

Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус  
таълим вазирлиги

Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус  
таълим вазирлиги

Ал-Хоразмий номли  
Урганч Давлат Университети

Г.У.Уразбоев, У.А.Хаитметов

**Алгебра ва сонлар назарияси  
(чизиқли алгебра)  
фанидан маърузалар матни**

*(Математика ва амалий математика йўналиши  
талабалари учун)*

Урганч - 2012.

Маърузалар матни «Амалий математика», «Математика» йўналишида бакалавр тайёрлаш намунавий ўқув дастурига асосан ёзилган бўлиб, бунда «Алгебра ва сонлар назарияси» фанининг чизикли алгебра бўлимини ўз ичига олган. Маъруза матнларидан «Информатика» мутахассислиги талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

**Тузувчилар:** ф.-м.ф.д., доцент Г.У.Уразбоев,  
ф.-м.ф.н. У.А.Хаитметов

**Такризчилар:** ф.-м.ф.н., доцент А.Б.Яхшимуратов  
ф.-м.ф.н. К.А. Мамедов

## Маъруза №1.

### $n$ ўлчамли чизиқли фазо.

#### Режа:

1. Чизиқли фазонинг таърифи.
2. Фазонинг ўлчамлари сони (ўлчамлиги).
3.  $n$  ўлчамли фазода базис ва координаталар.
4. Базис ўзгарганда координаталарнинг алмашилиши.

**1. Чизиқли фазонинг таърифи.** Кўп ҳолларда шундай объектлар билан иш кўришга тўғри келадики, бунда уларни қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амалларини бажариш лозим бўлиб қолади. Бир неча мисол келтирамиз.

1. Геометрияда бундай объектлар уч ўлчамли фазодаги векторлар, яъни йўналишли кесмалардир. Агар йўналишли икки кесмани параллел кўчириш йўли билан устма-уст тушириш мумкин бўлса, улар айти бир векторни аниқлайди деб ҳисобланади. Шунинг учун бу кесмаларнинг ҳаммасини бир нуқтадан бошлаб чиқариш қулай. Бу нуқтани биз координаталар боши деб атаймиз. Маълумки, векторларни қўшиш амали қуйидагичадир:  $x$  ва  $y$  векторларнинг йиғиндиси деб, томонлари  $x$  ва  $y$  бўлган параллелограммнинг диагонали ҳисобланади. Векторни сонга кўпайтириш амали ҳам маълум усул билан киритилади.

2. Алгебрада биз  $n$  та сондан иборат  $x = \xi'_1 e_1 + \xi'_2 e_2 + \dots + \xi'_n e_n$  кўринишдаги системалар (масалан: матрицанинг йўллари, чизиқли форма коэффициентлари, тўплами ва ҳ.к.) билан иш кўришга тўғри келади. Бундай системаларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари

одатда қуйидагича киритилади:  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ва  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  системалар йиғиндиси деб,  $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$  системага айтилади.  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  система билан  $\lambda$  соннинг кўпайтмаси деб,  $\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n)$  системага айтилади.

3. Анализда функцияларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш амаллари тўғрисида таъриф берилади. Аниқлик учун бундан сўнг  $[a, b]$  сегментда берилган ҳамма узлуксиз функциялар тўпламини текширамыз.

Келтирилган мисолларда қўшиш ва сонга кўпайтиришдан иборат худди бир хил амаллар мутлақо ҳар хил объектлар устида бажарилади. Бундай мисолларнинг ҳаммасини бир нуқтаи назар билан ўрганиш учун, биз чизиқли, яъни аффин фазо тушунчасини киритамиз.

**Таъриф-1.** Агар қуйидаги шартлар бажарилса,  $x, y, z, \dots$  элементларнинг  $V$  туплами чизиқли (аффин) фазо дейилади:

а) ҳар икки  $x$  ва  $y$  элементларга  $x$  ва  $y$  элементлар йиғиндиси деб аталадиган  $z$  элемент мос қилиб қўйилган;  $x$  ва  $y$  элементларнинг йиғиндиси  $x+y$  билан белгиланади;

б) бирор майдоннинг ҳар бир  $x$  элементи ва ҳар бир  $\lambda$  сон билан  $x$  элемент кўпайтмаси деб аталган  $\lambda x$  элемент мос қилиб қўйилган.

Бу амаллар қуйидаги талабларни (аксиомаларни) қаноатлантириши керак.

1.  $1^0 \quad x+y=y+x$  (коммутативлик),
- $2^0 \quad (x+y)+z=x+(y+z)$  (ассоциативлик),

3<sup>0</sup> Хар қандай  $x$  учун шундай  $0$  элемент мавжудки,  $x+0=x$  бўлади.  $0$  элемент ноль элемент дейилади.

4<sup>0</sup> Хар қандай  $x$  учун  $-x$  билан белгиланадиган шундай элемент мавжудки,

$$x+(-x)=0 \text{ бўлади.}$$

2. 1<sup>0</sup>  $1 \cdot x = x,$

$$2^0 \alpha(\beta x) = \alpha\beta(x).$$

3. 1<sup>0</sup>  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$

$$2^0 \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Биз қўшиш ҳамда сонга кўпайтириш амалларини қандай таърифланиши ҳақида гапирмаганимиз бежиз эмас. Биз бу амалларни фақат юқорида таърифланган аксиомаларга бўйсунитиларини талаб қиламиз ҳолос. Шунинг учун ҳар қачон юқорида қайд қилинган шартларни қаноатлантирувчи амаллар билан иш кўрар эканмиз, биз уларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари деб, элементлари устида бу амаллар бажарилган тўпламни эса чизиқли фазо деб ҳисоблашга ҳақлимиз. Юқорида келтирилган 1-3 мисоллар бу аксиомаларга бўйсунди.

Яна бир мисол кўриб чиқайлик;

4. Даражаси натурал  $n$  сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилади.

Ёлғиз  $n$ -даражали кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ташкил қилмайди, чунки  $n$ -даражали икки кўпхад йиғиндиси  $n$  дан пастрок бўлиб чиқиши ҳам мумкин; масалан,

$$(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t.$$

5.  $V$  фазонинг элементлари  $n$ -тартибли матрицалардан иборат.  $\|a_{ik}\|$  ва  $\|b_{ik}\|$  матрицалар йиғиндиси деб  $\|a_{ik} + b_{ik}\|$  матрицага,  $\|a_{ik}\|$  матрица билан  $\lambda$  соннинг кўпайтмаси деб  $\|\lambda a_{ik}\|$  матрицага айтилади. Шунинг билан бирга, ноль элемент фақат ноллардан иборат матрица бўлади. Бу ерда чизиқли фазонинг ҳамма шартлари бажарилишини текшириб кўриш мумкин.

Чизиқли фазо элементларини биз *векторлар* деб атаймиз. Бу сўзнинг кўпинча тор маънода (1-мисолдаги каби) ишлатиши бизни чалғитмаслиги керак. Бу чизиқ билан боғлиқ бўлган геометрик тасаввурлар бир қанча натижаларни ойдинлаштиришга, баъзи ҳолларда эса бу натижаларни олдиндан кўра билишга ёрдам беради.

Агар чизиқли фазо таърифида қатнашаётган  $\lambda, \mu, \dots$  сонлар ҳақиқий бўлса, у ҳолда фазо *хақиқий чизиқли фазо* дейилади.

Биз  $\lambda, \mu, \dots$  ларни ихтиёрий  $F$  майдон элементлари деб умумийроқ фараз этишимиз мумкин. Бу ҳолда  $V$  фазо  $F$  *майдондаги чизиқли фазо* дейилади. Қуйида баён этиладиган тушунча ва теоремаларнинг кўпчилиги, жумладан, бу параграф мазмунининг ҳаммаси ихтиёрий майдондаги чизиқли фазалар учун ҳам бевосита тўғри бўлади.

**2. Фазонинг ўлчамлари сони (ўлчамлиги).** Бундан кейин векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эркилиги деган тушунчалар муҳим аҳамиятга эга бўлади.

**Таъриф-2.**  $V$ –чизиқли фазо бўлсин. Агар камида биттаси нолдан фарқ қиладиган  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$  сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = 0 \quad (1)$$

тенглик ўринли бўлса, бу ҳолда  $x, y, z, \dots, v$  векторлар чизиқли боғлиқ векторлар дейилади.

Чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар чизиқли эркин векторлар дейилади. Бошқача қилиб айтганда,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = 0$$

тенглик  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \theta = 0$  бўлган ҳолдагина ўринли бўлса,  $x, y, z, \dots, v$  векторлар чизиқли эркин векторлар дейилади.

