

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI**

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika - matematika fakulteti

Matematika yo`nalishi

**5460100 – matematika yo`nalishi bo`yicha bakalavriyat
bosqichining bituruvchisi**

**ISROILOVA NAIMA ERKINJONOVNANING
EGRI CHIZIQLAR**

Mavzusidagi

**BITIRUV
MALAKAVIY
ISHI**

Ilmiy rahbar:

professor: R.Ibragimov

NAMANGAN – 2012

K i r i s h.

Vatanimiz kelajagi, xalqimizni ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib ulg'ayib qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmashimiz kerak¹.

Bugun biz tarixiy bir davrda-xalqimiz o'z oldiga ezgu va ulug' maqsadlar qo'yib, kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz. Biz o'z taqdirimizni o'z qo'limizga olib, amaliy qadriyatlarimizga suyanib, shu bilan birga taraqqiy topgan davlatlar tajribasini hisobga olgan holda, mana shunday oliyanob intilishlar bilan yashayotganimiz, xalqimiz asrlar davomida orziqib kutgan ozod, erkin va farovon hayotni barpo etayotganimiz, bu yo'lda erishayotgan yutuqlarimizni xalqaro hamjamiyat tan olgani-bunday imkoniyatlarning barchasini aynan mustaqillik berganini bugun hammamiz chuqur anglaymiz. Bugungi kunda yoshlarimiz nafaqat o'quv dargohlarida, balki radio-televideniye, matbuot, internet kabi vositalar orqali hamrang-barang axborot va ma'lumotlarni olmoqda. Jahon axborot maydoni tobora kengayib borayotgan shunday sharoitda yoshlarimizni ongini faqat o'rab-chirmab, uni o'qima, buni ko'rma, deb bir tomonlama tarbiya berish, ularni atrofini temir devor bilan o'rab olish, hech shubhasiz, zamonning talabiga ham, bizning ezgu maqsadlarimizga ham to'g'ri kelmaydi. Nega deganda, biz yurtimizda ochiq va erkin demokratik jamiyat qurish vazifasini o'z oldimizga qat'iy maqsad qilib qo'yganmiz. Binobarin, biz davlatimiz kelajagini o'z qobig'imizga o'ralib qolgan holda emas, balki umumbashariy va demokratik qadriyatlarni chuqur o'zlashtirgan holda tasavvur etamiz. Hozirgi kunda O'zbekistonda ham ta'lim sohasida qator islohotlar olib borilmoqda. Bu islohotlarning samarasini biz Toshkentda 16-17 fevral kunlari „Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash –mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning eng muhim sharti“ mavzusida xalqaro konferensiya bo'lib o'tdi. Unda yirik xalqaro tashkilotlar va moliya institutlari, BMT, Osiyo taraqqiyot banki, Jahon banki, Islom taraqqiyot banki vakillari va bir qator dunyoning 48 davlatidan ta'lim tizimi rahbarlari, olimlar, mutaxassislar ishtirok etdi.

Mamlakatimizda istiqbolning ilk yillaridan barkamol avlodni tarbiyalash masalasi davlat siyosati darajasiga ko'tarildi. Shu maqsadda mamlakatimizda ta'lim sohasini bosqichma-bosqich, aniq maqsadga yo'naltirilgan holda isloh qilish bo'yicha uzoqni ko'zlagan dasturlar izchil amalga oshirilmoqda. Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov tashabbusi bilan qabul qilingan "Ta'lim to'g'risidagi qonun va kadrlar tayyorlash milliy dasturi" barkamol avlodni voyaga yetkazish, yetuk mutaxassislar tayyorlash, yoshlarning puxta bilim olishi, iqtidorini to'la namoyon etishi, jamiyatda o'z o'rnini topishida muhim omil bo'lmoqda. O'zbekiston Respublikasining „Talim to'g'risida“ va „Kadrlar tayyorlash milliy dasturi to'g'risida“ gi qonunlari hamda O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 6-oktyabrdagi kadrlar tayyorlashtizimini tubdan isloh qilish, o'sib kelayotgan har bir yosh avlodni voyaga yetishida bu borada muhim ishlar amalga oshirilmoqda. Ta'lim–tarbiya tizimi o'quvchilarning ongini shakllantirishga xizmat qiladigan bir sohadir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi uch boqichda amalga oshirish va ularning sifatli bajarilishi keyingi bosqichlarga sabab bo'ladi. Birinchi bosqich 1997-2001 yillarni o'z ishiga olib, bu bosqichda asosiy ishlardan biri akademik litseylar va kasb–xunar kollejlari tizimidan iborat. 1999-2005 yillar oralig'i esa ularni moddiy va moliyaviy ta'minlash dasturi ishlab chiqildi. Akademik litseylar va kollejlarni qayta ta'minlash, rekonstruksiya qilish, ularni moddiy bazasini ta'minlash masalalari esa 3-bosqichda 2005-yildan keyin amalga oshirildi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Respublika Oliy Majlisi 9 sessiyasida so'zlagan nutqi va ta'lim

¹ I.A. Karimov Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch, Toshkent., Manaviyat., 2010.

tarbiya kadrlar tayyorlash tizimining tubdan isloh qilish barkamol avlodni voyaga yetkazish to'g'risidagi formasi muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Bu esa oliy maktabda o'qitish sistemasini isloh qilishni taqazo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturini amalga oshirish vazifalardan biri hisoblanadi.

XX asrning so'nggi yillari o'zbek xalqi tarixida butunlay yangi davrni boshlab berdi. Bu Mustaqillik, Millat tushunchalari bilan bog'liq bo'lgan Milliy uyg'onish, butunlay yangi sharoitlarda butunlay yangi tarixiy sharoitlarda butunlay yangi milliy davlatchilikka asos solish singari adabiyotga daxldor hodisadir. O'zbekiston Respublikasi o'zining juda katta aqliy va jismoniy imkoniyatlarini namoyon etib, jahon siyosatiga eng zamonaviy fikrlar bilan kirib borayotgan, o'zining novatorlik kuchini ko'rsatayotgan, davlat hayotida yuz berayotgani singari jahon ijtimoiy siyosiy jarayonlarini ham tubdan isloh qilishga ta'sir qiladigan g'oyatda yangi imkoniyatlarini ko'rsatib bormoqda. Xalqimiz o'z boshidan kechirgan mustamlaka davrini bir ko'z oldimizga keltiraylik. Qariyb 150 yil davom etgan, tariximizning tom ma'nodagi qora kunlari bo'lmish, o'sha zamonda bir paytlar o'zining qudratli davlatchiligi, buyuk farzandlari, yuksak ilmu madaniyati, obod shahar va qishloqlari bilan dunyoni hayratda qoldirgan el-yurtimiz qanday og'ir mashaqqatlarga duchor bo'lganini yaxshi bilamiz. Lekin ana shunday daxshatli davrda ham har qanday zulim va istibdodga qaramasdan xalqimiz o'zini, o'zligini yo'qotmadi. Tili va dinini, iymon – e'tiqodini saqlab qoldi. Boshqa bir dunyo tarixiga tayanadigan bo'lsak biz boshqa xalqlar ham ozodlik bilan mustaqillikni qo'lga kiritish, o'z davlatchiligini havas qilsa arziydigan fuqarolik jamiyatini mustahkamlash, ta'lim-tarbiya va ilm-fan bo'ladimi o'zining be'qiyos qobiliyat va salohiyatini ishga solish, uni ro'yobga chiqarish hisobidan taraqqiyotga erishganini ko'ramiz. Masalan, Yaponiya yoki Janubiy Korayani olaylik. Bu mamlakatlarning ikkinchi jahon urushidan keyin qanday og'ir holatga tushib qolganini hammamiz yaxshi bilamiz. Axir bu o'lkalarda mo'l-ko'l homashyo manbalari, mineral resurslar deyarli yo'q bo'lsa. Albatta, bu borada o'sha paytda dunyoda mavjud bo'lgan siyosiy omillar, xalqaro vaziyatlarning ta'sirini inkor etib bo'lmaydi. Lekin yapon va koreys xalqi asrlar davomida shakllanib, katta bunyodkor kuchga aylanib o'ziga xos milliy ma'naviyati hisobidan ham rivojlanib borayotgani bugungi kunda ham hech kimga sir emas.

O'zbekistonda ham mustaqillikka erishgandan so'ng fan va texnika sohasida juda katta e'tibor qaratilib, bu sohani rivojlanib borishiga ahamiyat qaratilgan. Jumladan matematika, informatika va ijtimoiy va tabiiy jarayonlarni matematik modellash sohalari ham shular jumlasidan. Bu sohalarda bir necha bor ilmiy izlanishlar, tatqiqodlar olib borilib, bu sohadagi yutuqlar nafaqat respublikamizda, balki boshqa mamlakatlarda ham qator yutuqlarga erishmoqda.

Milliy mentalitetimizga ko'ra, o'zbek oilalari azaldan ko'pbolalik bo'lib, har bir ota-ona farzandlarini sog'lom, barkamol, kasb-hunarli va oliy ma'lumotli, bilimli bo'lib voyaga yetishlari uchun tinmay harakat qilishgan.

Prezident I.Karimov O'zbekiston Respublika Oliy Majlisining 1997-yil 29 avgustdagi IX sessiyasidagi nutqida shunday degan edi:

«Bu muqaddas zaminda yashayotgan har qaysi inson o'z farzandining baxtu saodati, fazlu kamolini ko'rish uchun butun hayoti davomida kurashadi, mehnat qiladi, o'zini ayamaydi»

O'zbek millati sobiq sho'rolar davrida ham o'zining milliy o'zligini yo'qotgan emas.

Bugungi kunda milliy an'analarimizni qaytadan tiklash, millatimizga mos ta'lim-tarbiyani shakllantirish uchun qulay imkoniyatlar mavjud.

Prezident I.Karimov xalqning azaliy turmush tarzi, an'analari, urf-odatlarini va ko'nikmalarini yuksaltirish amalga oshirish mumkin bo'lib qoldi.

Mamlakatimiz mustaqillikka erishganidan keyin xalq xo'jaligini tubdan isloh qilishda ta'lim tizimiga alohida e'tibor bilan qarab kelinmoqda.

Sobiq mustabid tuzumda shakllangan ta'lim tizimi 4 yillik boshlang'ich ta'lim, 9 yillik to'liqsiz o'rta ta'lim va 2 yillik to'liq o'rta ta'limdan iborat bo'lib, bu tizim yosh avlodni

kommunistik tuzum g'oyalari bilan tarbiyalagan va ushbu tuzilish ehtiyojlariga mos holda ta'lim-tarbiya berar edi.

Bu masalani ijobiy hal etishda chet tillarida o'qitish samarasini ko'tarishga alohida e'tibor berish kerak.

Muhtaram Prezidentimiz aytganlaridek, bizga bitiruvchilar emas, maktab ta'lim - tarbiyasini ko'rgan va mustaqil fikrga ega bo'lgan shaxslar kerak.

Respublikamizda demokratik huquqiy jamiyat asoslarini faol ravishda vujudga keltirar ekanmiz, o'qituvchi va o'quvchi munosabatlarida majburiy itoatkorlik o'rniga ongli intizom egallashiga intilishimiz kerak.

Ma'lumki, ta'lim har bir jamiyatning ajralmas tarkibiy qismi bo'lib uning rivojlanish ko'rsatkichi hisoblanadi. Ijtimoiy tajribaning bog'lovchi bo'g'ini sifatida u madaniy an'analar butunligi vorisiyligini hamda jamiyat taraqqiyotini ta'minlaydi.

Ta'lim sohasi O'zbekiston rahbariyati va hukumati siyosatining ustuvor yo'nalishidir.

Ta'lim to'g'risidagi qonun O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisining 1997 yil 29 avgustdagi IX sessiyasida qabul qilingan.

«Ta'lim to'g'risida»gi qonun 5 bob, 34 moddadan iborat.

Har kimning bilim olish huquqiga ega ekanligi, bepul umumiy ta'lim olish davlat tomonidan kafolatlanishi, maktab ishlari davlat nazoratida ekanligi qonunning «Ushbu qonunning maqsadi» deb nomlangan 1- moddasida o'z ifodasini topgan.

O'zbekiston Respublikasidagi barcha fuqarolar bir xil huquq va erkinliklarga ega bo'lib jinsi, irqi, millati, dini, ijtimoiy kelib chiqishi, e'tiqodi shaxsiy va ijtimoiy mavqeidan qat'iy nazar qonun oldida tengdir. Ta'lim to'g'risidagi qonunning 4- moddasi yuqorida keltirilgan O'zbekiston Respublikasi Konstitusiyasining 18- moddasiga mos keladi.

Bu tamoyillarga ta'lim tizimining barcha bo'g'inlariga o'quvchilik va talabalikka o'qishga qabul qilishda amal qilib kelinmoqda.

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 1993 yil 5 fevraldagi 60- sonli «O'zbekiston Respublikasi Oliy o'quv yurtlariga abituriyentlarni test sinovi asosida tanlab olish haqida» gi qaroriga ko'ra abituriyentlari Davlat test markazi test sinovida to'plagan ballariga asosan o'qishga qabul qilmoqda.

O'tgan yillar davomida mamlakat ta'lim tizimida hamdo'stlik davlatlari orasida birinchilardan bo'lib davlat ta'lim standartlari, o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodi yaratiladi hamda bosqichma-bosqich amaliyotga joriy etish orqali ta'lim jarayonining mazmuni tubdan takomillashtirildi.

«Ta'lim to'g'risida»gi qonunning 7- moddasi (Davlat ta'lim standartlari)ga binoan O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi 1999 yil 16 avgustda «Umumiy o'rta ta'limning davlat ta'lim standartlarini tasdiqlash to'g'risida» qaror qabul qildi.

Ta'lim tizimining yagona va uzluksizligini ta'minlash maqsadida O'zbekiston Respublikasida maktabgacha ta'lim, umumiy o'rta ta'lim, o'rta maxsus, kasb- hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash hamda maktabdan tashqari ta'lim turlari faoliyat ko'rsatib kelmoqda.

O'qituvchilarning mas'uliyatli mehnati va ularga g'amxo'rlik ko'rsatish hamisha davlatning diqqat markazida turadi.

Keyingi yillarida xalq ta'lim xodimlarining ish haqi miqdorlari bir necha marta oshirildi.

Hozirgi kunda kadrlar tayyorlash milliy dasturi O'zbekiston Respublikasi «Ta'lim to'g'risida» gi qonuni asosida milliy tajriba tahlili va ta'lim tizimidagi umumjahon yutuqlarini e'tiborga olgan holda ishlab chiqarish, kadrlar tayyorlash milliy dasturi yuksak kasb- hunar madaniyati ijodiy va ijtimoiy faollikni o'zida mujassamlashtirilgan, ijtimoiy-siyosiy hayotda mo'ljallarni to'g'ri ola biladigan, istiqbol vazifalarni ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodini shakllantirishga yo'naltirilgan.

Milliy dasturning maqsadi va vazifasi ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yuksak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlashdan iborat milliy tizimini yaratishdir.

2005 yildan keyingi yillarga rejalashtirilgan uchinchi bosqichda XXI asr raqobatbardosh kadrlarini tayyorlashning yangi tizimini taraqqiy ettirish va takomillashtirish nazarda tutilgan kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh sub'ekt sifatida ko'riladi. U bir vaqtning o'zida ta'limiy xizmatlarning ham iste'molchisi, ham yaratuvchisi deb qaraladi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturining pirovard natijasi shaxsning o'qimishli va yaratuvchi bo'lib shakllanishidir.

Agarda insonda yaratuvchilik mahorati, malakasi bo'lmasa iqtisodiyotning raqobatbardoshligiga bardosh bera olmaydi, inson jamiyatning farovonligini ta'minlay olmaydi.

Inson omili mazmunida Milliy dastur quyidagi eng zarur vazifalarni hal etishni nazarda tutadi. Ta'limning har bir bosqichida inson omili bilan bog'liq bo'lgan dolzarb vazifalarni hal qilish nazarda tutilgan.

Mazkur model uch qutbdan iborat.

Shaxs uning birinchi qutbi bo'lib, uzluksiz ta'lim tizimida bilimlarini iste'mol qilish va yaratish borasidagi o'zining fuqarolik burchini amalga oshiruvchi inson.

Davlat va jamiyat shaxsning fuqarolik burchlarini samarali amalga oishirilishini va iqtisod tarmoqlarini malakali kadrlar bilan ta'minlash bo'yicha milliy vazifalarni hal etadi.

Iqtisodiyot esa davlat byudjeti yoki kontrakt asosida o'zi uchun zarur bo'lgan kadrlar yetishtirishni moddiy texnika bazasi va moliya bilan ta'minlaydi.

Shaxs kadrlarni tayyorlash O'zbekiston modeli, davlat va jamiyat iqtisodiyoti kadrlar tayyorlash tizimining ko'p qutbliligi «Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dastur to'g'risida» qonunining umumqonun, barchaga taalluqli ekanligini namoyon etadi.

Uzluksiz ta'lim tizimining mazmuni va tuzilmasini isloh qilmay turib, milliy dasturni amalga oshirib bo'lmaydi. Dastlabki kunlardan boshlab yurtimizda jamiyatni isloh qilish va yangilash jarayonining eng muhim bo'g'ini jamiyatdagi demokratik o'zgarishlarning iqtisodiyotni barqaror rivojlantirishning zaruriy va majburiy sharti sifatida ta'lim sohasini isloh qilish masalasiga katta e'tibor bilan qaralmoqda.

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»ning qabul qilinishi va shu dastur asosida rejalashtirilgan ishlar muvaffaqiyatli amalga oshirib kelinmoqda.

So'nggi yillarda yangi tipdagi o'rta hunar o'quv muassasalari akademik litseylar va kasb-hunar kollejalri tarmog'i shakllandi.

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» yosh avlodga uzluksiz ta'lim berish va uni tarbiyalash jarayonini yaxlit qamrab oladigan yagona ta'lim majmuidir. Bunda ta'lim tizimining har bir bo'g'ini alohida o'rin va mas'uliyatga ega. Dasturni to'liq amalga oshirish, qo'yilgan vazifalarga erishish na shu bo'g'inlarning holati va rivojlanish darajasiga ularning o'zaro uyg'unligiga bog'liqdir.

«Ta'lim to'g'risida» gi qonun qabul qilingunga qadar mamlakatimizda faoliyat ko'rsatib kelgan ta'lim tizimining umumta'lim maktablari bo'g'inida ham katta muammolar to'planib qolgan edi.

O'tgan yillar davomida mamlakat ta'limi tizimida hamdo'stlik davlatlari orasida birinchilardan bo'lib davlat ta'lim standartlari, o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodi yaratildi hamda bosqichma- bosqich amaliyotga joriy etish orqali ta'lim jarayonining mazmuni tubdan takomillashtirilmoqda. O'zbekiston Respublikasi xalq ta'limi hamda oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining qo'shma xay'at yig'ilish qaroriga ko'ra 2010-2011 o'quv yilidan boshlab yangi o'quv reja va g'oya dasturlari asosida ish olib borilmoqda.

