \frac{e^{i\lambda S(a)}}{-i\lambda S'(a)} \left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right)$$

bo'ladi [10,(81-85)].

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida statsionar fazolar metodi o'rganilgan.

Bunda biz Furje integrali deb ataluvchi ushbu

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \quad (1)$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $S(x)$ funksiya $I = [a, b]$ kesmada haqiqiy qiymatlar qabul qiladi va λ -katta musbat parametr. $S(x)$ funksiya faza yoki fazaviy funksiya deyiladi. Bizni $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ ni asimptotik ko'rinishi qiziqtiradi. $f(x) \equiv 0$ yoki $S(x) \equiv \text{const}$ bo'lgan trivial hollarni qaramaymiz.

T e o r e m a. $f(x)$, $S(x)$ funksiyalar $\forall x \in I$ nuqtada cheksiz differensiallanuvchi va $S'(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda $\lambda \rightarrow +\infty$ (1) integral uchun

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{-n} - \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S(b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-n} \quad (2)$$

asimptotik yoyilma o'rinli. Bu yoyilmani λ bo'yicha ixtiyoriy marta hadlab differensiallash mumkin.

Asimptotikaning bosh qismi

$$F(\lambda) \sim \frac{f(a)}{i\lambda S'(a)} e^{i\lambda S(a)} - \frac{f(b)}{i\lambda S'(b)} e^{i\lambda S(b)} + O(\lambda^{-2})$$

ko'rinishda bo'ladi. (2) formuladagi a_n va b_n koeffisientlar

$$a_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f}{S'} \right) \Big|_{x=a}, \quad b_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f}{S'} \right) \Big|_{x=b},$$

$$M = \frac{1}{S'} \frac{d}{dx}.$$

formulalar orqali hisoblanadi [18,(402-410)].

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida pereval (davon) metodi o'rganilgan.

$$F(\lambda) \sim \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \quad (1)$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz, bu yerda γ , z kompleks tekislikdagi bo'lakli silliq chiziq, $\gamma \in D$ va $f(z)$, $S(z)$ funksiyalar D sohada regulyar. Bizni $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ funksiyani asimptotikasi qiziqtiradi. Bunda $f(z) \equiv 0$ yoki $S(z) \equiv \text{const}$ trivial hollar qaralmaydi.

Agar γ kesma $S(z)$ bo'lib, funksiya γ kesmada haqiqiy qiymatlarini qabul qilsa, bu holda (1) integralni Laplas metodi yordamida asimptotik baholash mumkin. (1) integralni shunday akslantirish mumkinki, hosil bo'lgan integralga Laplas metodini qo'llash mumkin bo'ladi.

T e o r e m a. Agar $\max_{z \in \gamma} \text{Re} S(z)$ maksimumga γ konturning boshlanish nuqtasida erishsa va $S'(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow +\infty$ da

$$F(\lambda) \sim \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \sim \lambda^{-1} e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n} \quad (2)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi. Bu yoyilmani λ bo'yicha istalgan marta hadlab differensiallash mumkin. Asimptotikaning bosh hadi

$$F(\lambda) = \frac{1}{-\lambda S'(\lambda)} e^{\lambda S(\lambda)} \left(f(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(3) yoyilmaning c_n koeffitsiyentlari

$$c_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(z)}{S'(z)} \right) \Big|_{z=a}, \quad M = \frac{1}{S'(a)} \frac{d}{dz} \quad (4)$$

formulalar bilan hisoblanadi [23,(152-161)].

Dissertatsiyaning uchinchi bobida ilmiy tadqiqotlarimizning natijalari bayon qilingan. Bu bob ikkita paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

funktsiyani t o'zgaruvchining yetarli katta qiymatlarida o'zgarish xususiyatlarini xarakterlaydigan asimptotik formula keltirib chiqarilgan:

T e o r e m a. $t \rightarrow +\infty$ da ushbu

$$\Phi(t) \sim 1 - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!!}{t^{2k}}$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi [16,(297-298)].

Ikkinchi paragrafda

$$S(n) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m}, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

yig'indi funksiya asimptotik baholangan va $n \rightarrow \infty$ da $S(n)$ ning o'zgarishini tavsiflovchi asimptotik formula keltirib chiqarilgan:

T e o r e m a. (1) yig'indi funksiya uchun ushbu

$$S(n) = c\sqrt{n} + O(1), \quad n \rightarrow +\infty$$

asimptotik formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $c = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, π -aylana uzunligining diametriga nisbati $\pi = 3,14\dots$ [25,(26-27)].

I-BOB. ASIMPTOTIK BAHOLAR VA ASIMPTOTIK YOYILMALAR

1.1 Asimptotik baholar

1. **Asimptotik baholash tushunchasi.** $f(x) \sim o(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$, $f(x) \sim g(x)$, ko'rinishdagi munosabatlarga asimptotik baholash deyiladi [18,(35-37)].

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror M to'plamda aniqlangan bo'lsin. a nuqta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bo'lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \rightarrow a$ da M to'plamda asimptotik teng deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a, x \in M) \quad [10,(20-21)].$$

Misollar.

1) $x^3 + 2x^2 + \sqrt{x} \sim x^3 \quad (x \rightarrow \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + \sqrt{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} \right) = 1.$$

2) $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$. Birinchi ajoyib limitdan foydalanamiz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning qandaydir atrofida aniqlangan. a nuqta M to'plamning limit nuqtasi, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ da $g(x)$ funksiyaga nisbatan cheksiz kichik funksiya deyiladi va quyidagicha yoziladi,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \in M) \quad [10,(19-20)].$$

Misol.

1) $\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow \infty, \forall \alpha > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Agar $\exists C > 0, \forall x \in M$ uchun $|f(x)| \leq C|g(x)|$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya M to'plamda $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in M),$$

kabi yoziladi [10,(11-19)], [15,(142-146)].

Misol.

$$1) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow -1 \quad x \rightarrow \infty$$

$$\forall C > 0, \exists: \left| \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right| \leq C.$$

o va O larning xossalari.

1. $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)), x \rightarrow a, a \in M.$
2. $o(f(x)) : o(g(x)) = o(g(x)) : f(x), x \rightarrow a, a \in M.$
3. $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)), x \rightarrow a, a \in M.$
4. $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)), x \rightarrow a, a \in M.$
5. $o(f(x)) : O(g(x)) = o(g(x)) : f(x), x \rightarrow a, a \in M.$
6. $O(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)), x \rightarrow a, a \in M.$
7. $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x)), x \rightarrow a, a \in M.$

I s b o t. 1) $g_1(x) = o(f(x))$ va $g_2(x) = o(f(x))$ $x \rightarrow a, g_1(x) + g_2(x) = o(f(x))$

haqiqatdan ham $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0 + 0 = 0$, bundan

$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$ tengligi kelib chiqadi [12,(5-12)].

1.2 Asimptotik ketma-ketliklar

1. Asimptotik ketma-ketlik tushunchasi. Aytaylik, M qandaydir nuqtalar to'plami (masalan, haqiqiy o'q yoki kompleks tekisligida), a nuqta M to'plamning limit nuqtasi. a nuqtaning biror atrofini olib, bu atrofdagi $x \in M$ nuqtalarda aniqlangan $\varphi_n(z)$:

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots \quad (1)$$

funksiyalar ketma-ketligini qaraylik. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x \rightarrow a$ da

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)) \quad (z \in M)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda (1) funksiyalar ketma-ketligi asimptotik ketma-ketlik deyiladi [13,(15-17)].

Asimptotik ketma-ketlikka misollar keltiramiz.

1. $\varphi_n(z) = x^n$ ketma-ketlik $x \rightarrow 0$ da asimptotik ketma-ketlik bo'ladi (M to'plam $a = 0$ nuqtaning atrofi).

2. $\varphi_n(z) = x^{-n}$ ketma-ketlik $x \rightarrow a$ da asimptotik ketma-ketlik, $x \in M$ da quyidagi hollar bo'ladi:

1) M -to'plam: $|x| > c$, $a = \infty$;

2) M -yarim o'q: $x > c$, $a = +\infty$;

3) M -yarim o'q: $x < c$, $a = -\infty$;

3. $\varphi_n(z) = z^n$ ketma-ketlik $z \in M$, $z \rightarrow 0$ da asimptotik ketma-ketlik bo'ladi.

Bunda M sifatida $z = 0$ nuqtaning $0 < |z| < r$ o'yiqlik atrofini yoki uchi $z = 0$ nuqtada bo'lgan $S: 0 < |z| < r$, $\alpha < \arg z < \beta$ $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ sektorni olish mumkin.

4. $\varphi_n(z) = z^{-n}$ ketma-ketlik $z \rightarrow \infty$ da asimptotik ketma-ketlik bo'ladi. Bunda M , $z = \infty$ nuqta atrofini ($|z| > R$) yoki $|z| > R$, $\alpha < \arg z < \beta$ $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ sektorni olish mumkin.

Bu misollarda keltirilgan asimptotik ketma-ketliklar darajali asimptotik ketma-ketliklar deyiladi [21,(7-28)].

2. Asimptotik ketma-ketliklarning xossalari.

1. Asimptotik ketma-ketlikning har qanday qism ketma-ketligi asimptotik ketma-ketlik bo'ladi.

2. Agar a limit nuqtaning biror atrofida $\varphi(x) \neq 0$ bo'lib, $\{\varphi_n(x)\}$ ketma-ketlik $x \rightarrow a, x \in M$ bo'lganda asimptotik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{\varphi_n(x)\}$ ketma-ketlik $x \rightarrow a, x \in M$ bo'lganda asimptotik ketma-ketlik bo'ladi [18,(383-385)].

1.3 Asimptotik yoyilmalar

1. Asimptotik yoyilma tushunchasi. A. Puankare ma'nosidagi asimptotik yoyilma tushunchasi.

Aytaylik, $x \rightarrow a$, $x \in M$ da $\{\varphi_n(x)\}$ asimptotik ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlik yordamida ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

formal qatorni hosil qilamiz, bu yerda a_n -o'zgarmas sonlar [18,(385-387)].

1- t a' r i f. Agar $x \rightarrow a$, $x \in M$ da ixtiyoriy $N \geq 0$ son uchun

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x))$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

qator $f(x)$ funksiyaning asimptotik yoyilmasi deyiladi, va

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow a, x \in M)$$

kabi yoziladi [10,(88-93)].

Masalan ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

qator $x \rightarrow 0$ da $f(x) = e^x$ funksiyaning asimptotik yoyilmasi bo'ladi:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \rightarrow 0).$$

1- t e o r e m a . Berilgan funksiyaning berilgan asimptotik ketma-ketlik bo'yicha, asimptotik yoyilmasi yagona bo'ladi.

I s b o t. Teskarisini faraz qilaylik: $f(x)$ funksiyaning berilgan $\{\varphi_n(x)\}$ asimptotik ketma-ketlik bo'yicha 2 ta asimptotik yoyilmasi mavjud bo'lsin:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n, \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n,$$

$$x \rightarrow a, \quad x \in M.$$

Barcha n larda $a_n = b_n$ ekanligini ko'rsatamiz. Ta'rifdan ko'rinadiki

$$f \sim a_0 \varphi_0 = o(\varphi_0), \quad f \sim b_0 \varphi_0 = o(\varphi_0),$$

$$x \rightarrow a, \quad x \in M.$$

Bu tengliklarni bir-biridan ayirib, $a_0 - b_0 \varphi_0 = o(\varphi_0)$ ni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini φ_0 ga bo'lib, $a_0 - b_0 = o(1)$ ga ega bo'lamiz va $x \rightarrow a$ da limitga o'tamiz, bundan $a_0 = b_0$ bo'ladi. Endi $a_1 = b_1$ ni ko'rsatamiz:

$$f \sim a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 = o(\varphi_1),$$

$$f \sim a_0 \varphi_0 + b_1 \varphi_1 = o(\varphi_1),$$

ga ega bo'lamiz, bundan $a_1 - b_1 \varphi_1 = o(\varphi_1)$ kelib chiqadi, va undan $a_1 = b_1$ bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shu yo'l bilan ixtiyoriy n uchun $a_n = b_n$ [26,(6-8)].

E s l a t m a. Shuni aytish joizki, turli funksiyalar bir xil asimptotik yoyilmaga ega bo'lishlari mumkin [24,(114-119)]. Masalan,

$$e^{-x} \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \dots + 0 \cdot x^{-n} + \dots, \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$0 \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \dots + 0 \cdot x^{-n} + \dots, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

2. Darajali asimptotik qatorlar ustida amallar. Darajali asimptotik ketma-ketliklar bo'yicha qurilgan asimptotik yoyilmalar darajali asimptotik qatorlar deyiladi. Bu qatorlar bilan xuddi yaqinlashuvchi darajali qatorlar bilan ishlagandek ishlash mumkin. Masalan, ularni ko'paytirish, qo'shish va bo'lish mumkin [10,(21-22)].