$x, y, z, \dots, v$  векторлар чизиқли боғлиқ, яъни улар (1) муносабат билан боғланган бўлсин ва ундаги коэффицентлардан камида биттаси, масалан,  $\alpha$  нолдан фарқли деб фараз қилайлик. Бу ҳолда

$$\alpha x = -\beta y - \gamma z - \dots - \theta v$$

бўлади. Буни энди  $\alpha$  га бўлиб ва

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \lambda, \quad -\frac{\gamma}{\alpha} = \mu, \dots, -\frac{\theta}{\alpha} = \varsigma$$

деб фараз қилиб,

$$x = \lambda y + \mu z + \dots + \varsigma v \quad (2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Агар  $x$  вектор  $y, z, \dots, v$  векторлар орқали (2) кўринишдаги тенглик билан ифода этилса, у ҳолда биз  $x$  вектор  $y, z, \dots, v$  векторларнинг чизиқли комбинацияси деб атаймиз.

Шундай қилиб, агар  $x, y, z, \dots, v$  векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда улардан камида биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади. Тескарисини, яъни биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган векторлар

чизикли боғлиқ векторлар бўлишининг ҳам тўғрилигини кўрсатиш мумкин.

Энди фазонинг ўлчамлар сони (ўлчамлиги) тушунчасини киритишга ўтамиз.

Тўғри чизикдаги векторлар тўпламида ҳар қандай иккита вектор пропорционал, яъни чизикли боғлиқдир. Текисликда иккита чизикли эрки векторни топиш мумкин, аммо ундаги ҳар қандай учта вектор чизикли боғлиқдир.

Агар  $V$  – уч ўлчамли фазодаги векторлар тўплами бўлса, у ҳолда  $V$  да учта чизикли эрки векторни топиш мумкин, аммо бундаги ҳар қандай тўртта вектор чизикли боғлиқ бўлади.

Биз кўрамизки, тўғри чизик, текислик ва уч ўлчамли фазодаги чизикли эрки векторларнинг максимал сони геометриядаги тўғри чизик, текислик ҳамда фазонинг ўлчами сонига тўғри келади. Шунинг учун қуйидаги умумий таърифни қабул қилишимиз табиий.

**Таъриф-3.** Агар  $V$  чизикли фазода  $n$  та чизикли эрки вектор мавжуд бўлиб, бундан ортиқ чизикли эрки векторлар бўлмаса,  $V$  фазо  $n$  ўлчамли фазо дейилади ва  $\dim V$  деб белгиланади.

Агар  $V$  фазода чексиз кўп чизикли эрки векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда  $V$  фазо чексиз ўлчамли фазо дейилади.

Чексиз ўлчамли фазолар математиканинг махсус бўлимларида текширилади. Биз бу курсда фақат чекли ўлчамли фазолар билан шуғулланамиз.



### 3. $n$ ўлчамли фазода базис ва координаталар.

**Таъриф-4.**  $n$  ўлчамли  $V$  фазонинг  $n$  та чизиқли эрки  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлари тўплами  $V$  нинг базиси деб аталади.

Масалан, 1-мисолда кўрилган  $V$  (уч ўлчамли) фазода бир текисликда ётмаган ҳар қандай учта вектор базис ҳосил қилади.

$n$  ўлчамли фазо таърифига мувофиқ, унда  $n$  та чизиқли эрки вектор, яъни базис мавжуддир.

**Теорема-1.**  $n$  ўлчамли  $V$  чизиқли фазонинг ҳар бир  $x$  векторини базис векторларининг чизиқли комбинацияси орқали ягона тарзда ифодалаш мумкин.

*Исбот.*  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлари  $V$  фазода базис ташкил қилсин. Буларга  $V$  нинг ихтиёрий бир векторини қўшамиз. Энди  $x, e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлар  $n+1$  та бўлди. Шунинг учун,  $n$  ўлчамли фазо таърифга мувофиқ улар чизиқли боғлиқ бўлиши керак, яъни

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \quad (3)$$

бундаги  $\alpha_i$  ларнинг баъзилари нолга тенг эмас.  $\alpha_0$  соннинг нолдан фарқли экани маълум, чунки акс ҳолда (3) формуладан  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларнинг чизиқли боғлиқ бўлиши келиб чиққан бўлар эди.

(3) дан  $x$  векторни топамиз:

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n.$$

Биз ҳар бир  $x \in R^1$  вектор  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларнинг чизиқли комбинацияси эканини исбот қилдик.

Энди ҳосил қилинган ифоданинг биргина эканини (ягоналигини) исбот қиламиз.  $x$  вектор базис векторлар орқали икки хил ифодаланган деб, яъни:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

ва

$$x = \xi'_1 e_1 + \xi'_2 e_2 + \dots + \xi'_n e_n$$

деб фараз килайлик. Буларнинг биринчисидан иккинчисини айириб,

$$0 = (\xi_1 - \xi'_1)x + (\xi_2 - \xi'_2)e_2 + \dots + (\xi_n - \xi'_n)e_n$$

тенгликни ҳосил қиламиз.  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлар чизиқли эркин бўлгани учун, бу тенглик

$$\xi_1 - \xi'_1 = \xi_2 - \xi'_2 = \dots = \xi_n - \xi'_n = 0$$

бўлгандагина, яъни

$$\xi_1 = \xi'_1, \quad \xi_2 = \xi'_2, \dots, \xi_n = \xi'_n$$

бўлгандагина ўринлидир.  $x$  ни базис векторлар орқали ифода этиш биргина эканлиги исбот этилди.

*Теорема исботланди.*

**Таъриф-5.** Агар  $e_1, e_2, \dots, e_n$  лар  $n$  ўлчамли фазода базис бўлиб,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad (4)$$

бўлса, у ҳолда  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  сонлар  $x$  векторнинг  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базисдаги координаталари деб аталади.

1-теоремага мувофиқ, маълум  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базисда ҳар бир вектор бир қийматли аниқланадиган координаталарга эга.

Агар  $x$  вектор  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базисда  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  координаталарга, у вектор эса  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  координаталарга эга бўлса, яъни агар

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$$

бўлса, у ҳолда

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n,$$

яъни  $x+y$  вектор  $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n$  координаталарга эга бўлади.

Шунга ўхшаш,  $\lambda x$  векторлар  $\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots, \lambda\xi_n$  координаталарга эгадир.

Шундай қилиб,  $x$  ва  $y$  векторларни қўшишда уларнинг координаталари қўшилади.  $x$  векторни  $\lambda$  сонга кўпайтиришда унинг координаталари шу сонга кўпайтирилади.

Фақат ноль векторнинг ҳамма координаталари нолга тенглиги равшандир.

### Мисоллар.

1. Уч ўлчамли фазодаги векторнинг координаталарига бизнинг берган таърифимиз аналитик геометрияда мавжуд бўлган бирор (умуман айтганда, тўғри бурчакли бўлмаган) координаталар системасида вектор координаталари учун берилган таъриф билан бир хилдир.

2.  $V$  фазони—ҳар бир  $x$  вектори  $n$  та  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  сондан тузилган системадан иборат бўлган фазо деб фараз қилайлик.

$$e_1 = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

$$e_2 = (0, 1, 1, \dots, 1)$$

....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

базисни танлаймиз.

Бу базисда  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  векторнинг  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  координаталарини топамиз. Таърифга мувофиқ,

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n,$$

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \eta_1 (1, 1, \dots, 1) + \eta_2 (0, 1, \dots, 1) + \dots + \eta_n (0, 0, \dots, 1) =$$

$$= (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n).$$

Шундай қилиб,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  сонлар қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_1 + \eta_2 &= \xi_2, \\ &\dots \\ \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n &= \xi_n\end{aligned}$$

бундан:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_2 &= \xi_2 - \xi_1, \\ &\dots \\ \eta_n &= \xi_n - \xi_{n-1}\end{aligned}$$

бўлади. Энди  $V$  да шундай базисни оламизки, бунда  $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  векторнинг координаталари билан бу векторни аниқлайдиган  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  сонлар орасида боғланиш энг содда бўлсин. Базис

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

булсин деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)=\xi_1(1, 0, \dots, 0)+\xi_2(0, 1, \dots, 0)+\dots+\xi_n(0, 0, \dots, 1)=\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир векторни  $n$  та  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  сон системаси билан аниқланадиган  $V$  фазода бу сонларни

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

базисдаги  $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  векторнинг координаталари деб талқин этиш мумкин.