2008-yilda boshlanib hozirgi kunda tobora kuchayib va chuqurlashib borayotgan jahon moliyaviy-iqtisodiy inqiroziga hozirgi kunda ko'pgina xalqaro ekspert va mutahasislar bu

inqirozning sabablari yanada avj olishi bilan bog'liqdir. Haqiqatdan ham, bugungi kunning dolzarb muammosi—jahon moliyaviy inqirozi, uning ta'siri va salbiy oqibatlarini oldini olish va chora-tadbirlar izlashdan iboratdir. Bu inqiroz Amerika Qo'shma Shtatlarida ipotekali kreditlash tizimida ro'y bergan tanglik holatidan boshlandi.

So'ngra bu jarayonning miqyosi kengayib, moliyaviy inqirozga aylanib ketdi. Jahon moliyaviy inqirozining har bir davlatga ta'siri, undan ko'riladigan zararning darajasi va qo'llash birinchi navbatda bu davlatlarning iqtisodiyotiga va bank tizimiga ishonchli va barqarorligini isbotlaydigan hujjat yo'q. Jahon moliyaviy inqirozidan imkon qadar tez chiqish, uning oqibatlarini yengillashtirish ko'p jihatdan har qaysi davlat doirasida va umuman, dunyo hamjamiyati miqiyosida qabul qilinayotgan chora tadbirlarning qanchalik samaradorligiga bog'liq.

Ma'muriy-buyrug'bozlik tizimidan boshqaruvning bozor tizimiga o'tishning tadrijiy yondashuvni: „Yangi uy qurmasdan turib, eskisini buzmag“ degan hayotiy tamoiliga tayangan holda, islohotlarni izchil va bosqichma-bosqich oshirish yo'lini tanladik. Shu o'rinda O'zbekistonda moliyaviy-iqtisodiy byudjet, bank-kredit tizimi, shuningdek, iqtisodiyotning real sektori korxonalari va tarmoqlarini barqaror hamda uzluksiz ishlashini ta'minlash uchun yetarli darajada mustahkam zahiralar yaratilganini va zarur resurslar bazasi mavjud ekanligini takidlash joiz.

O'zbekistonda jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozining oqibatlarini bartaraf etish, bank-moliya tizimini mustahkamlash, real iqtisodiyot korxonalariga yordam ko'rsatish, yangi ish o'rinlarini yaratish va aholini ijtimoiy ximoya qilish kabi chora-tadbirlarni amalga oshirishga e'tibor qaratish bilan birga biz ertangi kunimizni, kelajagimizni aslo unutmasligimiz zarurdir.

Biz hozirdanoq taraqqiyotimizni inqirozdan chiqish va inqirozdan keyingi davri haqida chuqur o'ylashimiz, bu borada uzoq muddatga mo'ljallangan dastur ishlab chiqish haqida bosh qotirishimiz kerak. Bu dastur iqtisodiyotimizning asosiy tarmoqlarini modernizatsiya qilish va texnik yangilash, mamlakatimizning yangi marralarni egallashi uchun kuchli turtki beradigan va jahon bozorida raqobatbardoshligini ta'minlaydigan zamonaviy innovatsion texnologiyalarni joriy qilish bo'yicha maqsadli loyihalarni o'zida mujassam etishi lozim. Bugungi kunda mamlakatimizni, avvalo iqtisodiyotimizni islox qilish, uning tarkibiy tuzilishini diversifikatsiya qilish borasida amalga oshirilayotgan, har tamonlama asosiy va chuqur o'ylangan siyosat bizni inqirozlar va boshqa taxdidlarning salbiy ta'siridan himoya qiladigan kuchli to'siq, aytish mumkinki, mustahkam va ishonchli himoya vositasini yaratdi. Kichik biznes va xususiy tadbirkorlik bugungi kunda mamlakatimizdagi siyosiy barqarorligini kafolati va tayanchiga, yurtimizni taraqqiyot yo'lida faol harakatlantiradigan kuchga aylanib bormoqda.

Prezident I. Karimov 2009 yilning 29 yanvarida 2009 yilning asosiy yakunlari va 2010 yildan O'zbekistonni ijtimoiy iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustivor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi jaxon moliyaviy iqtisodiy inqirozi chuqur tus olgan bir sharoitda o'tgan 2009 yil yakunlarini tanqidiy baholab va shu asosda 2010 yilda mamlakatimizni ijtimoiy iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustivor yo'nalishlarni belgilab olishimiz kerakligini ta'kidlab o'tdi. O'tgan 2009 yilda bir talay muammolarga duch kelindi. Jumladan, eski ma'muriy buyruqbozlik, taqsimlash tizimidan bozor munosabatlariga asoslanib boshqaruv tizimiga o'tish, O'zbekiston hukumatini 2009-2012-yillarga mo'ljallab qabul qilgan inqirozga qarshi dastur bo'yicha katta ishlar amalga oshirildi. Mamlakatimizda moliyaviy iqtisodiy byudjet, bank- kredit tizimining barqaror hamda uzluksiz ishlashini ta'minlash iqtisodiyotning real sektori tarmoqlari va korxonalarida yordam ko'rsatish amaliy samarasini berdi.

Amalga oshirilgan tadbirlarimiz qatorida moliya bank tizimini mustahkamlash masalasiga alohida e'tibor qaratilgan. So'nggi ikki yilda tijorat banklarining umumiy kapitali 2 barobar ko'paydi. O'zbekiston bank tizimi bugungi kunda xalqaro talablarga qat'iy javob beradigan eng barqaror tizimlardan biri hisoblanadi.

Hozirgi kunda banklarning umumiy aktivlari aholi va yuridik shaxslar hisob raqamlaridan mablag'lar miqdoridan 2 barobardan ham ortiq bo'lib, bu ularning to'liq himoyasini va to'lovlarining o'z vaqtida amalga oshirilishini kafolatlaydi. Jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozi sharoitida iqtisodiyotning real sektori korxonalarini qo'llab-quvvatlash bo'yicha birinchi navbatda ishlab chiqarishni modernizatsiya qilish kooperatsiya aloqalarini kengaytirish mustahkam hamkorlikni yo'lga qo'yish mamlakatimizda ishlab chiqarilgan mahsulotlarga ichki talabni rag'batlantirish masalalari alohida o'rin tutadi.

Davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash maqsadida 50 ta korxonaning byudjet va byudjetdan tashqari jamg'armalarga to'lovlar muddati o'tgan hamda joriy kreditor qarzдорligi qayta ko'rib chiqilgan va ularda 350 milliard so'mdan ortiq mablag'ini qoldirish hisobiga ularning ishlab chiqarish faoliyatni rivojlantirishga imkon berilgan. Davlatimiz rahbari I.A. Karimovning ma'ruzasida 2009 yilda chuqurlashgan jaxon moliyaviy iqtisodiy inqirozi sharoitlarida O'zbekistonda makroiqtisodiy barqarorlik va iqtisodiy o'sishning barqaror sur'atlarini ta'minlashi jahon hamjamiyatida iqtisodiy islohotlarni amalga oshirishning o'zbek modeli sifatida e'tirof etilgan iqtisodiyotni isloh qilishining beshta asosiy tamoyiliga asoslangan va respublikada tanlangan iqtisodiy yo'lning to'g'riligini inkor qilib bo'lmadigan yana bir isboti ekanligi alohida ta'kidlanadi.

2009-yil yakunlariga ko'ra yalpi ichki mahsulotning o'sishi 8,1% ni sanoat mahsulotlari ishlab chiqarish xajmining o'sishi 9% i, qishloq xo'jaligi mahsulotlari 5,7% ni, chakana tovar aylanmasi 16,6% ni pullik xizmatlar ko'rsatish hajmining o'sishi 12,9% ni tashkil qiladi.

Inflatsiya darajasi esa prognoz ko'rsatkichdan oshmadi va 7,4% ni tashkil etdi. Moliya-bank tizimini mustahkamlash bo'yicha ko'rilgan chora-tadbirlari oxirgi ikki yilda banklarning jami kapitalini 2 barobar ko'paytirish va investitsiya maqsadlari uchun banklar kreditlari ulushini 70% gacha oshirish imkonini berdi.

Iqtisodiyotning real sektori korxonalarning moliyaviy barqarorligini birinchi navbatda ishlab chiqarishni modernizatsiya qilish maxsulot tannarxini pasaytirish kooperatsiya aloqalarini kengaytirish, mamlakatimiz ishlab chiqaruvchilari mahsulotlariga ichki talabni rag'batlantirishni hisobiga ta'minlash bo'yicha chora-tadbirlar kompleksi amalga oshirildi.

2009 yilda mahalliyashtirilayotgan mahsulotlar hajmi 2,3 barobar ko'paydi. Maxsulotlarning 120 tadan ortiq yangi turini ishlab chiqarish o'zlashtirildi.

Jahon bozorlaridagi o'ta noqulay sharoitlarda malakatimizning eksport qiluvchi korxonalarni qo'llab-quvvatlash va rag'batlantirish chora tadbirlarini amalga oshirish natijasida eksport hajmi 2,4 % ga o'sishi ta'minlandi.

Iqtisodiyotni tarkibiy o'zlashtirish va ishlab chiqarishni modernizatsiya qilish va texnologik jihatdan yaxshilash, jalb etish birinchi navbatda, to'g'ridan-to'g'ri xorijiy investitsiyalarni jalb etish siyosatini izchil amalga oshiradi.

2009 yilda avtomobilsozlik sanoati, kimyo, oziq-ovqat, engil farmatsevtika sanoatida va boshqa iarmoqlarda yangi ishlab chiqarish quvvatlari ishga tushirildi.

Avtomobil va temir yo'l transporti tizimlari jadal rivojlantirish ishlari faol olib borildi. 2009-yilda ko'rilgan inqirozga qarshi chora-tadbirlar tufayli 940 mingdan ortiq yangi ish o'rni tashkil etildi, shundan qariyb 500 ming ish o'rni qishloq joylarda yaratilgan. Kichik biznes sohasida 390 mingdan ziyod, shu jumladan, xizmat ko'rsatish sohasida 270 mingdan ortiq yangi ish o'rinlari ochildi.

Mamlakatimiz prezidenti o'z ma'ruzasida mavjud hal etilgan muammolarga e'tiborini qaratish hamda 2010-yilda mamlakatimizni ijtimoiy-iqtisodiy muammolarini eng muhim ustuvor vazifalari va yo'nalishlariga batafsil to'xtalib o'tadi.

Mana shu ishlarni amalga oshirishda biz talabalar ham o'z munosib hissamizni qo'shishimiz mumkin.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning «Barkamol avlod yili» davlat dasturi va “2011-yil – Kichik biznes va xususiy tadbirkorlik yili” to'g'risidagi qarorlari va undan kelib chiqadigan vazifalar haqida. Mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarishi mamlakatimiz yigit-qizlarni XXI asr talablariga to'liq javob beradigan har tomonlama rivojlangan shaxslar etib voyaga etkazish uchun zarur shart-sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish maqsadida 2010 yilni «Barkamol avlod yili» deb e'lon qilindi.

Yuqori malakali ish kuchi va yetuk mutaxassis yoshlarsiz buyuk kelajakni qurib bo'lmaydi. Bunday kadrlarni ta'lim tizimi xalq xo'jaligini etkazib beradi. Shuning uchun ta'limdagi davlat ti'lim standartlarini o'quv dasturlari va o'quv adabiyotlarni takomillashtirish o'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyasi keng joriy etish, yoshlarni komil inson qilib tarbiyalash jonbozlik ko'rsatishdagi o'qituvchi va domlalariga e'tiborni yanada oshirish ta'lim-tarbiya tizimini safati jixatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish darkor.

Ta'lim sohasida zamonaviy axborot va kompyuter texnologiyalari, internet tizimlari keng qo'llanmoqda. Zamonaviy usullarini o'zlashtirish bugungi taraqqiyot darajasini belgilab beradigan bunday ilg'or yutuqlarni maktablarga keng kirib borishi zamon talabidir.

Mavzuning maqsadi va vazifasi .

Hayotda turli-tuman shaklli chiziqlar uchraydi. Biz bu chiziqlarni bir-biridan farqlash uchun juda ko'p vaqt talab qilinganligini tarixdan bilamiz. Konus kesimlarga doir chiziqlarni o'rganishga asos solgan, o'z davrining yirik olimlari Menexm, Aristiya, Evklid, Appaloniya kabi ko'plab olimlarning ta'limotlari bizgacha yetib kelgandir. Bir qator yirik matematiklarning qadimgi davrdagi katta problemalardan bo'lgan: „uchburchakni teng uchga bo'lish“, „kubni ikkilash“, „doirani unga teng kvadratga almashtirish“ kabi masalalarni hal qilishga urinishlari natijasida yangi-yangi xossalarga ega bo'lgan chiziqlar aniqlandi. Arximed spirali, sikloida, dinostat kvadratrissasi kabi chiziqlar shular jumlasidan.

XII asrdan boshlab analitik geometriyaning yuzaga kelishi bilan matematika chiziqlarga o'z e'tiborini qaratdi. Bugungi kunda chiziqlar texnikada va fanda keng qo'llanilmoqda, ularni o'rganishga e'tibor ortib bormoqda. Egri chiziqlarni eng sodda shakllarini maktab kursida va litsey kollejlarda aylana, doira, ellips, giperbola, parabolalar bilan tanishganmiz. Mening asosiy maqsadim va vazifam ajoyib egri chiziqlarni o'rganishdan iborat.

DTS talablariga asoslanib matematik tahlil geometriya va boshqa fanlar bo'yicha ayrim egri chiziqlarni o'rgandizm. ularni Kasb – xunar kolleji, akademik litseylarda dars berish jarayonida qo'llay olaman.

Matematiklar dars jarayonida, amaliyotda hech bo'lmaganda oddiy egri chiziqlarni ko'rsatish va matematik ifodasini bilishi kerak. Xususan, aylana, ellips, parabola, giperbola, lemniskatalar, sikloidalar va hokazolarni.

Men manashu oddiy egri chiziqlarni ko'rdim va ish jarayonida bulardan to'la foydalanaman.

Bu ishim doim aktual va doim zamonaviydir. Yoddan chiqarmasligimiz kerak, mening maqsadim shularni o'qib o'rganib, doim ish jarayonida foydalanishdir va men buni ma'lum darajada yoritdim.

Mavzuning dolzarbligi.

Bashariyatning bir necha ming yillik tarixi dalolat beradiki, odamzot ongli hayot kechira boshlagan kunlaridan boshlaboq turli narsalarni sanashga, o'rganishga, vaqtni va yil fasllarini, kabisa yillarini, sayyoralarning xarakat qonunlarini aniqlashga katta ehtiyoj sezganlar. Bular haqidagi ma'lumotlar Misr xromlarida, Bobil va unga qo'shni davlatlarda o'tkazilgan arxeologik qazishlarda topilgan minglab sapol taxtachalarda qadimiy Chin va Xindistonlik allomalarning risolalarida, Janubiy Amerika tub aholisining tarixiy yodgorliklarida o'z ifodasini topgan. Vatanimiz istiqbolga erishgan shu kunlarda, atom asrida, mamlakatimiz va jahon miqyosida rejalashtirib amalga oshirilayotgan olamshumul tadbirlar asrida matematik bilimlarni ongli ravishda, yuqori saviyada egallash hamda uni kundalik ishlarda bevosita tadbir qilish zarurati har bir tadbirkor va sarmoyadorga, moliya xodimi va iqtisodchiga, militsiya va adliya xodimlariga, xullas barcha kasbdagi kishilarga birdek ravshandir. Bulardan aytish mumkinki matematika o'rganish va uni hayotga tadbir qilish har bir inson uchun zamon talabiga aylanmoqda.

Mamlakatimizda uni o'rganish va chet el olimlari bilan tajriba almashish borasida qator yangiliklar kiritilmoqda. O'zbekistonda akademiklarimiz S.X. Sirojiddinov, B.K.Qobulovlar tashkil qilgan Ehtimollar nazariyasi, Funksional analiz, Kibernetik-informatsion texnologiya maktablar nafaqat O'zbekistonda balki butun jahon miqyosida tanilgan. Bu olimlar shogirdlari va davomchilari Sh.Alimov, M.S.Saloxiddinov, A.Saydullayevlar va o'nlab fan doktorlari matematika maktablarini iqtidorli yoshlar bilan to'ldirmoqdalar. Bu olimlarning ilmiy ishlari dunyo miqyosida chop etilmoqda. Bular ijodini o'rganish yoshlar orasida targ'ib qilish dolzarb masaladir.

Tadqiqotning yangiligi

Ish refertiv harakterga ega bo`lib, egri chiziqlar o`zbek tilida bayon etilgan. Tadqiqot obekti va predmeti, adabiyotlar, maqolalar va internet ma'lumotlaridan foydalanib kirish, boblar yozildi.

Tadqiqot obyekti va predmeti

Tadqiqot obyekti kutubxonalar, informatsion resurs markazlari bo`ldi.
Tadqiqot predmeti adabiyotlar, ilmiy maqolalar, internet ma'lumotlaridan iborat.

B M I ning tuzulishi va tarkibi

Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikki bob, xulosa, adabiyotlar ro`yxati va inetrnet ma'lumotlarini o`z ichiga olgan.

Kirish qismida prezidentimizning shu soxaga oid bo`lgan fikrlari bayon etilgan, hamda ishning dolzarbligi maqsadi, vazifalari, amaliy ahamiyati, tadqiqot obyekti va predmeti ko`rsatilgan.

Asosiy qismda egri chiziqlar, egri chiziqlar nazariyasi va ajoyib egri chiziqlar ko`rsatilgan.

MAVZUNING IFODALANISHI VA MAZMUNI.

Bitiruv malakaviy ish to`g`risidagi nizom va Vazirlikning "Oliy ta'lim muassasalarda bakalavrning bitiruv malakaviy ishini bajarishiga qo`yiladigan talablar" to`g`risidagi № 225 inchi buyrug`iga mos keladi.

Isroilova Naimaning Bitiruv malakaviy ishini himoyaga qo`ysa bo`ladi.

Matematika kafedrası professori, f.m.f.n.

R.Ibragimov

Namangan davlat universiteti fizika –
matematika fakulteti matematika yo`nalishi -
5460100 talabasi Isroilova Naimaning “ Egri
chiziqlar” **mavzusidagi Bitiruv Malakaviy
Ishiga** ilmiy rahbar R. Ibragimovning

X U L O S A S I

O`zbekistonda taraqqiyot jadal ravishda rivjlanib bormoqda. Hamon shunday ekan fan va maorif sohalarida ham o`zgarish rivojlanish davr talabiga javob beradigan holda oldinga ketmoqda. yoshlarimizni yashash uchun zamon talabiga javob beradigan sharoitlarni tashkil qilish asosiy vazifasimizdan biridir, shu bilan birga ma'naviy jihatdan mukammal rivojlanagan insonlarni tarbiyalash, ta'lim va maorifni yuksaltirish, milliy madaniyatimizni singirilgan yangi avlodni tarbiyalash dolzarb masaladir.

Matematika hozirgi zamonda keng tadbqiqga ega fanlardan biri bo`lib, barcha yo`nalishlarda o`rganiladi. matematikaning barcha sohalarida egri chiziqlar muhim rol o`ynaydi. Ikkinchi tartibli chiziqlar aslida 2 ta bog`liq miqdorlarning tekislikda tasvirlashdan iborat bo`lib, bu ma'lum jarayonlarni ifodalaydi. Isroilova Naimaning BMI egri chiziqlarga bag`ishlangan bo`lib, u bu sohada ayrim ma'lumotlarni yig`di va o`rgandi. Bu masala doim zamonaviydir. **Bu esa ishni dolzarbligini bildiradi.**

II.ASOSIY QISM.

