Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

Наманган муҳандислик-педагогика институти

«Информатика ва ахборотлар технологияси»
кафедраси

«СОНЛИ УСУЛЛАР ВА АЛГОРИТМЛАР»
ФАНИДАН ТАЖРИБА ИШЛАРНИ
БАЖАРИШ БЎЙИЧА

```
function F(x : real) : real;
begin
    F:=.....
end ;
begin
  L1: readln('a, b=' , a, b);
      if f(a)*f(b)>0 then goto L1;
      readln('eps=' ,eps);
  L2:C:=(a+b)/2;
      if F(a)*F(c)<0 then b:=c else a:=c;
      if  Abs(b-a)>eps then goto L2;
      c:=(a+b)/2;
      writeln ('тенглама ечими= ',c)
end.
```

услубий кўрсатма

II ҚИСМ

Наманган

Ушбу услубий кўрсатма 514900 касб таълими йўналиши бўйича таълим олаётган талабалар учун мўлжалланган бўлиб, “Сонли усуллар ва алгоритмлар” фанидан тажриба машғулотларини ўтказиш бўйича барча йўриқномаларни ва тажриба иши вариантларини ўз ичига олган.

Услубий кўсатмадан, “Сонли усуллар ва алгоритмлар” фанини ўрганувчи талабалар, фанни мустақил ўрганувчи магистрлар, илмий изланувчилар ва фан ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Тузувчилар: т.ф.н. доц. С. Ирисқулов
катта ўқ. К. Исманова

Тақризчилар: НамМПИ т.ф.н. П. Каримов
НамДУ «Амалий математика»
кафедрасининг мудири
доц. А. Имомов

Қайта ишлаб чиқилган ва таҳрирланган услубий кўрсатма «Информатика ва ахборотлар технологияси» кафедрасининг______________ №___сонли мажлисида кўриб чиқилган ва маъқулланган.

НамМПИ илмий-услубий кенгаши томонидан ижобий баҳоланиб, нашр этишга тавсия этилган. (Баённома № «__»__________йил)

Сўз боши

Инсоният тарихининг кўп йиллик тарихи эзгу ғоялардан ва соғлом мафкурадан маҳрум бирор бир жамиятнинг узоққа бора олмаслигини кўрсатди. Шу боис мустақиллик туфайли мамлакатимиз ўз олдига озод ва обод Ватан, Эркин ва фаровон ҳаёт барпо этиш, ривожланган мамлакатлар қаторидан ўрин олиш, демократик жамият қуриш каби эзгу мақсадларни қўйди.

Бу эса келажагимизни яққол тасаввур этиш, жамиятимизнинг ижтимоий-маънавий пойдеворини мустаҳкамлаш эҳтиёжини туғдиради. Демак, галдаги энг асосий вазифа: ёш авлодни Ватан равнақи, юрт тинчлиги, халқ фаровонлиги каби олижаноб туйғулар руҳида тарбиялаш, юксак фазилатларга эга, эзгу ғоялар билан қуролланган. Комил инсонларни вояга етказиш, жаҳон андозаларига мос, кучли билимли, рақобатбардош кадрлар тайёрлашдир.

“Жаҳон цивилизациясига даҳлдор бўлган энг замонавий илмларни эгалламай туриб, мамлакат тараққиётини таъминлаш қийин”,- деган эдилар И.Каримов. Ўзбекистоннинг иқтисодий ва ижтимоий соҳаларда юқори натижаларга эришиши, жаҳон иқтисодий тизимида тўлақонли натижаларга тўлақонли шериклик ўрнини эгаллай бориши, инсон фаолиятининг барча жабҳаларида замонавий ахборот технологияларидан юқори даражада фойдаланишнинг кўламлари қандай бўлишига ҳамда бу технолиялар ижтимоий меҳнат самарадорлигининг ошишида қандай роль ўйнашига боғлиқ. Демак,замонавий компьютерлардан амалда кенг фойдалана оладиган етук кадрлар тайёрлаш кечиктириб бўлмайдиган вазифадир.

Талабалар дастурлаш тилларини ва йўналиш бўйича махсус фанларни ўрганиш натижасида дастурчи даражасига етишади. Лекин, улар олган назарий ва амалий билимларини амалий масалаларни ечишга қўллашда кўпгина қийинчиликларга дуч келишади. Чунки уларда типик, тақрибий масалаларни ечишда олий математика курсидан олган билимларгина мавжуд. Шунинг учун, ҳаётий масалаларнинг математик моделларини тушуна олишлари, уларни ечишнинг сонли-тақрибий,тақрибий-аналитик усулларини ўрганишлари учун «Сонли усулар ва алгоритмлар» фанининг аҳамияти катта ҳисобланади.

Ушбу услубий кўрсатма айнан шу мақсадда тузилган бўлиб, у фанни ўқитишда Республикамизда тўпланган кўп йиллик педагогик тажрибаларни илмий таҳлилдан ўтказиш натижасида ҳосил бўлган хулосаларга ҳамда Давлат таълим стандартларига мос наъмунавий дастур ва унга мос ишчи дастурларга асослангандир.

Кўрсатма икки қисмдан иборат бўлиб, 1-қисмда асосан чизиқсиз тенгламаларнинг тақрибий илдизларини ҳисоблаш, чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари, юзаларни тақрибий ҳисоблаш усуллари, ҳар бир усул бўйича қисқача назарий маълумотлар, усулга мос ишчи алгоритм, дастур таъминоти ва тажриба иши учун топшириқлар берилган. Ушбу 2-қисмда эса функцияларни интерполяциялаш масаласи, энг кичик квадратлар усули, биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни тақрибий ҳисоблаш усуллари, жумладан, Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари, иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни тақрибий ҳисоблаш усуллари, жумладан, чекли-айирмалар ва Галёркин усуллари, хусусий хосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ҳисоблаш усуллари, жумладан, гиперболик, параболик, эллиптик типдаги тенгламаларни тўр усулида ечиш, ҳамда, ҳар бир усул бўйича қисқача назарий маълумотлар, усулга мос ишчи алгоритм, дастур таъминоти ва тажриба иши учун топшириқлар талаба учун содда, тушунарли қилиб берилган.

Услубий кўрсатмадан фанни ўрганаётган барча талабалар, магистрлар ҳамда ўқитувчилар фойдаланиши мумкин.

Тажриба машғулотларни бажариш учун белгиланган тартиблар:

1. Тажриба ишини бажариш учун зарур бўлган назарий маълумотларни кўрсатилган адабиётлардан тўплаш;
2. Белгиланган вариант бўйича шахсий топшириқларни ўз вақтида олиш;
3. Иш режасида белгиланган масалаларнинг қўйилиши, унинг моҳияти ва халк ҳўжалигидаги масалаларни ечишдаги аҳамияти ҳақида тўлиқ маълумотга эга бўлиш;
4. Масалани ечиш усулларининг ишчи алгоритмларини ишлаб чиқиш ва алгоритмни блок-схемалар кўринишда ифодалаш;
5. Ишлаб чиқилган алгоритмлар бўйича Паскаль дастурлаш тилида дастур яратиш ва уни ишга созлаш;
6. Тўзилган дастурни текшириб кўриш ва олинаётган натижаларнинг тўғрилигига ишонч билдириш;
7. қўйилган масала (шахсий топшириқ)нинг дастурдан олинган натижаларини зарур формада чоп этишни ташкиллаш;
8. Бажарилган ишларни, белгиланган режа асосида расмийлаштириш ва уни ўқитувчи ҳузурида ҳимоя қилиш (тажриба дарси мобайнида);
9. Ҳимоя қилинган, ўқитувчи томонидан баҳоланган тажриба иши ҳисоботини ўқитувчига топшириш;
10. Тажриба ишини ўз вақтида бажармаган талаба ўқитувчи белгилаган вақтда(дарс машғулотларидан бўш вақтда) кафедрага келиб ишни бажаради ва белгиланган тартибда уни ҳимоя қилади;

Эслатма: Агар талаба дарс мобайнида ва қўшимча белгиланган вақтда ҳам тажриба ишини бажармаса шу мавзу учун рейтинг балларини ололмайди ва фандан ўзлаштирмаган ҳисобланади.

Тажриба иши №1

Мавзу: ***Биринчи тартибли, оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли тақрибий усуллари учун дастур таъминотини яратиш.***

Ишдан мақсад: *Талабаларни амалий масалаларни ечишда кўп ишлатиладиган дифференциал тенгламалар, Коши масаласини ечишнинг Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари, усулларга оид назарий маълумотлар ва дастурлар билан таништириш.*

Режа:

1. *Оддий дифференциал тенгламаларга оид назарий маълумотлар.*
2. *Эйлер усулининг ишчи алгоритми ва дастур таъминоти.*
3. *Рунге-Кутта усулининг ишчи алгоритми ва дастур таъминоти.*
4. *Тажриба ишидан олинган натижалар ва уларниг таҳлили.*
5. *Тажриба ишига доир топшириқлар рўйҳати.*

1. Оддий дифференциал тенгламаларга оид назарий маълумотлар.

Маълумки, кўпинча амалий масалаларни ечишда, дастлаб унинг математик модели физик, механик, кимёвий ва бошқа қонуниятлар асосида тузилади. Математик модел асосан алгебраик, дифференциал, интеграл ва бошқа тенгламалардан иборат бўлади. *Оддий дифференциал* тенгламалар эса жуда кўп муҳандислик масалаларини ечишда учрайди. Демак, дифференциал тенгламаларнинг маълум шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топиш катта аҳамиятга эга.

Дифференциал тенгламалар иккита асосий синфга бўлинади: *оддий дифференциал* тенгламалар ва *хусусий ҳосилали дифференциал* тенгламалар.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенламаларга кейинроқ батафсил тўхталамиз.

Оддий дифференциал тенгламаларда фақат бир ўзгарувчига боғлиқ функция ва унинг ҳосилалари қатнашади, яъни

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

(1) тенгламада қатнашувчи ҳосилаларнинг энг юқори тартиби дифференциал тенгламаларнинг *тартиби* дейилади. Агар тенглама изланувчи функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, уни *чизиқли дифференциал* тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, уни айниятга айлантирувчи x ва n та $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ўзгармасларга боғлиқ ихтиёрий функцияга айтилади. Масалан (1) тенгламанинг умумий ечими $y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$ кўринишдаги функциялардан иборат. Агар $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ўзгармасларга муайян қийматлар берилса, умумий ечимдан хусусий ечим ҳосил қилинади. Хусусий ечимни топиш учун $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ўзгармасларнинг мос қийматларини аниқлаш лозим. Бунинг учун эса ечимни қаноатлантирувчи қўшимча шартларга эга бўлишимиз керак. Агар дифференциал тенглама n-тартибли бўлса, ягона хусусий ечимни топиш учун худди шунча қўшимча шартлар керак. Хусусан, *1*-тартибли тенглама $f(x,y,y')=0$ нинг умумий ечими $y=\varphi(x,c)$ даги c ўзгармасни топиш учун *1* та қўшимча шартнинг берилиши кифоя.

қўшимча шартлар берилишига кўра дифференциал тенгламалар учун 2 хил масала қўйилади:

1) *Коши масаласи*
2) *Чегаравий масала.*

Агар қўшимча шартлар битта $x=x_0$ нуқтада берилса, дифференциал тенгламани ечиш учун қўйилган масала *Коши масаласи* дейилади. Коши масаласидаги қўшимча шартлар *бошланғич шартлар*, $x=x_0$ нуқта эса *бошланғич нуқта* деб аталади. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг чизма, аналитик, тақрибий ва сонли ечиш усуллари мавжуд.

*Аналитик усуллар*да дифференциал тенгламанинг ечимлари аниқ формулалар орқали аниқланади.

*Тақрибий усуллар*да дифференциал тенглама ва қўшимча шартлар у ёки бу даражада соддалаштирилиб, масала осонроқ масалага келтирилади.

*Сонли усуллар*да эса ечим аналитик шаклда эмас, балки сонлар жадвали кўринишида олинади. Албатта бунда дифференциал тенгламалар олдин дискрет тенгламалар билан алмаштириб олинади. Натижада сонли усуллар воситасида олинган ечим ҳам тақрибий бўлади.

Умуман олганда, оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини аналитик усул ёрдамида топиш имкони жуда кам бўлганлиги учун, амалда кўпинча уларни сонли усуллар ёрдамида тақрибий ҳисобланади.

қуйида шундай усуллардан Эйлер ва Рунге-Кутта усулларини кўриб чиқамиз.

2. Эйлер усулининг ишчи алгоритми ва дастур таъминоти.

Бизга =уйидаги биринчи тартибли дифференциал тенглама(Коши масаласи)ни

$$y'=f(x,y) \quad (2)$$

[a,b] орали=даги $y_0=y(x_0)$, $x_0=a$ бошлан\ич шартни =аноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин.

Коши масаласини Эйлер усули ёрдамида ечиш учун, дастлаб дифференциал тенгламанинг ечими =идириладиган [a,b] кесмани $x_1, x_2, \ldots x_n$ тугун ну=талар билан бўлакларга бўламиз. Тугун ну=таларнинг координаталари $x_{i+1}=a+(i+1)h \quad (i=0..n-1)$ формула ор=али ани=ланади. Щар бир тугунда $y(x_i)$ ечимнинг =ийматларини чекли айирмалар ёрдамида та=рибий y_i =ийматлар билан алмаштирилади.

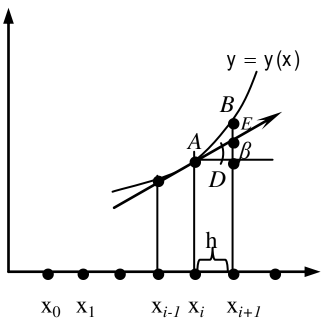
(2) дифференциал тенгламани x_i ну=та учун ёзиб $y'(x_i) =f(x_i, y(x_i))$ олиб, $y'(x_i) \approx \dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$ чекли айирмали формуладан фойдаланамиз ва натижада =уйидаги Эйлер формуласига эга быламиз:

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) = y(x_i) - h\cdot f(x_i, y(x_i)) \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n \end{cases}$$

Маълумки, $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ ну=та атрофидаги Тейлор =аторига ёйилмасини =уйидагича ёзиш мумкин:

Ушбу чексиз =аторнинг бошидаги иккита щад билан чегараланиб, биринчи тартибли щосила =атнашган щадни ани=лаш натижасида =уйидаги чекли айирмали формулани щосил =иламиз:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h} \qquad (3)$$



Ушбу алмаштиришнинг геометрик маъноси =уйидагича:
Хосиланинг геометрик маъносига кыра

$$y'(x_i) = tg\beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

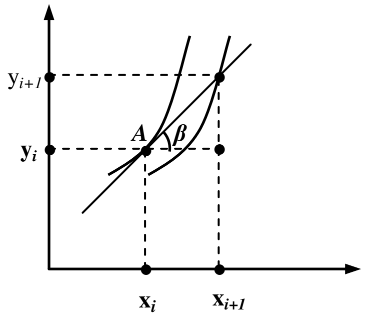
(3) дан

$y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h} = \dfrac{BD}{h} = \dfrac{ED}{h} + \dfrac{BE}{h} = y'(x_i) + \dfrac{BE}{h}$ Демак, чекли айирмалар формуласи щосиланинг асл =ийматидан BE/h га фар= =илади, яъни *BE* =анча кичик былса, чекли айирма у' щосилага шунча я=ин былади. Расмдан $h \to 0$да $BE \to 0$ эканини кыриш мумкин. (2) ва (3) дан $y'_i = f(x_i, y_i)$ эканини щисобга олиб, =уйидагини щосил =иламиз:

$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h\cdot f(x_i, y_i) \quad (4)$$

Щосил =илинган (4) формула Эйлер усулининг асосий ишчи формуласи былиб, унинг ёрдамида тугун ну=таларга мос былган дифференциал тенгламанинг y_i хусусий ечимларини топиш мумкин. Ю=оридаги формуладан кыриниб турибдики, y_{i+1} ечимни топиш учун y_i ечимнигина билиш кифоя. Демак, Эйлер усули бир =адамли усуллар жумласига киради.

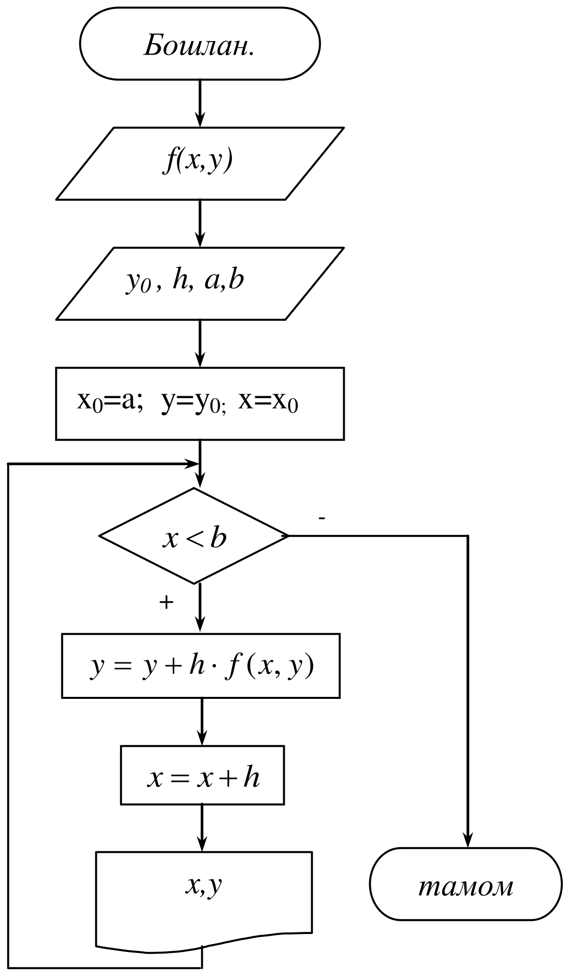
Эйлер усулининг *геометрик маъноси* =уйидагича:



А ну=та $x=x_i$ ну=тага мос келувчи ечим былсин. Бу ну=тадан интеграл чизи==а ытказилган уринма x_{i+1} ну=тада бош=а интеграл чизи\ида y_{i+1}ечимни ани=лайди.

Уринманинг о\малиги $\beta \cdot y_i^{'} = f(x_i, y_i)$ щосила билан ани=ланади. Демак, Эйлер усулидаги йыл =ыйилган асосий хатолик ечимни бир интеграл чизи\идан бош=асига ытказиб юбориши билан характерланади.