3.  $V$ -векторлари даражаси  $n-1$  дан катта бўлмаган кўпҳадлардан иборат фазо бўлсин. Бу фазода  $e_1 = 1, \quad e_2 = t, \quad \dots, \quad e_n = t^{n-1}$  векторлар

тўплами энг содда базис бўлади. Бу базисда  $P(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \dots + a_{n-1}$  кўпхад координаталари унинг  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  коэффицентларидан иборат бўлишини кўриш қийин эмас.

Энди бошқа базисни танлаб оламиз:

$$e'_1 = 1, e'_2 = t - a, e'_3 = (t - a)^2, \dots, e'_n = (t - a)^{n-1}.$$

ҳар бир  $P(t)$  кўпхаднинг координаталари қуйидагича бўлади:

$$P(a), P'(a), \dots, \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

#### 4. Базис ўзгарганда координаталарнинг алмашилиши.

$e_1, e_2, \dots, e_n$  ва  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  лар  $n$  ўлчамли фазонинг икки базиси деб фараз қилайлик. Ҳамда,  $e'_i$  векторлар биринчи базис векторлари орқали

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

формулалар билан ифодаланган бўлсин, яъни биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицасининг детерминанти нолдан фарқли бўлган  $A = \|a_{ik}\|$  матрица билан берилсин.

$\xi_i$  орқали  $x$  векторнинг биринчи базисдаги координаталарини,  $\xi'_i$  билан эса унинг иккинчи базисдаги координаталарини белгилайлик.  $\xi'_i$  координаталар  $\xi_i$  лар орқали қандай ифода қилинишини топамиз.

Базис координаталари таърифига асосан:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \dots + \xi'_n e'_n$$

Бу тенгликлардаги  $e'_i$  векторлар ўрнига уларнинг  $e_i$  векторлар орқали ифодасини қўйсак,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \xi'_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \\ + \xi'_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n) + \dots + \xi'_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n)$$

айният ҳосил булади.  $e_i$  векторлар чизикли эркин бўлгани учун, уларнинг тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги коэффициентлари бир хилдир. Демак,

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\xi'_1 + a_{21}\xi'_2 + \dots + a_{n1}\xi'_n, \\ \xi_2 &= a_{12}\xi'_1 + a_{22}\xi'_2 + \dots + a_{n2}\xi'_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &= a_{1n}\xi'_1 + a_{2n}\xi'_2 + \dots + a_{nn}\xi'_n. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

тенгликлар уринли, яъни  $x$  векторнинг биринчи базисдаги  $\xi_i$  координаталари унинг иккинчи базисдаги координаталари орқали  $A$  матрицанинг транспозицияланган  $A'$  матрицаси ёрдами билан ифодаланади.

Бу натижани бошқача шаклда ҳам тасвир этиш мумкин. (7) тенгламаларни  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$  ларга нисбатан ечамиз. У ҳолда:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \dots + b_{1n}\xi_n, \\ \xi'_2 &= b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \dots + b_{2n}\xi_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi'_n &= b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \dots + b_{nn}\xi_n. \end{aligned} \right\}$$

ҳосил бўлади, бунда  $b_{ik}$  лар  $A'$  матрицага тескари бўлган матрица элементларини билдиради. Шундай қилиб, биз кўрамизки, векторнинг координаталари  $A'$  матрицага тескари бўлган  $B = \|b_{ik}\|$  матрица ёрдами билан алмаштирилади. Бундаги  $A'$  матрица базис алмаштирилишини кўрсатувчи  $A$  матрицани транспозициялаб ҳосил қилинган матрицадир.

### **Назарий саволлар.**

1. Чизиқли фазонинг ҳар бир элементи базис орқали ягона равишда чизиқли ифодаланишини кўрсатинг.
2. Базис ўзгарганда векторнинг координаталарини ўзгаришини кўрсатинг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Чизиқли фазо.
2. Чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркин векторлар.
3. Фазонинг ўлчамлиги.
4. Чизиқли фазонинг базиси.
5. Векторнинг координаталари.

### **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №2.

### Қисм фазолар.

#### Режа:

1. Қисм фазонинг таърифи.
2. Чизикли фазо қисм фазоларининг устма-уст тушишлик критерияси.
3. Қисм фазоларнинг кесишмаси, йиғиндиси ва уларнинг ўлчамлари.
4. Қисм фазоларнинг йиғиндиси, тўғри йиғиндиси.

$F$  майдон устидаги  $V$  чизикли фазода  $V'$  қисм тўплам берилган бўлсин.

**Таъриф-1.** Агар  $V$  даги қўшиш амалига ва векторларни  $F$  даги скалярларга кўпайтириш амалига нисбатан  $V'$  тўплам ёпик бўлса, яъни ҳар қандай  $x, y \in V'$  учун  $x + y \in V'$  ва ҳар қандай  $x \in V', \lambda \in F$  учун  $\lambda x \in V'$  бўлса, у ҳолда  $V'$  қисм тўпламга  $V$  чизикли фазонинг қисм фазоси дейилади.

**Натижа-1.**  $\bar{0} \in V'$ . Ҳақиқатдан ҳам ихтиёрий  $x \in V'$  учун  $\lambda = 0$  деб олсак  $\bar{0} \in V'$ .

**Натижа-2.** Агар  $x \in V'$  бўлса  $-x \in V'$  булади. Буни кўрсатиш учун  $\lambda = -1$  деб олиш керак.

**Натижа-3.**  $V'$  нинг ўзи ҳам  $F$  майдон устида  $V$  чизикли фазода киритилган амалларга нисбатан чизикли фазо ташкил этади.

**Теорема-1.** 1)  $V'$  фазо  $V$  чизикли фазонинг қисм фазоси бўлса  $\dim V' \leq \dim V$  бўлади.

2) Агар  $V'$  ва  $V''$  лар  $V$  чизикли фазонинг қисм фазолари ва  $V' \subset V''$  бўлса  $\dim V' \leq \dim V''$  булади. Бундан ташқари охирги



тенгсизликда тенглик бўлиши учун  $V' = V''$  тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

*Исбот.* 1) Агар  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  тизим  $V'$  да чизиқли эркили бўлса, у  $V$  да ҳам чизиқли эркили бўлади. Шунинг учун  $\dim V' \leq \dim V$  бўлади.

2)  $V' \subset V''$  бўлсин. Бу ҳолда  $V'$  фазо  $V''$  нинг қисм фазоси бўлади ва шунинг учун  $\dim V' \leq \dim V''$  бўлади.

Агар  $V' = V''$  бўлса, равшанки  $\dim V' = \dim V''$ .

$\dim V' = \dim V'' = m$  бўлсин.  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  тизим  $V'$  нинг базиси бўлсин.  $V' \subset V''$  бўлгани учун  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  тизим  $V''$  да ҳам чизиқли эркили бўлади. Уни  $V''$  нинг базисига таъдиллаш.  $\dim V' = \dim V'' = m$  бўлгани учун  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  тизим  $V''$  нинг базиси бўлади. Демак,  $V''$  фазо  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  тизимнинг чизиқли комбинацияларидан иборат.  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  тизим  $V'$  нинг базиси бўлгани учун  $V'' \subset V'$  бўлади. Шундай қилиб  $V' = V''$ .

*Теорема исботланди.*

$V$  фазонинг ихтиёрий  $M$  қисм тўпламини оламиз.  $L_M$  орқали  $M$  дан олинган векторлар орқали чизиқли ифодаланган барча векторлар тўпламини белгилаймиз. Бу тўплам  $M$  тўпламнинг чизиқли қобиғи дейилади.  $L_M$  тўплам  $V$  нинг қисм фазоси бўлади ва  $\dim L_M = \dim M$ .

Бундан кейин биз  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларнинг чизиқли қобиғини қуйидагича белгилаймиз  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ .

$V_1$  ва  $V_2$  қисм фазолар берилган бўлсин.

**Лемма-1.** Қисм фазоларнинг қесишмаси доим қисм фазо бўлади.

*Исбот.* Агар  $\lambda, \mu \in F$  ва  $x, y \in V_1 \cap V_2$  бўлса, у ҳолда  $\lambda x + \mu y \in V_1$  ва  $\lambda x + \mu y \in V_2$  бўлади. Демак  $\lambda x + \mu y \in V_1 \cap V_2$ . *Лемма исботланди.*

**Изох.** Қисм фазоларнинг тўплам сифатидаги  $V_1 \cup V_2$  йиғиндиси умуман олганда қисм фазо бўлмайди.

**Таъриф-2.** Барча ушбу  $x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$  кўринишдаги йиғиндиларидан тузилган тўплам  $V_1$  ва  $V_2$  қисм фазоларнинг йиғиндиси деб айтилади ва  $V_1 + V_2$  кўринишда белгиланади.