I.Chiziqlar nazariyasi

II.1-§ .Egri chiziqlar va ularning tenglamalari.

Egri chiziq – fazoda harakatlanuvchi nuqtaning ketma – ket harakatlarining yig`indisi. Egri chiziqlar tekis yoki fazoviy bo`ladilar. Agar egri chiziqning hamma nuqtalari bir tekislikda yotsalar , bu egri chiziq *tekis egri chiziq* deyiladi.

Bularga – aylana, ellips, parabola kiradi.

Agar egri chiziqning hamma nuqtalari bir tekislikda yotmasalar, bu egri chiziq *fazoviy vintli egri chiziq* deyiladi. Vint chizig`i uning o`qi atrofida tekis aylanuvchi to`g`ri chiziq bo`ylab harakat qiluvchi nuqtaning aylanma harakatida hosil bo`luvchi egri chiziq.

Egri chiziqni proyeksiyalarini yasash uchun unda yotuvchi bir nechta nuqtalarning proyeksiyalarini yasash kerak.

Egri chiziqlarning xossalari:

1. Agar nuqta egri chiziqda yotsa, uning proyeksiyalari shu egri chiziqning bir ismli proyeksiyalarida va bir bog`lovchi chiziqda yotadi.

2. Proyeksiyalovchi tekislikda yotuvchi egri chiziqning proyeksiyasi to`g`ri chiziqdir. Sirtning hosil bo`lishi va ularning klasifikatsiyasi.

Sirtlarning hosil bo`lish usullari turlicha, misol uchun bir sirtning o`zi bir necha turlicha chiziqlarning harakatidan hosil bo`lishi mumkin. Misol uchun, doiraviy silindrning yon sirti:

- a) to`g`ri chiziqni qo`zg`almas o`qqa parallel ravishda harakatidan;
- b) egri chiziqni aylantirishdan;
- c) markazi aylana tekisligiga perpendikulyar to`g`ri chiziq bo`yicha siljувchi aylananing harakatidan hosil bo`lishi mumkin. Sirtni hosil qiluvchi to`g`ri chiziq uni *yasovchisi* deb yuritiladi. Yasovchi harakat qiluvchi chiziq, uning *yo`naltiruvchi* deb yuritiladi.

Yasovchisiga qarab, sirtlar chiziqli (yasovchilari to`g`ri chiziq) va chiziqli emas sirtlar (yasovchilari egri chiziq) ga bo`linadi.

Hozirgi zamon matematikasida egri chiziq turlicha ta`riflangan bo`lib, ular orasida Jordan tomonidan keltirilgan ta`rif birmuncha tabiiyroq hisoblanadi. U egri chiziqni nuqtaning uzluksiz harakati natijasida qoldirgan izi sifatida qaragan. Chiziqlar o`z harakatiga ko`ra *elementar*, *oddiy* va *umumiy* egri chiziqlarga ejratiladi. Differensial geometriya kursida elementar chiziqlar o`rganiladi. Ochiq kesmani topologik almashtirish natijasida hosil qilingan figuraga *elementar chiziq yoyi* deb aytiladi. Ochiq kesma, to`g`ri chiziq, parabola, giperbola, aylana, ellips kabi chiziqlar misol bo`ladi.  $x(t)$ ,  $y(t)$  funksiyalar  $[\alpha, \beta]$  segmentda aniqlangan va uzluksiz bo`lsin. Bu fuksiyalardan tuzulgan ushbu

$$\begin{aligned} x &= x(t) & (\alpha \leq t \leq \beta) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{1}$$

sistemani qaraymiz. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olib, x, y larni shu tekislikda biror M nuqtani koordinatalari sifatida qaraymiz. $MqM(x,y)$. M nuqta $[\alpha, \beta]$ dan olingan t ga bog`liq. Ayni paytda,  $M$  nuqta argument  $t$  ning (1) akslantirishdagi aksi (obraz),  $t$  ning o`zi bu akslantirishdagi M nuqtaning asli (proobrazi) bo`ladi. (1) akslantirish yordamida $[\alpha, \beta]$ segmentning aksi tekislikda ushbu ,

$$\tilde{A} = \{(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

to`plamni hosil qiladi. Bu  $G$  to`plamga tekislikdagi egri chiziq deyiladi. Demak, egri chiziq $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz bo`lgan 2 ta  $x(t)$ ,  $y(t)$  funksiyalar yordamida ta`riflanar ekan. Odatda egri chiziqning bunday berilishi uning parametrik ko`rinishda berilishi deyiladi. Bunda t – parametr.

Masalan, $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi, r > 0)$ (2) sistema tekislikda markazi koordinatalar

boshida, radiusi R ga teng bo'lgan aylanani ifodalaydi. Demak, (2) *aylananing parametrik tenglamasi*.

Biz chiziqni harakatlanuvchi nuqtaning izi deb qaraymiz. Chiziqlar o'z xarakteriga qarab elementar, oddiy va umumiy egri chiziqlarga ajratiladi. Differensial geometriya kursida elementar chiziqlarni o'rganamiz.

Ochiq kesmani topologik almashtirish natijasida hosil qilingan figuraga *elementar chiziq yoyi* deb aytiladi. Elementar chiziqlarga: ochiq kesma, to'g'ri chiziq, parabola, giperbola, aylana, ellips kabi chiziqlar misol bo'la oladi.

Agar (AB) to'g'ri chiziqni sonlar o'qi deb hisoblab unga t koordinata kiritsak.]AB[kesmani γ egri chiziqqa o'tkazilgan almatirishni

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (3)$$

tenglamalar bilan ifodalaymiz. Bu yerda f_1, f_2, f_3 - t parametrning uzluksiz funksiyalar bo'lib, t' va t'' qiymatlar uchun

$$[f_1(t') - f_1(t'')]^2 + [f_2(t') - f_2(t'')]^2 + [f_3(t') - f_3(t'')]^2 \neq 0$$

tenglik o'rinlidir. (1) ko'rinishdagi tenglamalarni egri chiziqning *parametrik tenglamalari* deyiladi. Agar egri chiziqning barcha nuqtalari biror tekislikda yotsa, unga *yassi egri chiziq* deb aytiladi.

Silliq egri chiziq (3) tenglamasi bilan berilgan t parametrni uning yoy uzunligini S orqali ifodalasak egri chiziqning *tabiiy parametrli tenglamasi* hosil qilinadi.

$$x = f_1(S), y = f_2(S), z = f_3(S) \quad (4)$$

Fazoga to'g'ri burchakli dekart koordinata sistemasini kiritsak, boshu koordinata boshida, uni uchun egri chiziqda joylashgan vektorni

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$$

ifodalaymiz. Bu yerda f_1, f_2, f_3 -lar t - ning uzluksiz funksiyalari bo'lib, egri chiziqda yotgan nuqtaning koordinatalaridir. Egri chiziqni (3) 3 ta tenglamalarini bitta vektorli tenglamasiga almashtirish mumkin va uni qisqacha quyidagicha yozamiz

$$\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = \vec{f}(t) \quad (5)$$

Agar $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ funksiyalar k marta differensiallanuvchi bo'lib, $f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 \neq 0$ shart bajarilsa, egri chiziq regulyar bo'ladi. Agar t parametrning barcha qiymatlari uchun $f_1'(t) \neq 0$ bo'lsa, chiziqning t ga mos keluvchi nuqtasining cheksiz kichik atrofida egri chiziqni ushbu tenglamalar bilan ifodalash mumkin bo'ladi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = \varphi(x) \end{cases} \quad (4) \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = \varphi(t) \end{cases}$$

Ba'zi hollarda egri chiziqni ikkita $\varphi(a, y, z) = 0$ va $\psi(x, y, z) = 0$ ko'rinishdagi sirtlarning kesishishi natijasi kabi ifodalash mumkin

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Yassi egri chiziq oshkor va oshkormas tenglamalari bilan ham ifodalanishi mumkin

$$y = f(x) \quad \text{va} \quad F(x, y) = 0 \quad (8)$$

Qutb koordinata sistemasida yassi chiziq ushbu tenglama bilan ifoda etiladi

$$F(\rho, \varphi) = 0 \quad (9)$$

Ba'zi xollarda egri chiziqning ta'rifini ifodalaydigan G to'plam murakkab bo'lib, xatto u biz tasavvur etadigan egri chiziqqa butunlay o'xshamay qolishi mumkin. Masalan, Piano tomonidan $[0,1]$ segmentga uzluksiz bo'lgan shunday $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar tuzilgan. G to'plam uchlari $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ nuqtalarda bo'lgan kvadratlardan iborat bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, egri chiziq kvadratning har bir nuqtasidan o'tadi. Bu egri chiziq shu bilan xarakterlanadiki, bunda parametrning cheksiz ko'p turli qiymatlarida $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar bir xil qiymatlarni qabul qilgan.

Aytaylik

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1)$$

tenglamalar sistemasi biror egri chiziqni ifodalasin, bunda $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz. Agar $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ da $t_1 \neq t_2$ bo'lganda $(x(t_1), y(t_1))$ va $(x(t_2), y(t_2))$ nuqtalari uning *karrali nuqtalari* deyiladi. Karrali nuqtalarga ega bo'lmagan egri chiziq *sodda Jordan egri chizig'i* deyiladi. Bu holda t parametrning turli t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) qiymatlariga mos keluvchi egri chiziqning $(x(t_1), y(t_1))$, $(x(t_2), y(t_2))$ nuqtalari turlicha bo'ladi. Masalan, $[\alpha, \beta]$ segmentda uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya grafigi sodda Jordan egri chizig'i bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases} \quad y = f(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

deyilsa, u holda turli t_1, t_2 , ($t_1 \neq t_2$) uchun $x_1 \neq x_2$, ($x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$) bo'lishi ravshan.

Agar (3) sistema bilan aniqlanadigan egri chiziqqa t parametrning turli t_1, t_2 , ($t_1 \neq t_2$) qiymatlariga mos keluvchi egri chiziqning $(x(t_1), y(t_1))$, $(x(t_2), y(t_2))$ nuqtalari ham turlicha bo'lib $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$ bo'lsa, egri chiziq *sodda yopiq egri chiziq* deyiladi. Masalan, ushbu

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, \quad a > 0, \quad b > 0)$$

sistema bilan aniqlanadigan egri chiziq (ellips) sodda yopiq egri chiziq bo'ladi. Biror

sodda egri chiziq ushbu $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ tenglamalar sistemasi bilan

aniqlangan bo'lsin. $(x(\alpha), y(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta)) = B$ nuqtalar bu egri chiziqning mos ravishda *boshi* va *oxirgi* nuqtalari deyiladi. Bu holda egri chiziqni AB yoy deb ham yuritiladi. Parametr $t \in [\alpha, \beta]$ ning t_1, t_2 , ($t_1 \neq t_2$) qiymatlari uchun $t_1 < t_2$ bo'lganda egri chiziqning $(x(t_2), y(t_2))$ nuqtasi $(x(t_1), y(t_1))$ nuqtadan keyin kelishi bilan AB yoyga yo'nalish o'rnatiladi. Bunday yo'nalish A dan B ga qarab bo'ladi. Agar (3) sistemadagi $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz, $x'(t)$, $y'(t)$ xosilalarga ega bo'lib, $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$ bo'lsa, (3) sistema aniqlagan egri chiziq silliq egri chiziq deyiladi. Agar AB egri chiziq *silliq egri chiziq* deyiladi. Agar AB egri chiziq chekli sondagi silliq egri chiziq egri chiziqdan tashkil topgan bo'lsa, uni *bo'lakli silliq egri chiziq* deyiladi. Silliq

egri chiziq har bir nuqtasi urinmaga ega bo`ladi. Bo`lakli silliq egri chiziqlar esa chekli sonidagi nuqtalarda bir tomonli urinmalarga ega bo`lishi mumkin. Masalan,

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi,)$$

Ellips – silliq egri chiziq, siniq chiziq esa bo`lakli egri chiziq bo`ladi.

Biz chiziqni harakatlanuvchi nuqtaning izi debqaraymiz. Chiziqlar o`z xarakteriga qarab elementar, oddiy va umumiy egri chiziqlarga ajratiladi. Differensial geometriya kursida elementar chiziqlarni o`rganamiz.

Ochiq kesmani topologik almashtirish natijasida hosil qilingan figuraga *elementar chiziq yoyi* deb aytiladi. Elementar chiziqlarga: ochiq kesma, to`g`ri chiziq, parabola, giperbola, aylana, ellips kabi chiziqlar misol bo`la oladi.

Agar (AB) to`g`ri chiziqni sonlar o`qi deb hisoblab unga  $t$  koordinata kiritsak. ]AB[ kesmani  $\gamma$  egri chiziqqa o`tkazilgan almatirishni

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (10)$$

tenglamalar bilan ifodalaymiz. Bu yerda f_1, f_2, f_3 - t parametrning uzluksiz funksiyalar bo`lib, t' va t'' qiymatlar uchun

$$[f_1(t') - f_1(t'')]^2 + [f_2(t') - f_2(t'')]^2 + [f_3(t') - f_3(t'')]^2 \neq 0$$

tenglik o`rinlidir. (1) ko`rinishdagi tenglamalrni egri chiziqning *parametrik tenglamalari* deyiladi. Agar egri chiziqning barcha nuqtalari biror tekislikda yotsa, unga *yassi egri chiziq* deb aytiladi.

Silliq egri chiziq (1) tenglamasi bilan berilgan t parametrni uning yoy uzunligini S orqali ifodallasak egri chiziqning *tabiiy parametrli tenglamasi* hosil qilinadi.

$$x = f_1(S), y = f_2(S), z = f_3(S) \quad (4)$$

Fazoga to`g`ri burchakli dekart koordinata sistemasini kiritsak, boshiu koordinata boshida, uni uchun egri chiziqda joylashgan vektorni

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$$

ifodalaymiz. Bu yerda f_1, f_2, f_3 -lar t - ning uzluksiz funksiyalari bo`lib, egri chiziqda yotgan nuqtaning koordinatalaridir. Egri chiziqni (1) 3 ta tenglamalarini bitta vektorli tenglamasiga almashtirish mumkin.

2 - §. Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma.

Egri chiziq turli formalarda berilganda unga o'tkazilgan urinma tenglamasini aniqlashni qarab chiqamiz. Tenglamasi (1) ko'rinishda bo'lgan egri chiziqning $t = t_0$ qiymatiga mos keluvchi nuqtasidagi urinma tenglamasi

$$\frac{x - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{y - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \frac{z - f_3(t_0)}{f_3'(t_0)} \quad (11)$$

bilan ifodalanadi. Bu yerda $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$, $f_3(t_0)$ egri chiziqdagi $t = t_0$ qiymatga mos keluvchi oddiy nuqta koordinatalari f_1' , f_2' , f_3' urinma yo'nalishdagi vektor koordinatalari, bu vektorning boshi $t = t_0$ qiymatga mos keluvchi nuqtada bo'ladi va yo'nalishi parametrlarning ortib borish tomonga mos tushadi.

Misollar:

1. $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ egri chiziqqa $t = \frac{\pi}{4}$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

Yechish: dastlabki parametrlarning $t = \frac{\pi}{4}$ qiymatiga mos keluvchi egri chiziq nuqtasi koordinatlarini aniqlaymiz

$$x_0 = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}; \quad y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{b}{2}; \quad z_0 = c \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{c}{2}.$$

Demak, urinish nuqtasi koordinatlari $A\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ bo'ladi. endi berilgan funksiyalardan birinchi tartibli hosilalar olamiz va ularning qiymatlarini A nuqtada aniqlaymiz

$$x'_t = f'_1(t) = (a \sin 2t)_A = a \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = a$$

$$y'_t = f'_2(t) = (b \sin 2t)_A = b \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$z'_t = f'_3(t) = (-c \sin 2t)_A = -c \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -c$$

Bu qiymatlarni urinma tenglamasiga qo'yib

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}$$

Ifodani hosil qilamiz. Tenglama fazoda $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ nuqtada o'tuvchi va $(\overrightarrow{\alpha}, 0, -c)$ vektor yo'nalishdagi to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

2. $x = t^2$, $y = t^3$ yassi egri chiziqning (4,8) nuqtasidagi urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. Bunday holda berilgan nuqta koordinatalaridan foydalanib parametr qiymatini aniqlaymiz.

$$t^2 = 4, \quad t^3 = 8 \quad \text{demak,} \quad t = 2.$$

endi berilgan funksiyalardan hosilalar olamiz va t q 2 dagi qiymatini topamiz

$$x'_t = 2t, \quad y'_t = 3t^2; \quad x'_t(2), \quad y'_t(2) = 12$$

Urinma tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi.

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-8}{12} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y-8}{3}$$

Egri chiziq vektorli tenglamasi bilan berilgan holni qaraymiz.

3. $\vec{r} = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j} + t^4 \vec{k}$ chiziqning $t = 1$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan vektordan t parametr bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz va uning $t = 1$ dagi qiymatini aniqlaymiz.

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'_t \{ 2t, 3t^2, 4t^3 \}, \quad t=1 \quad \text{da} \quad \vec{r}'_t \{ 2, 3, 4 \}$$

Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanib, urinma tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

Agar egri chiziq (4) tenglama bilan berilgan bo'lsa, urinmasi tenglamasini tuzish uchun, dastlab berilgan tenglamaga ekvivalent bo'lgan parametrik tenglamaga o'tiladi.

$$x=t, \quad y=f(t), \quad z=\varphi(t),$$

x_0 qiymatga mos keluvchi egri chiziq nuqtasiga o'tkazilgan urinmasi

$$x-x_0 = \frac{y-f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{z-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \\ z=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0) \end{cases} \quad (12)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Agar egri chiziq yassi bo'lsa va $y=f(x)$ tenglama bilan berilsa, uning urinmasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad (13)$$

ifodadan aniqlanadi.

Misol. Chiziqning berilgan tenglamasidan parametrik tenglamasiga o'tamiz va t parametrning qiymatini topamiz $x=t, y=t, z=2t^2, t=\pm 3$. Bu yerda $t=\pm 3$ berilgan shartni qanoatlantirmaydi, demak $t=3$ qiymatni olamiz

$$x'_t=1, \quad y'_t=1, \quad z'_t=4t, \quad z'_t(3)=12$$

Topilgan qiymatlarni urinma tenglamasiga qo'yib ushbu izlangan tenglamani hosil qilamiz.

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-18}{12}$$

5. $y=x^2+4x+3$ egri chiziqning $A(-1, 0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$$\text{Yechish. } y'_x=2x+4, \quad y'_x(-1)=2(-1)+4=2, \quad y-0=2(x+1), \quad 2x-y+2=0.$$

Egri chiziq (5) tenglama bilan berilsa va $\text{rang} \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix} = 2$ bo'lganda uning (x_0, y_0, z_0) nuqtada berilgan funksiyalar hususiy hosilalarning qiymatlaridir. Agar egri chiziq yassi bo'lib (7) tenglama bilan berilgan bo'lsa (x_0, y_0) nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{F'_x} = \frac{y-y_0}{-F'_y} \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)F'_x + (y-y_0)F'_y = 0 \quad (14)$$

formula bilan topiladi.

Misol 6. Tenglamasi $x^2+y^2+z^2=1, x^2+z^2=x$ sirtlarning kesisishi natijasida hosil bo'lgan egri chiziqning $M(0,0,1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmasi topilsin.