2- t e o r e m a. $z \rightarrow \infty, \quad z \in S$ da

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad g \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'lsin [14,(439-444)], [20,(231-237)]. U holda $z \rightarrow \infty, \quad z \in S$ da

$$a) \alpha f \ll \beta g \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n};$$

$$b) f \ll g \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i};$$

$$d) \text{ agar } b_0 \neq 0 \text{ bo'lsa, u holda } \frac{f}{g} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}.$$

Bu yerda biz faqat b) ni isbotini keltiramiz. Qolgan tasdiqlar xuddi shunday isbotlanadi. Ixtiyoriy butun $N \geq 0$ son uchun

$$f \ll \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + O(z^{-N-1}), \quad g \ll \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} + O(z^{-N-1}),$$

ga ega bo'lamiz, bundan

$$f \ll g \ll \sum_{n=0}^N c_n z^{-n} + O(z^{-N-1}), \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

hosil bo'ladi.

Darajali asimptotik qatorlarni hadlab integrallash mumkin:

3- t e o r e m a. $f \ll$ funksiya $x > 0$ da uzluksiz va

$$f \ll \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad x \rightarrow +\infty$$

bo'lsin. U holda

$$\int_x^{\infty} f \ll dt \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} x^{-n+1}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

bo'ladi [18,(387-389)].

I s b o t. Ixtiyoriy butun $N \geq 2$ da

$$\int_x^{\infty} f \ll dt = \int_x^{\infty} \left(\sum_{n=2}^N a_n t^{-n} + R_N \ll \right) dt = \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{n-1} x^{-n+1} + \int_x^{\infty} R_N \ll dt,$$

ga ega bo'lamiz. Yetarli katta t da $|R_N \ll| \leq c_N t^{-N-1}$ bo'lgani uchun (bu yerda c_N - o'zgarmas son)

$$\left| \int_x^{\infty} R_N \ll dt \right| \leq c_N \int_x^{\infty} t^{-N-1} dt = \frac{c_N}{N} x^{-N} = O(z^{-N})$$

bo'ladi.

4- t e o r e m a. $f \in \mathcal{O}(\infty, S)$ funksiya $S: |z| \geq R, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ sektorda regulyar va unda asimptotik qatorga yoyilgan bo'lsin:

$$f \in \mathcal{O}(\infty, S) \sim \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty, z \in S).$$

U holda $z \in \tilde{S}, z \rightarrow \infty$, da (bu yerda $\tilde{S}$ - ixtiyoriy yopiq sektor, S ni ichida yotadi)

$$\int_z^{\infty} f(\zeta) d\zeta \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n-1} z^{-n+1},$$

asimptotik yoyilma o'rinli. Bu yerda integral S sektor ichida yotadigan ixtiyoriy yo'l bo'yicha olingan [11,(161-180)].

Asimptotik qatorni, umuman aytganda, hadlab differensiallash mumkin emas. Ammo agar $f \in \mathcal{O}(\infty, S)$ regulyar funksiya bo'lsa, u holda asimptotik darajali qatorni hadlab differensiallash mumkin.

5- t e o r e m a. $f \in \mathcal{O}(\infty, S)$ funksiya $S: |z| \geq R, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ sektorda regulyar va unda asimptotik qatorga yoyilsin:

$$f \in \mathcal{O}(\infty, S) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty, z \in S).$$

U holda

$$f' \in \mathcal{O}(\infty, \tilde{S}) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-n-1} \quad (z \rightarrow \infty, z \in \tilde{S}),$$

asimptotik yoyilma o'rinli (bu yerda $\tilde{S}$ - ixtiyoriy yopiq sektor, $\tilde{S} \subset S$) [23,(164-171)].

I s b o t. $\tilde{S}: \alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1, \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$ sektor berilgan. Ixtiyoriy $z \in \tilde{S}$ da

$$f' \in \mathcal{O}(\infty, \tilde{S}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

ga ega bo'lamiz. γ sifatida $|\zeta - z| = \varepsilon|z|$, S da yotuvchi aylana olamiz, bu yerda $0 < \varepsilon < 1$. $z \in \tilde{S}$ bo'lgani uchun, z ga bog'liq bo'lmaydigan qilib ε ni tanlash mumkin. Shart bo'yicha ixtiyoriy butun $N \geq 0$ da,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + R_N(z), \quad |R_N(z)| \leq c_N |z|^{-N-1}, \quad z \in S,$$

va $R_N(z)$ funksiya S sektorda regulyar

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^N n a_n z^{-n-1} + \tilde{R}_N(z),$$

ga ega bo'lamiz.

Qoldiq hadni

$$|\tilde{R}_N(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{R_N(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq c_N \varepsilon^{-1} |z|^{-1} \max_{\zeta \in \gamma} |\zeta|^{-N-1} \leq c'_N |z|^{-N-2}$$

kabi baholaymiz, chunki $\zeta \in \gamma$ da $|\zeta| \geq \varepsilon$ bo'ladi. Bu yerda $c'_N > 0$ -o'zgarmas son [31,(www.page-book.ru)].

Birinchi bob bo'yicha xulosa

Birinchi bobda mavzuga oid asosiy tushunchalar bayon qilingan. Unda asimptotik baholar, asimptotik ketma-ketliklar va ularning xossasi, asimptotik yoyilmalar va darajali asimptotik qatorlar ustida amallar o'rganilgan.

II-BOB. ASIMPTOTIK METODLAR

2.1 Laplas metodi

1. Masalaning qo'yilishi. Biz Laplas integrali deb ataluvchi ushbu

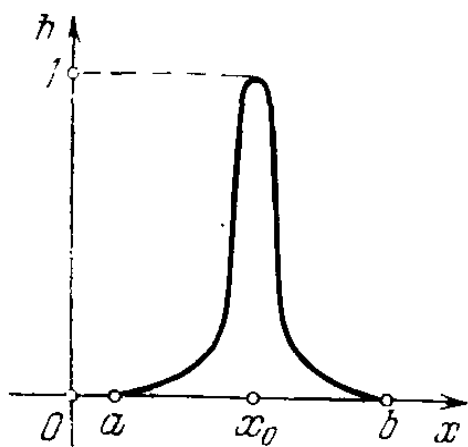
$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx, \quad (1)$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $I = [a, b]$ -kesma va λ -katta parametr. $f(x) \neq 0$ yoki $S(x) = \text{const}$ bo'lgan hollarni trivial qaramaymiz. Bu yerda $S(x)$ funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. $f(x)$ funksiya kompleks qiymatli bo'lishi mumkin. Bizga $\forall x \in I$ nuqtada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ va $S(x)$ funksiyalar berilgan. Bizni $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ integralning asimptotik ko'rinishi qiziqtiradi. $S(x)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga I kesmaning $x_0 \in I$ nuqtasida erishsin. Ikkita eng muhim holni qaraymiz [18,(390-401)]:

1. x_0 nuqta I kesmaning ichki nuqtasi bo'lganda $\max_{x \in I} S(x)$ ga erishadi, bu yerda $S''(x_0) \neq 0$. $\lambda > 0$ bo'lsa, (1) integralning qiymati birinchi navbatda $e^{\lambda S(x_0)}$ bilan aniqlanadi. Endi

$$h(x, \lambda) = e^{\lambda(S(x) - S(x_0))}$$

funksiyani qaraylik. Shartga ko'ra $h(x_0, \lambda) = 1$ va $x \neq x_0$, $\lambda > 0$ bo'lganda $h(x, \lambda) < 1$.



1-rasm

λ ning o'sishi bilan $S(x)$ ning x_0 nuqtadagi maksimumi "o'tkirlashib" boradi (1-rasm). Shuning uchun (1) integralning qiymati x_0 nuqtaning kichik $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ atrofı bo'yicha olingan integralning qiymatiga taqriban teng bo'ladi. Bu atrofda $f(x)$ funksiyani taqriban chiziqli funksiyaga, $S(x)$ funksiyani esa kvadratik funksiyaga almashtirish mumkin:

$$f \in C^2 \approx f \in C_0^2, \quad S(x) - S(x_0) \approx \frac{1}{2} S''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Shuning uchun, $f(x_0) \neq 0$ bo'lganda

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda S(x_0)} f(x_0) \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{\frac{\lambda}{2} S''(x_0)(x - x_0)^2} dx, \quad (2)$$

bo'ladi.

$x - x_0 = t / \sqrt{-\lambda S''(x_0)}$ almashtirish qilamiz (x_0 -maksimum nuqtasi bo'lgani uchun $S''(x_0) < 0$) va (2) integral quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda S''(x_0)}} \int_{-\delta \sqrt{-\lambda S''(x_0)}}^{\delta \sqrt{-\lambda S''(x_0)}} e^{-t^2/2} dt.$$

Agar $\lambda \rightarrow +\infty$ da integrallanish chegaralari $\pm \infty$ ga intiladi, bu integral uchun esa

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ bo'ldi. Bundan $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F \in C$ integralning asimptotikasi

$$F(\lambda) \approx f(x_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} e^{\lambda S(x_0)}, \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi [10,(81-85)].

2. I kesmada faqat $x = a$ nuqtada $\max_{x \in I} S(x)$ ga erishadi. Bu yerda $S'(a) \neq 0$,

$F \in C$ integralni $[a, a + \delta]$ da qaraymiz. Bu kesmada $S \in C$ va $f \in C$ funksiyalarni taqriban chiziqli funksiyalar bilan almashtiramiz:

$$f(x) \approx f(a), \quad S(x) \approx S(a) + (x - a)S'(a),$$

u holda

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda S(a)} f(a) \int_a^{a+\delta} e^{\lambda(x-a)S'(a)} dx.$$

Oxirgi integral $-\frac{1}{\lambda S'(a)} + \frac{e^{\lambda \delta S'(a)}}{\lambda S'(a)} \sim -\frac{1}{\lambda S'(a)}$, ga teng chunki $S' \in C > 0$. Demak,

$\lambda \rightarrow +\infty$ da

$$F(\lambda) \approx \frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} e^{\lambda S(a)}. \quad (4)$$

(3) va (4) formulalar Laplas integrali uchun asosiy asimptotik formulalardir.

2. Interval oxirida $S(x)$ maksimumi. Avval Laplas integralini umumiy ko'rinishida baholaymiz [12,(12-27)].

1-l e m m a. $I = [a, b]$ -chekli yoki cheksiz interval bo'lib,

$$S(x) \leq C, \quad x \in I, \quad (5)$$

va (1) integral $\lambda_0 > 0$ da absolut yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$ uchun

$$|F(\lambda)| \leq C_1 e^{C \operatorname{Re} \lambda}, \quad (6)$$

o'rinli. Bunda C_1 -o'zgarmas son.

I s b o t. $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$ bo'lganda, (5) ga ko'ra

$$|e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)}| \leq C_0 e^{C \operatorname{Re} \lambda}, \quad x \in I,$$

bunda $C_0 = e^{-\lambda_0 C}$. Demak,

$$|F(\lambda)| = \left| \int_a^b f(x) e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda - \lambda_0)S(x)} dx \right| \leq C_0 e^{C \operatorname{Re} \lambda} \int_a^b |f(x)| e^{\lambda_0 S(x)} dx.$$

Shartga ko'ra oxirgi integral yaqinlashuvchi va (6) baho isbotlandi.

Bundan keyin har doim $I = [a, b]$ -chekli kesma, $f(x)$ va $S(x)$ funksiyalari $x \in I$ da uzluksiz deb olamiz.

Laplas integrali uchun asimptotik formulalar faqat $\lambda \rightarrow +\infty$ da emas, balki $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, S_ε - λ kompleks tekislikdagi sektor $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Bu yerda $0 < \varepsilon < \pi/2$. Agar $\lambda \in S_\varepsilon$ bo'lsa, u holda

$$|\lambda| \geq \operatorname{Re} \lambda \geq |\lambda| \sin \varepsilon.$$

Demak, $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$ da quyidagi baholar o'rinli:

$$e^{\lambda S(x)} = O(|\lambda|^{-n}), \quad n \geq 0, \quad |e^{-C\lambda}| = O(|\lambda|^{-N}),$$

bunda $N > 0$ ixtiyoriy.

1-t e o r e m a. $f(x)$ va $S(x)$ funksiyalari $x = a$ nuqta atrofida cheksiz defferensiallanuvchi va

$$S(x) \leq S(a), \quad x \neq a, \quad S'(a) \neq 0, \quad (7)$$

bo'lsin. U holda $\lambda \rightarrow \infty$, ($\lambda \in S_\varepsilon$) da quyidagi asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi:

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1}. \quad (8)$$

Bu yoyilmani ixtiyoriy marta hadlab differensiallash mumkin; c_n koefitsiyentlar

$$c_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{S'(a)} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=a} \quad (9)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Asimptotikaning bosh qismi (4) ko'rinishda yoki aniqroq aytganda

$$F(\lambda) = \frac{e^{\lambda S(a)}}{-\lambda S'(a)} \left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (10)$$

bo'ladi.

Isbot. $S'(a) \neq 0$ bo'lgani uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $a \leq x \leq a + \delta$ da $S'(x) \neq 0$ bo'ladi. (1) integralni 2 taga ajratamiz:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

bunda $F_1(x)$ qo'shiluvchi $[a, a + \delta]$ kesma bo'yicha olingan integral. $F_2(x)$ integralni baholaymiz.

$S(x)$ funksiya $x \in I$ da o'zining eng katta qiymatiga faqat a nuqtada erishgani uchun, $a + \delta \leq x \leq b$ bo'lganda $S(x) \geq S(a) + c$, ($c > 0$, o'zgarmas son) tengsizlik o'rinli bo'ladi. 1-lemmaga ko'ra $\lambda \in S_\varepsilon$ da

$$|F_2(x)| \leq c_0 e^{\lambda(S(a) + c)}. \quad (11)$$

bo'ladi.