**Лемма-2.** Қисм фазоларнинг йиғиндиси доим қисм фазо бўлади.

*Исбот.* Агар  $\lambda, \mu \in F$  ва  $x, y \in V_1 + V_2$  бўлса,  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2; x_1, y_1 \in V_1, x_2, y_2 \in V_2$  эканлигидан

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in V_1 + V_2$$

бўлиши келиб чиқади. *Лемма исботланди.*

**Теорема-2.** Агар  $V$  чизиқли фазо,  $V_1$  ва  $V_2$  чекли ўлчамли қисм фазолар бўлса  $V_1 + V_2$  ҳам чекли ўлчамли ва ҳамда

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

тенглик ўринли бўлади.

*Исбот.*  $V_1 \cap V_2$  қисм фазонинг базиси  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  бўлсин. Ушбу базисни  $V_1$  ва  $V_2$  қисм фазоларнинг базисларигача тўлдириш мумкин.  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  ва  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизимлар мос равишда  $V_1$  ва  $V_2$  ларнинг базислари бўлсин.  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизимни  $V_1 + V_2$  нинг базиси эканлигини кўрсатамиз. Бу векторлар чизиқли эркили. Ҳақиқатдан ҳам агар

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_n f_n + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + \dots + \nu_m g_m = 0$$

бўлса,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_n f_n = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \dots - \nu_m g_m$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликнинг чап томони  $V_1$  нинг вектори, ўнг томони  $V_2$  нинг вектори бўлгани учун бу векторларнинг иккаласи ҳам  $V_1 \cap V_2$  қисм фазога тегишли бўлади. Шунинг учун

$$-v_1g_1 - v_2g_2 - \dots - v_mg_m = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ke_k,$$

демак  $\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ke_k + v_1g_1 + v_2g_2 + \dots + v_mg_m = 0$ . Бу тенгликда

$\{e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизимининг чизиқли эрки эканлигидан

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = v_1 = v_2 = \dots = v_m = 0$ . Охирги муносабатлардан

$\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \dots + \lambda_ke_k + \mu_1f_1 + \mu_2f_2 + \dots + \mu_nf_n = 0$  тенгликни оламиз. Бундан

$\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  тизим чизиқли эркили бўлгани учун

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$$

бўлади. Демак,  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизим чизиқли эрки.

Энди  $x \in V_1 + V_2$  вектор бу тизим орқали чизиқли ифодаланишини исботлаймиз. Ҳар бир  $x \in V_1 + V_2$  вектор  $x = x_1 + x_2$ ;  $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$  кўринишга эга.  $x_1 \in V_1$  вектор  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  тизим орқали ва  $x_2 \in V_2$  вектор  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизим орқали ифодаланади. Демак  $x \in V_1 + V_2$  вектор  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизим орқали чизиқли ифодаланади. Шундай қилиб  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_m\}$  тизим  $V_1 + V_2$  фазонинг базиси. Бундан

$$\dim(V_1 + V_2) = k + n + m = (k + n) + (k + m) - k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

*Теорема исботланди.*

**Таъриф-3.** Агар ҳар қандай  $x \in V_1 + V_2$  вектор  $x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$  кўринишда ягона усул билан ифодаланса,  $V_1$  ва  $V_2$  қисм фазоларнинг

йиғиндиси тўғри йиғинди дейилади ва  $V_1 \oplus V_2$  кўринишда белгиланади.

**Теорема-3.**  $V_1$  ва  $V_2$  қисм фазоларнинг йиғиндиси тўғри йиғинди бўлиши учун  $V_1 \cap V_2$  қисм фазо ноль фазо бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.*  $V_1 \oplus V_2$  тўғри йиғинди ва  $x \in V_1 \cap V_2$ ,  $x_1 \in V_1$ ,  $x_2 \in V_2$  бўлсин.

У ҳолда  $x_1 + x \in V_1$ ,  $x_2 - x \in V_2$  ва ушбу  $x_1 + x_2 = (x_1 + x) + (x_2 - x)$  тенгликдан  $V_1 \oplus V_2$  тўғри йиғиндиллигига асосан  $x_1 = (x_1 + x)$  бўлади. Бундан  $x = \bar{0}$  эканлиги келиб чиқади. Демак  $V_1 \cap V_2$  нол фазо.

Энди  $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$  бўлсин. У ҳолда

$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ,  $x_1, y_1 \in V_1$ ,  $x_2, y_2 \in V_2$  тенгликдан  $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$  тенгликка эга бўламиз. Бу ерда  $x_1 - y_1 \in V_1$ ;  $y_2 - x_2 \in V_2$  эканлигини назарга олган ҳолда  $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$ . Демак,  $x_1 = y_1$ ;  $y_2 = x_2$  ва  $x_1, y_1 \in V_1$ ,  $x_2, y_2 \in V_2$  векторлар ихтиёрий бўлганлиги учун  $V_1 + V_2$  йиғинди тўғри йиғинди бўлади. *Теорема исботланди.*

### Назарий саволлар.

1. Қисм фазонинг ўлчами ҳақидаги теоремани исботланг.
2. Чизиқли фазо қисм фазоларининг устма-уст тушишлик критерияси.
3. Қисм фазоларнинг кесишмаси қисм фазо бўлишини исботланг.
4. Қисм фазоларнинг йиғиндиси қисм фазо бўлишини исботланг.
5. Қисм фазоларнинг йиғиндиси ўлчами ҳақидаги теоремани исботланг.
6. Қисм фазоларнинг йиғиндиси тўғри йиғинди бўлишлиги критериясини исботланг.

## **Таянч тушунчалар.**

1. Қисм фазо.
2. Қисм фазоларнинг кесишмаси ва йиғиндиси.
3. Қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси.
4. Қисм фазолар йиғиндисининг ўлчами ҳақидаги теорема.

## **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

### Маъруза №3.

#### Бичизиқли ва квадратик формалар.

##### Режа:

1. Бичизиқли формалар.
2. Квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтириш.
3. Ҳақиқий квадратик формалар.

#### 1. Бичизиқли формалар.

$F$  майдон устида  $V$  чизиқли фазо берилган бўлсин.

**Таъриф-1.** Агар икки вектор аргументли скаляр  $\varphi(x, y)$  функция  $\varphi: V^2 \rightarrow F$  ҳар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса, яъни

- 1) ҳар қандай  $x_1, x_2 \in V$  ва  $\lambda, \mu \in F$  учун

$$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \mu \varphi(x_2, y);$$

- 2) ҳар қандай  $y_1, y_2 \in V$  ва  $\lambda, \mu \in F$  учун

$$\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$$

шартлар бажарилса, бу функцияга бичизиқли форма (функция, функционал) дейилади.

Энди  $\dim V = n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  тизим  $V$  даги базис, бу базисда  $x$  ва  $y$  векторларнинг координаталари мос равишда  $\xi_1, \dots, \xi_n$  ва  $\eta_1, \dots, \eta_n$  бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{k=1}^n \eta_k e_k\right) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

бу ерда  $a_{ik} = \varphi(e_i, e_k)$ .

Бу  $a_{ik}$  скалярлар  $\varphi(x, y)$  бичизиқли форманинг берилган базисдаги коэффициентлари,  $A = (a_{ik}) = (\varphi(e_i, e_k)) \in F^{n \times n}$  эса матрицаси

дейилади. Шундай қилиб, берилган базисда бичизиқли формалар ва квадрат матрицалар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди.

Энди базис ўзгарганда бичизиқли форманинг матрицаси қандай ўзгаришини текшираимиз. Агар  $V$  да бошқа  $f_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} e_i, k = 1, 2, \dots, n$  базис олинган бўлса,  $\varphi(x, y)$  бичизиқли форманинг янги базисдаги матрицасини  $B = (\beta_{ik})$  орқали белгилаб, унинг элементлари учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\begin{aligned} \beta_{ik} &= \varphi(f_i, f_k) = \varphi\left(\sum_{p=1}^n \gamma_{pi} e_p, \sum_{q=1}^n \gamma_{qk} e_q\right) = \\ &= \sum_{p,q=1}^n \gamma_{pi} \gamma_{qk} \varphi(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^n \gamma_{ip}^T a_{pq} \gamma_{qk}. \end{aligned}$$

Бу тенглик  $B = C^T A C$  эканлигини кўрсатади, бу ерда  $C = (\gamma_{ik})$ -биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси.  $C$  матрица доим махсусмас бўлгани учун матрицанинг ранги махсусмас матрицага кўпайтирганда ўзгармаганлиги учун  $A$  ва  $B$  матрицаларнинг ранги тенг. Уларнинг ранги бичизиқли форманинг ранги дейилади.