Yechish. Qulaylik uchun $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\psi(x, y, z) = x^2 + z^2 - x$ belgilashlarni kiritamiz

$$\varphi_x = 2x, \varphi_y = 2y, \varphi_z = 2z, \psi_x = 2x - 1, \psi_y = 0, \psi'_z = 2z.$$

Bu hosilalarning qiymatlarini $M(0,0,1)$ nuqtada aniqlaymiz.

$$\varphi_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 2, \psi_x = -1, \psi_y = 0, \psi_z = 2$$

yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Demak, $\alpha_1 = 0$ va $\alpha_3 = 0$ bo'lganda $y=0$ to'g'ri chiziq, utg'rinma tenglamasidan iborat bo'ladi.

Misol 7. $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ egri chiziqning $A\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{a}{2}\right)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini aniqlang.

$$F_x(x, y) = 3x^2 + y^2, \quad F_y(x, y) = 2y(x - a),$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) \left(3 \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y - \frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2} - a\right) 2 \cdot \frac{a}{2} = 0$$

demak, urinma tenglamasi $4x - 2y - a = 0$ bo'ladi.

3 - §. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari.

Chiziq oshkormas ko'rinishda, ya'ni

$$F(x, y) = 0 \quad (15)$$

oshkormas funksiya orqali berilgan bo'lsin.

Ba'zan (1) tenglamani y ga nisbatan yechib

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (16)$$

ni keltirib chiqarishimiz mumkin.

Ta'rif: Agar (16) funksiya

1) bir qiymati 2) uzluksiz va 3) tegishli

tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda (16) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga (15) chiziqning *regulyar yoyi* deyiladi.

Egri chiziq nuqtasining yetarlicha kichik atrofi regulyar yoy bo'lsa, biz bunday nuqtani shu chiziqning *oddiy nuqtasi* deb aytamiz. Chiziqning oddiy bo'lmagan barcha nuqtalari uning *maxsus nuqtalari* deyiladi. Chiziq turli formada berilganda maxsus nuqtalarni va ularning turini aniqlashni qaraymiz.

Egri chiziq (1) tenglama bilan berilgan bo'lsin, uning maxsus nuqtalari ushbu tenglamalar yordamida aniqlanadi

$$x'_t = 0, \quad y'_t = 0, \quad z'_t = 0 \quad \text{yoki} \quad \vec{r}'_t = 0$$

Birinchi hosiladan tashqari $t = t_0$ nuqtada yana bir necha hosila nol-vektorga teng bo'lib k - inchi tartibli hosilasi nol vektordan farqli bo'lsa

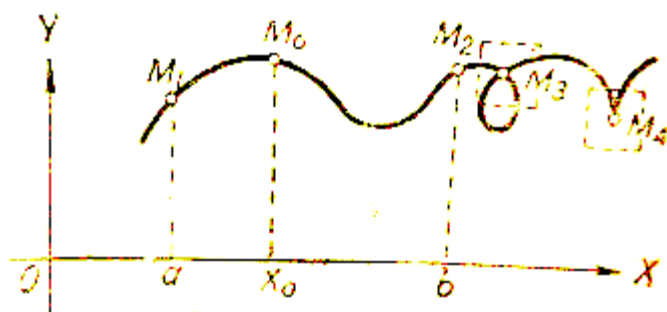
$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}''(t_0) = \dots = \vec{r}^{(k-1)}(t_0) = 0; \quad \vec{r}^{(k)}(t_0) \neq 0$$

$\vec{r}^{(k)}(t_0)$ dan keyin kelgan va unga kollinear bo'lmagan nol-vektordan farqli hosilalarning eng kichik tartibini ℓ desak, u holda quyidagilar bo'lishi mumkin:

- 1) agar k toq bo'lsa, M_0 oddiy nuqta bo'ladi. Agar k juft bo'lsa nuqta ma maxsus nuqta bo'ladi;
- 2) k juft va ℓ toq bo'lsa, M_0 maxsus nuqta birinchi tur qaytish nuqtasi bo'ladi;
- 3) k va ℓ juft bo'lsa M_0 maxsus nuqta ikkinchi tur qaytish nuqtasi bo'ladi.

$M_0(x_0, y_0)$ oddiy nuqta atrofida (15) va (16) tenglamalar teng kuchlidir.

3-chizmadagi chiziqda $[a, b]$ segmentda aniqlangan $M_1 M_2$ yoyning barcha nuqtalari oddiy nuqtalar bo'lib M_3 maxsus nuqtadir.



1-chizma.

$f'(x)$ - uzluksiz bo'lganidan chiziqning har bir oddiy nuqtasida tayin urinma o'tkazish mumkin va nuqta regulyar yoy bo'yilib o'zgarsa, urinma ham yo'nalishini o'zgartiradi deyishga asos bo'ladi. M_3 maxsus nuqtadan ikkita regulyar yoy o'tadi.

Shu nuqtada urinma ikkita. Bu esa $f(x)$ funksiyaning bir qiymatlilik talabiga zid bo'ladi.

(1) chiziq nuqtasining oddiy bo'lishi uchun yetarli shartni matematik analizdagi oshkormas funksiyaning mavjudlik teoremasi orqali ifodalash mumkin.

Teorema: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqda yotib $F(x, y)$ funksiya M_0 nuqta atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda faqat bitta $y = f(x)$ funksiya mavjudki, u M_0 nuqtaning biror atrofida (1) tenglamani qanoatlantiradi va $x = x_0$ da $y = y_0$ qiymat qabul qiladi.

$y = f(x)$ funksiya shu atrofda uzluksiz hosilaga ega bo'lib,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Agar M_0 nuqtada $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ lekin, $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ bo'lsa, ham teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema shartini qisman o'zgartirish mumkin.

Masalan: M_0 nuqtada F'_x, F'_y hosilalar birdaniga nolga aylanmasa, ya'ni $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$ bo'lsa, $F(x, y) = 0$ ni yechib yuqoridagi uchta shartlarni qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funksiyanı aniqlash mumkin.

Ta'rif: Agar (1) chiziqdagi biror $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$ bo'lsa, M_0 nuqta oddiy bo'ladi.

$M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqning maxsus nuqtasi bo'lsa $F(x_0, y_0) = 0$,

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak.

Oddiy nuqtada urinma tenglamasi

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (18)$$

bo'lib, normal tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \quad (19)$$

Endi chiziq maxsus nuqtalarini va maxsus nuqtalar atrofida chiziqning tuzilishini tekshiraylik. (17) chiziq uchinchi tartibligacha xususiy hosilalarga ega bo'lsin. $F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} \dots$

Maxsus nuqtada (19) tengliklar o'rinli bo'lib, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar orasida aqalli bittasi nolga teng bo'lmasin.

Masalan: $F''_{yy} \neq 0$. Chiziqning (19) shart bajariladigan $M_0(x_0, y_0)$ maxsus nuqtasini ikki karrali (qo'shaloq) nuqta deyiladi.

Agar (19) dan tashqari ikkinchi tartibli xususiy hosilalar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada nolga aylanib uchinchi tartibli xususiy hosilalar orasida nolmasi mavjud bo'lsa, u holda M_0 maxsus nuqtani uch karrali deyiladi.

Faraz qilaylik, M_0 maxsus nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tsin. Chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ maxsus nuqtasi orqali o'tuvchi regulyar yoyi (19) ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lsin. (17) ga (18) ni qo'ysak $F(x, f(x)) = 0$ ayniyat kelib chikadi. Bu ayniyatni x bo'yicha ikki marta differentsiallaymiz.

$$F'_x + F'_y f'(x) = 0$$

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} f'(x) + F''_{yy} f'^2(x) + F'_y f''(x) = 0$$

Bu tenglamalardan birinchisi M_0 nuqtada ayniyatdan iborat, chunki

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ikinchisidan esa

$$F''_{xx}(x_0, y_0) + 2F''_{xy}(x_0, y_0)f'(x_0) + F''_{yy}(x_0, y_0)f'^2(x_0) = 0$$

kelib chiqadi.

$$f'(x_0) = k, F''_{xx}(x_0, y_0) = a_{11}, F''_{xy}(x_0, y_0) = a_{12}, F''_{yy}(x_0, y_0) = a_{22}$$

Belgilash kiritsak

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0 \quad (20)$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. k ning har bir qiymati (15) chiziq regulyar yoy urinmasining mos yo'nalishini aniqlab beradi. Demak, M_0 maxsus nuqtadan ikkitadan ortiq bo'lmagan regulyar yoy o'tadi. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (20) tenglama ikkita turlicha haqiqiy ildizga ega. M_0 nuqtadan chiziqning ikkita regulyar yoyi o'tadi.

2) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (20) tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks. M_0 nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tmaydi.

3) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ tenglama karrali ildizga ega. M_0 maxsus nuqtadan o'tuvchi regulyar yo'ylar umumiy urinmaga ega bo'ladi.

Birinci holda M_0 maxsus nuqtani tugun nuqta, ikkinchi holda ajralgan nuqta deyiladi. Uchinchi holda esa M_0 maxsus nuqta yoki regulyar yo'ylarning urinish nuqtasi, yoki birinchi tip qaytish nuqtasi yoki ikkinchi tip qaytish nuqtasi bo'lishi mumkin.

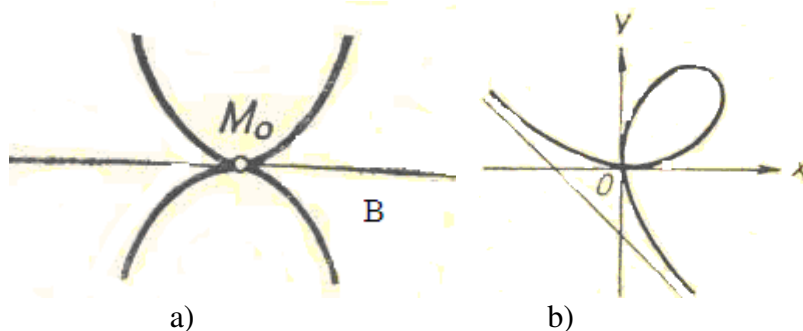
Yuqoridagi 3- ta holga misol keltiraylik :

a) $y^2 - x^4 = 0$ (0,0) maxsus nuqta.

b) $x^3 - y^3 - 3axy = 0$. (0,0) maxsus nuqta.

Dekart yaprog'i uchun $k_1 = 0, k_2 = \infty$ $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 9a^2 > 0$ (0,0) tugun nuqta

v) $F(x, y) = x^4 - 4x^2 - y^2 = 0$ (0, 0) maxsus nuqta

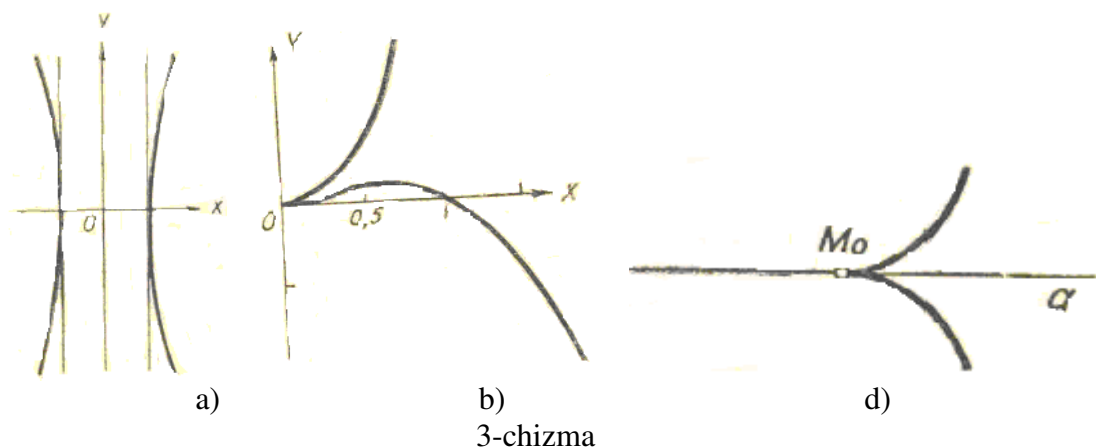


2-chizma

$a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - 16 < 0$ ajralgan nuqta

g) 0(0,0) – 2 tip qaytish nuqtasi.

d) 0(0,0) – 1 tip qaytish nuqtasi.



Agar $a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 0$ bo'lsa,

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xyy}f'(x_0) + 3F'''_{xyy}f^2(x_0) + F'''_{yyy}f^3(x_0) = 0$$

yoki

$$a_{222}k^3 + 3a_{122}k^2 + 3a_{112}k + a_{111} = 0 \quad (21)$$

tenglamaning ildizlari yoki uchta turlicha haqiqiy yoki bitta haqiqiy va bir juft qo'shma kompleks sonlardan iborat bo'lishi mumkin.

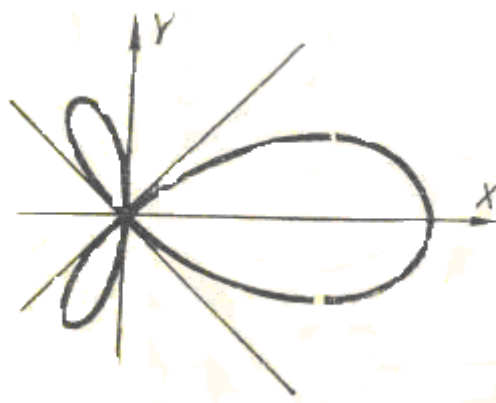
Mos ravishda $M_0(x_0, y_0)$ - maxsus nuqta uch karrali bo'lishi mumkin yoki M_0 nuqtadan chiziqning faqat bitta regulyar yoyi o'tishi mumkin.

Masalan: $(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0$

Uch yaproqli gul deyiladi. $a_{111} = 2a \neq 0, k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = \infty$

Urinma tenglamalari: $x = y, y = -x, x = 0$

Endi parametrik ko'rinishda berilgan chiziqning P maxsus nuqtasi atrofida tuzilishini tekshiraylik.



4-chizma

$$\gamma : x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ bo'lib} \quad (22)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0 \quad (23)$$

bo'lsa $P(t_0)$ - oddiy nuqta bo'ladi. Agar chiziqni (22) ko'rinishda ifodalab bo'lmasa $P(t_0)$ maxsus nuqta bo'ladi.

Teorema: Yassi chiziq $x = x(t), y = y(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar $P(t_0)$ nuqtadagi noldan farqli $x^{(n)}(t_0), y^{(m)}(t_0)$ hosila toq tartibli bo'lsa $P(t_0)$ oddiy nuqta, aks holda maxsus nuqta bo'ladi.

n - juft, m - toq bo'lib, $n \leq m$ bo'lsa P - birinchi tip qaytish nuqta, n - juft, m - juft bo'lsa, P - ikkinchi tip qaytish nuqta bo'ladi.

Masalan: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ tsikloida uchun $(0,0)$ birinchi tip qaytish nuqtasi bo'ladi.

Misollar:

1. $x = t^2$, $y = t^3$ yassi egri chiziqning maxsus nuqtasini toping va turini aniqlang.

Yechish. $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}$, $\vec{r}'(t) = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$, $\vec{r}'(t) = 0$, $t = 0$, bulardan $O(0,0)$ – maxsus nuqta ekanligi aniqlandi. Endi $\vec{r}''(t) = 2 \vec{i} + 6t \vec{j}$, $\vec{r}''(0) = 2 \vec{i}$, $\vec{r}'(0) = 0$, vektor $\vec{r}''(0)$ vektorga kollinear emas. $kq2$ juft va $\ell = 3$ toq, demak $O(0,0)$ – nuqta birinchi tur qaytish nuqtasidir.

2. $x = t^2$, $y = t^4 + t^5$ egri chiziqning maxsus nuqtalarini aniqlang va ularni tekshiring.

Yechish.

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (t^4 + t^5) \vec{j}; \quad \vec{r}'(t) = 2t \vec{i} + (4t^3 + 5t^4) \vec{j}, \quad 4t^3 + 5t^4 = 0$$

$$2t_1 = 0 \quad t^3(4 + 5t) = 0$$

$$t_1 = 0; \quad t_2 = 0,$$

demak, $t = 0$ da $O(0,0)$ maxsus nuqta bo'ladi.

Endi $\vec{r}''(0) = 2 \vec{i} \neq \vec{0}$, $\vec{r}'''(0) = \vec{0}$, $\vec{r}^{(IV)}(0) = 2 \vec{j} \neq \vec{0}$. $\vec{r}^{(IV)}$ vektor $\vec{r}''$ ga kollinear emas, k va l juft $O(0,0)$ nuqta ikkinchi tur qaytish nuqtasidir.

Tenglamasi (7) ko'rinishda bo'lgan egri chiziqning maxsus nuqtalarini aniqlashni qaraymiz. $F(x, y)$ ning xususiy hosilalarini

$$F_x, F_y, F_{xy}, F_{yy}$$

ko'rinishda belgilaylik. Yassi egri chiziqning maxsus nuqtasi

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0 \quad (24)$$

tenglamalar sistemasi yordamida aniqlanadi.

Agar M_0 nuqtada ikkinchi tartibli uchta xususiy hosilalardan aqalli bittasi noldan farqli bo'lsa, M_0 nuqta ikki karrali (qo'shloq) maxsus nuqta bo'ladi. birinchi va ikkinchi tartibli barcha xususiy hosilalar M_0 nuqtada nolga aylanib, uchunchi tartibli $F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy}$ hosilalardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, uch karrali nuqta bo'ladi. Umumiy holda maxsus nuqtalarni aniqlash murakkab bo'lganligi uchun yuqoridagi ikki holga to'xtalib o'tamiz. M_0 maxsus nuqtadan chiziqning biror regulyar yoyi o'tadi deb faraz qilinadi. Bu yoy $y = f(x)$ bo'lsa (7) ni ikki marta differensiallab

$$\begin{cases} F_x + F_y \cdot f'(x) = 0, \\ F_{xx} + 2F_{xy} \cdot f'(x) + F_{yy} f'^2(x) + F_y f''(x) = 0 \end{cases}$$

hosil qilamiz. Tenglamalarning birinchisi ayniyatdan iborat, ikkinchisi esa

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 f'(x_0) + F_{yy}^0 f'^2(x_0) = 0,$$

agar $a_{11} = F_{xx}^0$; $a_{12} = F_{xy}^0$; $a_{22} = F_{yy}^0$, $k = f'(x_0)$ belgilashlarni kiritsak

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \quad (25)$$

k ga nisbatan kvadrat tenglama hosil qilinadi. Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin:

1) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks sonlardir. M_0 ajralgan nuqta bo'ladi;

2) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$ bu holda (25) tenglama ikkita K_1 va K_2 haqiqiy ildizga ega. M_0 nuqta *tugun nuqta* deyiladi;

3) $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ tenglama ildizlari haqiqiy va karrali bo'ladi. K_1 q K_2 . Bu shartda quyidagicha uch hol o'rinalidir:

a) M_0 nuqtada ikkala yoy va shu nuqtadagi urinmaning turli tarafga joylashib, lekin normaldan bir tomonda yotadi va unga birinchi tur qaytish deyiladi;

b) M_0 nuqtada ikkala yoy ham urinma bilan normaldan bir tarafda yotadi, unga *ikkinchi tur qaytish nuqtasi* deyiladi;

v) nihoyat, chiziqlarning yoylari M_0 nuqtada bir-birga urinib ketib, umumiy urinmadan bir tomonda (yoki turli tomonda) yotishi mumkin, unga *o'z-o'ziga urinish nuqtasi* deyiladi;

Misollar:

1. $y^2 = x^3$ chiziqlarning maxsus nuqtalarini toping va ularning turlarini aniqlang.