Эйлер усулига мос алгоритм блок-схемаси.



Алгоритмнинг дастур матни:

```
Program Eyler;
var a,b,x0,y0,x,y,h:real;
Function f(x,y:real):real;
Begin
f:=<функция куриниши>;
end;
Begin
Write('a,b='); readln(a,b);
Write('y0='); readln(y0);
  x0:=a;
Write('h=');readln(h);
  writeln('x0=',x0,'    y0=',  y0 );
  x:=x0;y:=y0;
  while  x< b  do
  begin
  y:=y+h*f(x,y);
  Writeln('x=',x; '     y=',y);
  x:=x+h;
  end;
Readln;
end.
```

3.Рунге-Кутта усулининг ишчи алгоритми ва дастур таъминоти.

Бир =адамли ошкор усулларнинг бош=а бир неча хиллари щам мажуд былиб, уларнинг ичида амалда энг кып ишлатиладигани Рунге-Кутта усули щисобланади. Усул шартига кыра щар бир янги x_{i+1} тугун ну=тадаги y_{i+1} ечимни топиш учун f(x,y) функцияни 4 марта щар хил аргументлар учун щисоблаш керак. Бу жищатдан Рунге-Кутта усули щисоблаш учун нисбатан кып ва=т талаб =илади. Лекин Эйлер усулидан кыра ани=лиги ю=ори былганлиги учун, ундан амалда кенг фойдаланилади.

Усулнинг ишчи формуласи =уйидагича ёзилади:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0,1,...$$

бу ерда $k_0 = f(x_i, y_i)$;

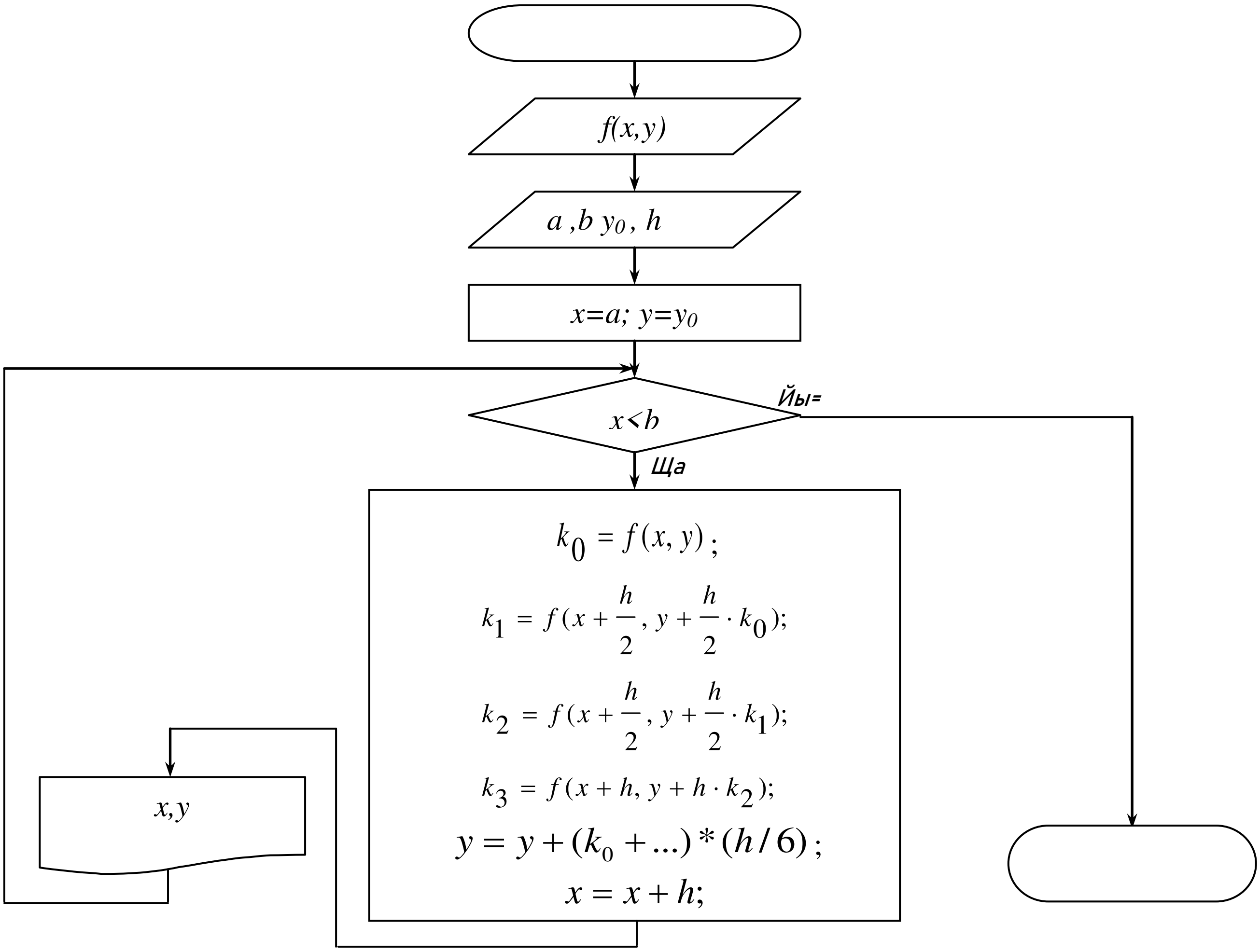
$$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0);$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Демак, формулалардан кыриниб турибдики, Эйлер усули биринчи тартибли Рунге-Кутта усулига мос келади.

Рунге-Кутта усулига мос блок-схема.



Алгоритмнинг дастур матни:

```
Program  R__kutta;
var  a,b,x0,y0,h,x,y,k0,k1,k2,k3:real;
function f(x,y:real):real;
  begin
      f:=. . .;
  end;
```

```
Begin
   Write('a,b=');readln(a,b);
   Write('y0,h=');readln(y0,h);
  x:=a;y:=y0;
  while x<b do
  begin
    k0:=f(x,y);
    k1:=f(x+h/2,y+h*k0/2);
    k2:=f(x+h/2,y+h*k1/2);
    k3:=f(x+h,y+h*k2);
  y:=y+(k0+2*k1+2*k2+k3)*(h/6);
  x:=x+h;
  Writeln('x=',x,'     y=',y );
  end;
readln;
end.
```

4.Тажриба ишидан олинган натижалар ва уларнинг тащлили.

Ю=орида кыриб чи=илган дастурларнинг ты\рилигини ва усулларнинг ани=лик даражасини текшириш учун битта ихтиёрий тенглама оламиз. Ани= ечимни аналитик усулда щисоблаш =улай былиши учун =уйидаги тенгламани кыриб чи=амиз.

y'=cos$x$ тенгламани [0,1] орали=да h=0.1 =адам билан y(0)=1 бошлан\ич шартни =аноатлантирувчи ечимни топиш керак.

Ю=оридаги дастурларга керакли =ийматларни киритамиз. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $b = 1$; $h = 0.1$

y'=cos$x$ учун ани= ечим сифатида $y = \sin x + c$ ни оламиз. Бошлан\ич шартларни =ыйсак, 1=sin0+c =1 Демак, y=sinx+1.

Олинган натижаларга мос =ийматлардан иборат жадвал тузамиз.

x_i	Эйлер усули учун	Рунге-Кутта усули учун	Ани= ечим
0.1	1,1000	1,0998	1,0998
0.2	1,1995	1,1986	1,1986
0.3	1,2975	1,2955	1,2955
0.4	1,3930	1,3894	1,3894
0.5	1,4851	1,4794	1,4794
0.6	1,5729	1,5646	1,5466
0.7	1,6554	1,6442	1,6442
0.8	1,7319	1,7173	1,7173
0.9	1,8015	1,7833	1,7833
1	1,8637	1,8414	1,8414

Натижалардан кыриниб турибдики, Рунге- Кутта усулидан олинган натижалар Эйлер усулидан олинган натижаларга кыра ани= ечимга анча я=индир.

5.Тажриба ишига доир топшири= вариантлари:

Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари ёрдамида берилган дифференциал тенглама учун Коши масаласини h=0.1 =адам билан [0;1] орали=да ечимини топиш алгоритми ва дастурини тузинг.

№	Тенглама	Бошлан\ич шарт
1	$y' = (x+1)^{1/2} y - 0{,}5x^2$	$y(0) = 1{,}2$
2	$y' = (x^2+1)^{1/2} y + 4{,}5x$	$y(0) = 1{,}4$
3	$y' = 3{,}4x^2 y - 2{,}8x^2$	$y(0) = 0{,}6$
4	$y' = (x+3)^{1/2} y - 1{,}3x^2$	$y(0) = 1{,}6$
5	$y' = 4{,}5x^2 + y - 6{,}4x + 1$	$y(0) = 4{,}2$
6	$y' = 2{,}7x^2 y + 3{,}8x + y$	$y(0) = 4{,}6$
7	$y' = 8{,}5x^3 y + \sin x^2$	$y(0) = 2{,}8$
8	$y' = 5{,}2x - y + 4.8x^3$	$y(0) = 4{,}2$
9	$y' = 4{,}2xy + x^2 - \cos x$	$y(0) = 4{,}8$
10	$y' = 5{,}4xy + 1{,}5x^2 + \ln y$	$y(0) = 2{,}6$
11	$y' = 8{,}6x^3 y - 5{,}1x^2 + 2$	$y(0) = 4{,}2$
12	$y' = (3{,}5x+1)y + x^2 + 1{,}6$	$y(0) = 2{,}6$
13	$y' = (2x+5)^{1/2} y + 1{,}5x^2$	$y(0) = 2{,}4$
14	$y' = (x^2 - 1)^{1/3} y - 0{,}6x^2$	$y(0) = 1{,}2$
15	$y' = (2x+1)^{1/2} y + 3{,}4x^2 + 1{,}2$	$y(0) = 1{,}2$
16	$y' = (3x^2+1)y - 3{,}4x^2 + 1{,}4$	$y(0) = 1{,}5$
17	$y' = (4x^2+1)y - 3{,}5x^2 + 1{,}2$	$y(0) = 1{,}6$
18	$y' = (4x^2 - 1)y + 1{,}8x^3 - 12$	$y(0) = 1{,}2$
19	$y' = x^{1/2} + 7x^3 y - 3x^2$	$y(0) = 3{,}2$
20	$y' = 4{,}6x^3 + 2x^3 + 2.8$	$y(0) = 2{,}9$
21	$y' = 4{,}2x^3 y - 2{,}6x^2$	$y(0) = 4{,}7$
22	$y' = 3x + 1{,}9y^2 - 5xy$	$y(0) = 0{,}2$
23	$y' = x^2 + xy + \cos x$	$y(0) = 0{,}2$
24	$y' = x^2 + y - \ln y$	$y(0) = 0{,}4$
25	$y' = xy + y^2 + \sin y$	$y(0) = 0{,}6$
26	$y' = 0{,}1x + 0{,}2y^2 + 5y$	$y(0) = 0{,}2$
27	$y' = 2x^2 + xy - \sin x$	$y(0) = 0{,}5$
28	$y' = x^2 + 0{,}2xy$	$y(0) = 0{,}6$
29	$y' = x^2 + 3xy - \log_2 x$	$y(0) = 0{,}3$
30	$y' = 2x^2 + 3y^2 + 5xy$	$y(0) = 0{,}2$

Назорат саволлари

1. +андай тенгламаларни дифференциал тенгламалар деб атаймиз?
2. Оддий дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?
3. Хусусий хосилали дифференциал тенгламаларга таъриф беринг?
4. Умумий ечим нима?
5. Хусусий ечим нима?
6. Дифференциал тенгламаларни та=рибий ечиш зарурияти =аердан келиб чи=ади?
7. Дифференциал тенгламаларни та=рибий ечишнинг =андай усулларини биласиз?
8. Эйлер усулининг ишчи алгоритми?
9. Эйлер усулининг дастур таъминоти?
10. Эйлер усулининг =андай камчилиги ва афзаллиги бор?
11. Рунге-Кутта усулининг ишчи алгоритми?
12. Рунге-Кутта усулининг дастур таъминоти?
13. Рунге-Кутта усулининг =андай камчилиги ва афзаллиги бор?

Тажриба иши № 2

Мавзу: ***Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг та=рибий усуллари учун дастур таъминотини яратиш.***

Ишдан ма=сад: *Талабаларни амалий масалаларни ечишда кып ишлатиладиган иккинчи тартибли, ызгарувчан коэффициентли, дифференциал тенгламалар учун чегаравий масаланинг =ыйилишини ва уни ечиш усуллари билан таништириш, уларда чекли айирмалар ва Галёркин усуллари учун дастур таъминоти яратиш малакасини щосил =илиш.*

Режа:

1. *Чегаравий масалалар ва уларни ечиш усуллари ща=ида =ис=ача назарий маълумотлар .*
2. *Чекли айирмалар усулининг ишчи алгоритми ва унинг дастурий таъминоти.*
3. *Галёркин усулининг ишчи алгоритми ва унинг дастурий таъминоти.*
4. *Тажриба ишидан олинган натижалар ва уларнинг тащлили.*
5. *Тажриба ишига доир топшири=лар рыйщати.*

1.Чегаравий масалалар ва уларни ечиш усуллари ща=ида =ис=ача назарий маълумотлар:

Бугунги кунда иншоотлар =уриш лойищаларининг муттасил мураккаблашиб бориши, янги конструктив ечимларнинг лойищалардан ырин олиши, сейсмик актив жойларда бинолар мустащкамлигига =ыйиладиган талабларнинг ортиши лойища кырсаткичларини чу=ур асослаш заруриятини келтириб чи=аради.

Мазкур масалаларнинг математик модели кыпро= =уйидаги кыринишдаги *иккинчи тартибли, ызгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламалар* ор=али ифодаланади, яъни:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ечимларига $[a,\ b]$ орали=нинг четки *a* ва *b* ну=таларида

$$m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \quad (2)$$
$$g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2$$

чегаравий шартлар берилган былсин, (1) тенглама ва (2) чегаравий шартларни =аноатлантирувчи $y=y(x)$ функция дифференциал тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

(1) да берилган *p(x), q(x), f(x)* коэффициент функцияларнинг [*a, b*] орали=да узлуксизлиги талаб =илинади. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ чегаравий шарт белгилари былган ызгармас сонлар щисобланади.

Чегаравий масалаларни ечиш усулларини =уйидаги гурущларга былиш мумкин:

1. аналитик усуллар
2. сонли-та=рибий усуллар
3. та=рибий-аналитик усуллар.

Фанимизнинг мощияти ва ма=садидиан келиб чи=иб, бизни асосан сонли-та=рибий ва та=рибий-аналитик усуллар =изи=тиради. +уйида шу усуллардан наъмуналар келтирамиз.

2. Чекли айирмалар усулининг ишчи алгоритми ва дастурий таъминоти

Демак, бизга =уйидаги

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x) \quad (1)$$

иккинчи тартибли, ызгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламанинг $x \in [a,b]$ орали=нинг четки ну=таларида =ыйилган

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases} \quad (2)$$

чегаравий шартларни =аноатлантирувчи сонли-та=рибий ечимини топиш лозим былсин.

Бу ерда *p(x), q(x), f(x)* лар [*a, b*] орали=да узлуксиз функциялар синфига киради. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$- ызгармаслар, яъни чегаравий шарт белгилари.

Ю=оридаги масалани сонли-та=рибий усул щисобланмиш *чекли айирмалар усули* билан ечиш учун ечим =идириладиган [*a,b*] орали=да =уйидаги тырни киритамиз, яъни орали=ни координаталари $x_i=a+h$ формула билан ани=ланувчи тугун ну=талар билан былакларга быламиз, бу ерда $h=\frac{b-a}{n}$, n-тугун ну=талар сони.

x_i ну=талар учун ю=оридаги (1) тенглама ыринли былгани учун, уни шу ну=таларда ёзиб оламиз:

$$y''(x_i)+p(x_i)y'(x_i)+q(x_i)y(x_i)=f(x_i)$$

+улайлик учун, бу тенгламани =уйидаги кыринишда ёзиб оламиз:

$$y''_i+p_i y'_i+q_i y_i=f_i \quad (3)$$

Мавжуд (2) дифференциал тенгламадаги y_i', y_i'' щосилалар ырнига щосил =илинган чекли аймрмали формулаларни =ыямиз ва (3) дифференциал тенглама ырнига щосилалар =атнашмаган ва y_i номаълумлардан иборат тенгламаларни щосил =иламиз.

Амалда =уйидаги чекли-айирмали формулалардан кенг фойдаланилади:

1.Ынг чекли-айирмали формула: $y_{x,i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, хатолик даражаси 0(h)

2. Чап чекли айирмали-формула: $y_{x,i} \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$, хатолик даражаси 0(h)

3. Марказий чекли-айирмали формула: $y_{x,i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$, хатолик даражаси 0(h)

Щосил =илинган чекли-айирмали формулаларни (3) дифференциал тенгламага =ыямиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i .$$

Щосил былган тенгламани щар иккала томонини h^2га кыпайтирамиз ва мос щадларни группалаймиз:

$$y_{i+1}(1 + \frac{p_i h}{2}) - y_i(2 + h^2 q_i) + y_{i-1}(1 - \frac{p_i h}{2}) = f_i h^2$$ былади.

+уйидагича белгилашлар киритиш натижасида:

$$A_i = 1 + \frac{h}{2} p_i \qquad C_i = 1 - \frac{h}{2} p_i$$
$$B_i = 2 - h^2 q_i \qquad D_i = h^2 f_i \qquad (4)$$

=уйидаги тенгламалар системасини щосил =иламиз:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \qquad (5)$$

Щосил былган система $y_0, y_1, \ldots, y_n$ лардан иборат (n+1)та номаълумли, (n-1) та тенгламадан иборат уч диагоналли чизи=ли тенгламалар системасидан иборат. Маълумки, тенгламалар системасининг ягона ечимини ани=лаш учун тенгламалар ва номаълумлар сони тенг былиши керак. Шунинг учун иккита тенгламани чегаравий шарт щисобига тылдириб оламиз.