**Таъриф-2.** Агар ҳар қандай  $x, y \in V$  векторлар учун  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  тенглик бажарилса, бу бичизиқли форма симметрик дейилади.

**Лемма-1.** Симметрик бичизиқли форманинг матрицаси ҳар қандай базисда симметрик.

*Исбот.*

$$a_{ik} = \varphi(e_i, e_k) = \varphi(e_k, e_i) = a_{ki}.$$

*Лемма исботланди.*

Ушбу лемманинг тескараси ҳам ўринли бўлади, яъни агар бичизиқли форманинг бирор базисдаги матрицаси симметрик бўлса ушбу бичизиқли форма ҳам симметрик бўлади.

**Таъриф-3.**  $\varphi(x, y)$  симметрик бичизиқли форма ёрдамида ҳосил бўладиган  $q(x) = \varphi(x, x)$  функция квадратик форма дейилади.

**Лемма-2.** Ихтиёрий симметрик бичизиқли форма ўзининг квадратик формаси орқали ўзаро бир қийматли аниқланади.

*Исбот.*

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y),$$

шунинг учун

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

*Лемма исботланди.*

**Таъриф-4.** Квадратик формани ҳосил қилувчи ягона симметрик бичизиқли форманинг матрицасига квадратик форманинг матрицаси дейилади.

## 2. Квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтириш.

$q(x) = \varphi(x, x)$  квадратик формани  $x$  векторнинг координаталари орқали ифодалаш базисга боғлиқ эканини биз биламиз. Бу бўлимда биз квадратик формани квадратлар йиғиндисига қандай қилиб келтиришни, яъни квадратик формани

$$q(x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2,$$

содда кўринишга келтирадиган базисни қандай қилиб танлашни кўрсатамиз.

Квадратик форманинг  $f_1, f_2, \dots, f_n$  базисдаги  $A = (a_{ik}) = (\varphi(f_i, f_k))$  матрицасининг барча бурчакли



$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

минорлари нолдан фарқли бўлсин. Белгилашга асосан

$$q(x) = \varphi(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k.$$

Бизнинг мақсадимиз -  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларни шундай аниқлашки, бунда

$$\varphi(e_i, e_k) = 0 \quad \text{агар} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Уларни

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} f_1, \\ e_2 &= \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2, \\ &\dots, \\ e_n &= \alpha_{n1} f_1 + \alpha_{n2} f_2 + \dots + \alpha_{nn} f_n \end{aligned} \quad (3)$$

кўринишда излайлик. Агар

$$\varphi(e_k, f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

бўлса,  $\varphi(e_k, e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$  бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (3)

тенгликларга асосан

$$\begin{aligned} \varphi(e_k, e_i) &= \varphi(e_k, \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \dots + \alpha_{ii} f_i) = \\ &= \alpha_{i1} \varphi(e_k, f_1) + \alpha_{i2} \varphi(e_k, f_2) + \dots + \alpha_{ii} \varphi(e_k, f_i) \end{aligned}$$

бўлади. Шундай қилиб, агар ҳар қандай  $k$  ва  $i < k$  учун  $\varphi(e_k, f_i) = 0$  тенглик бажарилса,  $i < k$  учун  $\varphi(e_k, e_i) = 0$  бўлади. Демак, бичизиқли форманинг симметриклигига асосан охириги тенглик  $i > k$  лар учун ҳам ўринли. Яъни  $e_1, e_2, \dots, e_n$  - изланаётган базис.

Юқоридагидан равшанки бизнинг мақсадимиз қуйдагича:

$\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk}$  коэффицентларни шундай аниқлаш керакки

вектор

$$\varphi(e_k, f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \quad (4)$$

шартларни қаноатлантирсин.

$e_k$  вектор ушбу шартлар билан ўзгармас кўпайтувчига аниқланади. Бу кўпайтувчини

$$\varphi(e_k, f_k) = 1 \quad (5)$$

тенглик ёрдамида аниқлаймиз.

(4) ва (5) га  $e_k$  нинг ифодасини қўйиб  $\alpha_{ki}$  га нисбатан қуйидаги чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{k1}\varphi(f_1,f_1)+\alpha_{k2}\varphi(f_1,f_2)+...+\alpha_{kk}\varphi(f_1,f_k)=0, \\ \alpha_{k1}\varphi(f_2,f_1)+\alpha_{k2}\varphi(f_2,f_2)+...+\alpha_{kk}\varphi(f_2,f_k)=0, \\ ..... \\ \alpha_{k1}\varphi(f_{k-1},f_1)+\alpha_{k2}\varphi(f_{k-1},f_2)+...+\alpha_{kk}\varphi(f_{k-1},f_k)=0, \\ \alpha_{k1}\varphi(f_k,f_1)+\alpha_{k2}\varphi(f_k,f_2)+...+\alpha_{kk}\varphi(f_k,f_k)=1. \end{array} \right. \quad (6)$$

Маълумки ушбу тенгламалар системасининг  $\Delta_k$  детерминанти  
нолдан фаркли. Шундай қилиб  $e_k$  ларни топиш масаласи ечилди.

Энди  $q(x) = \varphi(x, x)$  квадратик формани  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базисдаги  $b_{ik}$  коэффициентларини топамиз. Таърифга асосан  $b_{ik} = \varphi(e_i, e_k)$ . Иккинчи тарафдан базиснинг ясашишига кўра  $\varphi(e_i, e_k) = 0$  агар  $i \neq k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ), шунинг учун  $b_{ik} = 0$  агар  $i \neq k$ . Бундан ташқари (4) ва (5) га асосан

$$b_{kk} \equiv \varphi(e_k, e_k) = \alpha_{k1} \varphi(e_k, f_1) + \alpha_{k2} \varphi(e_k, f_2) + \dots + \alpha_{kk} \varphi(e_k, f_k) = \alpha_{kk}.$$

## Шүнинг учун Крамер қоидасига кўра

$$b_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Биз кўрган базисда квадратик форма

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \xi_n^2,$$

каноник кўринишга эга бўлади.

Квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтиришнинг бундай усулига Якоби усули дейилади.

### 3. Ҳақиқий квадратик формалар.

Коэффициентлари ҳақиқий сонлар майдонидан олинган квадратик формалар ҳақиқий квадратик формалар дейилади.

**Таъриф-5.** Агар ҳар қандай нолдан фарқли  $x$  вектор учун  $q(x) > 0$  ( $q(x) < 0$ ) тенгсизлик бажарилса,  $q(x)$  ҳақиқий квадратик форма мусбат (манфий) дейилади.

Сильвестр критерияси деб аталувчи қуйидаги теорема квадратик форманинг мусбат аниқланганлигига жавоб беради.

**Теорема-1.**  $A$ -матрица  $q(x)$  квадратик форманинг бирор базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда  $q(x)$  квадратик форманинг мусбат бўлиши учун  $A$  матрицанинг барча бурчак минорлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.*  $q(x)$  квадратик форманинг мусбат бўлсин.  $A$  матрицанинг  $k$ -бурчак минорини оламиз:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \dots & \varphi(e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(e_k, e_1) & \dots & \varphi(e_k, e_k) \end{vmatrix},$$

бу ерда  $\varphi(x, y)$ -шундай симметрик бичизикли формаки,  $q(x) = \varphi(x, x)$ . Бу минорнинг сатрлари чизикли эркили эканлигини кўрсатамиз. Бундан минорнинг нолдан фарқлилиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, бу минорнинг сатрларини  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in R$  сонларга кўпайтириб, нол векторга тенглаймиз:

$$\lambda_1 \varphi(e_1, e_i) + \lambda_2 \varphi(e_2, e_i) + \dots + \lambda_k \varphi(e_k, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Бундан

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Бу муносабатдан эса

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = q\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right) = 0,$$

тенгликни оламиз. Бу ердан квадратик форманинг мусбатлигига асосан

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0,$$

тенгликка эга бўламиз.  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  тизим чизикли эркилигига асосан  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$  тенгликни оламиз. Бу эса  $\Delta_k$  минор сатрларининг чизикли эркилигини кўрсатади. Демак  $\Delta_k$  лар нолдан фарқли.  $a_{11} > 0$  деб ҳисоблаб, Якоби усулига асосан квадратик форма мусбат бўлганлиги учун  $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Аксинча  $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$  тенгсизликлардан Якоби усулига асосан квадратик форманинг мусбатлигига эга бўламиз.