Yechish. $F(x, y) = y^2 - x^3$, $F_x = -3x^2$, $F_y = 2y$, $F_{xx} = -6x$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$. $O(0,0)$ nuqtada $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$ demak, $\Delta = 0$. Chiziq ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan, ikkala shoxchasi ham ox o'qqa urinadi. $O(0,0)$ nuqta birinchi tur qaytish nuqtasidir.

2. $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ chiziqlarning maxsus nuqtalarini toping va turini aniqlang.

Yechish. $F_x = -4x(y - x^2) - 5x^4 = 0$, $F_y = 2(y - x^2) = 0$, bulardan yan $O(0,0)$ nuqta maxsus nuqta ekanligi kelib chiqadi.

$$F_{xx} = -4y + 12x^2 - 20x^3, \quad F_{yx} = -4x, \quad F_{yy} = 2$$

demak, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2 \neq 0$, $\Delta = 0$, $k_1 = k_2$ shu sababli ox o'q urinma bo'ladi.

$$y = x^2 - x\sqrt{x}, \quad y = x^2 + x\sqrt{x}.$$

bu tenglamalarga mos chiziq $[0,1]$ intervaldagi qismlarini tekshirsak $O(0,0)$ nuqta ikkinchi tur qaytish nuqtasi ekanligi aniqlanadi.

3. $y^2 - x^4 = 0$, bu chiziq ham $O(0,0)$ maxsus nuqta bo'lib, $y = x^2$ va $y^2 = -x^2$ parabolalar $O(0,0)$ nuqtada o'zaro urinadi, ya'ni $O(0,0)$ o'z-o'ziga urinish nuqtasi bo'ladi.

Endi qisqacha uch karrali nuqtalarga to'xtalib o'tamiz. Bu holda

$$F_x = F_y = F_{xx} = F_{xy} = F_{yy} = 0$$

bo'lib, uchinchi tartibli

$$F_{xxx}, F_{xyy}, F_{xxy}, F_{yyy}$$

hosilalardan kamida bittasi nolga teng bo'lmaydi deylik. Bunday holda $F(x, f(x))$ ni x ga nisbatan uch marta differensiallab

$$F_{xxx} + 3F_{xyy}f'(x_0) + 3F_{xxy}f'^2(x_0) + F_{yyy}f'^3(x_0) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Ildizlari k_1, k_2, k_3 bo'lsin. Bu yerda ushbu hollar bo'lishi mumkin:

1) k_1, k_2, k_3 ildizlar haqiqiy va turlari $k_1 \neq k_2 \neq k_3$. Bu holda M_0 nuqtadan chiziqlarning uchta yoyi o'tadi;

2) k_1 - haqiqiy, k_2, k_3 - kompleks. M_0 nuqtadan chiziqlarning bitta yoyi o'tadi;

3) $k_1 = k_2 = k_3$. Bu hol ancha murakkab bo'lib, biz unga to'xtalib o'tmaymiz.

4. $(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0$ chiziqni qaraymiz. Bu chiziq uchun $O(0,0)$ nuqtada birinchi, ikkinchi tartibli hosilalar nolga aylanib, uchinchi tartibli hosilalardan esa:

$$F_{xxx} = -6a \neq 0, \quad F_{xyy} = 2a \neq 0$$

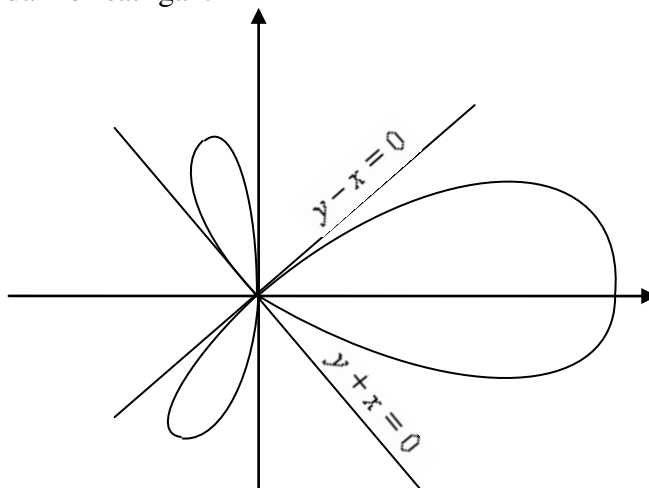
Burchak koeffitsientining k uchun tuzilgan

$$F_{xxx} + 3F_{xxy} \cdot y' + 3F_{xyy} \cdot y'^2 + F_{yyy} \cdot y'^3 = 0$$

tenglamadan $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = \infty$ ekani aniqlanadi, ya'ni koordinatalar boshi uch karrali nuqtani ifodalaydi, undagi urinmalar

$$x = 0, \quad y - x = 0, \quad y + x = 0$$

bo'ladi. Chizmasi quyida ko'rsatilgan.



5 - chizma

5. $\vec{r} = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}$ chiziqning maxsus nuqtasini aniqlang va tipini ko'rsating.

Echish: $r'_t(t) = 2t \vec{i} + 3t^2 \vec{j}$, $t = 0$ da $\vec{r}(0) = 0$, $r'_t(0) = 0$

$$r''_t(t) = 2\vec{i} + 6t\vec{j}, \quad r''_t(0) = 2\vec{i} \neq 0, \quad r'''_t(0) = 6\vec{j} \neq 0$$

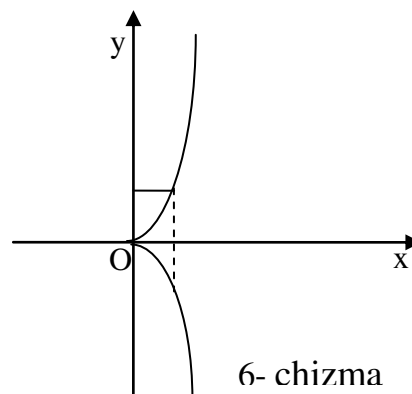
$\vec{r}''_t$ va $\vec{r}'''_t$ vektorlar $t=0$ nuqtada kollinear emas.

$O(0,0)$ – maxsus nuqta bo'lib egri chiziqning 1- tur qaytish nuqtasidir.

Tenglamani koordinata ko'rinishda yozaylik:

$$\gamma: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^3 \text{ yarim kubik parabola;}$$

x	4	1	0	1	4	9
y	-8	-1	0	1	8	27
t	-2	-1	0	1	2	3

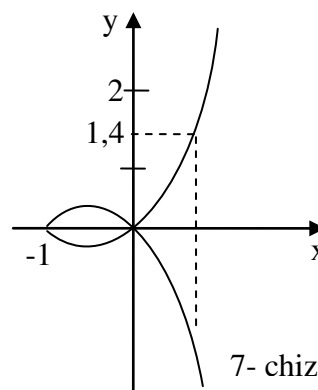


6- chizma

6. $y^2 - x^2 - x^3 = 0$; chiziqning maxsus nuqtasini aniqlang va tipini ko'rsating

$$\text{Yechish: } \begin{cases} F(x, y) = y^2 - x^2 - x^3 = 0, \\ F'_x(x, y) = -2x - 3x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow y = 0,$$

$$x^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1,$$



7- chizma

$$2x + 3x^2 = 0 \Rightarrow x(2 + 3x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3},$$

$x = -1$ va $x = -\frac{2}{3}$ qiymatlar sistemasini qanoatlantirmaydi.

O (0,0) nuqta sistemasini qanoatlantiradi. Demak maxsus nuqta O(0,0)

$$F''_{xx}(0,0) = -2; F''_{xy}(0,0) = 0; F''_{y^2}(0,0) = 2; D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0.$$

Xulosa: O(0,0) – oʻz-oʻzini kesish nuqtasi yaʼni tugun nuqta.

Egri chiziqlarning egriligi.

Regulyar, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi egri chiziq basalyut egrilikka ega. Chiziq (1) tenglama bilan berilsa t q t_0 nuqtadagi egriligi

$$k_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}, \quad (26)$$

ifoda yordamida aniqlanadi.

Misol 1. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ egri chiziqning (2,0,1) nuqtasidagi egriligi aniqlansin. ($0 < t < \infty$).

Yechish. Berilgan nuqtada perimetr t q 1 qiymat qabul qiladi. Berilgan funksiyalardan hosilalar olib, berilgan nuqtadagi qiymatini aniqlaymiz, so'ngra topilgan qiymatlarni (24) formulaga qo'yamiz

$$\begin{aligned} x'_t &= 2, \quad y'_t = \frac{1}{t}, \quad z'_t = 2t, \quad x''_t = 0, \quad y''_t = -\frac{1}{t^2}, \quad z''_t = 2, \\ x'(1) &= 2, \quad y'(1) = 1, \quad z'(1) = 2, \quad x''(1) = 0, \quad y''(1) = -1, \quad z''(1) = 2, \\ k_1^2 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}{(2^2 + 1 + 2^2)^3} = \frac{4 + 16 + 16}{9^3} = \left(\frac{2}{9}\right)^2, \quad k_1 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Agar egri chiziq yassi bo'lib xy tekisligida yotsa, uning egriligi

$$k_1^2 = \frac{(x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3},$$

formula bilan aniqlanadi.

Misol 2. R radiusli aylana egriligini aniqlang.

Yechish. R radiusli aylananing parametrik tenglamasi

$$\begin{aligned} x &= R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha \\ x'_\alpha &= -R \sin \alpha, \quad x''_\alpha = -R \cos \alpha, \quad y'_\alpha = R \cos \alpha, \quad y''_\alpha = -R \sin \alpha, \\ k_1^2 &= \frac{(-R^2 \cos^2 \alpha - R^2 \sin^2 \alpha)^2}{(R^2 \sin^2 \alpha + R^2 \cos^2 \alpha)^3} = \frac{1}{R^2}, \quad k_1 = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Agar egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilsa uning egriligi

$$k_1^2 = \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^3} \quad (27)$$

ifodadan aniqlanadi.

Misol 3. $y = bx^2$ parabolaning (0,0) nuqtadagi egriligini toping.

Yechish. $y'_x = 2bx$, $y''_x = 2b$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2b$

$$k_1^2 = \frac{4b^2}{(1 + 4b^2 x_0^2)^3} = \frac{4b^2}{(1 + 4b^2 \cdot 0)^3} = 4b^2, \quad k_1 = 2b$$

Chiziq vektor tenglamasi bilan ifodalangan bo'lsa uning egriligi quyidagicha aniqlanadi.

$$k_1^2 = \frac{(\vec{r}'')^2 \cdot (\vec{r}')^2 \cdot (\vec{r}' \cdot \vec{r}'')^2}{(\vec{r}'^2)^3} \quad \text{yoki} \quad k_1^2 = \frac{(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2}{(\vec{r}'^2)^3} \quad (28)$$

Egri chiziq tabiiy tenglamasi bilan berilganda egrilik

$$k_1 = |\vec{r}''(s)| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad (29)$$

ifoda yordamida aniqlanadi.

Misol 4. tenglamasi $\vec{r} = t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + at \vec{k}$ bo'lgan konusning vint chizig'ining egriligi koordinata boshida aniqlansin.

Yechish. $\vec{r}(t) = \{t \cos t, t \sin t, at\}$,

$$\vec{r}'(t) = \{\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, a\}$$

$$\vec{r}''(t) = \{-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0\}$$

$t = 0$ nuqtada

$$\vec{r}'\{1, 0, a\}, \quad \vec{r}''\{0, 2, 0\} \quad \text{bo'lib} \quad (\vec{r}')^2 = 1 + a^2$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-2a, 0, -2\}$$

$$(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2 = (-2a)^2 + a^2 + (-2)^2 = 4a^2 + 4 = 4(a^2 + 1),$$

$$k_1^2 = \frac{4(a^2 + 1)}{(a^2 + 1)^3} = \frac{4}{(a^2 + 1)^2}, \quad k_1 = \frac{2}{a^2 + 1}$$

Egri chiziq buralishi.

Tenglamasi turlicha bo'lganda uch marta uzluksiz differensiallanuvchi (regulyar) egri chiziq ma'lum absolyut buralishga ega. Chiziq (1) tenglama bilan berilsa $t = t_0$ nuqtasidagi buralishi

$$|k_2| = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} \quad (30)$$

formuladan aniqlanadi. Agar egri chiziq vektorli tenglamasi bilan ifodalangan bo'lsa uning $t = t_0$ nuqtasidagi absolyut buralishi

$$|k_2| = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}'' \wedge \vec{r}''|}{(\vec{r}' \wedge \vec{r}'')^2} \quad (31)$$

tenglik yordamida topiladi. Chiziq (2) tenglama bilan berilganda uning buralishi

$$|k_2| = \frac{|\vec{r}' \wedge \vec{r}'' \wedge \vec{r}''|}{k_1^2} \quad \text{yoki} \quad |k_2| = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \quad (32)$$

ifodadan aniqlanadi. Buralish turli ishorali bo'lishi mumkin. buralishi nolga teng egri chiziq, yassi egri chiziq bo'ladi.

Misol 1. Tenglamasi $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ koʻrinishda berilgan vint chizigʻining ixtiyoriy nuqtasidagi buralishini toping.

Yechish. Chiziq tenglamasidan birinchi, ikkinchi va uchunchi tartibli hosilalar olamiz

$$\begin{aligned} x' &= -a \sin t, & x'' &= -a \cos t, & x''' &= a \sin t \\ y' &= a \cos t, & y'' &= -a \sin t, & y''' &= -a \cos t \\ z' &= b, & z'' &= 0, & z''' &= 0 \end{aligned}$$

$$|k_2| = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\begin{vmatrix} -a \sin t & 0 \\ a \cos t & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a \sin t & 0 \\ a \cos t & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -a \cos t \\ b & -a \sin t \end{vmatrix}^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

II bob. Ajoyib egri chiziqlar.

1-§ Ellips va uning elementlari

Chizuvchi M nuqtadan ikkita xarakatlanmaydigan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'lib qaraladigan egri chiziqni qaraymiz. Qog'ozga ikki uchni qo'yib, uni tayanchga maxkam bog'laymiz. Agar ipni qog'ozga vertikal qo'yilgan qalam yordamida tortsak, u holda qalamning o'tkir tig'i, ya'ni M nuqta oval shaklidagi egri chiziqni chizadi. Bu egri chiziq *ellips* deyiladi.

Ta'rif: Ellips deb, tekislikning shunday nuqtalar to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalardan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi fokuslar orasidagi $2c$ masofadan katta bo'lgan o'zgarmas kattalikdir. Bu kattalik $2a$ bilan belgilanadi.

Ellipsni to'liq shaklini chizish uchun ipni tayanchning boshqa tomoniga o'tkazib, yuqoridagidek ipni tortiladi. Shundan so'ng ellipsning 1-yarmi chiziladi. Ravshanki, qalamning o'tkir tig'i M nuqtadan F_1 va F_2 tayanchgacha bo'lgan masofalar yig'indisi butun harakat davomida o'zgarmay qoladi. bu yig'indi ipning uzunligiga teng. Tayanchga teshilgan ikki nuqtalar ellipsning *fokuslari* deyiladi. Fokus so'zi lotin tilidan tarjima qilinganda "olov" degan ma'noni anglatadi. U ellipsning navbatdagi ajoyib xossasi bilan tavsiflanadi. Agar yaxshi silliqlangan parash metallni ellips yoyi bo'yicha egib, bitta fokusga yorug'lik manbaasini qo'ysak, u holda metalldan qaytuvchi yorug'lik nurlari boshqa fokusda to'planadi. Shuning uchun 2 – fokusda ham "olov" ko'rinadi.

Agar ellipsning fokuslari ustma – ust tushsa yoki $F_1M = F_2M$ bo'lsa, ellips aylanadan iborat bo'ladi.

Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta oxy dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (33)$$

ko'rinishda bo'ladi. undagi a – katta yarim o'qning, b – kichik yarim o'qning uzunligidan iborat. Bu yerda ko'effisientlar $a \geq b > 0$ munosabatlarni qanoatlantiradi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki x, y o'zgaruvchilar.

$-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Absissa o'qida yotuvchi $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari $x \pm \frac{a}{e} = 0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar

ellipsning *direktrissalari* deb ataladi. (34) tenglamadan $b^2 = a^2 - c^2$ hamda $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ va

$\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan ellips nuqtalarining koordinatalari $|x| \leq a$ va $|y| \leq b$ shartni qanoatlantirishi, ya'ni ellips tomonlari $2a$ va $2b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichida joylashganligi kelib chiqadi. Ellipsning tenglamasidan uning markazi hamda ikkita simmetriya o'qiga ega ekanligi ma'lum bo'ladi.

Fokus masofasi $2c$ ning katta o'q $2a$ ga nisbatiga ellipsning eksentresiteti deb ataladi va analitik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1, \text{ chunki } c < a$$

Agar ellipsning F_1 va F_2 fokuslari ordinata o'qida yotsa, uning tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) ko'rinishga ega bo'ladi.

Ellips ma'lum ma'noda aylanani siqishdan xosil bo'ladi deyish ham mumkin. Bundan $A_1A_2=2a$ kesma siqish o'qi, $k=b:a$ nisbat *siqish koeffisienti* deyiladi.

Ellipsning xossalari:

1. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

Bu xossa bevosita xisoblash yordamida $r_1 + r_2 = 2a$ tenglikni tekshirish bilan isbotlanadi:

2. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrissalargacha bo'lgan masofalargacha nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir. Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlandi.

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{x^2 \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = \\ &= \sqrt{x^2 \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = |xe + a| \\ d_1 &= \left| -x - \frac{a}{e} \right| = \left| x + \frac{a}{e} \right| = \frac{|xe + a|}{e} \Rightarrow \frac{r_1}{d_1} = e \end{aligned}$$

Ellipsning geometrik aniqlanishi

Tekislikda 2 ta nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

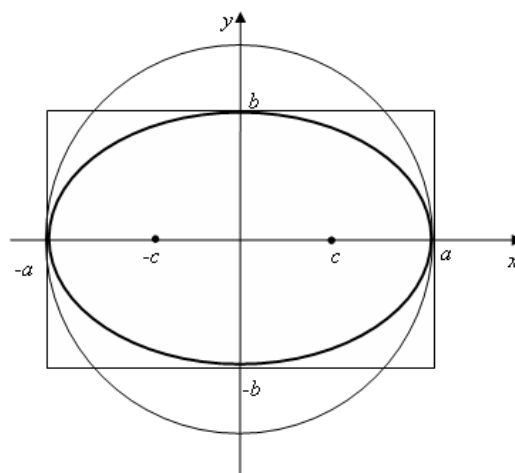
Isbot. Tekislikda F_1, F_2 nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishida belgilab $r_1 + r_2 = \text{const} = 2a$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rnini aniqlashimiz kerak. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilasak, $r_1 + r_2 > 2c$ tenglikdan $a > c$ munosabat kelib chiqadi. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan yotuvchi to'g'ri chiziqni absissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi. Koordinata boshini F_1, F_2 nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida absissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz.

Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikka qo'yib,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$



9 - chizma.

tenglikni xosil qilamiz. Bu tenglikni ikkala tomonini kvadratga oshirib hadlarni ixchamlashtirib, yana qayta kvadratga oshiramiz va quyidagi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz. bu yerda $b^2 = a^2 - c^2$ belgilash kiritilgan.

Bizga ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta F berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqtagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasida nisbati o'zgarmas birdan kichik e soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Bu fakti isbotlash uchun berilgan F nuqtdan to'g'ri chiziqa perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazib, uni absissa o'qi sifatida olamiz. Natijada absissa o'qini F nuqta ikki qismga ajratadi. Berilgan F nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning e soniga ko'paytmasini p bilan belgilab, quyidagi tengliklar bilan

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{va} \quad c = ea, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

a, b, c sonlarni kiritamiz. Koordinata boshini absissa o'qining ℓ to'g'ri chiziqni kesmaydigan qismida F nuqtadan c birlik masofada joylashtiramiz. Natijada koordinata boshidan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$p_1 + c = \frac{p}{e} + ea = \frac{a(1-e^2)}{e} + ea = \frac{a}{e}$$

kattalikka teng bo'ladi. Bu yerda p_1 bilan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa berilgan. Demak, ℓ to'g'ri chiziq tenglamasi,

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

ko'rinishida bo'ladi. Ikkinchi koordinata o'qini ℓ to'g'ri chiziqa parallel o'tkazib, tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan F nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani d bilan belgilasak, $r = e \cdot d$ tenglikdan, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenglikni olamiz.

Ellips fokuslari.

Agar ellips fokuslarini to'g'ri chiziqli kesma bilan davom ettirib, uni ellipsgacha tutashtirsak, u holda ellipsning katta o'qi A_1A_2 hosil bo'ladi. Ellips o'zining katta o'qiga nisbatan simmetrikdir. Agar F_1F_2 kesmani teng ikkiga bo'lib, so'ngra o'rtasidagi perpendikulyar o'tkazib, ellipsgacha davom ettirsak, u holda ellipsni kichik o'qini hosil qilamiz: B_1B_2 . bu ham ellipsning simmetrik o'qi bo'ladi. O'qlarning oxiri: A_1A_2 , B_1 va B_2 nuqtalari *ellipsning uchlari* deyiladi.

A_1 nuqtadan F_1 va F_2 nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi ipning uzunligini berishi kerak: $A_1F_1 + A_1F_2 = \ell$. Lekin ellipsning simmetrikligini ko'ra $A_1F_1 = A_2F_2$; shunga ko'ra A_1F_1 ni A_2F_2 ga almashtirish mumkin va biz $A_2F_2 + A_1F_1 = \ell$ munosabatga ega bo'lamiz. Ko'rinib turibdiki, bu tenglikning chap tomoni ellipsning katta o'qi uzunligiga teng. Demak, ellipsning katta o'qi uzunligi ipning uzunligiga teng. Boshqacha qilib aytganda, ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi shu ellipsning katta o'qiga tengdir. Bu munosabatdan B_2 (yoki B_1) uchlardan har bir fokuslarigacha bo'lgan masofalar katta o'qning yarmiga tengligi kelib chiqadi. Shuning uchun, ellipsning uchini bilgan holda uning fokuslarini oson topish mumkin.

Ellips – yapaloq doira (aylana)

Ellipsning katta o`qini diametr sifatida olib, bu diametr bo`yicha aylana chizamiz. Aylana N nuqtadan katta o`qga NP perpendikulyarlarni shunday o`tkazamizki, NP perpendikulyar ellipsni M nuqtada keib o`tadi. Ravshanki, NP perpendikulyar MP dan ma'lum bir songa katta. Agar ixtiyoriy boshqa bir N' nuqtani olib, yana ushbu qurishni takrorlasak, u holda N'P' unga mos kelgan M'P' kesmadan ma'lum bir songa ortiq bo'ladi:

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}$$

Boshqacha qilib aytganda, ellipsni uning katta o`qiga chizilgan aylana orqali chizish mumkin. Agar aylananing barcha nuqtalari ellipsning katta o`qigacha ma'lum bir on bo`yicha masofalarni qisqarib borsa, bu nuqtalar ellipsni tasvirlaydi. Biror bir diametrga ega bo`lgan aylana chizamiz. So`ngra aylananing nuqtalarini perpendikulyarda yotuvchi nuqtalar bilan almashtiramiz. Bunda diametrga nisbatan perpendikulyar tushuriladi. Nuqtalar diametrga  $\left(1\frac{1}{2}, 2, 3\text{vaxokazo}\right)$  masofa birliklari bilan yaqinlashadi. Demak, ellipning nuqtalarini topamiz. Katta o`q aylananing diametri bilan ustma – ust tushadi.

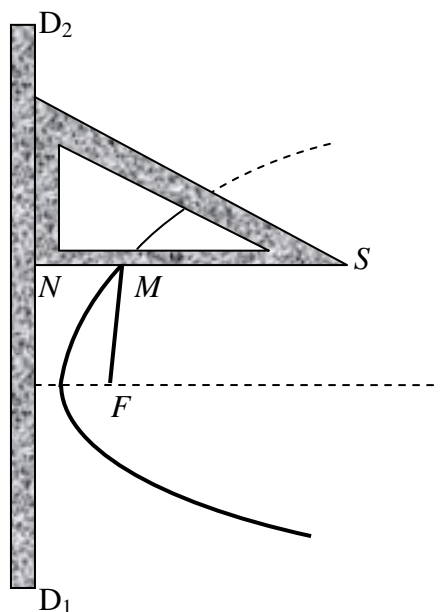
Tabiat va hayotda ellipslar.

Ellipslarni biz hayotimizda tez-tez uchratib turamiz. Agar masalan uv quyilgan stakanni qiyalatsak, u holda suvning yuqori qatlamining tasviri ellips bo'ladi. Shunga o`xshash agarda silindrik kolbasani qiyg`och holda bo`laklarga ajratsak, u holda bu bo`lakchalar ellips ko`rinishini oladi. Umuman to`g`ri silindr (yoki konus) ni qiyg`och kesib bo`laklarga ajratsak, bu bo`laklar ellips shakliga ega bo'ladi.

Kepler (1571-1630) sezdiki oldin o`ylangan tasavvur, ya'ni sayyoralar Quyosh atrofida aylana bo`yicha harakatlanmasdan, balki ular ellips bo`yicha harakatlanar ekan. Bunga Quyosh har bir ellipsning fokusi bo'ladi. Planeta aylanish vaqti davomida bir marta ellipsning A₁ uchida bo'ladi. Bunda Quyoshga eng yaqin bo'ladi. Bu holat *perigeli* deyiladi, va bir marta ellipsning A₂ uchida bo'ladi. Bunda Quyosh eng uzoqlikda bo'ladi. Bu holat *afeliy* deyiladi. Masalan, bizning yarim sharda qish bo`lsa, Yer afeliy holatida, agar yoz bo`lsa Yer perigeliy holatida bo'ladi.

2 §. Parabola va uning elementlari.

Qog'ozda biror bir O_1O_2 to'g'ri chiziq chizamiz. F nuqtani olib, u orqali qalamning o'tkir tig'i ya'ni M nuqtani shunday qo'yamizki, natijada M nuqtaning to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi uning F nuqtagacha bo'lgan masofasiga ixtiyoriy momentda teng bo'lib qolsin. (9-chizma).



10 – chizma.

Buning uchun chizilgan uchburchakning S uchidan SN katet uzunligiga teng ipni maxkamalab va ipning oxirini F teshik nuqtaga bog'laymiz. Agar D_1, D_2 ga qo'yilgan uchburchakning boshqa katetini chizg'ich bo'yicha sirpantirsak, u holda ipni tortuvchi qalamning o'tkir tig'i M chizg'ichdan va F nuqtadan bir xil masofada joylashadi.

$$NM = MF$$

Bu o'tkir qog'ozda parabolaning bir qismini chizadi. Bu egri chiziqning katta qismini chizish uchun yetarlicha kattalikdagi uchburchak katetini va chizg'ichni olish kerak.

Parabolaning shoxlari cheksizlikda yoyilgan bo'ladi.

F – nuqta parabolaning fokusi deyiladi. fokusdan D_1D_2 to'g'ri chiziqqa tushurilgan perpendikulyar va uning davomi *parabolaning simmetrik o'qi* deyiladi. Uni sodda qilib, *parabolaning o'qi* deb ataymiz.

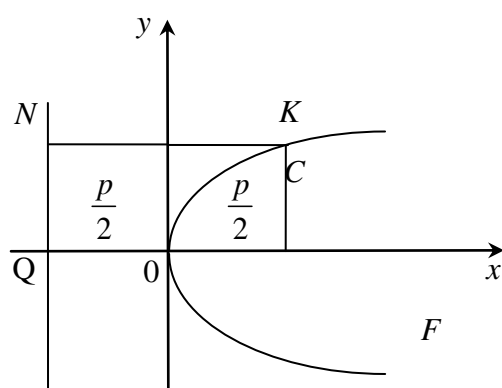
Fokus deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va deriktirissa deb ataluvchi MN to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalar to'plamining geometrik o'rniga *parabola* deyiladi.

$$\text{Bunda } FK = LK$$

F nuqta parabolaning fokusi, MN esa direktirissasidir.

Fokusdan direktirissagacha bo'lgan masofa $QFqP$ parabolaning parametri deb ataladi.

QF kesmaning o'rtasi deb, koordinata markazi O ni qabul qilamiz. U holda $QO = OF = \frac{p}{2}$



11 – chizma.

tenglik o`rinli bo`ladi. chizmadan hamda yuqoridagilardan

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right), \quad Lk = LC + CK = \frac{p}{2} + x$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formusidan Fk quyidagiga teng bo`ladi.

$$FK = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$$

$LK = \frac{p}{2} + x$ bo`lganligi uchun oxirgi ikki tenglikni quyidagi ko`rinishda ifodalash mumkin.

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

Ushbu tenglamani ildizdan qutqaramiz. U holda parabolaning quyidagi kanonik tenglamasi hosil bo`ladi.

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

Tekislikda $x + \frac{p}{2} = 0$ tenglama bilan berilgan to`g`ri chiziq parabolaning direktirissasi deb ataladi.

Ordinata o`qi oy – simmetriya o`qi bo`lgan va tarmoqlari yuqoriga yo`nalgan hamda uchi esa koordinatalar markazida yotgan parabolaning tenglamasi bunday ko`rinishga bo`ladi.

$$x^2 = 2py \quad (p > 0)$$

direktrissasi tenglamasi $y = -\frac{p}{2}$

Agar oy ordinata o`qi – simmetriya o`qi hamda tarmoqlari pastga yo`nalgan bo`lsa, uchi koordinatalar boshida bo`lgan parabolaning tenglamasi

$$x^2 = -2py \quad (p > 0)$$

va direktrissasi $y = \frac{p}{2}$ dan iborat bo`ladi.

Parabolaning xossalari:

1⁰. Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan direktirissagacha bo`lgan masofa fokusgacha bo`lgan masofaga tengdir.

Parabola nuqtasidan $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ nuqttagacha bo`lgan masofani  $r$  bilan direktrissagacha bo`lgan masofani d bilan belgilab, $r=d$ tenglikni isbotlaymiz.

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}$$

ifoda $y^2 = 2px$ tenglikdan foydalansak va $x \geq 0$ munosabatni xisobga olsak,

$$r = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Direktrissagacha bo`lgan masofani hisoblash uchun nuqtadan to`g`ri chiziqqacha masofa formulasidan foydalanib,

$$d = \left| -x - \frac{p}{2} \right| = x + \frac{p}{2} = r$$

tenglikni hosil qilamiz.

2⁰. Parabolaning geometrik aniqlanishi.

Berilgan tog'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami paraboladir.

Tekislikda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan F nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p bilan belgilab va F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni absissa o'qi sifatida olib koordinatalar sistemasini kiritamiz. Absissa o'qining musbat yo'nalishi ℓ to'g'ri chiziqdan F nuqta sharafiga yo'nalgan, koordinata boshini ℓ to'g'ri chiziq va F nuqta o'rtasiga quyidagi kabi joylashtiriramiz. Ordinata o'qi esa ℓ to'g'ri chiziqqa paralleldir. Natijada ℓ to'g'ri chiziq: $x + \frac{p}{2} = 0$ tenglamag, F nuqta esa $\left(\frac{p}{2}, 0 \right)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning shu nuqtadan F nuqtagacha bo'lgan masofaga tengligidan $y^2 = 2px$ tenglamani hosil qilamiz.

1-misol. Uchi koordinatalar boshida va fokusi $F(4,0)$ nuqtada bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

Yechish: masala shartida berilishiga ko'ra parabolaning fokusi absissa o'qi ox da yotadi. Shuning uchun parabolaning formulasi $y^2 = 2px$ dan foydalanamiz. Fokusning koordinatalri $\left(\frac{p}{2}, 0 \right)$ bo'lganligi sababli $\frac{p}{2} = 4$ yoki $p = 8$ bo'ladi. Demak,

$$y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot 8x \Rightarrow y^2 = 16x$$

Parabolaning izlangan tenglamasi hosil bo'ldi.

2-misol. Parabolaning tenglamasi $y^2 = 12x$ ko'rinishida berilgan. Uning direktrissasi tenglamasini tuzing.

Yechish: parabolaning $y^2 = 12x$ tenglamasidan $2p = 12$, bundan $p = 6$. u holda bu qiymatni direktrissa tenglamasiga qo'yamiz.

$$x + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow x + \frac{6}{2} = 0 \quad x + 3 = 0$$

Demak, parabola direktrissasining tenglamasi $x + 3 = 0$ dan iborat ekan.

3-misol. Uchi koordinatalar boshi O nuqtada va direktrissasining tenglamasi $h = -4$ dan iborat bo'lgan parabola fokusining koordinatalarini toping.

Yechish: ma'lumki, koordinatalar boshidan fokusgacha va koordinatalar boshidan direktrissagacha bo'lgan masofalar o'zaro teng bo'lib, uzunligi $\frac{p}{2}$ dan iborat. Shuning uchun va shartga ko'ra $\frac{p}{2} = 4$.

Berilgan $x = -4$ direktrisa parabolaning $y^2 = 2x$ ko'rinishdagi tenglamasiga mos keladi. U holda izlangan fokus koordinatalri $(4, 0)$ dan iborat bo'lib, uning fokusi $F(4, 0)$ nuqta bo'ladi.

4-misol. $y^2 = 3x$ parabola bilan $x - 2y = 0$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini toping.

Yechish: berilgan parabola va to'g'ri chiziqning kesishishi K nuqtalarini topish uchun ularning tenglamalarini sistema qilib yechamiz.

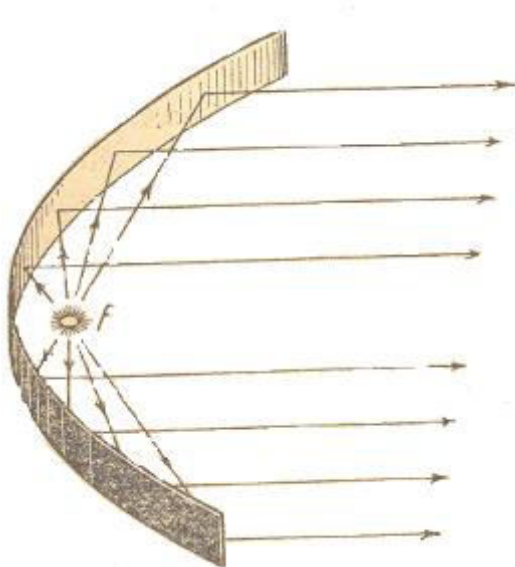
$$\begin{cases} y^2 = 3x \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 3x \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 3 \cdot 2y \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 6y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 6 \\ x_2 = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1; y_1) = (0, 0) \\ (x_2; y_2) = (6, 12) \end{cases}$$

Demak, parabola va to'g'ri chiziq koordinatalar boshi (0,0) va (6,12) nuqtalarda kesishar eka.

Parabolik oyna

Agar yaltiroq yupqa metallni parabola yoyi shaklida bukib, fokusdan yorug'lik manbaasini tushursak, u holda metalldan qaytuvchi nurlar parallel o'qlar kabi chiqib ketadi.



12 – chizma.



13 – chizma.

Aksincha, agar parabola shaklidagi metallga uning parallel o'qiga yirug'lik nuri tushsa, u holda nurlarning qaytishi parabolaning fokusida mujassamlashadi. Parabolaning shu xossasiga ko'ra avtomobillarning chiroqlarida va proyektorlarida foydalanuvchi parabolik oyna ishlab chiqilgan. (12 - chizma).

U faqatgina tilimcha shaklida yaltirab qolmay, balki aylanuvchi parabola nomlangan shaklda ham yaltirab ko'rinadi. Bunday sirtli ko'zguga ega bo'lish uchun uning o'qi atrifida aylanuvchi parabolani qo'yish kerak.

Snaryad va toshning uchishi

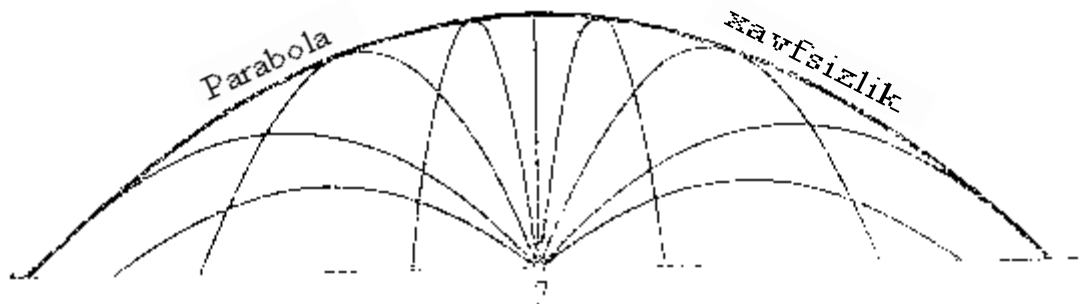
Qan'it vertikal bo'lmagan holda toshni otilsa, u parabola shaklida uchadi. Shunga ko'ra snaryad qurolini ham misol keltirish mumkin. Xavo qarshiligini hisobga olsak va boshqa hollarda parabola va boshqa egri chiziqlarni kuztish mumkin. Lekin bo'shliqda bu harakatni kuzatib, biz haqiqiy parabolani ko'rishimiz mumkin.



14- chizma.

Agar o'zgarmas g tezlik bilan stvoldan uchib chiquvchi snaryad parabola shaklida uchsa, u holda stvolni gorizontga nisbatan burib turli burchaklarga og'dirsak snaryadning hosil qilgan yo'li turli xil parabola shaklida bo'ladi va snaryad turli xil masofalarga tushadi. Snaryadning eng katta masofaga uchishi uchun stvolni 45^0 gradusga og'dirish kerak bo'ladi. Bu masofa $\frac{g^2}{g}$ ga teng. Bu yerda g – erkin tushish tezlanishi.

Agar vertikal ravishda yuqoriga snaryad otilsa, u holda snaryad eng baland $\frac{g^2}{2g}$ dan ikki marta kichik bo'lgan balandlikka ko'tariladi. Stvolni buragan holda vedrtikal yo'nalishga nisbatan og'dirib borsak, mos ravishda otilgan snaryad qayergacha borishini bilish mumkin bo'ladi. Bunda snaryad turli xil parabola shaklida uchib yerga tushadi. Bu holat *xavfsizlik parabolasi* deyiladi. (15 – chizma).