Щосил =илинган тенгламаларни (5) тенгламалар системасига “улаймиз” ва натижада (n+1)та номаълумли, (n+1)та тенгламадан иборат $y_0, y_1, \ldots, y_n$ номаълумларга нисбатан ёзилган =уйидаги чизи=ли алгебраик тенгламалар системасига эга быламиз:

$$\begin{cases} A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0 \\ A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} \quad (i = 1, \overline{n-1}) \\ A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \end{cases} \qquad (6)$$

Шунинг учун, бундай махсус системаларни ечишнинг махсус усуллари ишлаб чи=илган. Бу усулларнинг энг соддаси, дастурлашга =улайи, хатолар йи\илмасини щосил =илмайдигани *“щайдаш” усули* щисобланади.

+уйида “Щайдаш” усулининг =ис=ача мощияти билан танишиб чи=амиз.

Махсус, диагоналли системаларни ечишга мылжалланган “Щайдаш” усули икки бос=ичдан иборат:

- номаълум коэффицентларни ани=лаш (ты\ри) бос=ичи
- системанинг ечимларини ани=лаш (тескари) бос=ичи

1-*бос=ичда* (6) системанинг номаълум ечимини =уйидаги кыринишда =идирамиз:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (7)$$

бу ерда: α_{i+1}; β_{i+1} лар номаълум щайдаш коэффициентлари.

$\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0}, \quad \beta_1 = \frac{B_n}{A_n}$,

2-*бос=ичда* α_i; β_{i1} номаълум коэффицентларнинг барча =ийматлари топилгач (7) реккурент формула ёрдамида =идирилаётган ечим y_i ларни топиш мумкин, бу ерда щам реккурент формуланинг ишлаши учун дастлабки =иймат сифатида y_n ни ани=лаш лозим.

$$y_n = \frac{C_n - B_n\beta_n}{A_n + B_n\alpha_n}$$

+идирилаётган y_n щисоблангач, $y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}$ реккурент формуласи ёрдамида (y_i) барча =олган ечимлар топилади.

Бу жараён i га нисбатан тескари тартибда былгани учун, уни *щайдашнинг тескари* бос=ичи деб атаймиз.

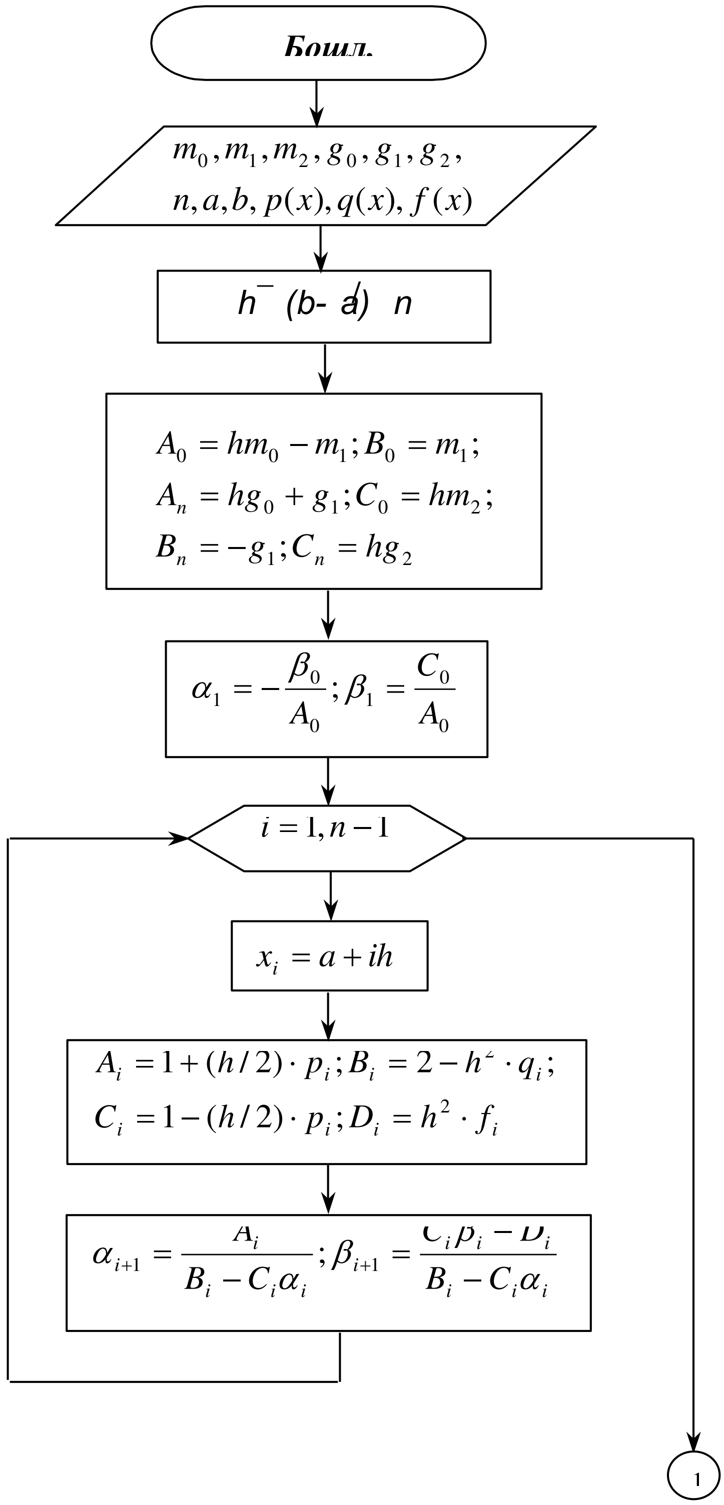
Демак, олдимизга =ыйилган масалани, яъни берилган масалани ызгарувчан коэффицентли, иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламани чекли айирмали формулалар ёрдамида сонли-та=рибий усулда ечиш учун ишчи алгоритм щосил =илдик.

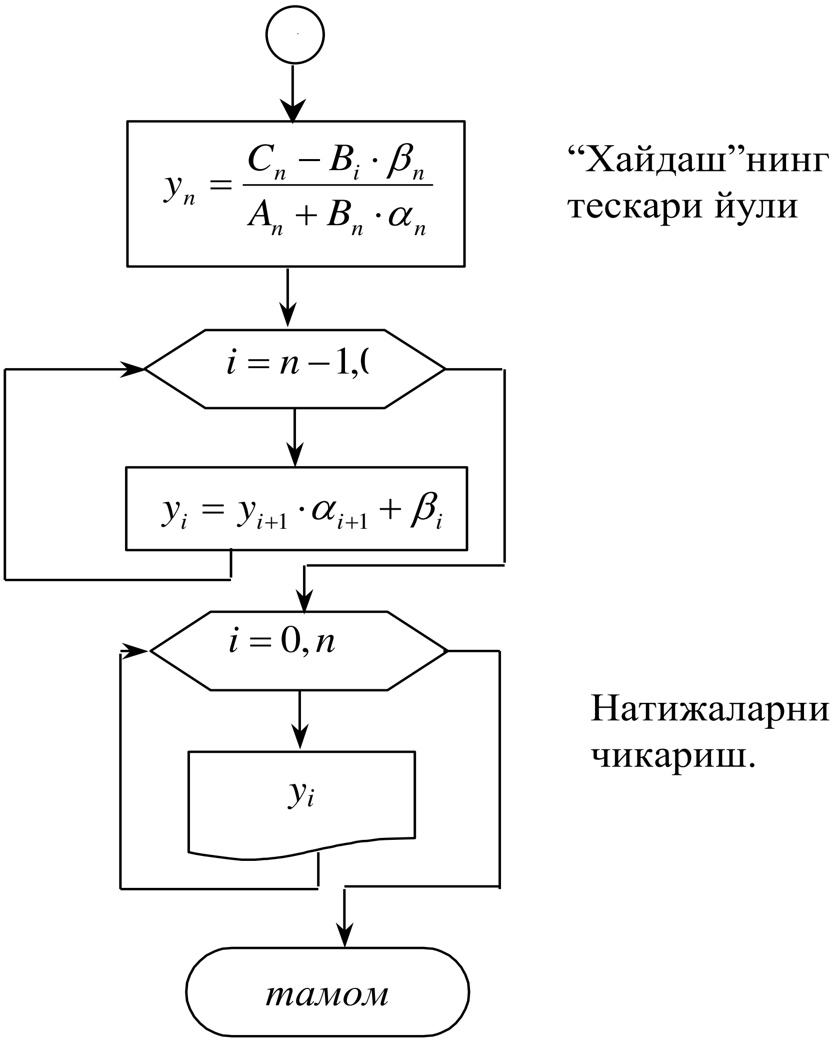
+уйидаги ани= чегаравий масалани кырайлик:

$$y^{II}-2y^{I}+x^3y=12x^2-8x^3+x^7$$

дифференциал тенгламани $y(0)=0$, $y(1)=1$ чегаравий шартларни =аноатлантирувчи ечимини топиш керак. Бу ерда ишчи алгоритм учун керак быладиган бошлан\ич маълумотлар сифатида: $p(x)=-2$, $q(x)=x^3$, $f(x)=12x^2-8x^3+x^7$; $m_0=1$; $m_1=0$; $m_2=0$; $g_0=1$; $g_1=0$; $g_2=1$ =ийматларни киритамиз.

Усулга мос ***алгоритм блок-схемаси*** =уйидагича кыринишда былади:


Бошл.
$m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2,$
$n, a, b, p(x), q(x), f(x)$
$h = (b-a)/n$
$A_0 = hm_0 - m_1; B_0 = m_1;$
$A_n = hg_0 + g_1; C_0 = hm_2;$
$B_n = -g_1; C_n = hg_2$
$\alpha_1 = -\frac{\beta_0}{A_0}; \beta_1 = \frac{C_0}{A_0}$
$i = 1, n-1$
$x_i = a + ih$
$A_i = 1 + (h/2) \cdot p_i; B_i = 2 - h^2 \cdot q_i;$
$C_i = 1 - (h/2) \cdot p_i; D_i = h^2 \cdot f_i$
$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \beta_{i+1} = \frac{C_i\beta_i - D_i}{B_i - C_i\alpha_i}$
1



Алгоритмнинг дастур матни :

```
program chekli_a;
uses crt;
    const n=10;
   var m0,m1,m2,g0,g1,g2,a,b,h,x:real;
       A0,B0,C0,An,Bn,Cn,Ai,Bi,Ci,Di:real;
       i:integer;
      al,be:array[1..n] of real;
       y:array[0..n] of real;
     function p(x:real):real;
        begin p:=-2;end;
     function q(x:real):real;
        begin q:=x*x*x;end;
     function f(x:real):real;
        begin f:=12*x*x-8*x*sqr(x)+exp(7*ln(x));end;
   begin
       write('m0,m1,m2,g0,g1,g2=');
       readln(m0,m1,m2,g0,g1,g2);
```

```
        write('a,b=');
        readln(a,b);
        h:=(b-a)/n;
        A0:=h*m0-m1; B0:=m1; C0:=h*m2;
        An:=h*g0+g1; Bn:=-g1; Cn:=h*g2;
        al[1]:=-B0/A0; be[1]:=C0/A0;
     for i:=1 to n-1 do
       begin
              x:=a+i*h;
             Ai:=1+(h/2)*P(x);Bi:=2-h*h*q(x);
             Ci:=1-(h/2)*P(x);Di:=h*h*f(x);
             al[i+1]:=Ai/(Bi-Ci*al[i]);
             be[i+1]:=(Ci*be[i]-Di)/(Bi-Ci*al[i]);
        end;
        y[n]:=(Cn-Bn*be[n])/(An+Bn*al[n]);
      for i:=n-1 downto 1 do
          y[i]:=y[i+1]*al[i+1]+be[i+1];
      for i:=0 to n do
        writeln(y[i]:2:8,'         ',sqr(h*i)*sqr(h*i):2:8,'
', abs(y[i]-sqr(i*h)*sqr(i*h)):2:8);
      end.
```

Чекли-айирмалар усулига доир натижалар:

Ю=оридаги тенглама учун дастур таъминотини ишлатиб кыриб, олинган натижаларни куйидаги жадвалда келтирамиз:

x	Та=рибий	Ани=	Хатолик
0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.1	0.00006966	0.00010000	0.00016966
0.2	0.00108964	0.00160000	0.00051036
0.3	0.00712884	0.00810000	0.00097116
0.4	0.02411037	0.02560000	0.00148963
0.5	0.06051107	0.06250000	0.00198893
0.6	0.12722581	0.12960000	0.00237419
0.7	0.23757174	0.24010000	0.00252826
0.8	0.40729307	0.40960000	0.00230693
0.9	0.65456559	0.65610000	0.00153441
1.0	1.00000000	1.00000000	0.00000000

Натижалардан ва хатолик ми=дорини кам эканлигидан ишлаб чи=илган алгоритмдан амалда масалалар ечишда фойдаланиш мумкин деган хулоса келиб чи=ади.

3. Галёркин усулининг ишчи алгоритми ва дастурий таъминоти

Бизга =уйидаги чегаравий масала берилган былсин, яъни:

$$y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=f(x) \qquad (1)$$

дифференциал тенглама ва

$$\begin{cases} m_0 y(a) + m_1 y'(a) = m_2 \\ g_0 y(b) + g_1 y'(b) = g_2 \end{cases} \qquad (2)$$

чегаравий шартни =аноатлантирувчи ечимни топиш керак.

Галёркин усулида чегаравий масаланинг ечимини =уйидаги кыринишда =идириш таклиф этилади.

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

Энди эътиборимизни яна ечимни =идиришга =аратсак, формуладаги $c_1, c_2, \ldots, c_n$-лар =ийматлари номаълум былган ызгармаслар щисобланади.

$u_0(x)$, $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ лар эса щисоб ишларини бажарувчи томонидан танлаб олинадиган [*a, b*] кесмада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи, чизи=ли бо\ли= былмаган функциялар щисобланади, яъни улар базис системасини ташкил =илиб, ызаро ортогоналлик шартини =аноатланириши керак.

Базис функциялар танлангач, тафовут функциясини минималлаштириш шартидан фойдаланиб, керакли алмаштиришлар бажарамиз ва натижада c_1, c_2 ызгарувчилардан иборат тенгламалар системаси щосил былади.

$$\begin{cases} m_{11} c_1 + m_{12} c_2 = b_1 \\ m_{21} c_1 + m_{22} c_2 = b_2 \end{cases}$$

Системанинг коэффицентларини эса (m_{ij}) интегралларни щисоблаш ёрдамида топилади. c_1, c_2 номаълумларни ЧАТСни ечишнинг бирор усули ёрдамида (одатда Гаусс усулидан фойдаланилади) топамиз. c_1, c_2 ларни топгач, $y_n(x)$ та=рибий аналитик ечимни

$$y(x) = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)$$

кыринишида ёза оламиз.

Ю=орида кыриб, ырганиб чи=илган назарий амалларни =уйидаги чегаравий масала устида бажаришни ташкил =илайлик,

Чегаравий масаланинг дифференциал тенгламаси =уйидагича кыринишда берилган былсин:

$$y'' - 2y' + x^3 \cdot y = 12x^2 - 8x^3 + x^7$$

Дифференциал тенгламанинг ечимига =ыйилган чегаравий шартларга эса $y_0=0$, $y_1=1$.

Дастлаб берилган масаланинг чегаравий шартларни =аноатлантирадиган базис функцияларни танлаб олишимиз лозим:

1) $u_0(x)$ни берилган чегаравий шарт, яъни $u_0(0)=0$ ва $u_0(1)=1$ шартни =аноатлантирадиган =илиб, =уйидагича танлаб оламиз: $u_0(x)=x$.

2) $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ларни эса берилган чегаравий шартга мос бир жинсли шартларни, яъни $u_1(0)=0$, $u_1(1)=0$ ва $u_2(0)=0$ ва $u_2(1)=0$ шартни =аноатлантирадиган ва ызаро чизи=ли бо\ли=сиз =илиб, =уйидагича танлаб оламиз:

$$u_1(x) = x(x-1) = x^2 - x;$$

$$u_2(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2.$$

Ишчи формулаларда фойдаланиладиган =уйидаги операторни $L[y] \equiv y''(x) + f(x)y'(x) + q(x)y(x)$ базис функциялардаги кыринишларини щисоблашни ташкил =илайлик.

$$L[u_1] \equiv 2 - 2(2x - 1) + x^3(x^2 - x) = 2 - 4x + 2 + x^5 - x^4 =$$
$$= x^5 - x^4 - 4x + 4$$

$$L[u_2] \equiv 6x - 2 - 2(3x^2 - 2x) + x^3(x^3 - x^2) = 6x - 2 - 6x^2 + 4x + x^6 - x^5 = x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2.$$

$$L[u_0] \equiv x'' - 2x' + x^3 x = 0 - 2 + x^4 = x^2 - 2$$

Энди =уйидаги тенгламалар системасининг коэффициентлари ва озод щадларини щисоблашни ташкил этайлик.

$$\begin{cases} m_{11}c_1 + m_{12}c_2 = b_1 \\ m_{21}c_1 + m_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Бу ерда

$$m_{11} = \int_0^1 L[u_1] \cdot u_1(x)dx = \int_0^1 (x^5 - x^4 - 4x + 4) \cdot (x^2 - x)dx;$$

$$m_{12} = \int_0^1 L[u_2] \cdot u_1(x)dx = \int_0^1 (x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2) \cdot (x^2 - x)dx;$$