*Теорема исботланди.*

Қуйидаги теорема квадратик формаларнинг инерция қонуни дейилади.

**Теорема-2.** Ҳақиқий квадратик форманинг ихтиёрий каноник шаклидаги мусбат ва манфий коэффициентлар сони базисни танлашга боғлиқ эмас.

*Исбот.* Ҳақиқий  $q(x)$  квадратик форманинг иккита  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ва  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  каноник шаклга келтирувчи базис берилган бўлиб,  $q(e_1), q(e_2), \dots, q(e_n)$  сонларнинг  $p$  таси мусбат,  $q(f_1), q(f_2), \dots, q(f_n)$  сонларнинг  $r$  таси мусбат бўлсин. Аниқлик учун

$$q(e_k) = \begin{cases} > 0, & \text{агар } k = 1, 2, \dots, p, \\ \leq 0, & \text{агар } k = p+1, p+2, \dots, n, \end{cases}$$

ва

$$q(f_k) = \begin{cases} > 0, & \text{агар } k = 1, 2, \dots, r; \\ \leq 0, & \text{агар } k = r+1, r+2, \dots, n \end{cases}$$

бўлсин.

Фараз қилайлик  $p > r$  бўлсин.  $V_1$  орқали  $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  тизимнинг чизиқли қобиғини ва  $V_2$  орқали  $\{f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n\}$  тизимнинг чизиқли қобиғини белгилаймиз. Бу тизимлар чизиқли эркин бўлганлиги учун  $\dim V_1 = p$ ,  $\dim V_2 = n - r$ .

Бундан

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cup V_2) \geq p + (n - r) - n = p - r > 0.$$

Бунга кўра нолдан фарқли  $x \in V_1 \cap V_2$  вектор мавжуд, яъни

$$x = \sum_{i=1}^p \xi_i e_i = \sum_{j=r+1}^n \eta_j f_j.$$

$$\text{Демак, } q(x) = \sum_{i=1}^p q(e_i) \xi_i^2 > 0. \text{ Иккинчи томондан } q(x) = \sum_{j=r+1}^n q(f_j) \eta_j^2 \leq 0.$$

Ушбу зиддият  $p \leq r$  тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатади. Худди

шундай  $r \leq p$  тенгсизлик ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.  
Демак  $p = r$ .

Энди юқорида келтирилган мулоҳозани  $(-q)$  квадратик формага қўллаб,  $q$  квадратик форманинг каноник базисдаги манфий коэффициентлар сони базис танлашга боғлиқ эмаслигини кўрсатиш мумкин.

*Теорема исботланди.*

### **Назарий саволлар.**

1. Ихтиёрий симметрик бичизиқли форма ўзининг квадратик формаси ёрдамида бир қийматли аниқланишини кўрсатинг.

2. Квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтиришнинг Якоби усулини асослаб беринг.

3. Квадратик форманинг мусбатлигини аниқловчи Сильвестр критериясини исботланг.

4. Квадратик формалар учун инерция қонунини исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Бичизиқли форма.
2. Бичизиқли форманинг матрицаси.
3. Симметрик бичизиқли форма.
4. Квадратик форма.
5. Квадратик форманинг матрицаси.
6. Квадратик формани квадратлар йиғиндисига келтириш.
7. Сильвестр критерияси.
8. Инерция қонуни.

**Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №4.

### Чизиқли акслантиришлар ва изоморфизм.

#### Режа:

1. Чизиқли акслантиришлар.
2. Чизиқли фазоларнинг изоморфизми.

#### 1. Чизиқли акслантиришлар.

$F$  майдон устида  $V$  ва  $W$  чизиқли фазолар берилган бўлсин.

**Таъриф-1.** Агар  $f : V \rightarrow W$  акслантириш ушбу

- 1) ҳар қандай  $x, y \in V$  учун  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,
- 2) ҳар қандай  $\lambda \in F$  учун  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  шартларни қаноатлантирса, у чизиқли дейилади.

**Таъриф-2.** Ушбу  $f(x) = 0$  тенгликни қаноатлантирувчи  $x \in V$  векторлар тўплами  $f$  акслантиришнинг негизи (ядроти) дейилади ва  $\text{Ker } f$  деб белгиланади.

**Таъриф-3.** Ушбу  $f(V) = \{f(x), x \in V\} \subseteq W$  тўплами  $f$  акслантиришнинг акси (образи) дейилади ва  $\text{Im } f$  деб белгиланади.

$\text{Ker } f$  ва  $\text{Im } f$  ларнинг  $V$  чизиқли фазонинг қисм фазоси бўлиши бевосита текширилади.

**Теорема-1.**  $V$  чизиқли фазонинг ўлчами  $n$  га тенг бўлиб  $f : V \rightarrow W$  чизиқли акслантириш бўлсин, у ҳолда

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = n$$

тенглик ўринли бўлади.

*Исбот.*  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  векторлар тизими  $\text{Ker } f$  қисм фазонинг базиси бўлсин. Ушбу базисни  $V$  чизиқли фазонинг базисига



тўлдирамиз.  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  тизим  $V$  чизиқли фазонинг базиси бўлсин.  $\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$  тизим  $\text{Im } f$  қисм фазонинг базиси эканлигини кўрсатамиз. Бу векторлар чизиқли эркли. Ҳақиқатан ҳам, агар

$\lambda_{k+1}f(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(e_n) = \bar{0}$  бўлса,  $f: V \rightarrow W$  чизиқли акслантириш бўлгани учун  $f(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = \bar{0}$  бўлади. Демак,  $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \text{Ker } f$ . Бу ердан  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  тизим  $\text{Ker } f$  нинг базиси бўлгани учун  $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \dots - \lambda_n e_n$ . Охирги тенгликдан

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  тизим  $V$  чизиқли фазонинг базиси бўлгани учун  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ . Хусусан,  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ .

Энди  $y \in \text{Im } f$  вектор бу тизим орқали чизиқли ифодаланишини исботлаймиз.

$$y = f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_k f(e_k) + x_{k+1} f(e_{k+1}) + \dots + x_n f(e_n).$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  тизим  $\text{Ker } f$  қисм фазонинг базиси бўлгани учун  $f(e_1) = \dots = f(e_k) = 0$ . Шунинг учун  $y = x_{k+1} f(e_{k+1}) + \dots + x_n f(e_n)$ .

Демак,  $\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$  тизим  $\text{Im } f$  қисм фазонинг базиси ва  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = k + (n - k) = n$ . Теорема исботланди.

## 2. Чизиқли фазоларнинг изоморфизми.

**Таъриф-4.** Агар  $f: V \rightarrow W$  акслантириш ушбу:

- 1)  $f: V \rightarrow W$  - биектив акслантириш.
- 2) ҳар қандай  $x, y \in V$  учун  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,

3) ҳар қандай  $\lambda \in F$  учун  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  шартларни қаноатлантирса, у изоморфизм дейилади.

**Натижа-1.** Агар  $f: V \rightarrow W$  акслантириш изоморфизм бўлса, у ҳолда  $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ . Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий  $x \in V$  учун  $\lambda = 0$  деб олсак кўрсатиш керак бўлган тенгликка эга бўламиз. Бундан кейин биз  $V, W$  чизиқли фазоларнинг нолларини  $\bar{0}_V$  ва  $\bar{0}_W$  деб белгилаймиз.

**Натижа-2.** Изоморфизм таъсирида чизиқли эркли векторлар чизиқли эркли векторларга ўтади. Ҳақиқатдан ҳам агар  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -чизиқли эркли тизим бўлса, у ҳолда

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \bar{0}_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Шунинг учун биринчи натижага асосан

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n) = \bar{0}_W \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

ёки

$$\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \dots + \lambda_n f(a_n) = \bar{0}_W \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Бу тенглик эса  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$  векторларнинг чизиқли эрклилигини билдиради.

**Таъриф-5.** Агар иккита чизиқли фазолар орасида изоморфизм мавжуд бўлса, фазолар изоморф дейилади.

**Теорема-2.** Чекли ўлчамли чизиқли фазолар изоморф бўлиши учун уларнинг ўлчамлари тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.*  $\dim V = \dim W = n$  бўлсин.  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  тизим  $V$  чизиқли фазонинг базиси,  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  тизим эса  $W$  чизиқли фазонинг базиси бўлсин. Ҳар бир  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$  да  $f(x) = x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n$  қонуният асосида акслантириш киритамиз. Ҳар бир чизиқли фазонинг вектори

шу фазонинг базиси орқали ягона равишда ифодаланишини ҳисобга олсак, ушбу акслантириш биекция бўлади. Иккинчи тарафдан

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n + y_1e_1 + \dots + y_ne_n) = \\ &= f((x_1+y_1)e_1 + \dots + (x_n+y_n)e_n) = (x_1+y_1)e'_1 + \dots + (x_n+y_n)e'_n = \\ &= x_1e'_1 + \dots + x_ne'_n + y_1e'_1 + \dots + y_ne'_n = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Худди шундай  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  тенгликни кўрсатиш мумкин. Демак, биз кўрган акслантириш изоморфизм бўлади. Натижада  $V$  ва  $W$  чизиқли фазолар изоморфлиги келиб чиқади.