Bu tengsizlikdan $F_2(x)$ integralning $e^{\lambda S(a)}$ ga nisbatan eksponensial kichik bo'lishi kelib chiqadi. Xususan, u (8) asimptotik qatorning istalgan hadi $c_n \lambda^{-n-1} e^{\lambda S(a)}$ ga nisbatan eksponensial kichik bo'ladi.

Endi $[a, a + \delta]$ kesma bo'yicha olingan $F_1(x)$ integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$F_1(\lambda) = \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} dx = \frac{f(x) e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \Big|_a^{a+\delta} + \frac{1}{\lambda} F_{11}(\lambda) \quad (12)$$

$$F_{11}(\lambda) = \int_a^{a+\delta} e^{\lambda S(x)} f_1(x) dx, \quad f_1(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right).$$

$S(a+\delta) - S(a) < 0$ bo'lgani sababli integral ostidagi funksiya $\lambda \rightarrow \infty$ $\lambda \in S_\varepsilon$ da $e^{\lambda S(x)}$ ga nisbatan eksponensial kichik bo'ladi.

$F_{11}(\lambda)$ integralni baholaymiz. $I_1 = [a, a+\delta]$ kesmada $S'(x) < 0$ o'rinli bo'lganligidan shunday $S_1 > 0$ o'zgarmas son topiladiki, $x \in I_1$ uchun $S'(x) \leq -S_1$ tengsizlik bajariladi. Lagranj formulasi bo'yicha $\xi \in (a, a+\delta)$ nuqtada

$$S(a+\delta) - S(a) = (a+\delta - a) S'(\xi),$$

bo'lib, I_1 kesmada

$$S(a+\delta) - S(a) \leq -S_1(a+\delta - a), \quad S_1 > 0,$$

tengsizlik bajariladi. $f_1(x)$ funksiyasining I_1 kesmada uzluksizligidan $\forall x \in I_1$ uchun $|f_1(x)| \leq M$, $M = \text{const}$ bo'ladi. Demak,

$$|F_{11}(\lambda) e^{-\lambda S(a)}| \leq \int_a^{a+\delta} |f_1(x) e^{\lambda(S(x)-S(a))}| dx \leq M \int_a^{a+\delta} e^{-S_1(x-a)} dx < \frac{M}{S_1 \operatorname{Re} \lambda} \leq \frac{c}{|\lambda|}, \quad \lambda \in S_\varepsilon.$$

Bu bahoni e'tiborga olib (12) munosabatni quyidagicha ko'rinishda yozish mumkin:

$$F_1(\lambda) = e^{\lambda S(a)} \left(\frac{f(a)}{-\lambda S'(a)} + O(\lambda^{-2}) \right). \quad (13)$$

Bu munosabat, (11) tengsizlik va $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ ayniyatdan asimptotikaning bosh qismi uchun (10) formula kelib chiqadi.

$F_1(\lambda)$ integral xuddi $F_{11}(\lambda)$ integral ko'rinishda bo'ladi:

$$F_{11}(\lambda) = \frac{f_1(x) e^{\lambda S(x)}}{\lambda S'(x)} \Big|_a^{a+\delta} + \frac{1}{\lambda} F_{12}(\lambda)$$

$F_{12}(\lambda)$ integralning ko'rinishi ham $F_1(\lambda)$ integralnikidek bo'lib, faqat

$$f \rightsquigarrow f_2 \rightsquigarrow -\frac{d}{dx} \left(\frac{f_1 \rightsquigarrow}{S' \rightsquigarrow} \right)$$

$F_{11} \rightsquigarrow$ integral uchun (13) munosabat o'rinli (faqat, f ni f_1 ga almashtirish kerak), demak,

$$F \rightsquigarrow e^{\lambda S \rightsquigarrow} \left(\frac{f \rightsquigarrow}{-\lambda S' \rightsquigarrow} + \frac{f_1 \rightsquigarrow}{-\lambda^2 S' \rightsquigarrow} + O \rightsquigarrow^{-3} \right),$$

bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, $F \rightsquigarrow$ integral uchun (8) asimptotik yoyilma va uni koeffitsiyentlarini aniqlovchi (9) formulaga ega bo'lamiz [13,(55-63)].

3. Watson lemmasi. Laplas integrallarining ko'pchiligining asimptotikasi

$$\Phi \rightsquigarrow = \int_0^a e^{-\lambda t^a} t^{\beta-1} f \rightsquigarrow dt \quad (14)$$

integralning asimptotikasini topishga keltiriladi [23,(148-152)].

2-l e m m a (Watson lemmasi). Agar $\alpha > 0$, $\beta > 0$, bo'lib, $f \rightsquigarrow$ funksiya $[a, \infty)$ kesmada uzluksiz va $t=0$ nuqta atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \in S_\varepsilon$) da ushbu

$$\Phi \rightsquigarrow \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-\alpha+\beta} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)} \rightsquigarrow}{n!} \quad (15)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi.

Bu yoyilmani λ bo'yicha ixtiyoriy marta hadlab differensiallash mumkin.

Lemmani isbotlashdan oldin

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t^\alpha} t^{\beta-1} dt = \frac{1}{\alpha} \lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0) \quad (16)$$

formulani isbotlaymiz. Bu yerda λ musbat bo'lganda musbat bo'ladi, $\lambda^{-\beta/\alpha}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ yarim tekislikda regulyar bo'lib, $\lambda > 0$ bo'lsin. $\lambda t^\alpha = y$ deb o'zgaruvchini almashtirsak, (16) tenglikning chap qismi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\lambda^{-\beta/\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\beta/\alpha-1} dy = \frac{1}{\alpha} \lambda^{-\beta/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Bu integral $\operatorname{Re} \lambda > 0$ yarim tekislikda regulyar funksiya. (16) tenglikning o'ng qismi ham $\mathbb{C}_{+,+\infty}$ yarim o'qli, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ yarim tekislikga analitik davom etadi. Ikkala funksiya $\mathbb{C}_{+,+\infty}$ yarim o'qqa mos kelsa, u holda analitik davom ettirish prinsipiga ko'ra o'zaro teng bo'lgani uchun $\operatorname{Re} \lambda > 0$ yarim tekislikda ham o'zaro teng bo'ladi.

2-lemma isboti. $\Phi \mathbb{C}_{-}$ integralni 2 taga ajratamiz:

$$\Phi \mathbb{C}_{-} = \Phi_1 \mathbb{C}_{-} + \Phi_2 \mathbb{C}_{-},$$

bu yerda Φ_1 integral kichik $\delta > 0$ uchun $[\delta, \infty)$ kesma bo'yicha olingan. $\delta \leq t \leq a$ da $-t^\alpha \leq -\delta^\alpha < 0$ bo'lgani uchun, 1-lemmaga ko'ra $\Phi_2 \mathbb{C}_{-}$ integral uchun

$$|\Phi_2 \mathbb{C}_{-}| = C |e^{-\delta^\alpha \lambda}|$$

bo'ladi. Bu yerda $\lambda \in S_\varepsilon$, $|\lambda| \geq 1$. $[\delta, \infty)$ -kesmada

$$f \mathbb{C}_{-} = \sum_{n=0}^N f_n t^n + \psi_N \mathbb{C}_{-}$$

yoyilma o'rinli bo'ladi, bu yerda $f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, va $|\psi_N \mathbb{C}_{-}| \leq C_N t^{N+1}$, $0 \leq t \leq \delta$. $\Phi_1 \mathbb{C}_{-}$ integralni quyidagicha yozamiz:

$$\Phi_1 \mathbb{C}_{-} = \sum_{n=0}^N f_n \Phi_{1n} \mathbb{C}_{-} + R_N \mathbb{C}_{-}.$$

Bu yerda

$$\Phi_{1n} \mathbb{C}_{-} = \int_0^a t^{n+\beta-1} e^{-\lambda t^\alpha} dt, \quad R_N \mathbb{C}_{-} = \int_0^a \psi_N \mathbb{C}_{-} e^{-\lambda t^\alpha} dt$$

$\Phi_{1n} \mathbb{C}_{-}$ integralni $\mathbb{C}_{+,+\infty}$ va $\mathbb{C}_{-,+\infty}$ yarim o'qlar bo'yicha olingan integrallar ayirmasi shaklida ifodalaymiz. Birinchi integral (16) formula bo'yicha hisoblanadi. Ikkinchisi $t \geq a$ da $-t^\alpha \leq -a^\alpha$ bo'lgani uchun, 1-lemmaga ko'ra modul bo'yicha $C |e^{-a^\alpha \lambda}|$ oshmaydi. Pirovardida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\Phi_{1n} \mathbb{C}_{-} = \frac{1}{\alpha} \lambda^{-\frac{n+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) + O(\lambda^{-a^\alpha \lambda})$$

Nihoyat, $R_N(\lambda)$ integral ostidagi ifodaning moduli, $C_N t^{N+1} |e^{-\lambda t}|$ dan oshmaydi va $\lambda \in S_\varepsilon$ da

$$|R_N(\lambda)| \leq C_N \int_0^\infty t^{N+\beta} e^{-t^\alpha \operatorname{Re} \lambda} dt = C'_N (\operatorname{Re} \lambda)^{-(N+1+\beta)/\alpha} = O(|\lambda|^{-(N+1+\beta)/\alpha}).$$

Demak $\lambda \in S_\varepsilon$ da

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^N f_n \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-(n+\beta)/\alpha} + O(|\lambda|^{-\frac{N+\beta+1}{\alpha}})$$

ya'ni (15) asimptotik yoyilma isbotlandi. (15) yoyilmani xuddi 1-teoremaga ko'ra hadlab differensiallashdagidek ham isbotlanadi. Vatson lemmasi isbot qilindi [13,(69-81)].

4. $S(x)$ ning kesma ichidagi maksimumi.

2-t e o r e m a. Agar $f(\lambda)$ va $S(\lambda)$ funksiyalar x_0 nuqta atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$S(\lambda) > S(\lambda_0), \quad \lambda \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad S''(\lambda_0) \neq 0, \quad (17)$$

bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow +\infty$, ($\lambda \in S_\varepsilon$) da

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(\lambda_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2} \quad (18)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi. Bu yoyilmani istalgan marta hadlab differensiallash mumkin. Asimptotikaning bosh hadi

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(\lambda_0)}} e^{\lambda S(\lambda_0)} f(\lambda_0) + O(\lambda^{-1}) \quad (19)$$

ko'rinishda bo'ladi [19,(252-258)].

3-l e m m a. Agar $S(\lambda)$ funksiya x_0 nuqta atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lib,

$$S'(\lambda_0) = 0, S''(\lambda_0) < 0 \quad (20)$$

bo'lsa, u holda $x = x_0$, $y = 0$ nuqtalarning mos U va V atroflari mavjud bo'ladiki, $y \in V$ nuqtada cheksiz differensiallanuvchi $\varphi(y)$ funksiya uchun

$$S(\varphi) - S(\varphi_0) = -y^2, \quad y \in V, \quad (21)$$

va

$$\varphi'(\varphi) = \sqrt{-\frac{2}{S''(\varphi_0)}}, \quad (22)$$

va $x = \varphi(\varphi)$ funksiya V ni U ga bir qiymatli akslantiradi.

I s b o t. Umumiylikka putur yetkazmasdan $x_0 = 0$ va $S(\varphi_0) = 0$ deymiz. U holda Teylor formulasi bo'yicha

$$S(\varphi) = \int_0^x (\varphi - t) S''(\varphi) dt = x^2 \int_0^1 (\varphi - t) S''(\varphi) dt = -x^2 h(\varphi),$$

Agar U_0 bilan $x = 0$ nuqtaning kichik atrofini belgilasak, u holda $S''(\varphi) < 0$ bo'lgani uchun, $x \in U_0$, $0 \leq t \leq 1$ uchun $S''(\varphi) < 0$ bo'ladi. Shuning uchun $x \in U_0$ da

$$h(\varphi) = \int_0^1 (\varphi - 1) S''(\varphi) dt$$

funksiya musbat va cheksiz differensiallanuvchi.

$$x\sqrt{h(\varphi)} = y, \quad (23)$$

Deymiz, ya'ni, $x^2 h(\varphi) = y^2$ yoki $S(\varphi) = -y^2$. Bunda $\sqrt{h(\varphi)} > 0$.

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{h(\varphi)})_{x=0} = \sqrt{h(\varphi)} = \sqrt{-\frac{S''(\varphi)}{2}} \neq 0,$$

va (23) tenglikdan teskari funksiya haqidagi teoremda ko'ra bo'lgani uchun (23) tenglama lemmada aytilgan xossalarga ega bo'lgan $x = \varphi(\varphi)$ va $\varphi(\varphi) = 0$ yechimga ega bo'ladi [21,(28-92)].