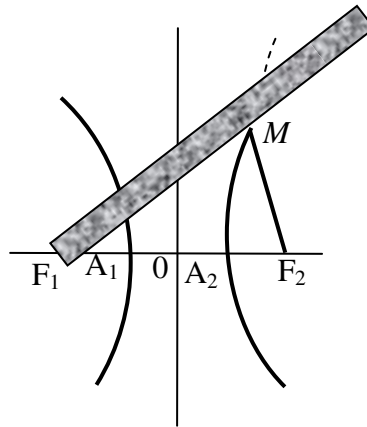
15- chizma.

3 - §. Giperbola va uning elementlari

Chiquvchi M nuqta orqali ellipsga o'xshash yana bir egri chiziqni chizish mumkinki, bunda aniqlangan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'libgina qolmay, balki ayirmasi yoki ko'paytmasi ham o'zgarmas bo'lib qoladi.(oxirgi xolatda aylana bo'lib qoladi).

Ayirma xolatini qaraymiz.

Qalamni kerakli zol bo'yicha xarakatlanishiga majburlash uchun F_1 va F_2 nuqtalarni belgilab va ulardan biriga chizg'ichni shunday mahkamlaylikki, natijada chizg'ich qog'ozda F_1 va F_2 nuqtalar atraofida aylana olsun.



16 –chizma.

Chizg'ichning oxiri S uchiga ipning uchini maxkamlaymiz. Ikkinchi uchini F_2 ga maxkamlab, o'tkir tig'li qalam, ya'ni M nuqta bilan ipni chizg'ichga taqalguncha tortamiz. Bunda ip chizg'ichning uzunligidan kalta bo'lishi kerak, u holda MF_1 va MF_2 masofalar ayirmasi

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS)$$

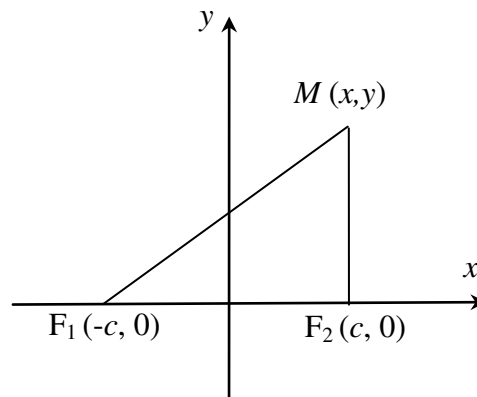
ga teng bo'ladi. Ya'ni chizg'ich uzunligidan ipning uzunligining ayirmasiga teng bo'ladi. Agar chizg'ichni unga maxkamlangan qalam va ipni tortilgan holda F_1 atrofida bursak, u holda qalam qog'ozga egri chiziq chizadi. Shunga ko'ra 16-rasmdagi egri chiziqni yuqori o'ng qismining yarmi hosil bo'ladi. Quyi chap qismining yarmini chizish uchun chizg'ichni F_1 va F_2 nuqtadan pastga joylashtirish va yuqoridagi ishni takrorlash kerak.

Agar chizg'ichni F_2 ga maxkamlab, ipning oxirini esa F_1 ga maxkamlasak, u holda yuqorida chizilgan rasmning chap yarmi hosil bo'ladi. Chizilgan bu egri chiziqlar juftligini *giperbola* deb ataluvchi egri chiziqni ifodalaydi, F_1 va F_2 nuqtalar uning fokuslari bo'ladi. Yetarlicha uzunlikdagi chizg'ich va ipni olib, biz giperbolani cheksiz davom ettirishimiz mumkin. Bunda ularning uzunliklari ayirmasi o'zgarmas bo'lib qolishi kerak.

Giperbola deb uning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasi o'zgarmas sonidan iborat bo'lgan nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rifga asosan

$$|F_1M - F_2M| = 2a \quad (35)$$



17– chizma.

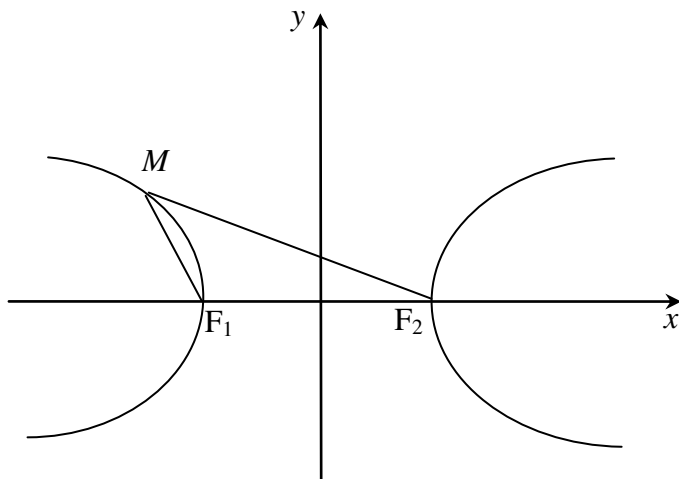
$F_1(-c, 0)$ va $F_2(c, 0)$ lar giperbolaning fokuslaridan iborat bo'lib, fokuslar orasidagi masofa quyidagicha bo'ladi:

$$F_1F_2 = 2c \quad (36)$$

$$F_1 F_2 > |F_1 M - F_2 M| \quad \text{bo'lganligi uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.} \quad (37)$$

$$c > a$$

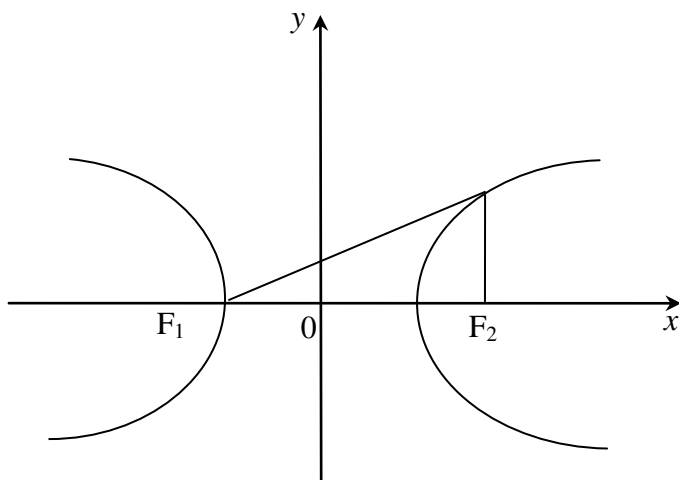
Agar $M(x, y)$ nuqta $F_1(-c, 0)$ fokusga $F_2(c, 0)$ ga nisbatan yaqinroq ya'ni $F_1 M < F_2 M$ bo'lsa, (35) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi

$$F_2 M - F_1 M = 2a \quad (38)$$


18 - chizma

Agar $M(x, y)$ nuqta $F_2(c, 0)$ fokusga $F_1(-c, 0)$ ga nisbatan yaqinroq bo'lsa, (35) tenglamani quyidagicha ifodalash mumkin.

$$F_1 M - F_2 M = 2a \quad (39)$$



19 – chizma.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi hamda (38) ga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (40)$$

Shuningdek, (39) ga asosan

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (41)$$

(40) va (41) tengliklarning har ikkalasini ham ildizlaridan qutqarib, bir xil natijaga kelamiz:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

Bundan,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (42)$$

hosil bo'lgan tenglamaning barcha hadlarini $a^2(a^2 - c^2)$ ga qisqartiramiz, u holda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (43)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama tashqi ko'rinishdan ellipsning tenglamasiga o'xshaydi, ammo bunda

$$a^2 - c^2 < 0$$

$c > a$ ni hisobga olgan holda $a^2 - c^2 = -b^2$ deb belgilaymiz. U holda (44) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (45)$$

Bu tenglama 2-tartibli chiziq tenglamasini birorta oxy dekart koordinata sistemasidagi giperbolaning kanonik (eng sodda) tenglamasidir. Bunda a haqiqiy yarim o'qning uzunligi. Bu yerda koeffitsientlar $a \geq b \geq 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

a, b, c parametrlar orasidagi bog'liqlik quyidagi munosabat bilan ifodalanadi.

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (46)$$

Fokus masofasi c ning haqiqiy o'qiga nisbati giperbolaning *eksentrisiteti* deyiladi va u quyidagicha yoziladi

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

Bunda $c > a$ bo'lganligi uchun $e > 1$ dir.

Giperbolaning nuqtasi cheksiz uzoqlashganda u biror to'g'ri chiziqqa har qancha yaqin bo'lib yaqinlashsa, bu to'g'ri chiziq giperbolaning *asimtotasi* bo'ladi. Asimtota chiziqlari vertikal asimtota, gorizontal asimtota va $y=kx+b$ ko'rinishlarda bo'ladi.

$$y=kx \text{ to'g'ri chiziq } |k| < \frac{b}{a}$$

bo'lganda giperbolani 0 nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan 2 ta nuqtada kesib o'tadi.

Agar $|k| \geq \frac{b}{a}$ bo'lsa, $y=kx$ to'g'ri chiziq – giperbola bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi.

$|k| = \frac{b}{a}$ bo'lganda quyidagi to'g'ri chiziqlarning har biri giperbolaga cheksiz yaqinlashadi.

$$|y| = \frac{b}{a}x \quad \text{va} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Bu tenglamalar giperbola asimtotalaridan iboratdir. Bu tenglamalarni umumiy holda bunday yozish ham mumkin.

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Giperbola direktrissasining formulasi

$$x = \pm \frac{a}{c}$$

dan iborat bo'lib, a – giperbolaning haqiqiy o'qi, e – egri chiziqning eksentrisitetidir.

4-§ Bernulli lemniskata.

Tekislikda M nuqtani shunday tafsiflaylikki, bunda M nuqtadan shu tekislikda aniqlangan ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi p o'zgarmas soni bo'lsin. Bu egri chiziqni qaraymiz. Bunday egri chiziq lemniskata deyiladi. Lemniskata grekcha lenta ma'nosini anglatadi. Agar F_1F_2 kesmadan uzunligi C mavjud bo'lsa, u xolda F_1F_2 kesmada O markazdan

F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar $\frac{c}{2}$ ga teng va bu masofalar ko'paytmasi $\frac{c^2}{2}$ bo'ladi.

Berilgan p o'zgarmas ko'paytma $\frac{c^2}{4}$ ga teng deb faraz qilamiz. Ya'ni $MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4}$. U

holda O nuqta lemniskatada yotadi. Lemniskataning o'zi esa yotuvchi sakkiz raqami ko'rinishiga ega bo'ladi. Agar F_1F_2 kesmani har ikki tarafga lemniskata bilan kesishguncha davom ettirsak, u holda ikkita A_1 va A_2 nuqtalarga ega bo'lamiz. Lemniskata orasidagi masofa $A_1A_2 = x$ va shu kesmada yotuvchi kesma $F_1F_2 = c$ ligi ma'lum. Bundan A_2 nuqtadan F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofa $\frac{x}{2} - \frac{c}{2}$, A_2 nuqtadan F_1 nuqtalargacha bo'lgan masofa $\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Shuning uchun masofalar ko'paytmasi $\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}$ bo'ladi. Lekin bu ko'paytma

shartga ko'ra $\frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}$, bundan $x^2 = 2c^2$ va $x = \sqrt{2}c \approx 1,414c$ munosabatga kelamiz.

Bunday lemniskata vat eng yonli giperbola orasida ajoyib bog'lanish mavjud. O nuqtadan turli xil to'g'ri chiziq nurlarini o'tkazamiz. Lemniskata bilan kesishgan nuqtalarini belgilaymiz. Shu narsa ma'lumki OF_2 (yoki OF_1) nurni og'ish burchagi 45° gradusdan kichik va bu nur lemniskataning yana O nuqtasidan kesib o'tadi. Agar og'ish burchagi 45° yoki 45° dan katta bo'lsa, u holda ikkinchi kesishish nuqtasi bo'lmaydi. Birinchi guppa deb biror bir nurni olamiz va bu nur M nuqtada lemniskata bilan kesishsin (o dan farqli). Bu nurga O nuqtadan

$ON = \frac{1}{OM}$ kesma yotqizamiz. Agar bu qurishni birinchi guppa nurlarining har biriga

qo'llasak, u xolda N nuqtalar lemniskatadagi M nuqtalarga mos keluvchi shunday F_1' va F_2' nuqtalarda bo'lgan fokuslar bilan teng yonli giperbolada joylashadiki, bunda $OF_1' = \frac{1}{OF_1}$

va $OF_2' = \frac{1}{OF_2}$.

1. Bernulli lemniskatasining dekart va qutb koordinatalr bo'yicha tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bernulli lemniskatasi kassini ovalining xususiy holi bo'lib, oval tenglamasidan kelib chiqadi.

$$d(F_1, M) \cdot d(F_2, M) = b^2 \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = b^2$$

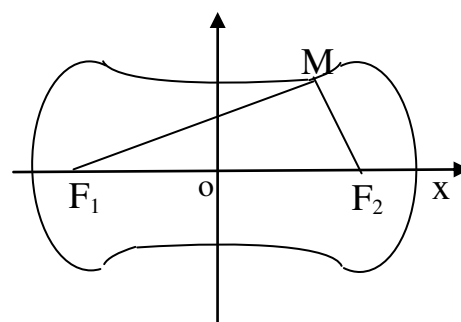
$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^2 \quad (2)$$

$$b=c$$

bo'lganda oval Bernulli lemniskatasi deyiladi. Uning tenglamasi

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (3)$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (4)$$



20 – chizma.

formulalar yordamida dekart koordinatalardan qutb koordinatalarga o'tsak, ($b > c$)

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi \quad (5) \text{ tenglama kelib chiqadi.}$$

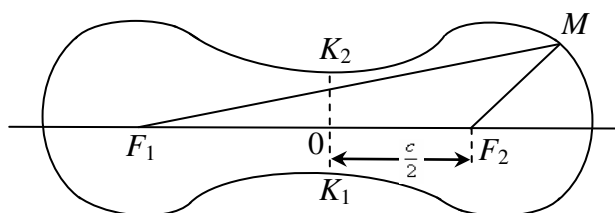
BO masofa shu bilan birga $BM = BM'$ kesma.

Ikki fokus bilan berilgan lemniskata.

Agar p o'zgarmas ko'paytmaning qiymatini $\frac{c^2}{4}$

ga teng emas deb olsak, u xolda lemniskata o'z ko'rinishini o'zgartiradi. p ko'paytma $\frac{c^2}{4}$ dan kichik bo'lgan xolda lemniskata ikkita ovaldan tashkil topadi. Ulardan biri o'z ichida

F_1 nuqtani oladi, ikkinchisi esa F_2 nuqtani o'z ichiga oladi. p ko'paytma $\frac{c^2}{4}$ dan katta, lekin $\frac{c^2}{2}$ dan kichik bo'lgan xolda lemniskata biskvit ko'rinishi da bo'ladi.

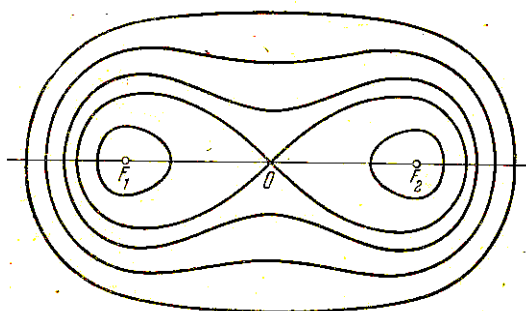


21 – chizma.

Agar $p < \frac{c^2}{4}$ dan ozgina kam farqlansa, u xolda “siqilgan biskvit” bo'ladi. $k_1 k_2$ juda qisqa

bo'lganda egri chiziq “yotuvchi sakkiz” ko'rinishiga yaqin bo'ladi. Agarda $p < \frac{c^2}{2}$ dan kam farq

qilsa, u xolda biskvit deyarli “siqilishga” ega bo'ladi. Agarda $p = \frac{c^2}{2}$ ga teng yoki $\frac{c^2}{2}$ dan katta bo'lsa “siqilish umuman yo'qoladi va lemniskata oval shaklida bo'ladi.



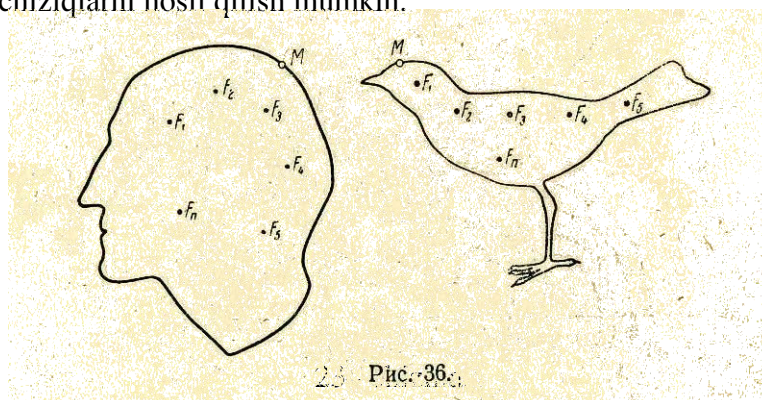
22 – chizma.

Fokuslari ixtiyoriy miqdorda bo'lgan lemniskata.

Tekislikda ixtiyoriy $F_1, F_2, \dots, F_n$ miqdordagi nuqtalar oraliq va harakatlanuvchi M nuqtani shunday qo'yamizki, olingan nuqtadan M nuqttagacha bo'lgan masofa o'zgarmas ko'paytma bo'lib qolsin. $F_1, F_2, \dots, F_n$ nuqtalar joylashuvchi bir-biriga nisbatan bog'liqdir va biror o'zgarmas ko'paytma qiymati bo'lsin. Demak egri chiziq formulasiga ega bo'lamiz. Bu egri chiziq n ta fokusli lemniskata deyiladi.

Yuqorida biz ikkita fokus bilan berilgan lemniskatani qaradik. Har xil sondagi fokuslarni olib, ularni turli xil joylashtirib va masofalar ko'paytmasi uchun u yoki bu miqdorlarni berib, lemniskatalarning eng g'ayritabiiy qiymatlarini olish mumkin. O'tkir uchli qalamni olib A nuqtadan qog'ozdan chiqmagan xolda chiziq yurgizamiz. Bu chiziq oxiri biz tanlagan dastlabki A nuqtaga qaytsin. U xolda qalam biror egri chiziqni chizadi. Biz faqat bu egri chiziq xech qayerda

o'zi bilan o'zi kesishmasligini talab qilamiz. Ravshanki, bu yo'l bilan masalan, odam boshi yoki qush shaklidagi egri chiziqlarni hosil qilish mumkin.



Bunday ixtiyoriy egri chiziqqa ega bo'lib, n ta sondagi $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ fokuslarni joylashishi mumkin va masofalar uchun o'zgarmas ko'paytma $MF_1 \cdot MF_2 \cdot \dots \cdot MF_n = p$ o'rniga shunday qiymat qo'yiladiki, bunda bu egri chiziqqa mos keluvchi lemniskata egri chiziqdan farqlanmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, lemniskatani chizuvchi M nuqtaning mumkin bo'lgan chetlanishlari chizilgan egri chiziqdan qalamning shtrix kengligi ustun bo'lolmaydi. Ya'ni qalamning shtrixi egri chiziqni chizganda o'zgarmasligi kerak.