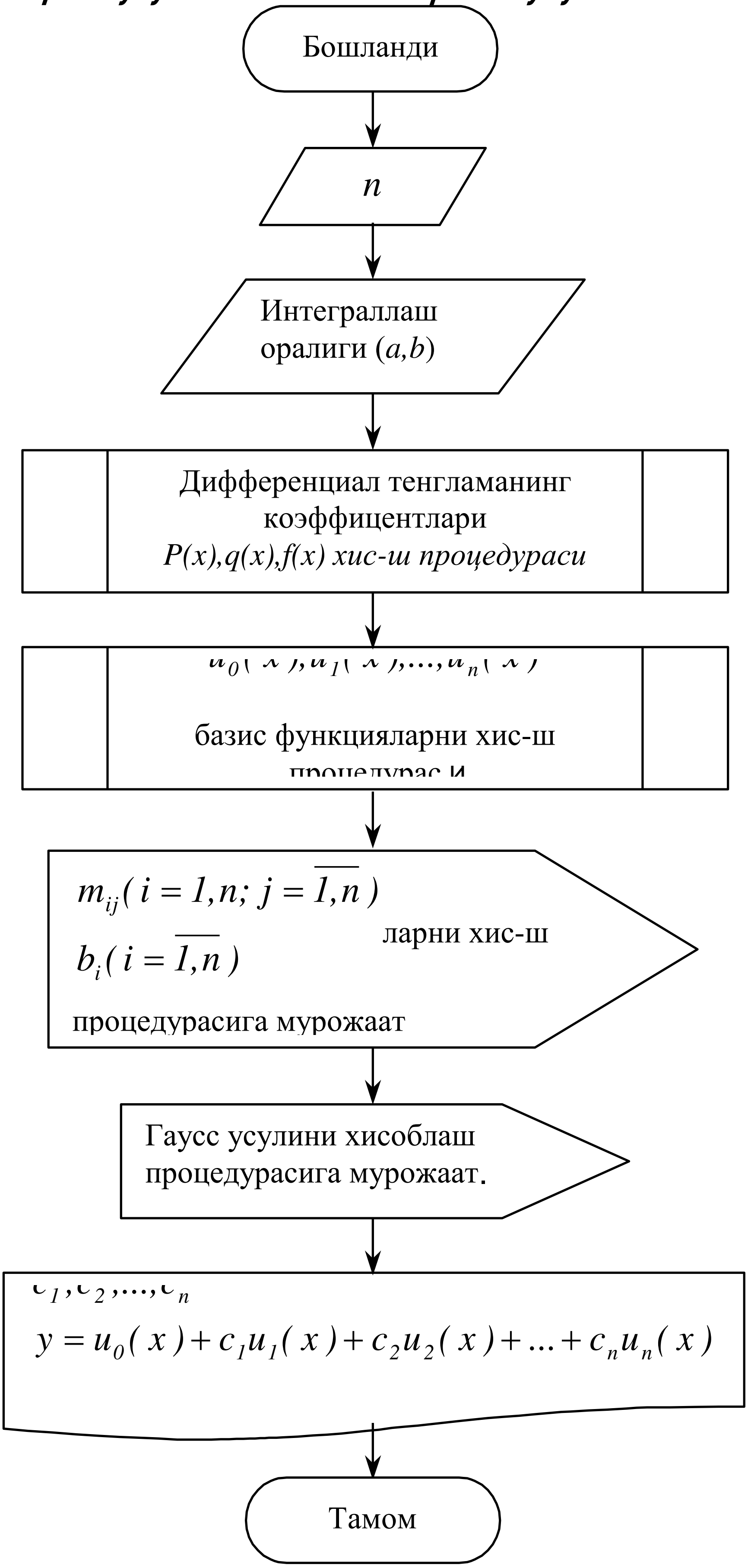
$$m_{21} = \int_0^1 L[u_1] \cdot u_2(x) \cdot dx = \int_0^1 (x^5 - x^4 - 4x + 4) \cdot (x^3 - x^2) \cdot dx;$$

$$m_{22} = \int_0^1 (x^6 - x^5 - 6x^2 + 10x - 2) \cdot (x^3 - x^2) \cdot dx; b_1 = \int_0^1 (12x^2 - 8x^3 + x^7 - x^2 + 2) \cdot (x^2 - x)dx;$$

$$b_2 = \int_0^1 (12x^2 - 8x^3 + x^7 - x^2 + 2) \cdot (x^3 - x^2)dx;$$

Барча коэффицентлар маълум былгач, яъни уларни ани= интегралларни та=рибий щисоблаш усулидан фойдаланиб щисоблангач, щосил былган чизи=ли алгебраик тенгламалар системаси (4) ни c_1 ва c_2 номаълумларга нисбатан ечишни Гаусс усули билан ташкил =иламиз. Щосил =илинган натижаларни, яъни c_1 ва c_2 ларнинг =ийматларини $y = u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x)$ формулага =ыйиб, берилган чегаравий масаланинг та=рибий-аналитик ечимини щосил =иламиз.

Галёркин усулининг ишчи алгоритми учун блок-схема



Алгоритмнинг дастур матни:

```
Program Galerkin;
Const
  q=2;
Type
  Mas=array[1..q,1..q] of real;
  Mas1=array[1..q] of real;
Var
  fx,lu0,lu1,lu2,a,b,z,x,h:Real;
  m:Mas;
  C,M1:Mas1;
  i:Integer;
Function F(X:Real; K:Integer):Real;
var
  u0,u1,u2,u3:real;
begin
   lu0:=Sqr(x)-2;
   u1:=Sqr(x)-x;
   lu1:=sqr(x)*sqr(x)*x-x*x*x*x-4*x+4;
   lu2:=Sqr(x)*Sqr(x)*Sqr(x)-sqr(x)*sqr(x)*x-6*x*x+10*x-2;
   fx:=12*x*x-8*x*x*x+sqr(x)*sqr(x)*sqr(x)*x;
  case K of
     1:F:=lu1*u1;
     2:F:=lu2*u1;
     3:F:=lu1*u1*x;
     4:F:=lu2*u1*x;
     5:F:=(fx-lu0)*u1;
     6:F:=(fx-lu0)*u1*x;
  end;
end;
function Integ(a,b:Real; k:Integer):Real;
var
  y,h1:Real;
  i:Integer;
begin
  h1:=(b-a)/20;
  y:=(f(a,k)+f(b,k))/2;
  write(y:12:3);
  for i:=1 to 19 do  y:=y+f(a+i*h1,k);
  y:=y*h1;
  Integ:=y;
  writeln(y:12:3);
end;
Procedure Gauss(A:Mas; B:Mas1; Var x:Mas1; N:Integer);
var
```

```
  k,m,l:Integer;
  s:Real;
begin
  for k:=1 to n-1 do
  for m:=k+1 to n do
   begin
   for l:=k+1 to n do
   A[m,l]:=A[m,l]-A[m,k]*A[k,l]/A[k,k];
    B[m]:=B[m]-A[m,k]*B[k]/A[k,k];
   end;
  x[n]:=B[n]/A[n,n];
  for k:=n-1 downto 1 do
  begin
    s:=0;
    for i:=k+1 to n do s:=s+A[k,i]*X[i];
    X[k]:=(B[k]-s)/A[k,k];
  end;
end;
begin
  Write('a,b=');Readln(a,b);
  M[1,1]:=Integ(a,b,1);
  M[1,2]:=Integ(a,b,2);
  M[2,1]:=Integ(a,b,3);
  M[2,2]:=Integ(a,b,4);
  M1[1]:=Integ(a,b,5);
  M1[2]:=Integ(a,b,6);
  Gauss(M,M1,C,q);
  For i:=1 to q do   writeln(c[i]:12:4);
  For I:=0 to 10 do
  begin
    h:=(b-a)/10;
    x:=a+i*h;
    z:=x+c[1]*(x*x-x)+c[2]*(x*x*x-x*x);
    Writeln('x=',x:2:2,'  z=',z:2:8,'   a=',
sqr(x)*sqr(x):2:8,'   ', abs(z-sqr(x)*sqr(x)):2:8);
  end;
end.
```

4. Тажриба ишидан олинган натижалар ва уларнинг тащлили.

Ю=оридаги мисол учун дастур таъминотини ишлатиб кыриб, олинган натижалар =уйидаги жадвалда келтирилган:

```
c[1]= 0.7431
c[2]= 1.9562
```

x	та=рибий	ани=	хатолик
x=0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
x=0.1	0.01551908	0.00010000	0.01541908
x=0.2	0.01851317	0.00160000	0.01691317
x=0.3	0.02071920	0.00810000	0.01261920
x=0.4	0.03387413	0.02560000	0.00827413
x=0.5	0.06971492	0.06250000	0.00721492
x=0.6	0.13997851	0.12960000	0.01037851
x=0.7	0.25640186	0.24010000	0.01630186
x=0.8	0.43072193	0.40960000	0.02112193
x=0.9	0.67467566	0.65610000	0.01857566
x=1.0	1.00000000	1.00000000	0.00000000

Натижалардан ва хатолик ми=дорини кам эканлигидан ишлаб чи=илган алгоритмлардан амалий масалалар ечишда фойдаланиш мумкин деган хулоса келиб чи=ади.

5. Тажриба ишига доир топшири=лар рыйщати.

Берилган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламани берилган чегаравий шартларни =аноатлантирувчи та=рибий ечимини чекли-айирмалар ва Галёркин усуллари билан щисобланг.

	Дифференциал тенглама	**чегаравий шарт**	
1	$y''-4x\cos x y'+\sin x y=-\sin x-4x\cos x\sin x+\sin^2 x$	$y(0)=0$	$y'(\pi/2)=0$
2	$y''-5xy'-3\cos x y=-\sin x-5x\cos x-3\sin x\cos x$	$y(0)=0$	$y(\pi/2)=1$
3	$y''-y'+x^3y=12x^2-4x^3+x^7$	$y(0)=0$	$y(1)=1$
4	$y''-2x^2y'+y=-\cos x+2x^2\sin x+\cos x$	$y(0)=1$	$y(\pi/2)=0$
5	$y''+4xy'-2\sin x y=e^x+4xe^x-2\sin x e^x$	$y(0)=1$	$y'(1)=e$
6	$y''+5x^3y'-2y=6x+15x^5-2x^3$	$y(0)=0$	$y'(1)=3$
7	$y''-3x^3y'+5xy=20x^3-15x^7+5x^6$	$y(0)=0$	$y'(1)=5$
8	$y''-e^x\sin x y=-4\sin 2x-e^2\sin x\sin 2x$	$y'(0)=2$	$y(\pi/2)=0$
9	$y''+20xy'+y=-\sin x+20x\cos x+\sin x$	$y'(0)=1$	$y(\pi/2)=1$
10	$y''+5xy'+y=\cos x-5x\sin x+\cos x$	$y'(0)=1$	$y(\pi/2)=1$
11	$Y''-2y'+x^5y=20x^3-10x^4+x^{10}$	$y(0)=0$	$y'(1)=5$
12	$y''+e^xy'+\cos x y=e^x+e^{2x}+e^x\cos x$	$y(0)=1$	$y(1)=e$
13	$y''+3xy'-\cos x y=e^x+3xe^x-e^x\cos x$	$y(0)=1$	$y(1)=e$
14	$y''+4x^3y'+e^xy=-4\sin 2x-8x^3\cos 2x+e^x\sin 2x$	$y(0)=0$	$y(\pi/4)=1$
15	$y''+e^xy'-\sin x y=4e^{2x}+2xe^{3x}-e^{2x}\sin x$	$y(0)=1$	$y(1)=e^2$
16	$y''-2y'-4\sin x y=-\cos x-2\sin x-4\cos x\sin x$	$y(0)=1$	$y(\pi/2)=0$
17	$y''+2xy'-\sin x y=-\sin x+2x\cos x-\sin^2 x$	$y(0)=0$	$y(\pi/2)=1$
18	$y''+xy'+y=-9\sin 3x+3\cos 3x+\sin 3x$	$y(0)=0$	$y'(\pi/6)=1$
19	$y''+2\sin 6x y'=12x^2+8x^3\sin 6x$	$y'(0)=0$	$y'(1)=4$

20	$y''+4xy'+2y=9e^{3x}+12xe^{3x}+2e^{3x}$	$y(0)=1$	$y'(1)=3e^{3}$
21	$y''-2x^{3}y'+e^{x}y=-\cos x+2x^{3}\sin x+e^{x}\cos x$	$y(0)=1$	$y(\pi/2)=-1$
22	$y''-3x^{2}y'-\cos xy=-\cos x-3x^{2}\sin x-\cos^{2}x$	$y(0)=1$	$y(\pi/2)=0$
23	$y''-3y'-x^{3}y=12x^{2}-12x^{3}-x^{7}$	$y(0)=0$	$y'(1)=4$
24	$y''+e^{x}\cos xy=-\sin x+e^{x}\cos x\sin x$	$y(0)=0$	$y'(\pi/2)=0$
25	$y''-e^{x}y'+\cos xy=e^{x}-e^{2x}+\cos xe^{x}$	$y(0)=1$	$y'(1)=e$

Назорат саволлари

1. +андай тенгламаларни иккинчи тартибли, оддий дифференциал тенгламалар дейилади?
2. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга =андай =ышимча шартлар =ыйилади?
3. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни =андай усуллар билан ечилади?
4. Сонли-та=рибий усулларга =айсилар киради?
5. Та=рибий-аналитик усулларга =айсилар киради?
6. Чекли-айирмалар усулининг мощияти =андай?
7. Сонли-такрибий усулларнинг ызига хос хусусиятларини айтинг?
8. Такрибий-аналитик усулларнинг ызига хос хусусиятларини айтинг?
9. Галеркин усулининг асосий мощияти нимадан иборат
10. Галеркин усулидаги хатолик манбаи нимадан иборат?
11. Галеркин усулида хатоликни камайтириш имкониятлари борми?
12. Галеркин усулида ортогонал функциялар =андай танланади?

Тажриба иши № 3

Мавзу: Хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари. Гиперболик типдаги тенгламалар.

***Ишдан ма=сад:** Талабаларни амалий масалаларни ечишда кып ишлатиладиган хусусий щосилали дифференциал тенгламалар ва уларни сонли ечиш усуллари билан таништириш, гиперболик типдаги тенгламаларни сонли ечиш усуллари учун дастур таъминотини яратиш малакасини щосил =илиш.*

Режа:

1. Математик-физика тенгламалари ва уларнинг типларини классификациялаш.

2. Гиперболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

3. *Гиперболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.*
4. *Олинган натижалар ва уларнинг тащлили.*
5. *Гиперболик типдаги тенгламаларга оид топшири=лар.*

1. Математик-физика тенгламалари ва уларнинг типларини классификациялаш.

Ю=оридаги тажриба ишларида таъкидлаб ытганимиздек, щаётда учрайдиган барча жараёнлар ызларининг хусусиятларини ифодаловчи математик моделлар ор=али ифодаланади. +аралаётган масаланинг мощиятига =араб математик моделларни ифодаловчи тенгламалар турли хил кыринишда, жумладан мураккаб жараёнларнинг математик моделлари эса математик-физика тенгламалари кыринишда былиши мумкин.

Математик-физика тенгламалари куйидаги умумий щолда ёзилган хусусий щосилали дифференциал тенгламалар кыринишда былади (хусусий щолда икки ылчовли щол учун):

$$a\cdot\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+b\cdot\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+c\cdot\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+d\cdot\frac{\partial\, u(x,y)}{\partial x}+e\cdot\frac{\partial\, u(x,y)}{\partial y}+f\cdot u(x,y)=g(x,y) \quad (1)$$

Математик-физика тенгламалари (1) хусусий щосилали дифференциал тенгламада =атнашаётган коэффицентларнинг =ийматларга =араб учта типга ажратилади. Агар (1) тенглама коэффицентларидан тузилган дискриминант $D=b^2-ac$ нолдан катта былса ($D=b^2-ac>0$) (1) тенгламани гиперболик типдаги тенглама, нолдан кичик былса ($D=b^2-ac<0$) (1) тенгламани параболик типдаги тенглама, нолга тенг былса ($D=b^2-ac=0$) (1) тенгламани эллиптик типдаги тенглама деб =абул =илинади. +аралаётган (1) тенгламанинг коэффицентлари умуман олганда ызгарувчи, яъни х ва у га бо\ли= былиши щам мумкин. У щолда ечим =идирилаётган сощанинг бир =исмида (1) тенглама бир хил тип, бош=а =исмида эса бош=а хил тип щам былиши мумкин.

Математик-физика тенгламаларининг хусусий ечимларини топиш учун унинг ечимларига нисбатан турли шартлар =ыйилади:

- Чегаравий шартлар;
- Бошлан\ич шартлар;

Масала ечимига =ыйиладиган чегаравий шартлар ечим =идирилаётган сощанинг чегарасида берилган шартлар щисобланади. Чегаравий шартларни =ыйиш масаласини шартли равишда учта масалага ажратилади.

- Дирихле масаласи, агар соща чегарасида тенглама ечимининг ызига шарт =ыйилган былса, яъни: $U\big|_{Г}=\varphi^{(1)}$, бу ерда Г-ечим =идирилаётган сощанинг чегараси.
- Нейман масаласи, агар соща чегарасида тенглама ечимининг нормал быйича щосиласига шарт =ыйилган былса, яъни: $\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{Г}=\varphi^{(2)}$
- Аралаш масала, агар соща чегарасида тенглама ечимига =уйидаги шарт =ыйилган былса: $\alpha_1\cdot U+\alpha_2\cdot\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}\right|_{Г}=\varphi^{(3)}$

бу ерда $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\varphi^{(3)}$-кыринишлари маълум функциялар; $\vec{n}$-нормал вектор, $\alpha_{(1)}$ ва $\alpha_{(2)}$-ызгармаслар

Масала ечимига =ыйиладиган бошлан\ич шартлар ырганилаётган жараённинг бошлан\ич ва=тида ечимнинг =андай щолатда былишлигини кырсатиб туради. Бошлан\ич шартлар асосан ва=т фактори быйича ырнатилади.

2. Гиперболик типдаги хусусий щосилали дифференциал тенгламалар ва уларни ечишнинг тыр (ошкор ва ошкормас схемалар) усули учун ишчи алгоритм ва дастур таъминоти.

Агар ырганилаётган жараён тебранувчи характердаги масала былса, бундай масалаларнинг математик моделлари гиперболик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланиши мумкин. Хусусий щолда гиперболик типдаги тенгламалар =уйидагича кыринишда ёзилади.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (2)$$

бу ерда u(x,t)-изланаётган номаълум функция;

a^2-коэффицент, хусусий щолда мусбат ызгармас;

f(x,t)-таш=и таъсир функцияси.

Тегламалар ечимини =уйидаги содда сощада =идиришни таклиф этамиз:

$$\partial D : \{x \in [a,b]; \quad t \in [0,T]\}$$

Гиперболик типдаги тенгламаларга =уйидаги бошлан\ич шартлар берилиши лозим:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_2(x),$$

Чегаравий шарт сифатида эса Дирихле масаласини =араш билан чекланайлик, **яъни** $u(a,t) = p_1(t), \quad u(b,t) = p_2(t)$

Математик-физика тенгламаларини та=рибий ечиш учун амалда асосан тыр усулидан фойдаланилади, яъни D соща x ва t аргументлар быйича тырга былиниб, тугун ну=таларга нисбатан щисоблаш ишлари олиб борилади. Тыр усулида ошкор ва ошкормас схемалар быйича ишчи алгоритмлар =уриш мумкин. Ошкор схемада ва=тнинг олдинги =атламларида йыл =ыйилган хатоликлар кейинги =атламларга щам олиб ытилади ва натижа ва=тнинг ортиб бориши билан хатоликлар жамланмаси щосил былиб щосил =илинадиган та=рибий е чимларни яро=сиз щолга келтириб =ыйиши мумкин. Шунинг учун кыпро= ошкормас схемадан фойдаланилади. Бу схемада ва=тнинг олдинги =атламларида йыл =ыйилган хатоликларни кейинги =атламга таъсири кузатилмайди.

Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкор схемага асосланган ишчи алгоритми =уйидагича ифодаланади.

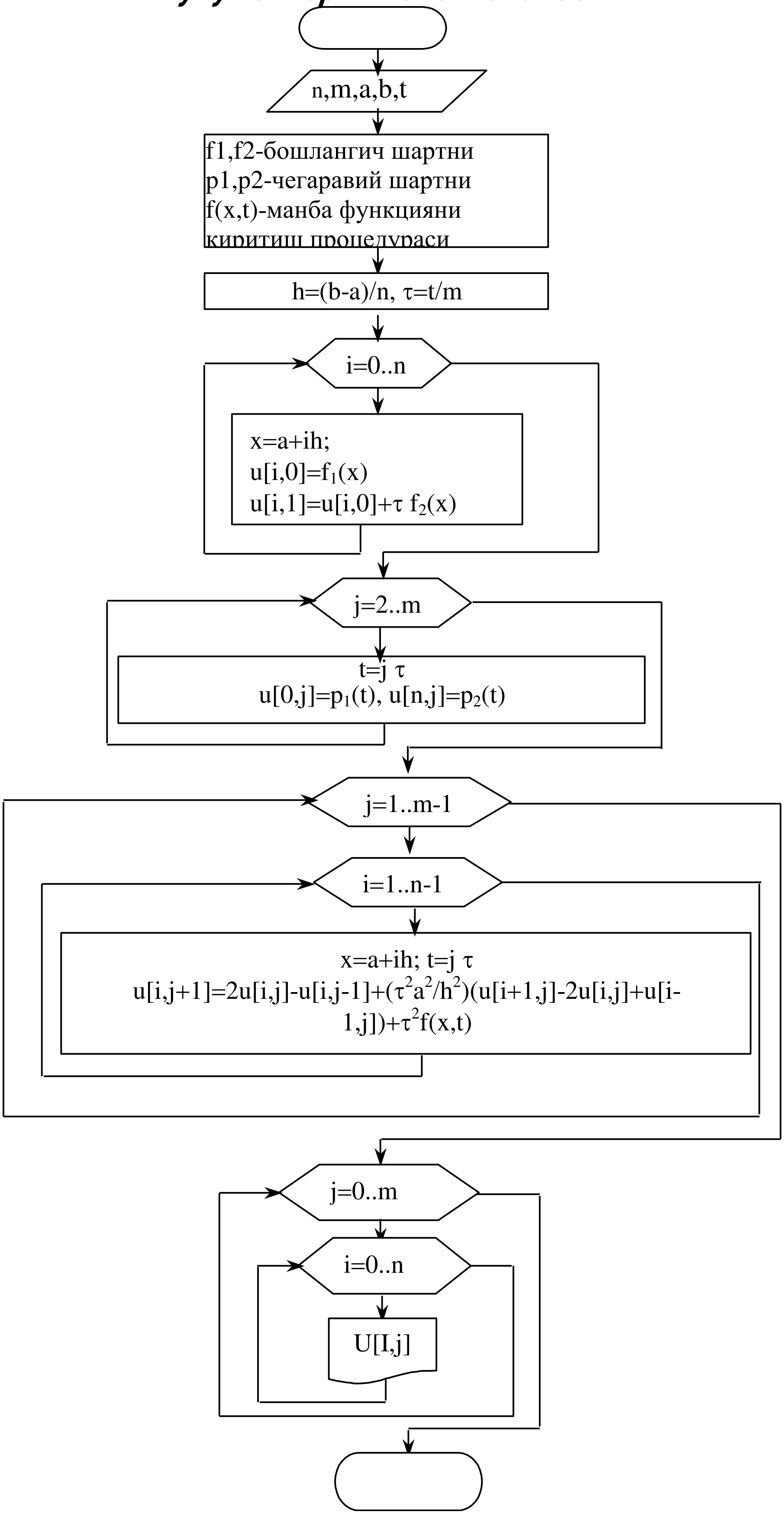
$$u_i^{j+1} = 2u_i^j - u_i^{j-1} + \frac{\tau^2 \cdot a^2}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + T^2 \cdot f_i^j \quad j = \overline{1, m-1}, \; i = \overline{1, n-1} \qquad (3)$$

бу ерда $u_i^j = u(x_i, t_j)$, $x_i = x_{i-1} + h$, $h = \frac{b-a}{n}$, n-OX быйича тугун ну=талар сони,

$t_j = j \cdot \tau \quad \tau = T/m$, m-Ot быйича тугун ну=талар сони

Бошлан\ич шартлар: $u_i^0 = f_{1,i}$, $u_i^1 = u_i^0 + \tau \cdot f_{2,i}$ Чегаравий шартлар: $u_0^j = P_1^j$, $u_n^j = P_2^j$

Гиперболик типдаги тенгламаларни ечишда ошкор схемали алмаштиришлар учун алгоритм блок-схемаси



Алгоритмнинг дастур матни

```
Program Giper_osh;
uses crt;
  const n=6;m=10;
 var a,b,h,ta,t,x:real;
      i,j:integer;
      u:array[0..n,0..m] of real;
   function f1(x:real):real;
     begin f1:=3*sin(x); end;
   function f2(x:real):real;
     begin f2:=x; end;
   function p1(x:real):real;
     begin p1:=1-cos(x) ;end;
   function p2(x:real):real;
     begin p2:=exp(x)+3*sin(1)-cos(x); end;
   function f(x,t:real):real;
     begin f:=exp(x*t)*(x*x-t*t)+cos(t)+3*sin(x); end;
 begin     clrscr;
a:=0;b:=1;t:=0.1;
h:=(b-a)/n; ta:=t/m;
  for i:=0 to n do
  begin
    x:=a+i*h;
    u[i,0]:=f1(x);
    u[i,1]:=u[i,0]+ta*f2(x);
  end;
for j:=2 to m do
  begin
    t:=j*ta; u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
  end;
  for j:=1 to m-1 do
  for i:=1 to n-1 do
  begin
     x:=a+i*h; t:=j*ta;
     u[i,j+1]:=2*u[i,j]-u[i,j-1]+(ta*ta/(h*h))*(u[i+1,j]-
2*u[i,j]+u[i-1,j])+ta*ta*f(x,t);
  end;
  for j:=0 to m do
  begin
    t:=j*ta;
    writeln('  t=',t:5:2);
    for i:=0 to n do
    begin
    x:=a+i*h;
 writeln(u[i,j]:2:8,'   ',exp(x*t)+3*sin(x)-cos(t):2:8,'    ',
abs(u[i,j]-(exp(x*t)+3*sin(x)-cos(t))):2:8);
```

```
  end;
  end;
 end.
```

3.Гиперболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемага асосланган ишчи алгоритми =уйидагича ифодаланади:

$$\frac{\tau^2}{h^2}a^2u_{i+1}^{j+1} - (2\frac{a^2\tau^2}{h^2}+1)u_i^{j+1} + \frac{a^2\tau^2}{h^2}u_{i-1}^{j+1} = -f_i^{\,j}\tau^2 - 2u_i^j + u_i^{j-1} \qquad (4)$$

ёки белгилашлар киритилгандан сынг

$A_i \cdot u_{i+}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i-1}^{j+1} = F_i \quad j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{1, n-1}$

к=ринишдаги ва=тнинг щар бир =адами учун уч диагоналли чизи=ли алгебраик тенгламалар системасига эга быламиз. Бу системани щайдаш усули билан ечиб, кутилган натижага эришишимиз мумкин.

Бу ерда

$u_i^{j+1} = u(x_i, t_{j+1})$, $\quad u_{i+1}^{j+1} = u(x_{i+1}, t_{j+1})$, $\quad u_{i-1}^{j+1} = u(x_{i-1}, t_{j+1})$

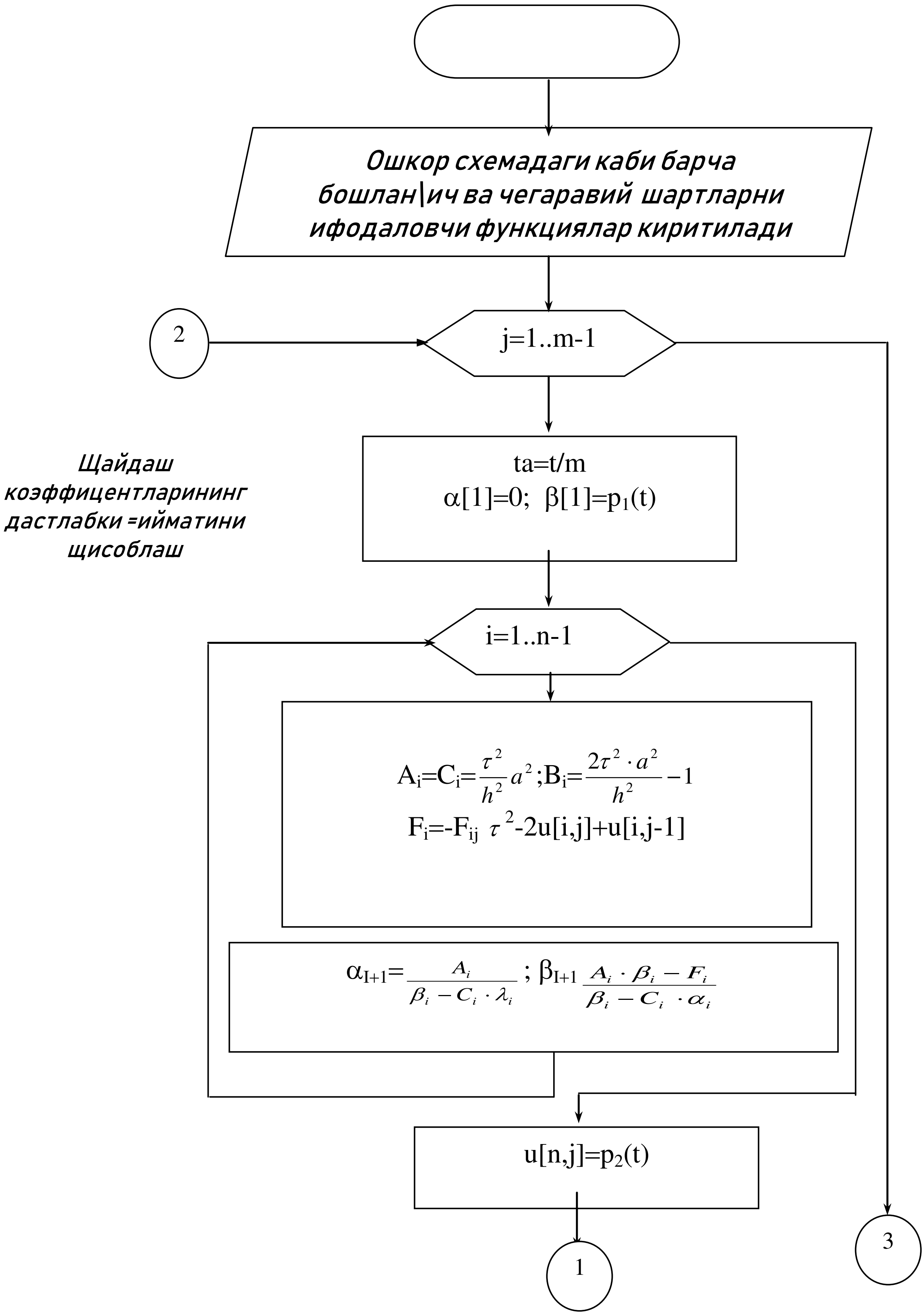
$x_i = x_{i-1} + h$, $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$, n-x быйича тугун ну=талар сони

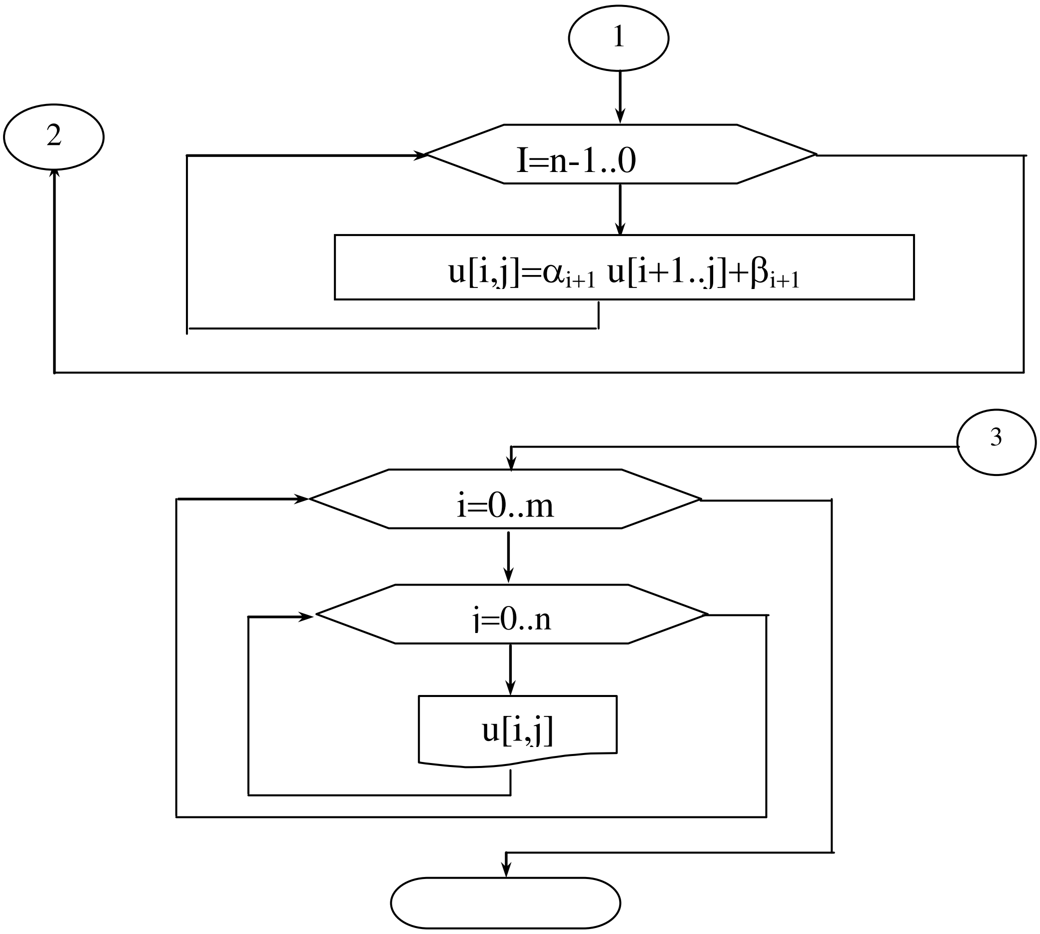
$t_j = j \cdot \tau$, $\tau = T/m$, m-t быйича тугун ну=талар сони.

Бошлан\ич шартлар: $u_i^0 = f_{1,i}$, $\quad u_i^1 = u_i^0 + \tau \cdot f_{2,i}$

Чегаравий шартлар: $u_0^j = P_1^j$, $\quad u_n^j = P_2^j$

Гиперболик типдаги тенгламаларни ечишда <u>ошкормас</u> схемали алмаштиришлар учун алгоритм блок-схемаси





Гиперболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш дастур таъминоти

```
Program OshkmasGip;
 uses crt;
 const n=10;m=100;
 var a,b,h,tao,t,x:real;
      i,j:integer;
      ai,bi,ci,fi:real;
      u:array[0..n,0..m] of real;
      al,be:array[1..n] of real;
    function f1(x:real):real;
   begin f1:=x*x; end;
    function f2(x:real):real;
           begin f2:=0; end;
    function p1(x:real):real;
            begin p1:=x*x ;end;
    function p2(x:real):real;
      begin p2:=1+x*x; end;
```

```
    function f(x,t:real):real;
      begin f:=0; end;
begin
  clrscr;
  readln(a,b,T);
  h:=(b-a)/n;
  tao:=T/m;
  for i:=0 to n do
  begin
    x:=a+i*h;
    u[i,0]:=f1(x);
    u[i,1]:=u[i,0]+tao*f2(x);
  end;
  for j:=2 to m do
  begin
     t:=j*tao; u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
  end;
        writeln('Taqribiy','     ','aniq','    ','xatolik');
  for j:=1 to m-1 do
  begin
    t:=j*tao;u[0,j]:=p1(t);u[n,j]:=p2(t);
    al[1]:=0; be[1]:=p1(t);
    for i:=1 to n-1 do
    begin
      x:=a+i*h; u[i,0]:=f1(x);u[i,1]:=u[i,0]+tao*f2(x);
      ai:=tao*tao/(h*h);
      bi:=2*tao*tao/(h*h)+1;
      ci:=tao*tao/(h*h);
      fi:=-f(x,t)*tao*tao-2*u[i,j]+u[i,j-1];
      al[i+1]:=ai/(bi-ci*al[i]);
      be[i+1]:=(ci*be[i]-fi)/(bi-ci*al[i]);
    end;
    for i:=n-1 downto 1 do
      u[i,j+1]:=al[i+1]*u[i+1,j+1]+be[i+1];
      if (j=10) or (j=20) or (j=50) or (j=99) then
       begin
      writeln('t=',j*tao:2:2);
      for i:=0 to n do
      begin x:=a+i*h;
      writeln(u[i,j]:2:8,'    ',(x*x+t*t):2:8,'
',abs(u[i,j]-(x*x+t*t)):2:8);
      end;
      end;
  end;
end.
```

4.Олинган натижалар ва уларнинг тащлили.