2-t e o r e m a n i n g i s b o t i. $x_0 = 0$ va $S(\varphi_0) = 0$ bo'lsin. $x_0 = 0$ nuqtaning kichik $[\delta_1, \delta_2]$ atrofini tanlab $F(\varphi)$ integralni uchta qismga ajratamiz:

$$F(\varphi) = F_1(\varphi) + F_2(\varphi) + F_3(\varphi),$$

Bunda $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$ va $F_3(\varphi)$ bilan mos ravishda $[\delta_1, -\delta_1]$, $[\delta_1, \delta_2]$ va $[\delta_2, b]$ kesma bo'yicha olingan integral belgilangan. $x \in I$, $x \neq 0$ bo'lganda $S(\varphi) < S(\varphi)$ bo'lgani uchun $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \in S_\varepsilon$) da $F_1(\varphi)$, $F_3(\varphi)$ integrallar eksponensial kichik bo'ladi, ya'ni

$$F_j(\xi) = O(\xi^{-\lambda_j}) \quad (\xi > 0, j=1,3).$$

δ_j ni shunday tanlaymizki $S(\xi) \delta_j = S(\xi_1)$ bo'lsin. $x=0$ nuqta $S(\xi)$ funksiyaning maksimumi bo'lgani uchun $S(\xi_1) = -\varepsilon^2$ ($\xi > 0$) va $F_2(\xi)$ integralda $x = \varphi(\xi)$ almashtirishni bajaramiz (buni 2-lemmaga ko'ra amalga oshirish mumkin):

$$S(\varphi(\xi)) = -y^2.$$

U holda

$$F_2(\xi) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda y^2} h(\xi) dy, \quad h(\xi) = f(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi).$$

Demak, $g(\xi) = h(\xi) + h(\xi - y)$ uchun

$$F_2(\xi) = \int_0^{\varepsilon} e^{-\lambda y} g(\xi) dy,$$

tenglik o'rinli. Endi Vatson lemmasini $F_2(\xi)$ integralga qo'llaymiz. Bunda $\alpha = 2$, $\beta = 1$ va $g(\xi)$ juft funksiya, u holda barcha toq k lar uchun $g^{(k)}(\xi) = 0$ tenglik o'rinli. Natijada $F_2(\xi)$ uchun (18) yoyilmaga ega bo'lamiz, bunda c_n koeffisient

$$c_n = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h^{(n)}(\xi)}{(n!)}, \quad (24)$$

ko'rinishga ega. Bu tenglikda $g^{(n)}(\xi) = 2h^{(n)}(\xi)$ ekanligini ko'rishimiz mumkin. Agar $n=0$ bo'lsa,

$$c_0 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) h(\xi) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) f(\xi) \varphi'(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(\xi_0)}} f(\xi_0),$$

bunda $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ va $\varphi'(\xi)$, (22) ko'rinishga ega.

2-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

N a t i j a. Agar $S(\xi)$ funksiya maksimumga I kesmaning faqat $x=a$ nuqtasida erishsa va $S'(\xi) = 0$, $S''(\xi) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \in S_\varepsilon$) da

$$F(\xi) \sim e^{\lambda S(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^{-(n+1)/2}. \quad (25)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi.

Bunda asimptotikaning bosh hadi

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{\lambda S(x)} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x)}} \left(f(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \quad (26)$$

ko'rinishda bo'ladi [16,(87-93)].

2.2 Statsionar fazolar metodi.

1. Masalaning qo'yilishi. Furiye integrali deb ataluvchi ushbu

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \quad (1)$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $f(x)$ funksiya $I = [a, b]$ kesmada haqiqiy qiymatlar qabul qiladi va λ -katta musbat parametr. $f(x)$ funksiya faza yoki fazaviy funksiya deyiladi. Bizni $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ ni asimptotik ko'rinishi qiziqtiradi. $f(x) \equiv 0$ yoki $f(x) \equiv \text{const}$ bo'lgan trivial hollarni qaramaymiz [18,(402-410)].

Furiye integrallarining xususiy holi Furiye almashtirishidir:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \quad (2)$$

Agar $f(x)$ funksiya $a \leq x \leq b$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda) \rightarrow 0$. $\text{Re}(f(x) e^{i\lambda x})$ funksiya λ ning katta qiymatlarida kuchli intiladi va ikki qo'shni yarim to'lqinlarda absolut qiymatiga ega bo'ladi, ammo yuza ishorasi bo'yicha qarama-qarshi bo'ladi. Shuning uchun yuzaning kichik yig'indisida integral quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int_a^b \text{Re}(f(x) e^{i\lambda x}) dx.$$

(2) ko'rinishdagi integralni asimptotikasini quyidagi lemma orqali topamiz:

Riman-Lebeg lemmasi. Agar $\int_a^b |f(x)| dx$ integral yaqinlashsa u holda

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0.$$

Riman-Lebeg lemmasida ko'ra $F(\lambda)$ integralning 0 ga intilish tezligi haqida hech narsa aytilmaydi. Gap shundaki uning tezligi $f(x)$ funksiyaning differensial xossalari bog'liq. $f(x)$ va $S(\lambda)$ funksiyalar yetarlicha silliq bo'lgandagina Furiye integrallari asimptotik yoyilma uchun qurish mumkin. Bu ikkala funksiya I kesmada cheksiz marta differensiullanuvchi bo'lgan hol bilan cheklanamiz.

1-t e o r e m a. $f(x)$, $S'(x)$ funksiyalar $\forall x \in I$ nuqtada cheksiz differensiallanuvchi va $S'(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda $\lambda \rightarrow +\infty$ (1) integral uchun

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{-n} - \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-n} \quad (3)$$

asimptotik yoyilma o'rinli. Bu yoyilmani λ bo'yicha ixtiyoriy marta hadlab differensiallash mumkin.

Asimptotikaning bosh qismi

$$F(\lambda) = \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} e^{i\lambda S} - \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)} e^{i\lambda S} + O(\lambda^{-2}) \quad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi. (3) formuladagi a_n va b_n koeffisientlar

$$a_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=a}, \quad b_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_{x=b}, \quad (5)$$

$$M = \frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}.$$

formulalar orqali hisoblanadi [27,(504-505)].

1-t e o r e m a i s b o t i. 2.1 dagi 1-teorema isbotidagi kabi, (1) integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)} d \left(e^{i\lambda S} \right) = \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) \Big|_a^b + \frac{1}{i\lambda} F_1(\lambda),$$

$$F_1(\lambda) = - \int_a^b e^{i\lambda S} \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{S'(x)} \right) dx.$$

Riman-Lebeg lemmasiga ko'ra, $F_1(\lambda) = o(1)$ $\lambda \rightarrow +\infty$ bo'ladi. Bu holda (4) formuladagi qoldiq had $o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ko'rinishda bo'ladi.

$F(\lambda)$ dagi $F_1(\lambda)$ integralni bo'laklab integrallab

$$F_1(\lambda) = \frac{f_1(x)}{i\lambda S'(x)} e^{i\lambda S} \Big|_a^b + \frac{1}{i\lambda} F_2(\lambda)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda $f_1(x) = -f(x) S'(x)$, F_1 dagi f ni f_1 ga almashtirib, F_2 ni hosil qilamiz. $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F_2(\lambda) = o(1)$ bo'lgani uchun u Riman-Lebeg lemmasiga

ko'ra $F_1(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ bo'ladi. (4) formula to'liq isbotlandi. Bundan tashqari a_j, b_j koeffisientlari (5) ko'rinishda bo'lgan quyidagi tenglikni isbotladik:

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left[\left(b_0 + \frac{b_1}{i\lambda} \right) e^{i\lambda S} - \left(a_0 + \frac{a_1}{i\lambda} \right) e^{i\lambda S} \right] + \frac{1}{\lambda^2} F_2(\lambda).$$

Bo'laklab integrallash jarayonini davom ettirib, (3) yoyilmaga ega bo'lamiz.

1-teorema isbotidan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-n a t i j a. Agar $f(\lambda), S(\lambda)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada mos ravishda k va $k+1$ marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S} \sum_{n=0}^{k-1} b_n \lambda^{-n} - \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda S} \sum_{n=0}^{k-1} a_n \lambda^{-n} + o(\lambda^{-k}) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (6)$$

bo'ladi.

Bu natijaning xususiy holi Furry koeffisientlarining matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan asimptotik baholaridir.

2-n a t i j a. Agar $f(\lambda)$ funksiya $[0, 2\pi]$ kesmada k marta uzluksiz differensiallanuvchi va

$$f^{(j)}(\lambda) = f^{(j)}(\lambda + 2\pi), \quad 0 \leq j \leq k \quad (7)$$

bo'lsa, u holda $m \rightarrow +\infty$ da

$$c_m = \int_0^{2\pi} e^{imx} f(\lambda) dx = o(\lambda^{-k}) \quad (8)$$

bo'ladi.

Haqiqatdan, agar $m \in \mathbb{Z}$ da $e^{i2m\pi} = 1$ bo'lgani va (7) shart bajarilgani, uchun (6) formuladagi qoldiq haddan boshqa hamma qo'shiluvchilar qisqarib ketadi [20, (442-448)].

2. Aynimagan statsionar nuqtaning ulushi. 1-teorema shartida bitta muhim chegaralanish mavjud: $x \in I$ da $S'(x) \neq 0$, yani $S(x)$ faza funksiyaning I kesmada statsionar nuqtasi yo'q. Agar fazaning statsionar nuqtalari bo'lsa, u holda $F(\lambda)$ integralning asimptotikasi 1-teoremadagiga qaraganda boshqacha xarakterda bo'ladi. $S(x) = x^2$ faza $x=0$ statsionar nuqtaga ega. Bu nuqtaga yaqin nuqtalarda

($\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ tartibli intervalda) $\cos \lambda x^2$ funksiya intilmaydi, ammo yuzaning qolgan yig'indilarida kosinusning tartibi $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ bo'ladi. $F\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ integralning tartibi $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ bo'ladi.

1-l e m m a. $f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ funksiya $[0, a]$ kesmada cheksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \int_0^a f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{i\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|\lambda}} e^{i\pi/4} f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (9)$$

$$\delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \operatorname{sgn} \alpha$$

bo'ladi, bu yerda $\alpha \neq 0$ [13,(43-54)].

I s b o t. $\alpha > 0$ va $f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \equiv 1$ bo'lsin. O'zgaruvchini almashtiramiz: $t = \sqrt{\alpha\lambda}x$ deb,

$$\int_0^a e^{i\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \int_0^{a\sqrt{\alpha\lambda}} e^{it^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \left(\int_0^\infty e^{it^2/2} dt - \int_{a\sqrt{\alpha\lambda}}^\infty e^{it^2/2} dt \right)$$

tenglikni hosil qilamiz. Qavs ichidagi birinchi integral Frenel integrali bo'lib u $\frac{1}{2} e^{i\pi/4} \sqrt{2\pi}$ ga teng. Ikkinchi integralning $\lambda \rightarrow +\infty$ dagi tartibi $O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ bo'ladi.

Demak,

$$\int_0^a e^{i\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\lambda}} e^{i\pi/4} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (10)$$

bo'ladi.

$\alpha < 0$ bo'lsa, u holda

$$\overline{\int_0^a e^{i\alpha x^2} dx} = \int_0^a e^{i\beta x^2} dx,$$

bo'ladi, bu yerda $\beta = -\alpha > 0$. Shuning uchun, agar α ni $-\alpha = |\alpha|$ ga va $e^{i\pi/4}$ ni $e^{-i\pi/4}$ ga almashtirsak (10) formula $\alpha < 0$ holda ham o'rinli bo'ladi.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ funksiyanı quyidagicha yozamiz:

$$f(\xi) = f(\eta) + \eta f(\xi) - f(\eta) = f(\eta) + xg(\xi),$$

bu yerda $g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\eta)}{x}$ funksiya $[\eta, a]$ kesmada cheksiz differensiallanuvchi funksiyadir. U holda

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2} f(\eta) \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|\lambda}} e^{i\frac{\pi}{4}\delta(\xi)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \Phi_1(\xi), \quad (11)$$

$$\Phi_1(\xi) = \int_0^a e^{i\frac{\alpha\lambda x^2}{2}} xg(\xi) dx$$

bo'ladi. Oxirgi integralni baholaymiz:

$$\begin{aligned} |\Phi_1(\xi)| &= \left| \frac{1}{i\alpha\lambda} \int_0^a g(\xi) dx e^{i\frac{\alpha\lambda x^2}{2}} \right| = \\ &= \frac{1}{|\alpha|\lambda} \left| g(\xi) e^{i\frac{\alpha\lambda a^2}{2}} - g(\eta) \int_0^a e^{i\frac{\alpha\lambda x^2}{2}} g'(\xi) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|\lambda} \left(|g(\xi)| + |g(\eta)| + \int_0^a |g'(\xi)| dx \right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Bu bahoni (11) formulaga quyib, (9) formulani hosil qilamiz.

N a t i j a. Yuqoridagi lemma isbotidan quyidagi natija kelib chiqadi. Agar $f(\xi)$ funksiya $[\eta, a]$ kesmada 2 marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, (9) formula o'rinli bo'ladi.

2-t e o r e m a. $f(\xi)$, $S(\xi)$ funksiyalar $[\eta, b]$ kesmada cheksiz differensiallanuvchi va $x_0 \in (\eta, b)$ nuqta $S(\xi)$ funksiyaning yagona statsionar nuqtasi bo'lsin. Agar $S''(\xi_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) integral uchun

$$F(\xi) = e^{i\lambda S(\xi_0)} e^{i\frac{\pi}{4}\delta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(\xi_0)|}} f(\xi_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (12)$$

formula o'rinli bo'ladi [17,(43-57)].

Bu yerda $\delta_0 = \text{sgn } S''(\xi_0)$.