$V$  ва  $W$  чизиқли фазолар изоморф бўлсин. Демак, улар орасида  $f: V \rightarrow W$  изоморфизм мавжуд.  $\dim V = n$  бўлсин, яъни  $V$  да чизиқли эркли бўлган  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  тизим мавжуд бўлиб, ихтиёрий  $n+1$  вектордан ташкил топган тизим чизиқли боғлиқ бўлсин. Изоморфизм чизиқли эрклиликни сақлагани учун  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$  векторлар чизиқли эркли бўлади ва ихтиёрий  $n+1$  вектордан ташкил топган тизим чизиқли боғлиқ бўлади. Демак  $\dim W = n$ .

*Теорема исботланди.*

### **Назарий саволлар.**

1.  $\dim(Ker f) + \dim(Im f) = n$  формулани исботланг, бу ерда  $n$  сони  $V$  чизиқли фазонинг ўлчами.
2. Изоморфизм чизиқли эркли векторларни чизиқли эркли векторларга ўтказишини исботланг.
3. Чекли ўлчамли чизиқли фазоларнинг изоморфлиги ҳақидаги теоремани исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Чизиқли акслантириш.
2. Чизиқли акслантиришнинг негизи (ядроти).
3. Чизиқли акслантиришнинг акси (образи).
4. Изоморфизм.
5. Чизиқли фазоларнинг изоморфизми.

### **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиёв Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №5.

### Чизиқли операторлар ва уларнинг матрицалари.

#### Режа:

1. Чизиқли операторнинг матрицаси.
2. Базис ўзгарганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариш қонуни.
3. Чизиқли операторнинг тескариланувчанлик критерияси.

**Таъриф-1.** Чизиқли фазонинг ўзини ўзига чизиқли акслантириши чизиқли оператор деб аталади.

$f: V \rightarrow V$  чизиқли оператор бўлиб,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  тизим  $V$  чизиқли фазонинг базиси бўлсин.  $\text{Im } f$  қисм фазо бўлгани учун

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ f(e_{n1}) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned}$$

**Таъриф-1.** Қуйидаги

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица  $f$  чизиқли операторнинг  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базисдаги матрицаси дейилади.

**Теорема-1.**  $f: V \rightarrow V$  чизиқли оператор ва  $y = f(x)$  бўлсин. У ҳолда  $Y = AX$  тенглик ўринли бўлади, бу ерда  $X$  ва  $Y$  лар мос равишда  $x$  ва  $y$  векторларнинг  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базисдаги координаталаридан тузилган вектор-устунлар.

*Исбот.* Таърифга асосан  $f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$ , шунинг учун

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i\right) e_k.$$

Демак,  $y_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$ , ёки  $Y = AX$ . *Теорема исботланди.*

**Теорема-2.**  $A$  ва  $A'$  лар мос равишда  $f: V \rightarrow V$  чизикли операторнинг  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ва  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  базислардаги матрицалари бўлса,  $A' = C^{-1}AC$  матрицавий тенглик ўринли бўлади. Бу ерда  $C$  -  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базисдан  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  базисга ўтиш матрицаси.

*Исбот.* Олдинги теоремага асосан  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базида

$$Y = AX. \quad (1)$$

Иккинчи тарафдан  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  базисда

$$Y' = A'X'. \quad (2)$$

Бир базисдан иккинчи базисга ўтишда вектор координаталарининг ўзгариш формуласига асосан  $X = CX'$  ва  $Y = CY'$ . Шунинг учун (1) тенгликка асосан

$$Y = CY' = AX = ACX'$$

ёки  $CY' = ACX'$ . Бу ердан  $Y' = C^{-1}ACX'$  матрицавий тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни (2) билан солиштириб  $A' = C^{-1}AC$  тенгликка эга бўламиз. *Теорема исботланди.*

**Таъриф-2.**  $f$  чизикли операторнинг детерминанти деб унинг  $A$  матрицасининг детерминантига айтилади.

**Изох.** Ушбу таъриф тўғри, чунки чизикли операторнинг матрицасининг детерминанти базис танлашга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан ҳам, олдинги теоремага асосан

$$\det A' = \det (C^{-1}AC) = \det (C^{-1})\det (A)\det(C) = \det E \cdot \det A = \det A.$$

**Таъриф-3.**  $f$  чизиқли операторнинг ранги деб унинг  $A$  матрицасининг рангига айтилади.

**Изох.** Ушбу таъриф тўғри, чунки чизиқли операторнинг матрицасининг ранги базис танлашга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан ҳам, олдинги теоремага асосан  $A' = C^{-1}AC$ . Бу ердан матрицалар кўпайтмасининг ранги ҳақидаги теоремага асосан  $\text{rank } A' \leq \text{rank } A$ . Иккинчи тарафдан  $A = D^{-1}A'D$  тенгликка асосан  $\text{rank } A \leq \text{rank } A'$ . Демак  $\text{rank } A' = \text{rank } A$ .

**Таъриф-4.**  $f$  чизиқли операторнинг детерминанти нолдан фарқли бўлса бу оператор махсусмас дейилади.

**Таъриф-5.** Агар  $f: V \rightarrow V$  акслантириш (чизиқли бўлиши шарт эмас) учун шундай  $g: V \rightarrow V$  акслантириш мавжуд бўлсаки,  $fg = gf = e$  – бирлик (айний) акслантириш бўлса,  $g$  акслантириш  $f$  га тескари деб аталади.

Агар  $f$  акслантириш учун тескарисини мавжуд бўлса, у ягона. Ҳақиқатан ҳам, иккита  $g_1, g_2$  тескари акслантириш мавжуд бўлсин:

$$fg_1 = g_1f = e, \quad fg_2 = g_2f = e.$$

У ҳолда  $g_2fg_1 = (g_2f)g_1 = eg_1 = g_1$ .

Иккинчи томондан  $g_2fg_1 = g_2(fg_1) = g_2e = g_2$ . Демак,  $g_1 = g_2$ . Берилган  $f$  акслантиришга тескари  $g$  акслантириш  $g = f^{-1}$  кўринишда белгиланади. Агар  $f$  – чизиқли оператор бўлса, у ҳолда  $f^{-1}$  ҳам чизиқли. Ҳақиқатан ҳам, агар  $x, y \in V$  ихтиёрий вектор бўлса,  $f$  нинг тескарисини мавжуд бўлгани учун шундай ягона  $a, b \in V$  векторлар

мавжудки,  $f(a) = x$ ,  $f(b) = y$ . Бундан  $f$  чизиқли бўлгани учун  $f(a + b) = x + y$ .

Натижада

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}f(a + b) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

Шунга ўхшаш  $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$  хосса исботланади.

**Теорема-3.**  $f : V \rightarrow V$  чизиқли оператор  $n$  ўлчамли  $V$  чизиқли фазода берилган бўлсин. Қуйидаги хоссалар тенг кучли:

- 1)  $f$  - махсусмас.
- 2)  $f$  - тескариланувчи.
- 3) ихтиерий  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базис учун унинг аксларидан тузилган  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  тизим  $V$  нинг базиси бўлади.
- 4) шундай  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базис мавжудки унинг учун аксларидан тузилган  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  тизим  $V$  нинг базиси бўлади.
- 5)  $\text{Im } f = V$  (сюрективлик),
- 6)  $\text{Ker } f = \{0\}$ ,
- 7)  $f$  - инъектив оператор.

*Исбот.* 1)  $\rightarrow$  2).  $f$  - махсусмас бўлганлиги учун унинг  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базисдаги  $A$  матричасига тескари  $B$  матрица мавжуд.  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  базисда  $B$  матрицага эга бўлган оператор  $f$  операторга тескари бўлади. Яъни  $f$  оператор тескариланувчи.

2)  $\rightarrow$  3).  $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$  тизим чизиқли эркилигини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги чизиқли комбинацияни қараймиз

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$



Бу тенгликни иккала тарафига ҳам чизикли бўлган  $f^{-1}$  операторни қўлласак  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  тенгликка эга бўламиз.  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  тизим базис бўлгани учун  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  тенгликка эга бўламиз.