Ишлаб чи=илган ошкор схемали алгоритмлар ва дастурларни ишга созлигини текшириш учун =уйидаги ани= ечими мавжуд былган гиперболик типдаги тенгламани ечишни ташкил =иламиз;

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Тенгламанинг ани= ечимини $u(x,t)=e^{xt}+3\sin x-\cos t$ деб =абул =илсак, у щолда $f(x,t)$ =уйидагича ани=ланади:

$$f(x,t)=e^{xt}(t^2-x^2)+\cos t-3\sin x$$

интеграллаш орали\ини эса =уйидагича танлаб оламиз:

$$D:\{x \in [0,1]; \quad t \in [0,1]\}$$

У щолда бошла\ич шартлар:

$$u(x,0)=f_1(x)=3\sin x$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) = x$$

к=ринишида, чегаравий шартлар эса

$$u(0,t) = P_1(t) = 1-\cos t$$

$$u(1,t) = P_2(t) = e^t + 3\sin 1 - \cos t$$

кыринишида ифодаланади. Щисоб ишлари учун $n=6$ ва $m=10$ деб =абул =илинди. Олинган натижалар =уйидаги жадвалда ифода =илинган.

Ошкор схемали алмаштиришлар учун натижалар

такрибий	Ани=	хатолик
t= 0.01		
0.00000000	0.00005000	0.00005000
0.49935506	0.49940645	0.00005139
0.98491742	0.98497299	0.00005556
1.44327662	1.44333914	0.00006252
1.86177608	1.86184835	0.00007227
2.22886389	2.22894871	0.00008482
2.53441295	2.53451312	0.00010017
t= 0.05		
0.00124974	0.00124974	0.00000000
0.50705317	0.50730629	0.00025312
0.99936444	0.99964016	0.00027572
1.46453201	1.46484148	0.00030947
1.88989702	1.89025426	0.00035725
2.26391376	2.26432720	0.00041344
2.57693379	2.57693379	0.00000000

t= 0.10 0.00499583 0.51900748 1.01992844 1.49393169 1.92834014 2.31165759 2.63457971	0.00499583 0.51949056 1.02047504 1.49454355 1.92904435 2.31243044 2.63457971	0.00000000 0.00048308 0.00054660 0.00061186 0.00070421 0.00077285 0.00000000

Олинган натижаларни ани= ечим билан та==ослаш шуни кырсатадики, tнинг ортиб бориши билан ошкор схемани хатолиги ортиб боради. Лекин ошкормас схема тур\ун натижалар беради.

Ошкормас схемали алгоритмлар ва дастурларни ишга созлигини текшириш учун эса =уйидаги ани= ечими мавжуд былган гиперболик типдаги тенгламани ечишни ташкил =иламиз;

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Тенгламанинг ани= ечимини $u(x,t) = x^2 + t^2$ деб абул =илсак, у щолда f(x,t) =уйидагича ани=ланади.

$$f(x,t)=0$$

интеграллаш орали\ини эса =уйидагича танлаб оламиз:

$$D:\{x \in [0,1]; \quad t \in [0,1]\}$$

У щолда бошла\ич шартлар

$$u(x,0)=f_1(x)=x^2$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) = 0$$

кыринишида, чегаравий шартлар эса

$$u(0,t) = P_1(t) = t^2$$

$$u(1,t) = P_2(t) = 1 + t^2$$

кыринишида ифодаланади. Хисоб ишлари учун n=10 ва m=100 деб =абул =илинди. Олинган натижалар =уйидаги жадвалда ифода =илинган.

Ошкормас схемали алмаштиришлар учун натижалар:

t=0.1		
0.00499583	0.00499583	0.00000000
0.31128044	0.31454625	0.00326581
0.61532565	0.62120517	0.00587952
0.91350050	0.92201099	0.00851049
1.20298495	1.21406164	0.01107668
1.48099529	1.49454355	0.01354826
1.74485925	1.76075980	0.01590055
1.99205193	2.01015708	0.01810515
2.22033581	2.24035118	0.02001537
2.42953079	2.44915085	0.01962006
2.63457971	2.63457971	0.00000000
t=0.5		
0.12241744	0.12241744	0.00000000
0.39720200	0.47318878	0.07598679
0.67706367	0.82359635	0.04653268
0.95544677	1.17081230	0.01536554
1.23140496	1.51207522	0.08067027
1.50750087	1.84471947	0.03721860
1.79466067	2.16620367	0.07154300
2.11217486	2.47413805	0.06196319
2.47208355	2.76631041	0.09422686
2.86794513	3.04071035	0.07276522
3.29555166	3.29555166	0.00000000
t=0.9		
0.45131014	0.45131014	0.00000000
0.62164789	0.85487669	0.03322880
0.83678892	1.26628053	0.02949160
1.10873329	1.68368606	0.07495277
1.44435035	2.10543448	0.06108413
1.83966320	2.53008499	0.09042179
2.29244547	2.95645638	0.06401091
2.80364532	3.38366886	0.0102355
3.37091108	3.81118604	0.04027496
3.99257441	4.23885687	0.04628245
4.66695757	4.66695757	0.00000000

Натижалардан кыриниб турибдики, ва=тнинг ызгариш =адамини кичикро= танлаш щисобига та=рибий ечимнинг ани=лигини янада орттириш мумкин. Бундан таш=ари синов сифатида танлаб олинган функциялар щам хатолик ми=дорига сезиларли таъсир =илиши мумкин. Хатолик ми=дорини унчалик катта эмаслиги ишлаб чи=илган алгоритмлардан амалий масалаларни ечишда фойдаланиш мумкинлигини кырсатади.

5. Гиперболик типдаги тенгамаларга тегишли вариантлар.

$u_{tt}=u_{xx}+f(x,t)$ тенгламани $u(x,0)=f1(x)$, $u_t(x,0)=f2(x)$ бошлан\ич шартларни ва $u(0,t)=p1(t)$, $u(1,t)=p2(t)$ чегаравий шартларни =аноатлантирувчи та=рибий ечимини топинг.

№	F 1(x)	f 2(x)	p 1(t)	P 2 (t)
1	3(2x+sinx)	cos(x+2)	3t-1	4(t+1)
2	Xcospx-4	x+(5-4x)	2t+1	-t
3	5cospx/2+1	$4x^2$	1+2t	5+t
4	(2x+1.5)-2	Sin(x+3.2)	t-7.5	3-t
5	2x(x+1)+4.3	3sinx	0.3	4.3+t
6	(x+0.2)*sinx/2	$4+6x^2$	0	3.2(t+1)
7	2xsinx	$(2x+1)^2$	2t	5+t
8	$3x+(1-4x^3)$	cos(3x+1.5)	2t	1-t
9	x(2x-0.5)	cos2x	t^2	2.5
10	(x+1)sinx	x^2+8x	0	3.5t
11	(1-x)+cosx/2	2x+1	2t+1	t+1
12	2.5x(x+1)	xcosx	$2t^2$	t-1
13	$2.5(x^2+1)$	xsin2x	0.5+3t	1
14	(x+1)+sinx/2	$1-x^2$	0.5	8
15	cosx-6+3x	$x^2(2x+3)$	2.5t	t-1
16	$(1-x^2)$cosx	2x+5.6	1+1.4t	2+t
17	$(x+0.5)^2$	(3x+1)sinx	2.5(14.5+t)	3.25
18	$1.2x-x^2$	(x+2.6)sinx	5	2.2+0.5t
19	(x+0.5)(x+1)	Cos(x+3.3)	3.5	3-2t
20	$0.5(x+1)^2$	(x+6.5)cosx	2.5	4-3t
21	(x+3.4)sinx	$(2x+3)^2$	1.5t	2
22	(2-x)sinx	$(x+0.6)^2$	6.5t	3
23	Xcospx/2	$2x^2$	t-1	$2t^2$
24	(x+0.4)cospx/2	$2.3(x^2+1)$	2.4	2.2t
25	$(1-x^2)+x$	3sin(x+2.4)	3	$(t+1)^2$
26	$2.4(x+1.5)^2$	xsin(x+1.6)	2.1+0.5t	0.9
27	$(x^2+6.5)$cosx	$(x+1.7)^2$	1.5	2t-1.5
28	(x+2)(2.5x+1)	2sin(x+1/6)	2t	4.5-3t
29	$(x^2+1)+(1-3x)$	2-3sin2x	t+1	0.5t
30	3(x+1.2)sinx/2	$4+2x^2$	5.6t	1.2

Назорат саволлари

1. +андай тенгламалар математик-физика тенгламалари деб аталади?
2. Математик-физика тенгламаларини та=рибий щисоблаш зарурияти =аердан келиб чи=ади?
3. Математик-физика тенгламаларини =андай типларга ажратилади?
4. Ошкор ва ошкормас схемаларнинг асосий мощияти нимадан иборат?

Тажриба иши № 4

Мавзу: Параболик типдаги тенгламаларни та=рибий усулда ечиш дастур таъминотини яратиш.

Ишдан ма=сад: Талабаларни амалий масалаларни ечишда кып ишлатиладиган хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни, хусусан параболик типдаги тенгламаларни тыр усулида ечиш билан таништириш, дастур таъминотини яратиш малакасини щосил =илиш.

Режа:

1.Параболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

2.Параболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

3.Олинган натижалар ва уларнинг тащлили.

4.Параболик типдаги тенгламаларга оид топшири=лар.

1.Параболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

Агар тащлил =илинаётган масаладаги жараённинг ва=т быйича ызгариш тезлиги ызгармас былса, яъни =увурлардаги =овуш=о= сую=ликларнинг ностационар щаракати жараёни, исси= лик ытказувчанлик масалалари, диффузия сощасига тегишли масалалар ечилаётган былса, уларнинг математик моделлари параболик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланди:

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$ (5) бу ерда u(x,t)-изланаётган номаълум функция;

a^2-коэффицент, хусусий щолда мусбат ызгармас ми=дор;

f(x,t)-таш=и таъсир функцияси; Тенглама ечимини =уйидаги D сощада =идирайлик; $D:\{a \le x \le b; 0 \le t < T\}$

Параболик типдаги тенгламалар учун =уйидаги бошлан\ич шартлар берилиши лозим: $u(x,t)\big|_{t=0} = f_1(x)$

Чегаравий шартлар сифатида эса яна Дирихле масаласи билан чекланамиз; $u(a,t) = P_1(t)$, $u(b,t) = P_2(t)$ киритилган x ва t ызгарувчилари быйича тыр киритамиз;

$x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, n-x быйича тугун ну=талар сони

$t_j = j \cdot \tau$, $\tau = T/m$, m-t быйича тугун ну=талар сони.

Бу ерда щам тыр усулининг ошкор ва ошкормас схемаларидан фойдаланиш мумкин.

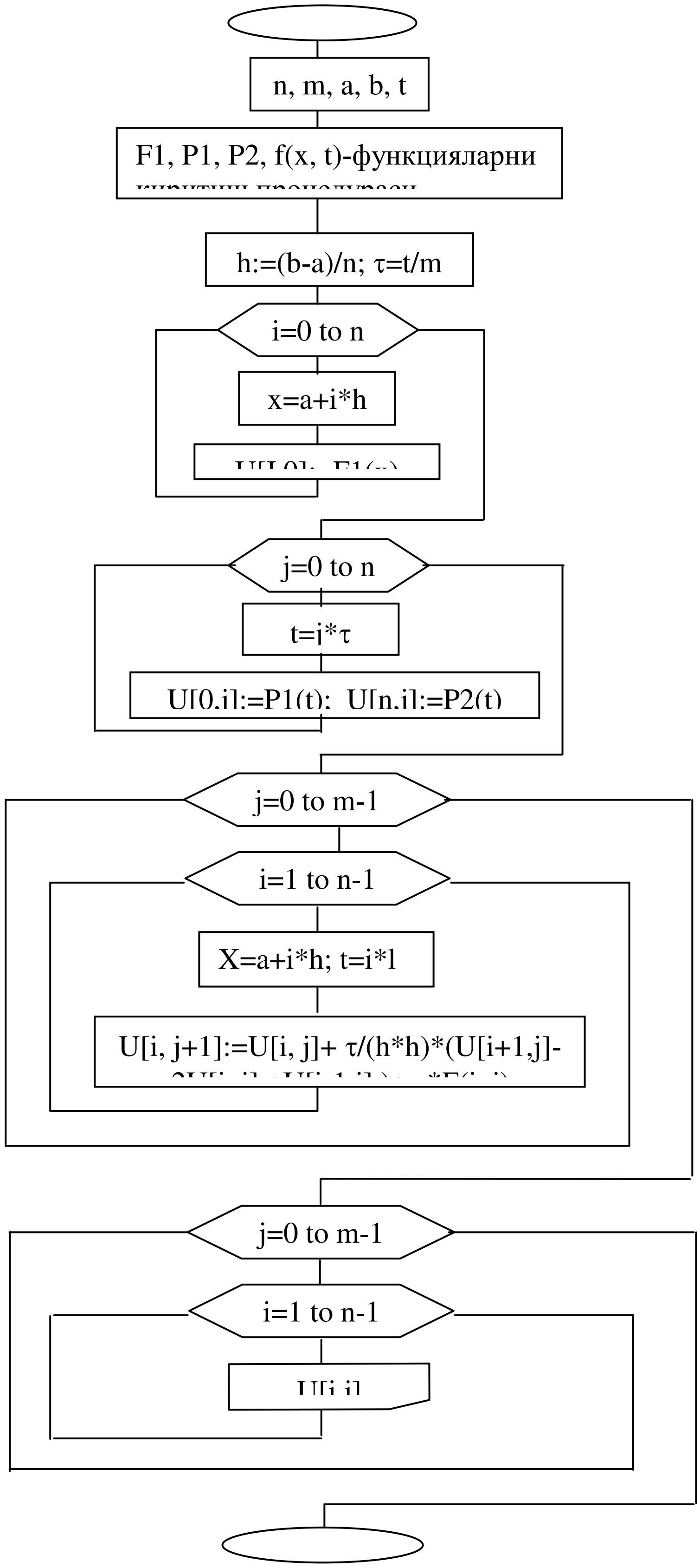
Параболик типдаги тенгламаларни ошкор схемага асосланган ишчи алгоритми =уйидагича ифодаланади:

$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\tau \cdot a^2}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \tau \cdot f_i^j \quad j = \overline{1,m-1}$, $i = \overline{1,n-1}$ (6)

бу ерда $u_i^j = u(x_i, t_j)$, $f_i^j = f(x_i, t_j)$ Бошлан\ич шартлар: $u_i^0 = f_{1,i}$, $u_i^1 = u_i^0 + \tau \cdot f_{2,i}$

Чегаравий шартлар: $u_0^j = P_2^j$, $u_n^j = P_2^j$

Параболик тип тенгламаларни ечиш алгоритмига мос блок-схема



Параболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар ***алгоритмига мос дастур матни***

```
Program Para_osh;
uses crt;
  const n=4;m=10;
 var a,b,h,ta,t,x:real;
      i,j:integer;
      u:array[0..n,0..m] of real;
   function f1(x:real):real;
     begin f1:=sqr(x); end;
   function p1(t:real):real;
     begin p1:=sqr(t) ;end;
   function p2(t:real):real;
     begin p2:=1+sqr(t); end;
   function f(x,t:real):real;
     begin f:=2*t-2; end;
 begin     clrscr;
a:=0;b:=1;t:=1;
  h:=(b-a)/n; ta:=t/m;
  for i:=0 to n do
  begin
    x:=a+i*h;
    u[i,0]:=f1(x);
  end;
  for j:=0 to m do
  begin
    t:=j*ta; u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
  end;
  writeln ('taqr','   ','aniq','    ', 'xatolik');
  for j:=0 to m-1 do
   for i:=1 to n-1 do
    begin
    x:=a+i*h; t:=j*ta;
    u[i,j+1]:=u[i,j]+(ta/(h*h))*(u[i+1,j]-2*u[i,j]+u[i-
1,j])+ta*f(x,t);
    end;
 for j:=0 to m do
  begin
  t:=j*ta;
   writeln('t=',t:2:2);
   for i:=0 to n do
   begin
   x:=a+i*h;
   writeln(u[i,j]:2:8 ,'    ',sqr(x)+sqr(t):2:8,'
',abs(u[i,j]-(sqr(x)+sqr(t))):2:8);
```

```
    end;
  end;
end.
```

2.Параболик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемага асосланган ишчи алгоритми =уйидагича ифодаланади:

$$\frac{\tau^2}{h^2}a^2u_{i+1}^{j+1}-(2\frac{a^2\tau}{h^2}+1)u_i^{j+1}+\frac{a^2\tau}{h^2}u_{i-1}^{j+1}=-f_i^{\,j}\tau-u_i^j \quad j=\overline{1,m-1},\ i=\overline{1,n-1} \qquad (7)$$

ёки белгилашлар киритсак

$$A_i\cdot u_{i-1}^{j+1}-B_i\cdot u_i^{j+1}+C_i\cdot u_{i+1}^{j+1}=F_i$$

кыринишидаги, ва=тнинг щар бир =адами учун уч диагоналли чизи=ли алгебраик тенгламалар системасига эга быламиз. Бу махсус системани щайдаш усули билан ечиб кутилган натижага эришишимиз мумкин.