I s b o t. Integrallash sohasini ikkiga ajratamiz: $[\eta, x_0]$, $[x_0, b]$ va shunga mos ravishda $F(\xi)$ ni ham ikkiga ajratamiz: $F(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi)$. Aniqlik uchun

$S''\langle \epsilon_0 \rangle > 0$ bo'lsin. U holda $x_0 < x \leq b$ da $S'\langle \epsilon_0 \rangle > 0$, va $S\langle \epsilon \rangle$ funksiya $x_0 < x \leq b$ da monoton o'suvchi, ya'ni $S\langle \epsilon \rangle > S\langle \epsilon_0 \rangle$ bo'ladi. $F_2\langle \epsilon \rangle$ integralda ($[x_0, b]$ kesma bo'yicha) x o'zgaruvchini shunday $x = \varphi\langle \epsilon \rangle$ funksiya bilan almashtiramizki, $S\langle \epsilon \rangle - S\langle \epsilon_0 \rangle = t^2$ bo'lsin.

U holda

$$F_2\langle \epsilon \rangle = e^{i\lambda S\langle \epsilon_0 \rangle} \int_0^{b'} e^{i\lambda t^2} g\langle \epsilon \rangle dt$$

bo'ladi. Bu yerda $g\langle \epsilon \rangle = f\langle \varphi\langle \epsilon \rangle \rangle'$, $b' = \sqrt{S\langle \epsilon \rangle - S\langle \epsilon_0 \rangle} > 0$. $\lambda \rightarrow +\infty$ da 1-lemma bo'yicha

$$F_2\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} e^{i\lambda S\langle \epsilon_0 \rangle} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} g\langle \epsilon \rangle + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

bo'ladi. Bu yerda $g\langle \epsilon \rangle = f\langle \epsilon_0 \rangle \sqrt{\frac{2}{S''\langle \epsilon_0 \rangle}}$. $F_1\langle \epsilon \rangle$ integral uchun ham xuddi shunday formulaga ega bo'lamiz. Bundan (12) formula kelib chiqadi. $S''\langle \epsilon_0 \rangle < 0$ hol $S''\langle \epsilon_0 \rangle > 0$ holga keltiriladi:

$$\overline{F\langle \epsilon \rangle} = \int_a^b e^{i\lambda \tilde{S}\langle \epsilon \rangle} \overline{f\langle \epsilon \rangle} dx, \quad \tilde{S}\langle \epsilon \rangle = -S\langle \epsilon \rangle,$$

va $\tilde{S}''\langle \epsilon_0 \rangle > 0$. Teorema isbotlandi.

3. Puassonning yig'ish formulasi. Bu formulada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\langle \epsilon \rangle$ qator boshqa qator bilan almashtiriladi. Aniqrog'i

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\langle \epsilon \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} f\langle \epsilon \rangle dx. \quad (13)$$

deb almashtiriladi.

3-t e o r e m a. Agar $f\langle \epsilon \rangle$ funksiya $\langle \epsilon_{-\infty}; +\infty \rangle$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi,

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\langle \epsilon \rangle$ qator yaqinlashuvchi va $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'\langle \epsilon + x \rangle$ qator $[1; 1]$ kesmada tekis yaqinlashsa,

u holda (13) formula o'rinli bo'ladi.

Biz bu yerda (13) formulaning formal isbotini keltirish bilan cheklanamiz. Uning qat'iy isbotini [12,(83-98)] kitobdan qarash mumkin.

$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $T=1$ davrli funksiya. $\varphi(x)$ funksiyani Furje qatorga yoyamiz:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{2\pi i k x}.$$

Bundan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n). \quad (14)$$

(14) formuladan Puassonning yig'ish formulasini kelib chiqishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \varphi(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) e^{-2\pi i k x} dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i k x} f(x) dx, \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz va φ_k ni (14) formulaga qo'yib, (13) formulani hosil qilamiz.

Eslatm a. (13) formuladan integrallar $n \rightarrow \infty$ da $f(x)$ ga nisbatan tezroq kamayganda $\varphi_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x} f(x) dx$ foydalanish qulay [21,(92-162)].

$\Phi(x) = \int_x^{\infty} e^{it^2} dt$ integralni qaraymiz va $x \rightarrow +\infty$ da asimptotikasini hisoblaymiz.

Bo'laklab integrallashni qo'llab

$$\Phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{2it} d(e^{it^2}) = -\frac{e^{ix^2}}{2xi} + \frac{1}{2i} \int_x^{\infty} e^{it^2} \frac{dt}{t^2}$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi integralni baholab, $\left| \int_x^{\infty} e^{it^2} \frac{dt}{t^2} \right| \leq \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$ ga ega bo'lamiz.

$x \rightarrow +\infty$ da

$$\Phi(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

natijani olamiz. Bu tenglikni o'ng tarafida $x \rightarrow +\infty$ da $\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ bo'ladi. Aniq qiymatni olish uchun yana bir marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_x^\infty t^{-2} e^{it^2} dt = \frac{1}{2i} \int_x^\infty t^{-3} d\left(it^2\right) = -\frac{1}{2ix^3} e^{ix^2} + \frac{3}{2i} \int_x^\infty t^{-4} e^{it^2} dt$$

Oxirgi integralni modul qiymati

$$x \rightarrow +\infty \text{ da } \int_x^\infty t^{-4} dt = O\left(x^{-3}\right).$$

Bundan

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Bo'laklab integrallashni davom ettirib, $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ integral uchun $x \rightarrow +\infty$ da asimptotik yoyilmani olish mumkin. Birinchi ikkita qismi quyidagi ko'rinishda yoyiladi:

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = e^{ix^2} \left(\frac{i}{2x} + \frac{1}{4x^3} \right) + O\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

2.3 Pereval metodi.

1. Boshlang'ich mulohazalar.

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \quad (1)$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz, bu yerda γ , z kompleks tekislikdagi bo'lakli silliq chiziq, $\gamma \in D$ va $f(z)$, $S(z)$ funksiyalar D sohada regulyar. Bizni $\lambda \rightarrow +\infty$ da $F(\lambda)$ funksiyani asimptotikasi qiziqtiradi. Bunda $f(z) \equiv 0$ yoki $S(z) \equiv \text{const}$ trivial hollar qaralmaydi.

Agar γ kesma $S(z)$ bo'lib, funksiya γ kesmada haqiqiy qiymatlarini qabul qilsa, bu holda (1) integralni Laplas metodi yordamida asimptotik baholash mumkin. (1) integralni shunday akslantirish mumkinki, hosil bo'lgan integralga Laplas metodini qo'llash mumkin bo'ladi. Agar $f(z)$, $S(z)$ funksiyalar D da regulyar bo'lsa, u holda D dagi γ konturni shaklini o'zgartirish mumkin. Faraz qilaylik, γ konturni $\tilde{\gamma}$ ga ya'ni:

1) faqat $z_0 \in \tilde{\gamma}$ nuqtada $\max_{z \in \tilde{\gamma}} |e^{\lambda S(z)}|$ qiymatga erishadi. (z_0 -konturdagi ichki nuqta)

2) z_0 nuqta atrofida $\text{Im} S(z) \equiv \text{const}$ $z \in \tilde{\gamma}$ bo'ladi [18,(410-427)].

$\tilde{\gamma}$ chiziqda z_0 nuqtani o'z ichiga olgan $\tilde{\gamma}_0$ - kichik yoy bor. Unda $z \notin \tilde{\gamma}_0$, $z \in \tilde{\gamma}$ da $\text{Re} S(z) \geq \text{Re} S(z_0) - \delta$ bo'ladi, bu yerda $\delta > 0$. Bunda 1) shartga ko'ra z_0 nuqta maksimumga $\max_{z \in \tilde{\gamma}} \text{Re} S(z)$ erishadi. Demak, $\lambda \rightarrow +\infty$ da $\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_0$ yo'ylar bo'yicha olingan integral tartibi $O(e^{-\lambda \delta})$ bo'ladi. $\tilde{\gamma}_0$ bo'yicha olingan integralni qaraymiz; $z = \varphi(t)$ ($-t_0 \leq t \leq t_0$) berilgan demak $\tilde{\gamma}_0$ yoyning tenglamasi $\varphi(t) = z_0$ bo'lsin. Yuqoridagi 2) shartga ko'ra, $\tilde{\gamma}_0$ da $\text{Im} S(z) \equiv \text{Im} S(z_0)$ bo'ladi va shu yoy bo'yicha integral

$$F_1(\lambda) = e^{i\lambda \text{Im} S(z_0)} \int_{-t_0}^{t_0} f(\varphi(t)) e^{\lambda S(\varphi(t))} dt$$

ga teng, bu yerda $\tilde{f}(s) = f(s) \Phi(s)$, $\tilde{S}(s) = \operatorname{Re} S(s)$. $F_1(s)$ integralda $S(s)$ funksiya faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Demak $F_1(s)$ integralni Laplas metodi yordamida asimptotik baholash mumkin.

$S'(s_0) = 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, 2) shartga ko'ra $\frac{d}{dt} \operatorname{Im} S(s) \Big|_{t=0} = 0$, va 1) shartga ko'ra $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(s) = z_0$ nuqtada erishgani uchun $\frac{d}{dt} \operatorname{Re} S(s) \Big|_{t=0} = 0$ bo'ladi.

Bundan $\frac{d}{dt} S(s) \Big|_{t=0} = 0$ va demak, $S'(s_0) = 0$.

Agar z_0 nuqtada $S'(s_0) = 0$ bo'lsa, z_0 nuqta $S(s)$ funksiyaning pereval (davon) nuqtasi deyiladi. 1), 2) shartlarni qanoatlantiruvchi kontur albatta $S(s)$ funksiyaning pereval nuqtasi orqali o'tadi.

Agar $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(s)$ qiymat γ konturning oxiri bo'lgan bitta z_0 nuqtada erishsa, bu holda ham (1) integral xuddi yuqoridagidek asimptotik baholanadi. Bu holda z_0 nuqta pereval nuqta bo'lmayligi mumkin.

Agar $\operatorname{Re} S(s)$ funksiya γ konturning chekli sondagi (pereval nuqtalari yoki chetki nuqtalarida) maksimumga erishsa, bu yerdagi γ kontur pereval kontur deyiladi. Bu holda (1) integralning asimptotikasi Laplas metodi bilan hisoblanadi. Pereval metodini qo'llashdagi eng qiyin masala, bu dastlabki γ konturga ekvivalent bo'lgan $\tilde{\gamma}$ pereval konturni topish masalasidir. Bunda γ va $\tilde{\gamma}$ konturlar ekvivalent deganda biz γ va $\tilde{\gamma}$ konturlar bo'yicha olingan (1) integrallarning tengligini tushunamiz. Pereval kontur bo'yicha olingan dastavval (1) integral uchun asimptotik formulalarni

$$\operatorname{Re} S(s) = \operatorname{const}, \quad \operatorname{Im} S(s) = \operatorname{const}$$

sath chiziqlarining lokal strukturasi [23,(152-161)].

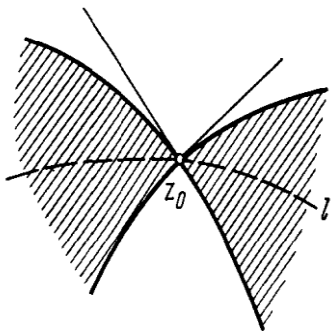
2. Garmonik funksiyalarning sath chiziqlari strukturasi. z_0 nuqtaning atrofida $S(s)$ funksiya regulyar bo'lsin. z_0 nuqta atrofida $\operatorname{Re} S(s) = \operatorname{Re} S(s_0) + \varepsilon$,

$\operatorname{Im} S \zeta = \operatorname{Im} S \zeta_0 + \varepsilon$ sath chiziqlari strukturasi ε ning kichik qiymatlarida o'rganamiz.

1-lemma. Agar $S' \zeta_0 \neq 0$ bo'lsa, u holda z_0 nuqtaning kichik atrofida $\operatorname{Re} S \zeta = \operatorname{const}$, $\operatorname{Im} S \zeta = \operatorname{const}$ sath chiziqlari silliq egri chiziqlar bo'ladi [10, (102-130)]

Isbot. $S' \zeta_0 \neq 0$ bo'lgani uchun $S \zeta$ funksiya z_0 nuqtada bir varaqli bo'ladi. Shu sababli, z_0 nuqtaning U atrofini $w = S \zeta$ funksiya $w_0 = S \zeta_0$ nuqtaning V atrofiga o'zaro bir qiymatli va konform akslantiradi. U atrofni shunday tanlaymizki V soha $\{|u - u_0| < \delta, |v - v_0| < \delta\}$ kvadrat bo'lsin. Bu yerda $w = u + iv$, $w_0 = u_0 + iv_0$. $\operatorname{Re} S \zeta$, $\operatorname{Im} S \zeta$ funksiyalarning U da yotgan sath chiziqlari bu akslantirishda V da yotgan $u = \operatorname{const}$, $v = \operatorname{const}$ to'g'ri chiziqlar kesmalarga o'tadi. Bundan ko'rinadiki, w_0 nuqtada regulyar bo'lgani uchun S funksiyaning teskarisi $z = S^{-1} w$, silliq chiziqning aksi ham silliq chiziq bo'ladi. Lemma isbotlandi.