5-§ Sikloida

Doskaning quyi tomoniga chizg'ichni qo'yib, u orqali aylana yoki xalqani chizg'ich va doskaga sirpantirib aylantiramiz. Agar aylanaga bor bo'lagini maxkamlasak, u holda bor sikloida deb ataluvchi egri chiziqni chizadi. aylananing bir marta aylanishiga sikloidaning bitta $MM'M''N$ yoki arkosi to'g'ri keladi. Agar aylanani yana davom ettirib aylantirssak sikloidani yan arkolari hosil bo'ladi.



24-chizma.

Masalan, diametri 3 sm gat eng bo'lgan aylana sikloidaning bitta arkosini chizadigan bo'lsak, $3 \cdot 3,14 = 9,42$ sm ga teng kesmani olamiz, ya'ni diametri 3 sm bo'lgan aylana uzunligiga teng kesmaga ega bo'lamiz. So'ngra bu kesmani teng 6 bo'lakka ajratamiz. Har bir bo'linish nuqtasi uchun yuqorida keltirilgan aylanamizni qo'yamiz. Bu aylanish nuqtalarini 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ko'rinishida nomerlaymiz. Bitta holatdan boshqa bir qo'shni holatga o'tish uchun aylana butun aylanishning 6 dan 1 qismniga bo'linishi kerak. Shunga ko'ra qo'shni nuqtalar orasidagi masofa aylana uzunligining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'ladi.

Shuning uchun agar 0 holatda bor M_0 nuqtada bo'ladi. U holda 1-holatda M nuqta aylana uzunligining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lgan masofasining urinish nuqtasida yotadi, 2-holatda esa

M_2 nuqta aylana uzunligining $\frac{2}{6}$ qismiga teng bo'lgan masofasining urinish nuqtasida yotadi va hakazo. $M_1, M_2, M_3, \dots$ nuqtalarni topish uchun urinish nuqtasidan boshlab 1,5 sm radiusli aylanani birinchi holat uchun bitta qismga, 2-holat uchun 2 ta qismga, 3-holat uchun 3 ta qismga va hakazo, aylanani burish kerak. Endi sikloidaning chizmasini chizish uchun

$$M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$$

nuqtalarni tekis egri chiziq bilan birlashtirish kerak.

Sikloida.

a radiusli aylana biror to'g'ri chiziq bo'ylab, sirpanmay g'ildirasin. Harakatdagi aylanada ko'rsatilgan nuqtaning iziga sikloida deyiladi.

Masala. Sikloidaning parametrik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masala shartidagi to'g'ri chiziq OX o'q bo'lsin. M nuqta boshlang'ich momentda O vaziyatda bo'lsin. Chizmada t momentdagi vaziyat ko'rsatilgan. Qo'zg'aluvchan aylananing yangi vaziyatdagi markazi C bo'lsin. $CM = CE = OC_o = a$,

$\angle MCE = t$ belgilaylik, $t=0$ da $M \equiv O$, $t=2\pi$ da $M = O_1$, $d(O, O_1) = 2\pi a$. M nuqtaning OX dagi proyeksiyasi S bo'lsin.

$$ES = CN,$$

$$x = OS = OE - SE = at - asint = a(t - sint)$$

$$y = SM = EC + NM = a - acost = a(1 - cost) \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM} = a\{(t - sint) + (1 - cost)\}$$

$$\text{qo'yamiz. } x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi$$

7. Bir aylana 2- aylana bo'ylab tashqaridan sirpanmay g'ildirasa, harakatdagi aylanada ko'rsatilgan nuqtaning chizgan iziga episikloida deyiladi.

Yechish. $\omega(0, a)$ berilgan aylana, ω' harakatlanuvchi aylana bo'lsin. OXY dekart koordinatalar sistemasini o'rnataylik. Boshlang'ich momentda ω' va ω aylanaga $A \in (OX)$ nuqtada urinsin. t-momentda M vaziyatga ko'tariladi va izlangan chiziqli yotadi. ω aylanada $AB = \square AOB \cdot OA = a \square AOB$ (1) ω'' aylanada $BM = BC$, $\square BCM = mat$ (2) bunda $\angle BCM = t$, $MC = CB = ma$, $ma < a$, $m > 0$, ko'ramizki $BM = AB$ (3)
 $\Rightarrow a \angle AOB = mat \Rightarrow \angle AOB = mt$ (4) M nuqtaning koordinatalarini topamiz.

$$X = OE = OF + FE \quad (5)$$

$$\angle COF : OF = (a + ma) \cos(\angle COF) = a(1 + m) \cos mt \quad (6)$$

$$FE = KM. \triangleright KCM : KM = CM \cdot \sin(\angle KCM) \Rightarrow$$

$$\angle KCM = \angle BCM - \angle OCF = t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right) = t(1 + m) - \frac{\pi}{2}$$

$$FE = KM = ma \sin\left(t(1 + m) - \frac{\pi}{2}\right) \quad (7) \quad (6) \text{ va } (7) \text{ ni } (5) \text{ ga qo'yamiz.}$$

$$x = a[(1 + m) \cos mt - m \cos(1 + m)t] \quad y = ME = CF - CK \quad (8)$$

$$\square COF \Rightarrow CF = a(1 + m) \sin mt \quad (9) \quad \square KCM \Rightarrow CK = \quad (9) \quad \text{va } (10) \quad \text{ni } (8) \quad \text{ga}$$

$$= ma \sin(1 + m)t \quad (10)$$

$$\text{qo'yamiz. } y = a[(1 + m) \sin mt - m \sin(1 + m)t]$$

$$\text{Javob: } x = a[(1 + m) \cos mt - m \cos(1 + m)t], \quad y = a[(1 + m) \sin mt - m \sin(1 + m)t]$$

8. $OD = a$ diametrli aylanani $[OB)$ nur orqali kesaylik. (OXY) dekart koordinatalar sistemasini shunday o'rnataylikki, $D \in (OX)$ bo'lsin. D nuqtadan OX ga perpendikulyar d to'g'ri chiziqli B nuqtada kesishsin. $[OB)$ nur ω aylana bilan A nuqtada kesishsin.

Ta'rif: $OM = AB$ tenglikni qanoatlantiruvchi M nuqtalar to'plamiga **Diokles sissoidasi** deyiladi. Ushbu chiziqli parametrik tenglamalari tuzilsin.

Yechish:

$$OD = a, \angle BOD = \varphi \quad \square OAD$$

$$OM = AB, \text{ dan}$$

$$tg \varphi = \frac{AD}{OA} \Rightarrow AD = OA tg \varphi. \quad \triangle OAD \quad \text{va} \quad \triangle ABD \text{ larning}$$

$$\text{o'xshashligidan } AD = OA \cdot AB \quad (2) \quad \triangle OAD \text{ dan}$$

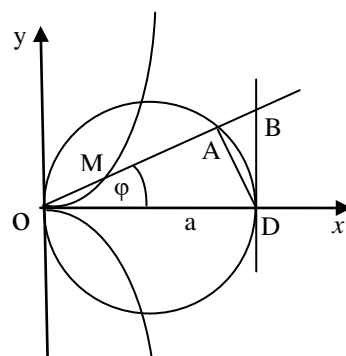
$$OA = OD \cos \varphi = a \cos \varphi \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow AB = a \cos \varphi tg^2 = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \quad OM = r \text{ belgilasak,}$$

$$r = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \quad (4) \quad x = r \cos \varphi = a \sin^2 \varphi, \quad y = r \sin \varphi = \frac{a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi} \quad 25 - \text{chizma.}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{tg^2 \varphi}{1 + tg^2 \varphi}. \text{ U holda, } x = a \frac{tg^2 \varphi}{1 + tg^2 \varphi}, \quad y = a \frac{tg^3 \varphi}{1 + tg^2 \varphi} \quad (5) \quad tg \varphi = \varphi \text{ deb}$$

$$\text{belgilasak, } x = \frac{a\varphi^2}{1 + \varphi^2}, \quad y = \frac{a\varphi^3}{1 + \varphi^2}.$$



Arhimed spirali

Siferblata markazidan chiquvchi cheksiz uzunlikdagi sekuledi strelkasida qo'ng'izcha tushib ketmagan holda o'zgarmas tezlik $g \frac{sm}{s}$ bilan yursin deb tasavvur qilamiz. 1 minutdan keyin qo'ng'izcha 60 g sm masofada, 2 minutdan keyin esa 120 g masofada bo'ladi va hakazo. Umuman t vaqtda harakat boshlangandan so'ng qo'ng'izcha gt masofada bo'ladi. bu vaqt davomida strelka $6t^0$ burchak gradusiga buriladi. Shuning uchun harakat boshlangandan keyin ixtiyoriy ixtiyoriy t sekund davomida siferblata tekisligida qo'ng'izcha ning xolatini topish shunday bo'ladi.

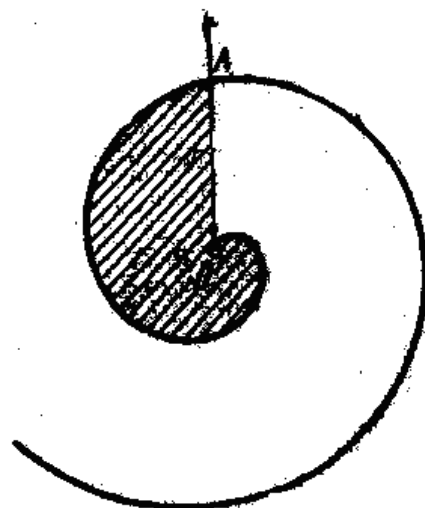
Topish uchun strelkani boshlang'ich xolatidan yo'nalish bo'yicha α burchakka yotqizamiz va markazdan strelkadagi yangi xolat masofasini o'lchaymiz $r = v \cdot t$.

Ravshanki, strelkaning α burchakka burish va r bosib o'tilgan masofa orasidagi munosabat quyidagicha bo'ladi:

$$r = \frac{g}{6} d$$

Boshqacha qilib aytganda, proporsionallik koeffisientini $k = \frac{g}{6}$ bo'lganda r , α ga to'g'ri

proporsional bo'ladi. Endi kichkina qo'ng'izchamizni qora bo'yoqqa to'ldirilgan bonkaga quyidagicha tadbiiq etamiz. Bonkaning o'ziga xos teshigidan oqib chiquvchi bo'yoqni siferblata markaziga qo'yamiz. Bunda strelka bo'yicha harakatlangan qo'ng'izcha singari strelka aylanishi davomida qog'ozda iz oldiradi. U holda boshqichma-bosqich holda qog'ozda egri chiziqlar chiziladi. Bu Arximed tomonidan aniqlanganligi uchun *Arximed spirali* deyiladi. Shuni aytish kerakki, Arximedda sekund strelkasi va qo'ng'izcha haqida umuman fikr yoki talqin bo'lmagan, biz faqat ularni tasavvur qilish uchun kiritdik.



26 – chizma.

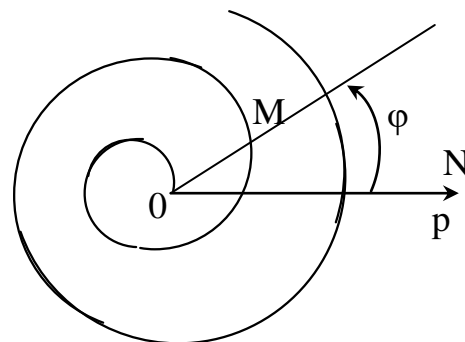
Arximed spirali cheksiz ko'p o'ramlardan tashkil topgan. U sferblata markazidan boshlab aylanishlar soni o'sib borganda sferblata markazidan uzoqlashadi.

M nuqta ON to'g'ri chiziq bo'yalab harakatlansin. ON to'g'ri chiziq esa O nuqta atrofida aylansin.

Ta'rif: Qutb atrofida yekis aylanayotgan to'g'ri chiziq ilgarkanma tekis harakat qiluvchi nuqtaning kochizgan iziga *Arximed spirali* deyiladi.

$\rho = \frac{a}{\varphi}$ tenglama orqali aniqlangan chiziqqa giperbolik spiral deyiladi. a – musbat son.

Giperbolik spiralni vaziyatini tekshiraylik.



27 – chizma.

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ qiymatni olaylik $M_1(\frac{2a}{\pi}, \frac{\pi}{2})$ mos nuqta φ -cheksiz o'ssa, ρ φ ga teskari proporsional bo'lib, nolga intiladi. U holda o'zgaruvchi $M(\rho, \varphi)$ nuqta qutb atrofida musbat yo'nalishda harakatlanib qutbga cheksiz yaqinlashadi. Agar M_1 nuqta cheksizlikka intilsa, u holda φ $\frac{\pi}{2}$ dan boshlab kichrayib boradi, ρ esa cheksizlikka intiladi. $M(\rho, \varphi)$ nuqta cheksiz uzoqlashadi. M nuqtaning qutb o'qiga proyeksiyasi P bo'lsin.

$$PM = \rho \sin \varphi, \quad PM = \rho \sin \varphi = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

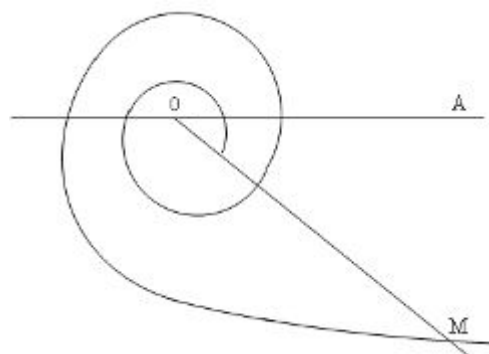
ma'lumki, $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} 1$ u holda

$$PM \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} a$$

tenglamasi

$$-\rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho} = a \Rightarrow \frac{d\varphi}{a} = -\frac{d\rho}{\rho^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varphi}{a}.$$

Xulosa. M nuqta spiral bo'ylab cheksizlikka intilsa, ushbu nuqta qutb o'qiga parallel va undan a masofada o'tuvchi to'g'ri chiziqqa yaqinlashib boradi. a -manfiy son bo'lsa, $\rho = \frac{a}{\varphi}$ tenglik teskari giperbolik spiralni aniqlaydi.



28– chizma.

OL to'g'ri chiziq O qutb atrofida doimiy burchak tezligi ω ostida aylanadi. M nuqta OL to'g'ri chiziqda $|OM|$ masofaga proporsional tezlik bilan xarakatlanadi. M nuqtaning iziga logarifmik spiral deyiladi

Masala. Logarifmik spiralning qutb koordinatalari bo'yicha tenglamasi yozilsin.

Parametr sifatida t vaqtni olib, uni chiziqning A nuqtasidan o'tgan momenti ($\varphi = 0, \rho = \rho_0$) dan boshlab hisoblaymiz. $\varphi = \omega t \Rightarrow \frac{ds}{dt} = m\rho, \quad m = const,$
 $\frac{d\rho}{\rho} = m dt \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{mt} \quad t = \frac{\varphi}{\omega} \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{m \frac{\varphi}{\omega}} = \rho_0 e^{k\varphi},$ bunda $k = \frac{m}{\omega}$, $k = 0$ da $\rho = \rho_0$ -aylana hosil bo'ladi. φ -o'ssa, ρ -o'sadi, φ -kamaysa, ρ -kamayadi.

Logarifmik spiralning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $x = \rho_0 e^{k\varphi} \cos \varphi,$
 $y = \rho_0 e^{k\varphi} \sin \varphi.$

X u l o s a.

Men bu Bitiruv Malakaviy Ishini yozishda Egri chiziqlar bilan tanishib chiqdim. Chiziqlar nazariyasi yordamida ajoyib egri chiziqlarni o'rgandim. Matematikaning barcha sohalarida egri chiziqlar muhim rol o'ynaydi. Egri chiziq – fazoda harakatlanuvchi nuqtaning ketma- ket harakatlarining yig'indisi. Ajoyib egri chiziqlarni turlari bilan ham tanishib chiqdim.

Shu bilan birga Bitiruv Malakaviy ishini mavzuga doir misollar va masalalar bilan mustaxkamladim.

Bitiruv Malakaviy Ishida Ajoyib egri chiziqlarni barcha turlari bilan tanishib, ularga doir masalalar bilan ham tanishdim.

Analitik geometriya fanining mavzularini, qolaversa, egri chiziqlar nazariyasini o'qitishda ta'limning zamonaviy usullaridan keng foydalanish, o'quv jarayonini yangi pedagogik texnologiyalar asosida tashkil etish o'qitishning asosi hisoblanadi.

“Ta'lim – tarbiya tizimini o'zgartirmasdan turib, ongni o'zgartirib bo'lmaydi. Ongni tafakkurni o'zgartirmasdan turib esa biz ko'zlagan oliy maqsad – ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lmaydi”- deydi I.A.Karimov. Men ham prezidentimizning ushbu gaplariga amal qilgan xolda kelajakda vatanim uchun kerakli kadrlardan biri bo'lmoqchiman.

V. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. I.A. Karimov “O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida”, Toshkent, 2011 y.
1. I.A. Karimov “Barkamol avlod orzusi”, Toshkent – 2000 yil
2. I.A. Karimov “Inson baxt uchun tug'iladi”, “Sharq” – T. 2001
3. I.A. Karimov “Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch”, Toshkent “Ma'naviyat” 2005.
4. I.A. Karimov “Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari” – T: O'zbekiston, 2009 yil.
5. I.A. Karimov “Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqorolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi” – T: O'zbekiston, 2010 yil.
6. I.A. Karimov “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo etish-ustuvor maqsadimiz”. “Xalq so'zi” gazetasi 2010 yil. 27 yanvar.
7. I.A. Karimov “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish yo'lini izchil davomi – taraqqiyotimizning muhim omilidir”, “Ishonch” gazetasi; 2010 yil 8 – dekabr.
8. I.A. Karimov “Barcha reja va dasturlarimiz vatanimiz taraqqiyotini yuksaltirish, xalqimiz farovonligini oshirishga xizmat qiladi”, “Xalq so'zi” gazetasi, 2011 yil 22 – yanvar.
9. I.A. Karimov “O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20-yilligiga bag'ishlangan”. “Xalq so'zi” gazetasi, 2011 yil 7 aprel.
10. I.A. Karimov “Axborot va kommunikatsiya texnologiyalarini yanada taraqqiy ettirishning tashkiliy – huquqiy jihatlar”, “Xalq so'zi” gazetasi, 2011 yil 15 – aprel.
11. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Maxkamasining “Ta'lim to'g'risida”gi va “Kadrlar tayyorlash dasturida” gi qonuni 1997 – yil, 29 – avgust.
13. М. А. Собиров, А.Е. Юсупов «Дифференциал геометрия курси» Т. 1965;
14. А.В. Погорелов. «Геометрия» М. 1983;
15. П. К. Рашевский «Курс дифференциальной геометрии» М. 1956;
16. А.Я. Нарманов «Дифференциал геометрия» Т. 2003;
17. под. Ред. Феденко «Сборник задач по дифференциальной геометрии» М.1979;
18. А.С. Мищенко и др. «Курс дифференциальной геометрии и топологии» М.МГУ., 1980
19. U. Xojixonov “Differensial geometriya” N., 2007.
20. “Egri chiziqlar” o'quv qo'llanma. Samarqand 1989.
21. Маркушевич «Замечательные кривые» М. 1978 й.
22. А. Azlarov, В. Mansurov “ Matematik analiz asoslari ” Toshkent.