Бу ерда

$u_i^{j+1}=u(x_i,t_{j+1})$, $u_{i+1}^{j+1}=u(x_{i+1},t_{j+1})$, $u_{i-1}^{j+1}=u(x_{i-1},t_{j+1})$

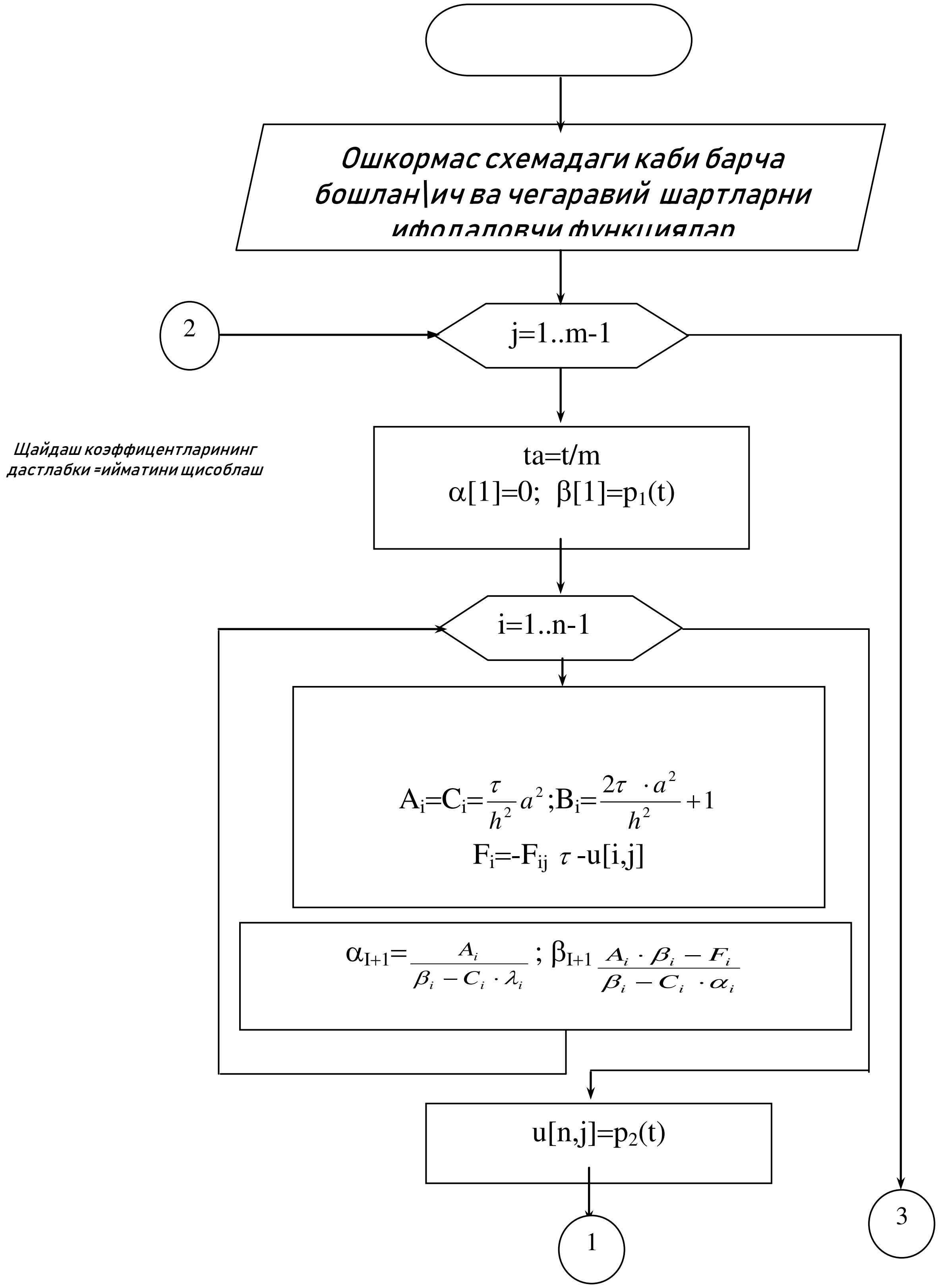
$x_i=x_{i-1}+h$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, n-x быйича тугун ну=талар сони

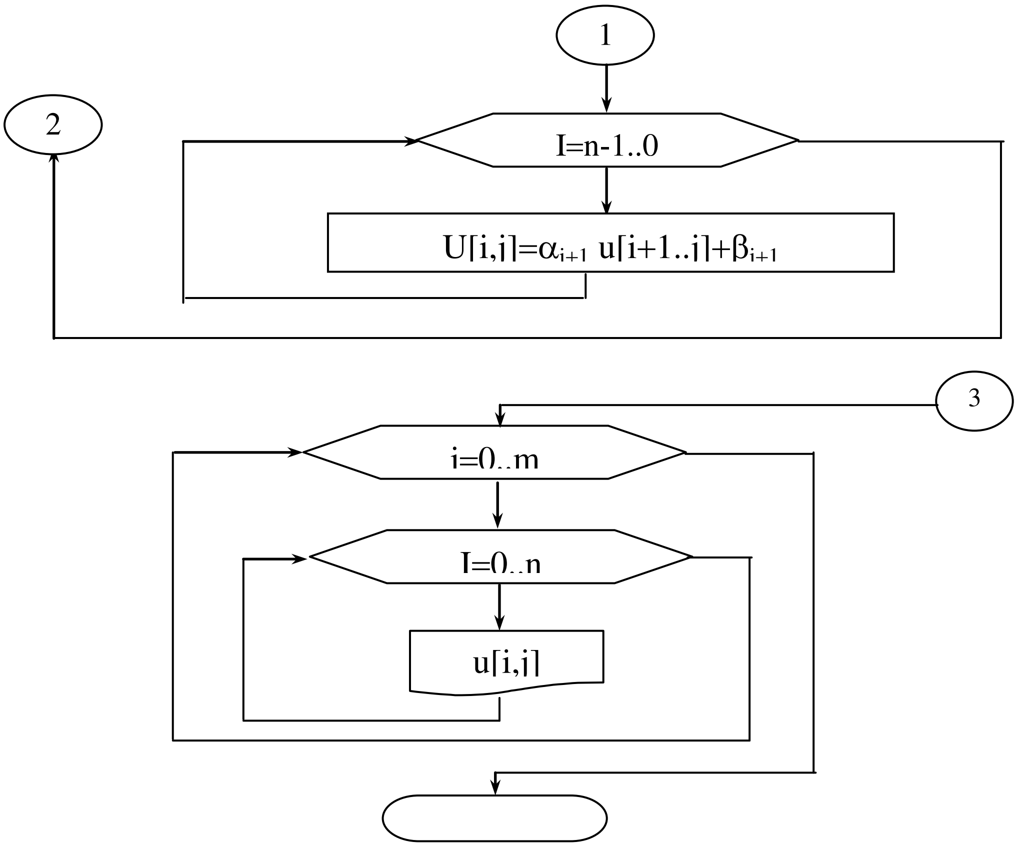
$t_j=j\cdot\tau$, $\tau=T/m$, m-t быйича тугун ну=талар сони.

Бошлан\ич шартлар: $u_i^0=f_{1,i}$,

Чегаравий шартлар: $u_0^j=P_1^j$, $u_n^j=P_2^j$

Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар ёрдамида ечиш алгоритмининг блок-схемаси





Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар алгоритмига мос дастур матни

```
Program par_oshkormas;
 uses crt;
 const n=10; m=100;
 var kk,a,b,h,ta,t,x:real;
      i,j:integer;
      ai,bi,ci,fi:real;
    u:array[0..n,0..m] of real;
      al,be:array[0..n] of real;
   function f1(x:real):real;
      begin f1:=1+x*x; end;
   function p1(x:real):real;
      begin p1:=cos(2*x) ;end;
   function p2(x:real):real;
      begin p2:=cos(2*x)+exp(x); end;
   function f(x,t:real):real;
      begin f:=-2*sin(2*t)+x*x*exp(t)-2*exp(t); end;
   function an(x,t:real):real;
      begin an:=cos(2*t)+x*x*exp(t); end;
 begin
  clrscr;
 readln(a,b);
  h:=(b-a)/n; ta:=1/m;
```

```
 for i:=0 to n do
  begin
   x:=a+i*h;
   u[i,0]:=f1(x);
  end;
 for j:=1 to m do
  begin
   t:=j*ta;
   u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
  end;
 for j:=0 to m-1 do
 begin
  t:=j*ta; al[1]:=0; be[1]:=p1(t);
   for i:=1 to n-1 do
    begin
      x:=a+i*h;
      ai:=ta/(h*h);
      bi:=2*ta/(h*h)+1;
      ci:=ta/(h*h);
      fi:=-f(x,t)*ta-u[i,j];
      al[i+1]:=ai/(bi-al[i]*ci);
      be[i+1]:=(ci*be[i]-fi)/(bi-al[i]*ci);
    end;
    for i:=n-1 downto 1 do
     u[i,j+1]:=al[i+1]*u[i+1,j+1]+be[i+1];
   if (j=10) or (j=50) or (j=90) then
    begin
      writeln('t=', j*ta:2:2);
      for i:=0 to n do
       begin
writeln(abs(u[i,j]):10:6,abs(an(a+i*h,t)):10:6,abs(u[i,j]-
an(a+i*h,t)):10:6);
       end;
     end;
  end;
 end.
```

3.Олинган натижалар ва уларнинг тащлили

Ошкор ва ошкормас схемаларга асосланиб ишлаб чи=илган алгоритмларни ва дастурларни ишга созлаш учун =уйидаги ани= ечими мавжуд былган параболик типдаги тенгламани ечишни ташкил =иламиз:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Ошкор схемали алмаштиришлар учун тенгламанинг ани= ечими деб $u(x,t)=x^2+t^2$ ни =абул =илсак, у щолда тенгламадаги f(x,t) =уйидагича ани=ланади:

$$f(x,t)= u_t-u_{xx}=2t-2$$

интеграллаш орали\ини эса =уйидаги деб =абул =илайлик

$$D:\{x\in[0,1];\quad t\in[0,1]\}$$

у щолда бошлан\ич шарт $u(x,0)=1+x^2$ бошлан\ич шартни чегаравий шартлар эса $u(0,t)=t^2$, $u(1,t)=1+t^2$ кыринишда ифодаланади. Щисоб ишлари учун n=6 ва m=100 деб =абул =илинган. Олинган натижалар =уйидаги жадвалда ифода =илинган.

Та=рибий	Ани=	Хатолик
t=0.10		
0.01000000 0.07190289 0.25923136 0.57190289 1.01000000	0.01000000 0.07250000 0.26000000 0.57250000 1.01000000	0.00000000 0.00059711 0.00076864 0.00059711 0.00000000
t=0.50		
0.25000000 0.31156914 0.49875939 0.81156914 1.25000000	0.25000000 0.31250000 0.50000000 0.81250000 1.25000000	0.00000000 0.00093086 0.00124061 0.00093086 0.00000000
t=1.00		
1.00000000 1.06156255 1.24875007 1.56156255 2.00000000	1.00000000 1.06250000 1.25000000 1.56250000 2.00000000	0.00000000 0.00093745 0.00124993 0.00093745 0.00000000

Олинган натижаларни ани= ечим билан та==ослаш ишлаб чи=илган алгоритм ва дастурнинг ты\рилигини таъкидлаб турибди. Ошкор схемали алгоритм асосида олинган натижалар хатолиги кутилганидек ва=т ортиши билан кыпайиб бормо=да.

Ошкормас схемали алмаштиришлар учун тенгламанинг ани= ечими деб $u(x,t)=\cos 2t+x^2e^t$ деб =абул =илсак, у щолда тенгламадаги f(x,t) =уйидагича ани=ланади:

$$f(x,t)=u_t-u_{xx}=-2\sin 2t+x^2e^t-2e^t$$

интеграллаш орали\ини эса =уйидаги деб =абул =илайлик

$$D:\{x\in[0,1];t\in[0,1]\}$$

у щолда бошлан\ич шарт $u(x,0)=1+x^2$, чегаравий шартлар эса $u(0,t)=\cos 2t$, $u(1,t)=\cos 2t+e^t$ кыринишда ифодаланади. Щисоб ишлари учун n=10 ва m=100 деб =абул =илинган. Олинган натижалар =уйидаги жадвалда фа=ат айрим =атламлар учун акс эттирилган.

Та=рибий ечим	Ани= ечим	Хатолик
t=0.10		
0.980067	0.980067	0.000000
0.994909	0.991118	0.003790
1.028046	1.024273	0.003772
1.083244	1.079532	0.003712
1.160488	1.156894	0.003594
1.259757	1.256359	0.003398
1.381025	1.377928	0.003097
1.524255	1.521600	0.002655
1.689404	1.687376	0.002028
1.876418	1.875255	0.001163
2.085237	2.085237	0.000000
t=0.50		
0.540302	0.540302	0.000000
0.572980	0.556790	0.016191
0.621692	0.606251	0.015441
0.703151	0.688687	0.014463
0.817344	0.804098	0.013246
0.964256	0.952483	0.011774
1.143873	1.133842	0.010031
1.356176	1.348176	0.008001
1.601147	1.595484	0.005664
1.878769	1.875767	0.003002
2.189024	2.189024	0.000000
t=0.90		
0.227202	0.227202	0.000000
0.183072	0.202606	0.019534
0.109768	0.128818	0.019050
0.012261	0.005838	0.018098
0.183037	0.166334	0.016702
0.402581	0.387699	0.014882
0.670910	0.658255	0.012655
0.988042	0.978003	0.010038
1.353990	1.346944	0.007046
1.768771	1.765076	0.003694
2.232401	2.232401	0.000000

Олинган натижаларни ани= ечим билан та==ослаш ишлаб чи=илган алгоритм ва дастурнинг ты\рилигини таъкидлаб турибди. Бу щолда щам ошкормас схемали алгоритм дастури кутилган натижаларни берди. Хатоликнинг унчалик катта эмаслиги ундан амалий масалалар ечишда фойдаланиш мумкинлигини кырсатади.

5. Тажриба иши учун вариантлар.

$u_t=u_{xx}+f(x,t)$ тенгламани $u(x,0)=f(x)$ бошлан\ич шартни ва $u(0,t)=p1(t)$, $u(1,t)=p2(t)$ чегаравий шартларни =аноатлантирувчи та=рибий ечимни топиш талаб =илинган былсин. Керакли вариантни танлаб тенгламани ечиб кыринг.

№	f(x)	P1(t)	p2(t)
1	3-2x	1-6t	2t
2	3x(x+1)	t+1	5t+9.6
3	4.2+ln(x+0.4)	2.8+t	1.2-3t
4	Cos2x	2t	t-0.932
5	8x(2-x)	t-1	t+3.52
6	4-lg(x+0.4)	2.4	t+1
7	6(0.55x+0.03)	t+1.03	2.35-t
8	3x(1-t)+0.2	3.2	t+0.68
9	Sinx+0.08	2.08+2t	2.6446
10	cos(2x+0.19)	1.53	2.1798
11	2x(x+0.2)-5	2t+1.4	t+1.36
12	lg(x+2.6)+4	1.25+t	1.9-2t
13	2sin(x+0.45)	3.43-4t	0.84-t
14	3.3+x(x+0.4)	6.3+t	6t+0.9
15	x(x+1)+0.2	6-t	t+0.84
16	5x(0.3+2x)	2	6t+1.9
17	2sin(x+0.48)	1.21	3t+8.2
18	2sin(x+0.02)	3t-1.02	0.581
19	3cos(x+0.48)	6t+0.87	0.4713
20	5lg(2.63-x)	3+(1.14-t)	0.3075
21	4.5-x(1-x)	3-(0.5-t)	1.26
22	5cos(x+0.845)	6(t+0.11)	0.1205
23	3lg(2.42+x)	0.3838	6(0.08-t)
24	1.6+x(0.8-x)	0.6	3(0.24+t)
25	3cos(x+0.66)	3t+0.79	0.3058
26	2lg(1.43+2x)	0.1553	3(t+0.14)
27	8.9+2x(1-x)	3(0.3-2t)	1.38
28	3lg(1.95+x)	0.29-6t	0.4065
29	2+cos(x+0.55)	1.705	0.817+3t
30	6x(1-x)-5.2	0.2	2(t+0.22)

Назорат саволлари

1. +андай жараёнлар параболик типдаги тенгламалар ор=али ифодаланади?
2. Параболик типдаги тенгламаларнинг умумий кыриниши =андай былади?
3. Параболик типдаги тенгламаларни ошкор схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритмини айтинг.

4. Параболик типдаги тенгламаларни ошкормас схемали алмаштиришлар билан ечиш алгоритмини айтинг.

Тажриба иши № 5

Мавзу: Эллиптик типдаги тенгламаларни та=рибий усулда ечиш дастур таъминотини яратиш.

Ишдан ма=сад: Талабаларни амалий масалаларни ечишда кып ишлатиладиган хусусий щосилали дифференциал тенгламаларни, хусусан эллиптик типдаги тенгламаларни тыр усулида ечиш билан таништириш, дастур таъминотини яратиш малакасини щосил =илиш.

Режа:

1.Эллиптик типдаги хусусий-хосилали дифференциал тенгламаларни тыр усулида ечиш алгоритми ва дастур таъминотини яратиш.

2.Олинган натижалар ва уларнинг тащлили.

3.Эллиптик типдаги тенгламаларга оид топшири=лар.

Агар ырганилаётган жараёнда ва=т фактори кучсиз рол ыйнаса, яъни жараён ва=т быйича тур\унлашган былса, ёки жараённинг математик моделида ва=тни ифодаловчи параметрлар =атнашмаса бундай жараёнларни стационар жараёнлар деб аталади. Стационар жараёнларнинг математик моделлари математик-физиканинг эллиптик типдаги тенгламалари ор=али ифодаланади. Эллиптик типдаги тенгламаларни хусусий щолда икки ылчовли фазо учун =уйидаги кыринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u\ (x,y)}{\partial y^2}=f(x,y) \quad (8)$$

бу ерда u(x,y)-=идирилаётган номаълум функция, f(x,y)-таш=и куч функцияси. (8) кыринишдаги тенгламани Пуассон тенгламаси деб, агар тенгламадаги f(x,y)=0 былса Лаплас тенгламаси деб аталади.

Эллиптик типдаги тенгламалар учун фа=ат чегаравий масалаларгина =ыйилиши лозим Биз бажариладиган тажриба ишларида соддалик учун Дирихле масаласи билан чегараланамиз.

Ю=орида таъкидлаганимиздек эллиптик типдаги тенгламаларни та=рибий ечиш учун асосан тыр усулидан фойдаланилади. Шунинг учун (8) тенгламани тыр усулида ечиш учун интеграллаш сощаси

$$D:\{0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1\}$$

да =уйидаги тырни киритамиз:

$x_i=i\cdot h,\quad h=1/n$ n-“x” быйича тугун ну=талари сони

$y_i=j\cdot\tau,\quad \tau=1/m$ m-“y” быйича тугун ну=талари сони

Киритилган тыр учун чекли- айирмали формулаларни =ыллаб, (8) тенгламани =уйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}=f_i^j \qquad (9)$$

бу ерда

$u_{i+1}^j = u(x_{i+1}, y_j)$, $u_i^j = u(x_i, y_j)$, $u_{i-1}^j = u(x_{i-1}, y_j)$

$u_i^{j+1} = u(x_i, y_{j+1})$, $u_i^{j-1} = u(x_i, y_{j-1})$, $f_i^j = f(x_i, y_j)$

Алгоритмга енгиллик киритиш учун $h=\tau$ деб =абул =илишимиз мумкин. У щолда (9) системани u_i^j га нисбатан ечиб =уйидаги ситемани щосил =иламиз:

$$u_i^j = \frac{1}{4}\left[u_{i-1}^j + u_{i+1}^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f_i^j\right],\quad \text{i=1..n-1}, \quad \text{j=1..m-1},$$

Бу системада етишмаган номаълумларни чегаравий шартлардан фойдаланиб щосил =иламиз:

$u_i^0 = f_1(y)$, $u_i^n = f_2(y)$, $u_0^j = f_3(y)$, $u_n^j = f_4(y)$;

Системанинг кыринишини тащлил =илиб, уни та=рибий-итерацион усуллар гурущига кирувчи Зейдел усули билан ечиш =улай эканлигини кыриш мумкин.