2-lemma. Agar z_0 nuqta $S \zeta$ funksiyaning oddiy pereval nuqtasi, ya'ni $S' \zeta_0 = 0$, $S'' \zeta_0 \neq 0$ bo'lsa, u holda U kichik atrofda $\operatorname{Re} S \zeta = \operatorname{Re} S \zeta_0$ sath chizig'i 2 ta l_1 , l_2 silliq chiziqdan iborat bo'lib, ular z_0 nuqtada ortogonal va ular U ni 4 ta sektorga ajratadi. $\operatorname{Re} S \zeta = \operatorname{Re} S \zeta_0$ funsiyalarning ishoralari qo'shni sektorlarda har xil bo'ladi (bu holat 2-rasmda tasvirlangan).



2-rasm

Isbot. z_0 nuqtaning yetarli kichik U atrofi bo'lsin. U holda $\xi = 0$ nuqtaning V atrofida regulyar bo'lgan shunday $\varphi \zeta$ funksiya mavjud bo'ladiki,

$$S \varphi \zeta = S \zeta_0 - \zeta^2 \quad (\zeta \in V) \quad (2)$$

bo'ladi. Bundan tashqari, $z = \varphi \zeta$ ($\varphi' \zeta \neq 0$) V funksiyaning U ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi.

$\operatorname{Re} S(\zeta)$, $\operatorname{Im} S(\zeta)$ funksiyalarning sath chiziqlari $\zeta = \varphi^{-1}(\zeta)$ akslantirishda $\operatorname{Re} \zeta^2 = \operatorname{const}$, $\operatorname{Im} \zeta^2 = \operatorname{const}$ chiziqlarga akslanadi. Bunday strukturani yuqorida o'rgandik. z o'zgaruvchi qaytib, lemma tasdig'ini hosil qilamiz. Lemma isbot qilindi.

1-n a t i j a. $\operatorname{Re} S(\zeta) \geq \operatorname{Re} S(\zeta_0)$ bo'ladigan sektorlar orqali $z \in l$ da $\operatorname{Im} S(\zeta) = \operatorname{Im} S(\zeta_0)$ bo'ladigan l silliq chiziq o'tadi. $\operatorname{Re} S(\zeta)$ funksiya z ning z_0 nutadan uzoqlashishi bilan l chiziq bo'yicha monoton kamayadi. l chiziq eng tez tushish chizig'i bo'ladi (2-rasm) [13,(123-127)], [30,(www.math-life.com)].

3. Integrallash konturi oxirining hissasi. γ -chekli chiziq bolib, $f(\zeta)$ va $S(\zeta)$ funksiyalar γ chiziqni o'z ichiga olgan D sohada regulyar bo'lsin.

1-t e o r e m a. Agar $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(\zeta)$ maksimumga γ konturning boshlanish nuqtasida erishsa va $S'(\zeta) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\lambda \rightarrow +\infty$ da

$$F(\zeta) \equiv \int_{\gamma} f(\zeta) e^{\lambda S(\zeta)} dz \sim \lambda^{-1} e^{\lambda S(\zeta_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n} \quad (3)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi. Bu yoyilmani λ bo'yicha istalgan marta hadlab differensiallash mumkin. Asimptotikaning bosh hadi

$$F(\zeta) \sim \frac{1}{-\lambda S'(\zeta_0)} e^{\lambda S(\zeta_0)} \left(f(\zeta_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(3) yoyilmaning c_n koeffitsiyentlari

$$c_n = (-1)^n M^n \left(\frac{f(\zeta)}{S'(\zeta)} \right) \Big|_{z=a}, \quad M = \frac{1}{S'(\zeta_0)} \frac{d}{dz} \quad (5)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Bu (3)-(5) formula Laplas integrali uchun (8), (9) formulalar bilan ustma-ust tushushini ko'ramiz. Bu teoremaning isboti 2.1 dagi 1-teoremaning isbotiga o'xshash bo'ladi [11,(152-160)].

4. Oddiy pereval nuqta hissasi. $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(\zeta)$ maksimum konturning ichki nuqtasida erishganda (1) integral asimptotikasini hisoblaymiz. Quyidagi shartlar bajarilsin:

a) $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(\zeta)$ maksimum faqat konturning ichki nuqtasi va oddiy pereval nuqtasi (ya'ni $S'(\zeta_0) = 0$, $S''(\zeta_0) \neq 0$) bo'lgan z_0 nuqtada erishsin;

b) γ kontur z_0 nuqta atrofida $\operatorname{Re} S(\zeta) > \operatorname{Re} S(\zeta_0)$ bo'ladigan ikkala sektordan o'tadi (2-rasm).

2-t e o r e m a. Agar yuqoridagi a), b) shartlar bajarilsa, u holda

$$F(\zeta) = \int_{\gamma} f(\zeta) e^{\lambda S(\zeta)} dz \sim e^{\lambda S(\zeta_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2} \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (6)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi.

Bu yoyilmani λ bo'yicha istalgan marta hadlab differensiallash mumkin.

Asimptotikaning bosh hadi

$$F(\zeta) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(\zeta_0)}} e^{\lambda S(\zeta_0)} \left(f(\zeta_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (7)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(7) formuladagi ildiz tarmoqlarini tanlash hamda (6) yoyilma koeffisientlari uchun formulalar quyida ko'rsatilgan [12,(62-69)].

I s b o t i. z_0 nuqtaning kichik atrofini U deb, $\gamma_0 = \gamma \cap U$, γ_1 , γ_2 - konturning qolgan yoylari deylik. $F(\zeta)$ integralni 3 qismga ajratamiz: $F(\zeta) = F_0(\zeta) + F_1(\zeta) + F_2(\zeta)$, bu yerda (1) ko'rinishdagi $F_j(\zeta)$ integrallar γ_j ($j = 0, 1, 2$) yoylar bo'yicha olingan. $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(\zeta)$ maksimumga faqat $z_0 \in \gamma_0$ nuqtada erishgani uchun, xuddi 2.1 dagi 2-teoremaga o'xshash $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ integrallarni quyidagicha baholash mumkin:

$$|F_j(\zeta)| \leq c |e^{\lambda S(\zeta_0) \pm \delta}| \quad (\lambda > 0, j = 1, 2,) \quad (8)$$

bu yerda c, δ - o'zgarmas sonlar.

Endi $F_0 \mathbb{C}^-$ integral uchun asimptotik yoyilma topamiz. Agar U kichik soha bo'lsa, u holda $\zeta = 0$ nuqtaning shunday V atrofi va $z = \varphi \mathbb{C}^-$ funksiya topiladiki

$$a) S \mathbb{C}^- = S \mathbb{C}_0^- \zeta^2, \zeta \in V;$$

b) $\varphi \mathbb{C}^-$ funksiya V da regulyar va V ni U ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi, $\varphi \mathbb{0}^- = z_0$.

$F_0 \mathbb{C}^-$ integralda o'zgaruvchini $z = \varphi \mathbb{C}^-$ kabi almashtiramiz va

$$F_0 \mathbb{C}^- = e^{\lambda S \mathbb{C}_0^-} \int_{\tilde{\gamma}} e^{-\lambda \zeta} g \mathbb{C}^- d\zeta \quad (9)$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda $g \mathbb{C}^- = f \mathbb{C}^- \mathbb{C}' \mathbb{C}^-$, $\tilde{\gamma}$ bilan γ_0 konturning aksi belgilangan. Bunda V soha sifatida yetarli kichik $\rho > 0$ radiusli ochiq $|\zeta| < \rho$ doirani olish mumkin. Yopiq $|\zeta| \leq \rho$ doirada $\varphi \mathbb{C}^-$ funksiya regulyar bo'ladi deb qarash mumkin. $\operatorname{Re} \mathbb{C}^2 = 0$ sath chizig'i ikkita to'g'ri chiziqdan iborat: $\xi \pm \eta = 0$ $\mathbb{C} = \xi + i\eta$ va bu chiziqlar V ni 4 ta sektorga ajratadi. D_1 va D_2 lar mos ravishda $l_1: \mathbb{0}, \rho^-$ va $l_2: \mathbb{C}, 0^-$ integrallarni o'z ichiga oluvchi sektorlar bo'lsin. γ_0 -chiziq shart bo'yicha, 2 ta γ_{01}, γ_{02} chiziqlardan (umumiy boshlang'ich nuqtasi z_0 bo'lgan), bu chiziqlar $\operatorname{Re} S \mathbb{C}^- < \operatorname{Re} S \mathbb{C}_0^-$ bo'lgan turli sektorlarda yotadi. Shuning uchun $\zeta = 0$ nuqta $\tilde{\gamma}$ chiziqni $\tilde{\gamma} \in D_1$ va $\tilde{\gamma} \in D_2$ chiziq'larga ajratadi $|\zeta| = \rho$ aylananing C_1 yoyi D_1 sektorda yotadi va $l_1, \tilde{\gamma}_1$ chiziqlarni oxirlarini birlashtiradi. Koshi teoremasi bo'yicha

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} e^{-\lambda \zeta^2} g \mathbb{C}^- d\zeta = \int_0^\rho e^{-\lambda \zeta^2} g \mathbb{C}^- d\zeta + \int_{C_1} e^{-\lambda \zeta^2} g \mathbb{C}^- d\zeta. \quad (10)$$

$\zeta \in C_1$ nuqtalarda $\operatorname{Re} \mathbb{C}^2 < 0$ bo'lgani uchun, shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, C_1 da $\operatorname{Re} \mathbb{C}^2 \leq -\delta$ bo'ladi va $\tilde{\gamma}_1$ chiziq bo'yicha olingan integral $[\delta]$ kesma bo'yicha olingan integral yig'indisiga teng bo'ladi va $\lambda \rightarrow +\infty$ da tartibi $O \mathbb{C}^{-\lambda \delta_1}$ bo'lgan qo'shiluvchini $\tilde{\gamma}_2$ yoy bo'yicha integral uchun xuddi shunday mulohazalarni yoritib,

$$e^{-\lambda S} F_0 \approx \int_{-\rho}^{\rho} e^{-\lambda \zeta^2} g(\zeta) d\zeta + O(e^{-\lambda \delta'}) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (11)$$

ifodani hosil qilamiz, bu yerda $\delta' > 0$ o'zgarmas son. (11) formulaning o'ng tomonida kesma bo'yicha integral, ya'ni Laplas integrali (bu yerda $S = -\zeta^2$) turibdi. $\max_{-\rho \leq \zeta \leq \rho} S$ maksimumga faqat $\zeta = 0$ nuqtada erishadi, shu bilan birga $S'' \neq 0$. 2.1 dagi 2 teoremadan (6) yoyilma kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

(7) formuladagi ildiz tarmog'ini tanlashni ko'rsatamiz bu γ konturning orentatsiyasiga bog'liq. 2-teorema isbotida ko'rsatilgandiki, pereval z_0 nuqta atrofida γ konturni γ' konturga deformatsiya qilish mumkin, bu kontur eng tez tushish chizig'i l bilan ustma-ust tushadi: l da $\text{Im} S \approx \text{Im} S_{z_0}$, $z \in l$, $z \neq z_0$ da $\text{Re} S < \text{Re} S_{z_0}$ bo'ladi. Endi

$$\arg \sqrt{\frac{1}{-S''}} = \varphi_0 \quad (12)$$

bo'lishini ko'rsatamiz. Bu yerda φ_0 bilan z_0 nuqtada l ga o'tkazilgan urinma va haqiqiy o'q musbat yo'nalishi orasidagi burchak belgilangan.

Asimptotikaning bosh hadi faqat f , S , S'' funksiyalarning pereval nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangani uchun $f \approx 1$, $S \approx \frac{1}{2}az^2$ hol bilan cheklanish kifoya. $z = 0$ pereval nuqtasidan o'tuvchi eng tez tushuvchi l chizig'i $\text{Im} S \approx 0$, $\text{Re} S < 0$ ($z \neq 0, z \in l$) to'g'ri chiziq bo'ladi. Uning tenglamasini $z = e^{i\varphi_0} \rho$, $-\infty < \rho < \infty$ ko'rinishda yozamiz. U holda $z \in l$ da $S \approx -\frac{1}{2}|a|\rho^2$ bo'ladi. l chiziq bo'yicha olingan integral

$$\int_l e^{\lambda az^2/2} dz = e^{i\varphi_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda |a|\rho^2/2} d\rho = e^{i\varphi_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|a|}},$$

ga teng va (12) formula isbotlandi. 2-teorema isbotidan quyidagi 3-teorema kelib chiqadi.

3-t e o r e m a. Agar $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ maksimum γ konturning faqat boshlang'ich a nuqtasida erishsa va $S'(a) = 0$, $S''(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda quyidagi asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi

$$F(z) \sim \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \sim e^{\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-\frac{n+1}{2}} \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \quad (13)$$

(13) asimptotik yoyilmani λ bo'yicha istalgan marta hadlab differensiallash mumkin. Asimptotikaning bosh hadi

$$F(z) \sim \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} e^{\lambda S(a)} \left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (14)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ildizning tarmoqlari xuddi (10) formuladagi kabi tanlanadi [14,(445-458)].

5. Pereval metodi va statsionar fazolar metodi. 2.2 da

$$F(z) = \int_a^b f(z) e^{i\lambda S(z)} dx$$

ko'rinishdagi integrallarni ko'rib o'tdik. Bunda $S(z)$ funksiya chekli $[a, b]$ kesmada faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. $S(z)$ faza yagona x_0 ($a < x_0 < b$) statsionar nuqtaga ega va $S''(x_0) \neq 0$ bo'lgan holda asimptotikaning bosh hadi hisoblangan edi.

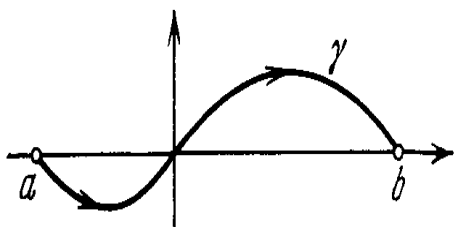
Bundan tashqari, $f(z)$, $S(z)$ funksiyalar $[a, b]$ kesma atrofida regulyar bo'lgan $f(z)$ va $S(z)$ funksiyalarning qiymatlari bo'lsin. U holda bu

$$F(z) \sim e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^{-n-1} - e^{i\lambda S(a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^{-n-1} + e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-\frac{1}{2}} \quad (\lambda \rightarrow +\infty) \quad (15)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu yerdagi a_n , b_n koeffitsiyentlar 2.2 dagi (5) formula orqali aniqlanadi. Boshqacha aytganda, $F(z)$ integralning $\lambda \rightarrow +\infty$ dagi asimptotikasi pereval nuqtasi va integrallash konturining a , b uchlarining hissalariga yig'indisiga teng. Buni isbotlash uchun integrallash konturini ($[a, b]$ kesma) γ konturga $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} iS(z)$ faqat $z = a$, $z = b$ va $z = x_0$ nuqtalarda erishadigan qilib, deformatsiyalash kifoya. γ kontur bo'yicha olgan

integral asimptotikasi, 1,2 teoremlar va 2-natijaga ko'ra (15) ko'rinishda bo'ladi [19,(259-266)].

$S \in x^2$ kvadratiy fazani qarash bilan kifoyalanamiz. Umumiy holda ham xuddi shu kabi tekshiriladi. Birinchi va uchinchi kvadrantlarda $\operatorname{Re} z^2 > 0$ ga ega bo'lamiz. Integrallash koturini (3-rasmda tavrirlangan) γ konturga almashtiramiz.



3-rasm

U holda γ konturning a, b nuqtalari va $z=0$ pereval nuqtaning chetki hamma nuqtalarida $\operatorname{Re} z^2 > 0$ bo'ladi; bu kontur 2-natija shartlarini qanoatlantiradi.

Demak, integral ostidagi funksiya regulyar bo'lganda, statsionar fazolar metodi pereval metodining xususiy holi bo'lar ekan.

2-e s l a t m a. (15) formula $f \in S$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada cheksiz differensiallanuvchi bo'lganda ham, o'rinli bo'ladi [21, (162-235)].

Ikkinchi bob bo'yicha xulosa

Ikkinchi bobda matematik analizning elementar asimptotik metodlari (Laplas metodi, statsionar fazolar metodi va pereval (davon) metodi) mavjud adabiyotlardan foydalangan holda, ijodiy tahlil qilingan.

III-BOB. INTEGRALLARNI ASIMPTOTIK BAHOLASH

3.1 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash

1. Integrallarni sodda baholash.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz. Bizni $x \rightarrow +\infty$ da $F(x)$ ko'rinishidagi integralning asimptotikasi qiziqtiradi. Agar $\int_a^\infty f(t) dt$ integral yaqinlashsa,

$$F(x) = \int_a^\infty f(t) dt + o(1) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

bo'ladi. Haqiqatan, $x \rightarrow +\infty$ da $F(x) = F(\infty) - G(x)$,

$$G(x) = \int_x^\infty f(t) dt = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (2)$$

Asimptotik tenglikni integrallash mumkin, ya'ni agar

$$f(t) \sim g(t) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (3)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

bo'ladi.

1-t e o r e m a. $t \geq a$ da $f(t)$, $g(t)$ funksiyalar uzluksiz, barcha t larda $g(t)$ funksiya qat'iy musbat va

$$\int_a^{+\infty} g(t) dt = +\infty \quad (5)$$

bo'lsa, u holda (3) munosabatdan (4) kelib chiqadi [18,(375-380)].

I s b o t. Lopital qoidasiga ko'ra,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x f \, d\mu}{\int_a^x g \, d\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \, d\mu}{g \, d\mu} = 1$$

ga ega bo'lamiz. Bu esa (4) munosabatning to'g'riligini bildiradi. Teorema isbotlandi.

1- n a t i j a. Teorema shartlari bajarilsa va

$$f \, d\mu = o(g \, d\mu) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^x f \, d\mu = o\left(\int_a^x g \, d\mu\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

bo'ladi.

2- n a t i j a. Teorema shartlari bajarilsa va

$$f \, d\mu = O(g \, d\mu) \quad (t \geq b \geq a)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^x f \, d\mu = O\left(\int_a^x g \, d\mu\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

bo'ladi.

I s b o t. $C > 0$ o'zgarmas mavjudlik shartiga ko'ra,

$$|f \, d\mu| \leq C g \, d\mu \quad (t \geq b)$$

bo'ladi. Shuning uchun $x \geq b$ da

$$\left| \int_b^x f \, d\mu \right| \leq C \int_b^x g \, d\mu \equiv C H \, d\mu$$

bo'ladi. Hisoblash davomida $x \geq b$ da

$$|F \, d\mu| = \left| \left(\int_a^b + \int_b^x \right) f \, d\mu \right| \leq C_1 + C H \, d\mu$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $C_1 = \int_a^b f(t) dt$. Agar $x \rightarrow +\infty$ da $H(x) \rightarrow +\infty$ u holda biror x da

$$C_1 + CH(x) = CH(x) + o(1) \leq 2CH(x)$$

bo'ladi va 2 natija isbotlandi [28, (www.dic.academic.ru)].

Misollar. 1-teorema va 1,2-natijalardan, $\alpha > -1$, $C \neq 0$ bo'lganda quyidagilar kelib chiqadi:

$$f(x) \sim Cx^\alpha \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \sim \frac{Cx^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$f(x) = o(x^\alpha) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = o(x^{\alpha+1}) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$f(x) = O(x^\alpha) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = O(x^{\alpha+1}) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Bu yerda $f(x)$ funksiya $x \geq a$ da uzluksiz.

$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1} dt$ integralni qaraymiz. Agar $t \rightarrow +\infty$ da $\sqrt{t^2+1} \sim t$ bo'lsa, u

holda $x \rightarrow +\infty$ da $F(x) \sim \frac{x^2}{2}$ bo'ladi.

$F(x)$ ko'rinishdagi funksiyaning $x \rightarrow +\infty$ da asimptotikasini hisoblaymiz. Teylor formulasiga ko'ra, $t \geq 2$ da

$$\sqrt{t^2+1} = t \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = t + \frac{1}{2t} + O(t^{-3}),$$

bo'ladi. Bundan, $x \geq 2$ da

$$\int_2^x \sqrt{t^2+1} dt = \int_2^x \left(t + \frac{1}{2t} \right) dt + \int_2^x O(t^{-3}) dt,$$

bo'ladi. Oxirgi integral yaqinlashuvchi, demak

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{2} + O(1) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

To'laroq isbotlaydigan bo'lsak,

$$F(x) = \left(\int_0^2 + \int_2^x \right) \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{2} + \left(-\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\ln t}{2} \right) \right)_{t=2}^x + \int_2^x O(t^{-3}) dt + \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1} dt$$

bo'ladi. Bu yerda

$$-\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\ln t}{2} \right)_{t=2}^x + \int_2^x O(t^{-3}) dt + \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1} dt = O(1) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

2. Yig'indilarni asimptotik baholash.

$$S_n = \sum_{m=0}^n f(m) \quad (6)$$

yig'indini qaraymiz. Bizni $n \rightarrow +\infty$ da S_n ning asimptotik ko'rinishi qiziqtiradi. Bu masala umumiy holda o'ta murakkab masala hisoblanadi. Biz bu yerda ishorasi o'zgarmaydigan yig'indilarni (ya'ni, $f(m)$ haqiqiy va bir xil ishorali bo'lgan hol) ni qaraymiz.

(6) ko'rinishdagi yig'indi asimptotik baholashning asosiy metodlaridan biri bu yig'indini integral bilan taqribiy almashtirishdir.

2-t e o r e m a. $f(x)$ funksiya $x \geq 0$ da nomanfiy, uzluksiz va monoton bo'lsin. U holda

$$\sum_{m=0}^n f(m) = \int_0^n f(x) dx + O(1) + O(f(n)) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

bo'ladi.

I s b o t. $f(x)$ kamayuvchi bo'lmasin. U holda

$$\int_{m-1}^m f(x) dx \leq f(m-1) \leq \int_m^{m+1} f(x) dx.$$

Bu tengsizlikni $m = 1, 2, 3, \dots, n-1$ da yig'ib,

$$\int_0^{n-1} f(x) dx \leq S_n - f(n) \leq \int_1^n f(x) dx$$

hosil qilamiz. Shuning uchun,

$$\left| S_n(f) - f \right| \leq \int_0^n |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_{n-1}^n |f(x) - f_n(x)| dx \leq f_n(n) - f_n(n-1) = f(n) - f(n-1) \quad (8)$$

bo'ladi va (7) isbotlandi. Xuddi shunga o'xshash, o'smaydigan $f(x)$ funksiya uchun ham (7) formulani isbotlash mumkin [18,(381-383)].

Misollar. 1) Ushbu

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = \ln n + O(1) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

asimptotik formulani isbotlang.

Isboti. 2-teoremadan $n \rightarrow \infty$ da

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} = \int_1^n \frac{1}{x} dx + O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln x \Big|_1^n + O(1) = \ln n + O(1).$$

2) Agar $\alpha > -1$ bo'lsa, u holda ushbu

$$\sum_{m=1}^n m^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (n \rightarrow \infty)$$

asimptotik tenglik o'rinli.

Isboti. 2-teoremaga ko'ra $n \rightarrow \infty$ da

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n m^\alpha &= \int_1^n x^\alpha dx + O(1) + O(n^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^n + O(1) + O(n^\alpha) = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - 1 + O(1) + O(n^\alpha) \\ &= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

3- t e o r e m a. Agar $f(x)$ funksiya $x \geq 0$ da uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\left| \sum_{m=0}^n f(m) - \int_0^n f(x) dx \right| \leq |f(0)| + \int_0^n |f'(x)| dx \quad (9)$$

bo'ladi.

Isbot.

$$f(n) - \int_{m-1}^m f(x) dx = \int_{m-1}^m (f(m) - f(x)) dx = \int_{m-1}^m (f(m) - f(x)) dx = \int_{m-1}^m f(x) dx + g(m),$$

$$g_n = \int_{m-1}^m f(t) dt,$$

ga ega bo'lamiz. $|g_n|$ ni baholaymiz. $f_n - f = \int_x^m f'(t) dt$ bo'lgani uchun

$\forall x \in [n-1, m]$ nuqtada

$$|f_n - f| \leq \int_{m-1}^m |f'(t)| dt,$$

bo'ladi. Bundan

$$|g_n| \leq \int_{m-1}^m |f_n - f| dx \leq \int_{m-1}^m \left(\int_{m-1}^m |f'(t)| dt \right) dx = \int_{m-1}^m |f'(t)| dt,$$

kelib chiqadi.

Shu sababli,

$$\left| \sum_{m=0}^n f_n - \int_0^n f(t) dt \right| = \left| f_0 + \sum_{m=1}^n g_n \right| \leq |f_0| + \sum_{m=1}^n \int_{m-1}^m |f'(t)| dt$$

bo'ladi. Bundan (9) kelib chiqadi.

N a t i j a. Agar 3-teoremani sharti bajarilsa, u holda

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} f_n - \int_n^{\infty} f(t) dt \right| \leq |f_n| + \int_n^{\infty} |f'(t)| dt \quad (10)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu formuladagi qator va integrallar yaqinlashuvchi deb qoraladi [29, (www.mat.net.au)].

Misol. 1) Agar $\alpha > 1$ bo'lsa,

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} \sim \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, \quad n \rightarrow \infty$$

bo'ladi. Haqiqatan, (10) formulaga ko'ra. $f_n = x^{\alpha}$ va $f'_n = -\alpha x^{-\alpha-1}$ bo'lgani uchun

$$\int_n^{\infty} |f'_n| dx = n^{-\alpha}, \quad \int_n^{\infty} f_n dx = \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1},$$

$n \rightarrow \infty$ da (10) formuladan

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} = \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} + O(n^{-\alpha})$$

formulani hosil qilamiz.

3. $F(\epsilon) = \int_a^x f(t) dt$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash. Ushbu

ehtimollar integrali yoki xatolar integrali deb ataladigan

$$\Phi(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

funksiyani t o'zgaruvchining yetarli katta qiymatlarida o'zgarish xususiyatlarini xarakterlaydigan asimptotik formula keltirib chiqaramiz.

L e m m a. Agar $f(\epsilon)$ funksiya $v \geq 0$ da bo'lakli-uzlusiz va $v=0$ nuqta atrofida cheksiz differensiallanuvchi bo'lib, $v \geq 0$ da $|f(\epsilon)| \leq Me^{Cv}$ ($M > 0$, C - o'zgarmas sonlar) bo'lsa, $\lambda \rightarrow +\infty$ da

$$\int_0^{+\infty} f(\epsilon) e^{-\lambda v} dv \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\lambda^{k+1}} \quad (11)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi.