Зейдель усули 1874 йилда тани=ли немис математиги Ф. Зейдель томонидан ишлаб чи=илган былиб, уни итерация усулининг такомиллашган кыриниши деб =абул =илиш мумкин. Шунинг учун бу усулни кыпинча итерация усули деб щам юритилади. Усулнинг мощиятига кыра номаълум u_i^j ечимларни топиш учун

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} - h^2 f_i^j\right] \quad (10)$$

итерацион формулалардан фойдаланилади. Бунда =авслар ичига ёзилган ю=ори индекс я=инлашиш номерини билдиради. Я=инлашишлар сони ортиб борганда, яъни k етарлича катта былганда, $u_{i,j}^{(k)}$ ечимлар $u_{i,j}$ ани= ечимларга интилади.

Итерацияларни max $\left|u_{i,j}^{(k)} - u_{i,j}^{(k+1)}\right|$<e, i=1..n-1, j=1..m-1,

шарти бажарилгунча давом эттириш мумкин. Бунда e ихтиёрий, олдиндан танлаб олинадиган кичик сон- ечим ани=лиги.

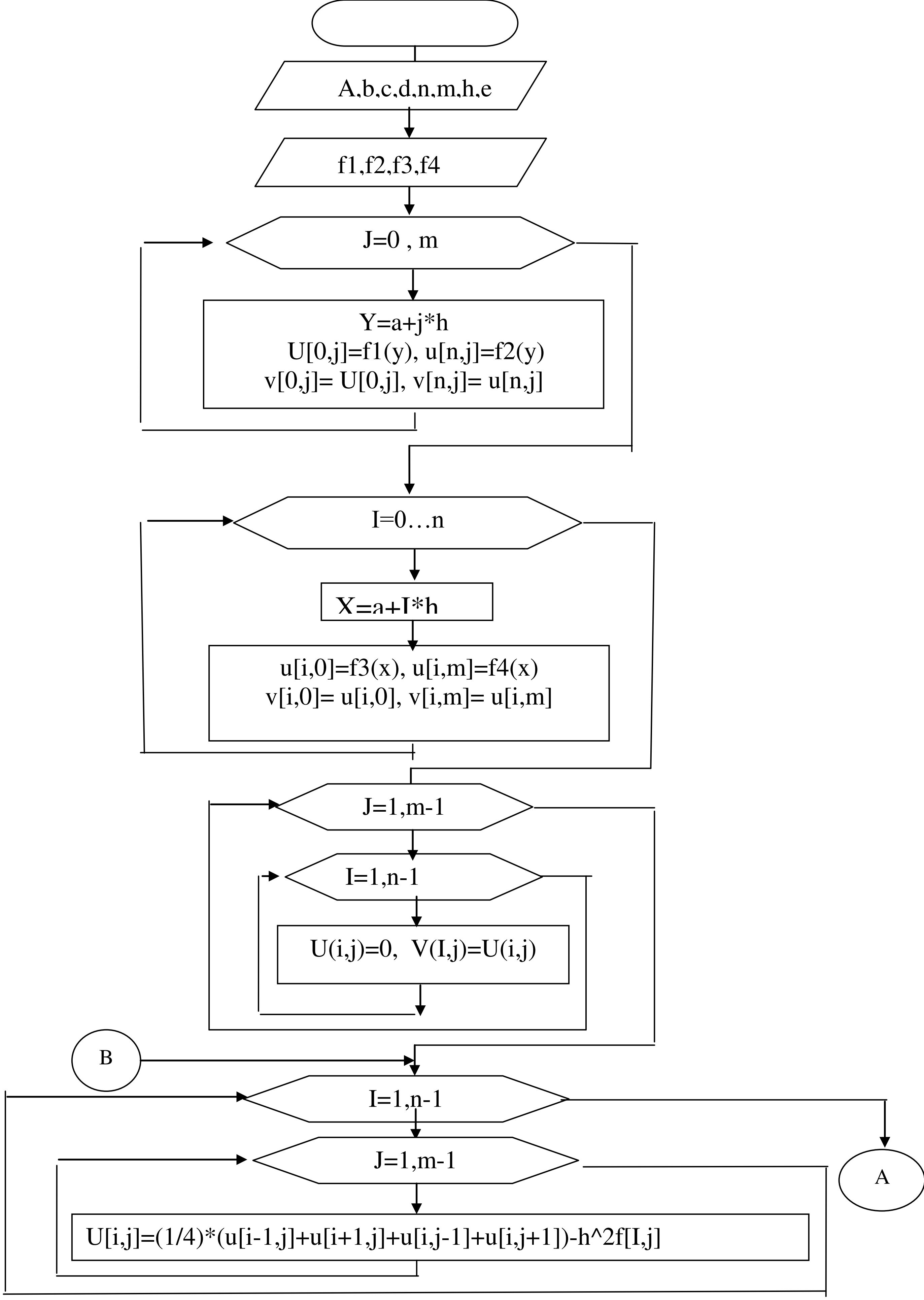
Ю=оридаги (10) формулани фойдаланишга =улай кыринишда ёзиб олайлик.

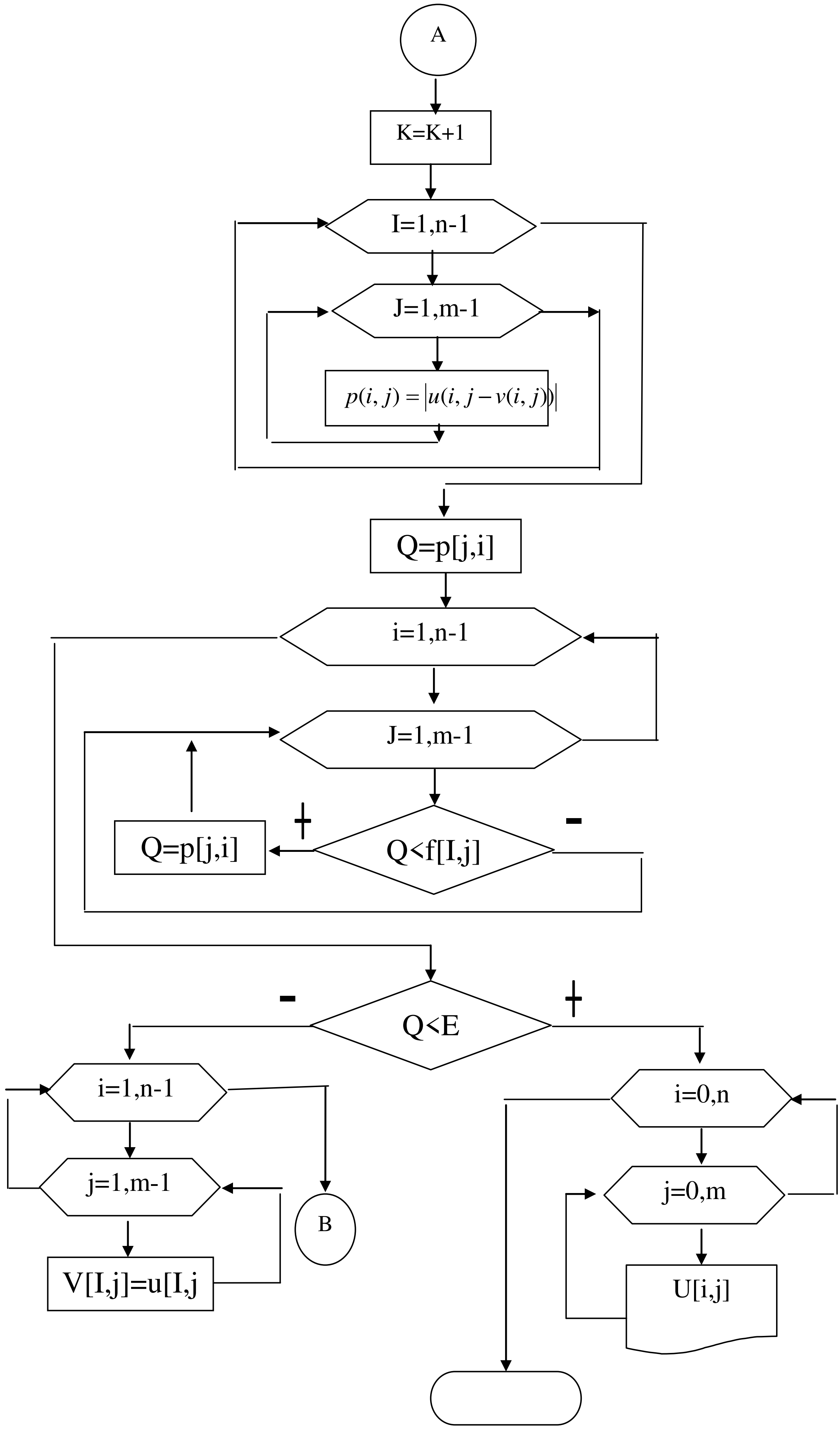
$$u_i^j = \frac{1}{4}\left[u_{i-1}^j + v_{i+1}^j + v_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f_i^j\right]$$

Бу ерда v_i^j лар усулнинг мощиятига кыра аввалги я=инлашишдаги =ийматларни олади.

Дастлабки я=инлашиш сифатида ихтиёрий сонларни олишимиз мумкин. Масалан, тырнинг барча тугун ну=таларида $u_{i,j}=0$ дейишимиз мумкин. Шундан сынг барча я=инлашишлар топилади ва ечимнинг ани=лигини щар сафар текшириб турилади.

Эллиптик типдаги тенгламани ечиш алгоритмининг блок-схемаси


A,b,c,d,n,m,h,e
f1,f2,f3,f4
J=0 , m
Y=a+j*h
U[0,j]=f1(y), u[n,j]=f2(y)
v[0,j]= U[0,j], v[n,j]= u[n,j]
I=0…n
X=a+I*h
u[i,0]=f3(x), u[i,m]=f4(x)
v[i,0]= u[i,0], v[i,m]= u[i,m]
J=1,m-1
I=1,n-1
U(i,j)=0, V(I,j)=U(i,j)
B
I=1,n-1
J=1,m-1
A
U[i,j]=(1/4)*(u[i-1,j]+u[i+1,j]+u[i,j-1]+u[i,j+1])-h^2f[I,j]


A
K=K+1
I=1,n-1
J=1,m-1
$p(i,j)=|u(i,j-v(i,j))|$
Q=p[j,i]
i=1,n-1
J=1,m-1
+
-
Q=p[j,i]
Q<f[I,j]
-
+
Q<E
i=1,n-1
j=1,m-1
V[I,j]=u[I,j
B
i=0,n
j=0,m
U[i,j]

Эллиптик типдаги тенгламаларни тыр усулида ечиш алгоритмига мос дастур

```
program elliptik;
const n=10; m=10; e=0.001;
var p,u,v:array[0..n,0..m]of real;
    k,i,j:integer;
    a,b,c,d,q,h,x,y:real;
    function f1(y:real):real;
    begin f1:=sqr(y); end;
    function f2(y:real):real;
    begin f2:=1+sqr(y); end;
    function f3(x:real):real;
    begin f3:=sqr(x); end;
    function f4(x:real):real;
    begin f4:=1+sqr(x); end;
    function f(x,y:real):real;
    begin f:=0*x+0*y+4; end;
begin h:=0.1;a:=0;b:=1;c:=0;d:=1;
      for j:=0 to m do
      begin y:=c+j*h; u[0,j]:=f1(y);u[n,j]:=f2(y);
               v[0,j]:=u[0,j];v[n,j]:=u[n,j];
      end;
      for i:=0 to n do
      begin x:=a+i*h; u[i,0]:=f3(x);u[i,m]:=f4(x);
                v[i,0]:=u[i,0];v[i,m]:=u[i,m];
      end;
      k:=0;
      for i:=1 to n-1 do
      for j:=1 to m-1 do
      begin u[i,j]:=0;v[i,j]:=u[i,j];end;
      repeat for i:=1 to n-1 do
             begin x:=a+i*h;
             for j:=1 to m-1 do
             begin y:=c+j*h;
             u[i,j]:=(1/4)*(u[i-1,j]+v[i+1,j]+v[i,j+1]+u[i,j-
1])-h*h/4*f(x,y);
             p[i,j]:=abs(u[i,j]-v[i,j]);
             end;
             end;
           k:=k+1;
           q:=p[1,1];
      for i:=1 to n-1 do
      for j:=1 to m-1 do
       if q<p[i,j] then q:=p[i,j];
      for i:=0 to n do
      for j:=0 to m do
```

```
        v[i,j]:=u[i,j];
       until q<e;
        writeln('k=', k);
        readln;
       for i:=0 to n do
       if (i=1) or (i=5) or (i=10) then
       begin
       for j:=0 to m do
       writeln (u[i,j]:2:8,'     ', sqr(i*h)+sqr(j*h):2:8);
       end;
end.
```

2. Олинган натижалар тащлили

Ишлаб чи=илган алгоритмларни ва дастурларни ишга созлаш учун =уйидаги ани= ечими мавжуд былган эллиптик типдаги тенгламани ечишни ташкил =иламиз:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u\ (x,y)}{\partial y^2}=f(x,y)$$

Тенгламанинг ани= ечими деб $u(x,t)=x^2+y^2$ ни =абул =илсак, у щолда тенгламадаги f(x,y) ==уйидагича ани=ланади:

$$f(x,y)=u_{yy}+u_{xx}=2+2=4$$

интеграллаш орали\ини эса =уйидагича деб =абул =илайлик:

$$D:\{x\in[0,1];\quad y\in[0,1]\}$$

у щолда чегаравий шартлар $u(0,y)=y^2$, $u(n,y)=1+y^2$,$u(x,0)=x^2$, $u(x,n)=1+x^2$ кыринишда ифодаланади. Щисоб ишлари учун n=10 деб =абул =илинган.

Олинган натижалар =уйидаги жадвалда ифода =илинган.

y=0.1		
0.01000000	0.01000000	0.00000000
0.01874920	0.02000000	0.00125080
0.04773644	0.05000000	0.00226356
0.09703570	0.10000000	0.00296430
0.16668435	0.17000000	0.00331565
0.25668298	0.26000000	0.00331702
0.36699865	0.37000000	0.00300135
0.49757117	0.50000000	0.00242883
0.64832138	0.65000000	0.00167862
0.81916060	0.82000000	0.00083940
1.01000000	1.01000000	0.00000000
y=0.5		
0.25000000	0.25000000	0.00000000
0.25668298	0.26000000	0.00331702
0.28399824	0.29000000	0.00600176
0.33214165	0.34000000	0.00785835
0.40121182	0.41000000	0.00878818
0.49120965	0.50000000	0.00879035
0.60204738	0.61000000	0.00795262
0.73356516	0.74000000	0.00643484
0.88555319	0.89000000	0.00444681
1.05777650	1.06000000	0.00222350
1.25000000	1.25000000	0.00000000

Олинган натижаларни ани= ечим билан та==ослаш ишлаб чи=илган алгоритм ва дастурнинг ты\рилигини таъкидлаб турибди. Хатоликнинг унчалик катта эмаслиги ундан амалий масалалар ечишда фойдаланиш мумкинлигини кырсатади.

3.Тажриба ишига доир топшири=лар.

$u_{xx}+u_{yy}=0$ тенгламани учлари A,B,C,D ну=талардан иборат ABCD квадратли сощада четлари =уйидаги функциялар билан чегараланган та=рибий ечимини топинг.

№	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$U\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$20+y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$3.6-2y$	$30\cos(\pi x/2)$	$3\cos(\pi y/2)$	$20x^2$
3	$9.8y(1-y^2)$	$x+1$	$y-1$	$50\sin(\pi x)$
4	$3.5y$	20	$10y^2$	$50x(1-x)$
5	$3y+1$	$20x(1+x)$	$27y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$3.9\sin(\pi y)$	$20x$	$24y$	$30x(1-x)$
7	$6.8(1-y)$	$20x$	$26y$	$30(1-x)$
8	$4.7\sin(\pi y)$	$30x$	$15y^2$	$50\sin(\pi x)$
9	$8.6+y^2$	40	$20+y$	$40\sin(\pi x/2)$
10	$63.9y^2$	$50(1-x)$	$y-1$	$60x(1-x^2)$
11	$7.5y^2$	20	$20+y$	$10x(1-x)$
12	$9.8y$	$40(1-x)$	$30y(1-y)$	0
13	$10\cos(\pi y/2)$	$30x(1-x)$	$40(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
14	$20y^2(1-y)$	$50\sin(\pi x)$	23.6	$10x^2(1-x)$
15	$20y$	$20(1-x^2)$	$14y(1+y)$	0
16	$5.8(1-y^2)$	$30x$	25	30
17	$3.9\cos(\pi y/2)$	$30x^2$	$10+y$	$30\cos(\pi x/2)$
18	6.35	$50\sin(\pi x)$	$50y(1-y^2)$	0
19	$28y$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
20	$24y(1-y)$	$20x^2(1-x)$	0	$40x(1-x^2)$
21	$31\sin(\pi x)$	$30x$	$50y$	$20x(1-x)$
22	$16(1-x)$	$30x$	$25y$	$40(1-x)$
23	$25\sin(\pi x)$	$54x$	$14y^2$	$20(\pi x)$
24	40	30	$36y^2$	$40\sin \pi/2(1-x)$
25	$30y^2$	$15(1-x)$	17	$40x^2(1-x)$
26	$25y^2$	25	$23y$	$20x(1-x)$
27	$15y$	$15(1-x)$	$28y(1-y)$	0
28	$30\cos \pi y/2$	$36x(1-x)$	$5y(1-y^2)$	$30(1-x^2)$
29	$10y^2(1-y)$	$10\sin \pi x$	6.3	$15x(1-x)$
30	$25y$	$2.5(1-x^2)$	$5.2y(1-y)$	6.54

Назорат саволлари

1. Эллиптик типдаги тенгламалар =андай амалий жараёнларда учрайди?
2. Эллиптик типдаги тенгламаларнинг умумий кыриниши =андай?
3. Эллиптик типдаги тенгламаларни тыр усулида ечиш алгоритмини айтинг.
4. Зейдел усулининг мощиятини тушунтиринг.