I s b o t i. II bobning 1-teoremasidan foydalanamiz. Bu yerda $S(\epsilon) = -v$, $\max_{v \geq 0} S(\epsilon) = S(0) = 0$ va $S'(0) \neq 0$. Biroq 1-teoremani bu integralga to'g'ridan-to'g'ri qo'llash mumkin emas, chunki bu yerda integrallash sohasi chegaralanmagan.

$$\int_0^{+\infty} f(\epsilon) e^{-\lambda v} dv = F_1(\epsilon) + F_2(\epsilon),$$

bu yerda

$$F_1(\epsilon) = \int_0^1 f(\epsilon) e^{-\lambda v} dv, \quad F_2(\epsilon) = \int_1^{+\infty} f(\epsilon) e^{-\lambda v} dv.$$

$S(\epsilon) = -v \leq -1$ ($\epsilon \geq 1$) bo'lgani uchun II-bobdagi 1-lemmaga ko'ra

$$|F_2(\epsilon)| \leq C |e^{-\lambda}| \quad \epsilon \in S_{\epsilon},$$

va $\lambda \rightarrow +\infty$ $\mathfrak{Q} \in S_{\varepsilon}$ da $F_2 \mathfrak{Q}$ integral eksponensial kichik bo'ladi. II bobdagi 1-teoremani $F_1 \mathfrak{Q}$ integralga qo'llab, (11) formulani hosil qilamiz. Lemma isbot bo'ldi.

T e o r e m a. $t \rightarrow +\infty$ da ushbu

$$\Phi \mathfrak{Q} \sim 1 - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathfrak{Q}^{(k)} \mathfrak{Q}^{(k-1)!}}{t^{2k}} \quad (12)$$

asimptotik yoyilma o'rinli bo'ladi.

I s b o t i.

$$\Phi \mathfrak{Q} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} F \mathfrak{Q}, \quad F \mathfrak{Q} = \int_t^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} t e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^{+\infty} \mathfrak{Q} + v \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{2}v} dv.$$

Demak, yuqoridagi lemmadan $f \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q} + v \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{t^2}{2}$, $f \mathfrak{Q} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \mathfrak{Q}^{(k-1)!}$

desak, (11) formuladan (12) formula kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi [22,(297-298)].

3.2 $\Gamma(\lambda)$ tipdagi integrallarni asimptotik baholash

a) Ushbu

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} u^{\lambda-1} e^{-u} du \quad (1)$$

funksiyani t o'zgaruvchining yetarli katta qiymatlarida o'zgarish xususiyatlarini xarakterlaydigan asimptotik formula keltirib chiqaramiz. Bu yerda Γ - Eylerning gamma-funktsiyasi.

1-teorema. $t \rightarrow +\infty$ da ushbu

$$\Gamma(\lambda) = t^{\lambda-1} e^{-t} \sqrt{2\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \quad (2)$$

asimptotik formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. (1) integral II-bobning 2.1 paragrafidagi (1) ko'rinishida bo'lmaydi. Shuning uchun dastlab uni o'sha ko'rinishga keltirib olamiz. Integral ostidagi $u^{\lambda-1} e^{-u}$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga $u > 0$ yarim o'qdagi ($t \rightarrow +\infty$ da cheksizlikka intiluvchi) $u_0 = t$ nuqtada erishadi. Bu yerda u o'zgaruvchisini $u = tv$ shaklda almashtiramiz. Natijada

$$\Gamma(\lambda) = t^{\lambda-1} \int_0^{\infty} e^{-tv} v^{\lambda-1} dv \quad (3)$$

Oxirgi integral 3.1 paragrafdagi (11) ko'rinishga ega, bunda $\lambda = t$, $S(v) = \ln v - v$ va $f(v) = 1$. $S(v)$ funksiyaning maksimum nuqtasi $v_0 = 1$ va $S(v_0) = -1$, $S''(v_0) = -\frac{1}{v_0^2}$, $S'''(v_0) = -\frac{1}{v_0^3}$.

II-bobning 1-paragrafidagi (ya'ni 2.1 dagi) 2-teoremani qo'llash maqsadida integralni

$$\Gamma(\lambda) = t^{\lambda-1} \left(\int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{3/2} + \int_{3/2}^{\infty} \right) e^{-tv} v^{\lambda-1} dv$$

ko'rinishda integrallaymiz. 1-lemmaga ko'ra

$$\left(\int_0^{1/2} + \int_{3/2}^{\infty} \right) e^{t\psi(v-v_0)} dv$$

integrallar $e^{-t} = e^{t\psi(1)} = e^{t\psi(0)}$ ga nisbatan eksponensial kichik bo'ladi.

$$\int_{1/2}^{3/2} e^{t\psi(v-v_0)} dv$$

integralning asimptotikasini 2.1 dagi

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(\lambda_0)}} e^{\lambda S(\lambda_0)} f(\lambda_0) + O(\lambda^{-1})$$

(19) formula bo'yicha hisoblab,

$$t^t \int_{1/2}^{3/2} e^{t\psi(v-v_0)} dv = t^t \sqrt{-\frac{2\pi}{t\psi''(1)}} e^{t\psi(1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) = t^t \sqrt{\frac{2\pi}{t^2}} e^{-t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) = t^t \frac{\sqrt{2\pi}}{t} e^{-t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right),$$

$$\Gamma(n+1) = t^t e^{-t} \sqrt{2\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \quad n \rightarrow +\infty,$$

(2) formulani hosil qilamiz.

Teorema isbot qilindi [22,(297-298)].

(2) dan faktorial uchun Stirlingning asimptotik formulasi kelib chiqadi:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad n \rightarrow \infty.$$

b) Ushbu

$$S(n) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \quad n \geq 1 \quad (4)$$

yig'indi funksiyani asimptotik baholash masalasini qaraymiz va $n \rightarrow \infty$ da $S(n)$ ning o'zgarishini tavsiflovchi asimptotik formulani keltirib chiqaramiz [25,(26-27)].

L e m m a. Aytaylik,

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda \varphi(x)} dx \quad (5)$$

integraldagi $\varphi(x)$ funksiya $\max_{x \in [a, b]} \varphi(x)$ qiymatga $x = a$ nuqtada erishsin va $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda \varphi(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} \quad (\lambda \rightarrow +\infty, \lambda \in S_\varepsilon : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

bo'ladi. Uning bosh hadi

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} e^{\lambda \varphi(a)} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda \varphi''(a)}} \left(f(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \quad (6)$$

bo'ladi.

T e o r e m a. (4) yig'indi funksiya uchun ushbu

$$S(n) = c\sqrt{n} + O(1) \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (7)$$

asimptotik formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $c = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, π -aylana uzunligining diametriga nisbati $\pi = 3,14\dots$

I s b o t i. Dastavval (4) yig'indi funksiyani (5) integral ko'rinishida ifodalaymiz:

$$S(n) = n \int_0^{+\infty} e^{-nx} (1+x)^n dx = n \int_0^{+\infty} e^{n\varphi(x)} dx = n S_1(n) \quad (8)$$

bunda $S_1(n) = \int_0^{+\infty} e^{n\varphi(x)} dx$, $\varphi(x) = -x + \ln(1+x)$. $S_1(n)$ integralni $F(\lambda)$ integralga taqqoslasak, $f(x) = 1$, $\lambda = n$, $a = 0$, $b = +\infty$ bo'lishini ko'ramiz. $\varphi(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga erishgani va $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow \varphi''(0) = -1 \neq 0$ bo'lgani uchun (6) formulada $\varphi(0) = 0$, $\lambda = n$, $\varphi''(0) = -1$, $f(0) = 1$ ekanligini e'tiborga olsak, (6) formuladan

$$S_1(n) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (9)$$

formulaga ega bo'lamiz. Nihoyat, (8) va (9) formulalardan (7) formulani hosil qilamiz.

Teorema isbot qilindi.

Uchinchi bob bo'yicha xulosa

Uchinchi bobda dissertatsiyaning asosiy ilmiy natijalari keltirilgan. Unda Laplas metodi yordamida $F(\lambda) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(\lambda) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, \lambda) dx$ tipdagi integrallar asimptotik baholangan.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiyasining birinchi bobida mavzuga oid asosiy tushunchalar bayon qilingan. Unda asimptotik baholar, asimptotik ketma-ketliklar va ularning xossasi, asimptotik yoyilmalar va darajali asimptotik qatorlar ustida amallar o'rganilgan.

Ikkinchi bobda matematik analizning elementar asimptotik metodlari (Laplas metodi, statsionar fazolar metodi va pereval (davon) metodi) mavjud adabiyotlardan foydalangan holda, ijodiy tahlil qilingan.

Uchinchi bobda dissertatsiyaning asosiy ilmiy natijalari keltirilgan. Unda Laplas metodi yordamida $F(\lambda) = \int_a^x f(t) dt$ va $\Phi(\lambda) = \int_a^{+\infty} \varphi(t, \lambda) dx$ tipdagi integrallar

asimptotik baholangan. $\Phi(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ xatolar integrali uchun

$\Phi(\lambda) \sim 1 - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!!}{t^{2k}} \quad (t \rightarrow +\infty)$ asimptotik yoyilma,

$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} u^\lambda e^{-u} du$ gamma funksiya uchun $\Gamma(\lambda+1) = t^\lambda e^{-t} \sqrt{2\pi t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (t \rightarrow +\infty)$

asimptotik formula, $S(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \quad \lambda \geq 1$ yig'indi funksiya uchun

$S(\lambda) = c\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \lambda \rightarrow +\infty$ asimptotik formula keltirib chiqarilgan. Bu integrallar dastlab o'zgaruvchilarni almashtirish yordamida Laplas integrali ko'rinishiga keltirilgan va Laplas metodi yordamida asimptotik baholangan. Yangi asimptotik formulalar yaratilgan.

Olingan natijalar matematik analizning asimptotik metodlarini o'rganishda, ayrim maxsus funksiyalarni ilmiy tadqiq qilishda asimptotik formulalardan foydalanish imkonini beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Karimov I. O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida. Toshkent. "O'zbekiston" - 2011., 440b.
2. Karimov I. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch. Toshkent. "Ma'naviyat" - 2008., 175b.
3. Karimov I. "Barkamol avlod mamlakatimizni rivojlantirishda hal qiluvchi kuch". 16 – 17 fevral kunlari Toshkentda o'tkazilgan "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzuidagi xalqaro konferensiyada so'zlangan nutq. "Toshkent oqshomi" gazetasi, 2012 yil 20 fevral.
4. Karimov. I. O'zbekiston buyuk kelajak sari. Toshkent. "O'zbekiston" - 1999., 686b.
5. Karimov. I. Yangicha fikrlash va ishlash davr-talabi. Asarlar, 5-jild. Toshkent. "O'zbekiston" - 1997., 382b.
6. Karimov. I. Biz kelajagimizni o'z qo'limiz bilan quramiz. Asarlar, 7-jild. Toshkent. "O'zbekiston" - 1999., 413b.
7. Karimov. I. Vatan sajdagoh kabi muqaddasdir. Toshkent. "O'zbekiston" - 1995., 278b.
8. O'zbekiston Respublikasi. "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" // Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.:1998., 64b.
9. O'zbekiston Respublikasi. "Ta'lim to'g'risidagi qonun" // Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.:1998., 64b.
10. Брëйн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961., 248с.
11. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. - М.: Наука, 1978., 376с.
12. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.—М.: Наука, 1979., 320с.

13. Копсон Э. Асимптотические разложение, пер. с англ., М. : Мир, 1966., 160с.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного,—М.: Наука, 1987., 736с.
15. Никольский С. М. Курс математического анализа.— М.: Наука, 1990 —Т. 1., 528с.
16. Прилепко А. И., Калинин Д. Ф. Асимптотические методы и специальные функции. — М.: МИФИ, 1980., 107с.
17. Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1, Рига, 1974., 390с.
18. Сидиров Ю.И. , и др. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989., 477с.
19. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1979., 319с.
20. Титчмарш Е. Теория функций.— М.: Наука, 1980., 463с.
21. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977., 368с.
22. Xushvaqtov M., Qaimova L., Xatolar integrali va gamma-funksiyani asimptotik baholash. “Fanning dolzarb muammolari yosh olimlar nigohida” Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari.-Т.: 2012у., 297-298b.
23. Вазов В., Форсайт Д., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963., 464с.
24. Эрдейн А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962., 128с.
25. Qaimova L., Xushvaqtov M., Yig’indi funksiyani asimptotik baholash. “Tafakkur sarchashmalari” Magistrlarning ilmiy-amaliy maqolalari to’plami.- Т.: 2012у., 26-27b.
26. М. Хушвақтов. Асимптотические разложения для числа некоторых конечных абелевых расширений поля рациональных чисел. Докл. Ан УзССР 1986, №2, С. 6-8 ст.

27. М. Хушвақтов. Об асимптотической распределении специальных примарных циклических расширений поля рациональных чисел. Respublika ilmiy va ilmiy-metodik konferensiya materiallari to'plami, 12-13 mart, Toshkent, 2010y., 504-505b.
28. www.dic.academic.ru
29. www.mat.net.au
30. www.math-life.com
31. www.page-book.ru