3)  $\rightarrow$  4). Хусусий ҳоли.

4)  $\rightarrow$  5).  $\text{Im } f = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle = V$ .

5)  $\rightarrow$  6).  $\dim(Ker f) = \dim V - \dim(\text{Im } f) = 0$  шунинг учун  $Ker f = \{0\}$ .

6)  $\rightarrow$  7).  $x, y \in V$  бўлиб,  $f(x) = f(y)$  тенглик бажарилсин.  $f$  чизикли бўлгани учун  $f(x - y) = 0$  бўлади. Демак,  $x - y \in Ker f$ .  $Ker f = \{0\}$  бўлгани учун  $x - y = 0$  бўлади ва шунинг учун  $x = y$ . Инъективлик исботланди.

7)  $\rightarrow$  1).  $f$  -инъектив, демак  $Ker f = \{0\}$ .  $\dim(\text{Im } f) = n - \dim(Ker f)$  формулага асосан  $\dim(\text{Im } f) = n$ . Бу ердан  $\text{rank } f = n$ , ёки  $\text{rank } A = n$ . Матрицанинг тартиби  $n \times n$  бўлгани учун  $\det A \neq 0$ . Теорема исботланди.

**Таъриф-6.**  $n$ -чи тартибли  $A$  ва  $B$  квадрат матрицалар ўхшаш дейилади, агар  $A$  ва  $B$  матрицалар учун шундай махсусмас  $n$ -чи тартибли  $C$  матрица топилсаки,  $B = C^{-1}AC$  бўлса.

Иккинчи теоремага асосан чизикли операторларнинг турли базислардаги матрицалари ўхшашдир.

$V$  чизикли фазода  $f$  чизикли оператор ва  $V_1$  қисм фазо шундай бўлсаки, ҳар бир  $x \in V_1$  учун  $f(x) \in V_1$  шарт бажарилса,  $V_1$  қисм фазо  $f$  чизикли операторга нисбатан инвариант деб аталади. Масалан, ҳар бир  $f$  чизикли оператор учун  $\ker f$  ва  $f(V)$  қисм фазолар инвариантдир. Ҳақиқатан ҳам, агар  $x \in \ker f$  бўлса, у ҳолда  $f(x) = \bar{0} \in \ker f$ . Агар  $x \in f(V)$  бўлса, у ҳолда  $f(x) \in f(V)$ , чунки  $x \in V$ .

### **Назарий саволлар.**

1. Чизикли операторни қўллаганда векторнинг координаталарини ўзгариш қонунини келтириб чиқаринг.
2. Базис ўзгарганда чизикли оператор матрицасининг ўзгариш қонунини келтириб чиқаринг.
3. Чизикли операторнинг тескариланувчанлик критериясини исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Чизикли оператор.
2. Чизикли операторнинг матрицаси.
3. Чизикли операторнинг детерминанти.
4. Чизикли операторнинг ранги.
5. Махсусмас оператор.
6. Тескариланувчи оператор.
7. Инвариант қисм фазолар.

### **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизикли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №6.

### Хос вектор ва хос қийматлар.

#### Режа:

1. Чизиқли операторнинг диагоналлашувчилик критерияси.
2. Чизиқли операторнинг хос қиймати.
3. Турли хос қийматларга мос келувчи хос векторларнинг ортогоналлиги.
4. Хос қийматнинг геометрик ва алгебраик карралиги.
5. Гамильтон-Кэли теоремаси.

**Таъриф-1.** Агар чекли ўлчамли чизиқли фазода чизиқли оператор матрицасини диагонал кўринишга келтирадиган базис мавжуд бўлса, бундай чизиқли оператор диагоналлашувчи дейилади.

**Таъриф-2.** Агар нолдан фарқли  $x$  вектор учун шундай  $\lambda \in F$  мавжуд бўлиб,  $f(x) = \lambda x$  тенглик бажарилса,  $x$  вектор  $f$  чизиқли операторнинг хос вектори,  $\lambda$  эса бу хос векторга мос хос қиймат (хос сон) дейилади.

**Теорема-1.** Чекли ўлчамли фазодаги чизиқли операторнинг диагоналлашувчи бўлиши учун унинг хос векторларидан ташкил топган базиси мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.* Чизиқли  $f$  операторнинг диагоналлашувчи, яъни бирор  $\{e_1, \dots, e_n\}$  базисда унинг матрицаси диагонал кўринишда бўлсин:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

У ҳолда  $f(e_k) = \lambda_k e_k, (k=1,2,\dots,n)$ . Демак,  $\{e_1,\dots,e_n\}$  тизим хос векторлардан иборат,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  сонлар эса хос қийматлардан иборат бўлади.

Аксинча  $f(e_k) = \lambda_k e_k, (k=1,2,\dots,n)$  тенгликлардан  $f$  операторнинг  $\{e_1,\dots,e_n\}$  базисдаги матрицаси диагоналлиги ва  $A_f$  билан устма-уст тушиши келиб чиқади. *Теорема исботланди.*

$A$  матрица  $f$  - чизиқли операторнинг бирор базисдаги матрицаси бўлсин.

**Таъриф-3.**  $f$  - чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади деб қуйидаги кўпҳадга айтилади:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

**Изох.** Ушбу таъриф тўғри чунки у базис танлашга боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \det(A' - \lambda E) &= \det(C^{-1}AC - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) = \\ &= \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det(C^{-1})\det(A - \lambda E)\det(C) = \det(A - \lambda E) \end{aligned}$$

булади.

**Теорема-2.**  $\lambda$  сони  $f$  - чизиқли операторнинг хос қиймати бўлиши учун у  $f$  оператор характеристик кўпҳадининг илдизи бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.*  $\lambda$  сони  $f$  - чизиқли операторнинг хос қиймати бўлса, шундай нолдан фарқли  $x$  вектор учун

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x &\Leftrightarrow (f - \lambda e)x = 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda e) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f - \lambda e) < n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{rank}(f - \lambda e) < n \Leftrightarrow \det(f - \lambda e) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

*Теорема исботланди.*

**Натижа.** Чекли ўлчамли комплекс фазода ҳар қандай чизиқли оператор хос векторга эга.

Бу натижада чекли ўлчамлилик шарти муҳим.  $C[t]$  чексиз ўлчамли фазода  $f(x) = tx$  оператор ҳеч қандай хос векторга эга эмас.

Чизиқли оператор учун чизиқли  $V$  фазода хос векторларнинг мавжуд бўлиши, бу фазода бир ўлчамли инвариант қисм фазонинг мавжуд бўлишига тенг кучли. Бунга кўра, чекли ўлчамли комплекс фазода ҳар қандай чизиқли оператор бир ўлчамли қисм фазога эга.

**Теорема-3.** Агар чекли ўлчамли комплекс фазода икки чизиқли  $f$  ва  $g$  операторлар ўрин алмашинувчи (яъни  $fg=gf$ ) бўлса, у ҳолда улар умумий хос векторга эга.

*Исбот.* Чизиқли  $f$  оператор учун  $a$  –хос вектор ва  $\lambda_1$  -унга мос хос сон бўлсин:  $f(a) = \lambda_1 a$ .  $V_1$  фазо  $f - \lambda_1 e$  чизиқли операторнинг ( $e$  бирлик оператор) негизи бўлсин. У нолдан фарқли, чунки  $a \in V_1$ . Агар  $x \in V_1$  бўлса, у ҳолда  $f(x) = \lambda_1 x$  ва  $fg(x) = gf(x) = g(\lambda_1 x) = \lambda_1 g(x)$ .

Бу  $g(x) \in V_1$  эканини кўрсатади. Демак,  $V_1$  чизиқли  $f$  ва  $g$  операторлар учун инвариант. Чизиқли  $g$  операторнинг аниқланиш соҳасини  $V_1$  гача торайтириш натижасида ҳосил бўлган операторни  $g_1$  билан белгилаймиз. Натижага асосан  $g_1$  оператор  $V_1$  да камида битта хос векторга эга. Масалан,  $b \in V_1$  шундай хос вектор бўлсин:  $g(b) = \lambda_2 b$ . Бу вектор  $f$  учун ҳам хос вектор  $f(b) = \lambda_1 b$ , чунки  $b \in V_1$ . *Теорема исботланди.*

**Теорема-4.** Агар сонли  $F$  майдон устидаги  $n$  ўлчамли чизикли фазода аниқланган чизикли операторнинг характеристик кўпҳади  $n$  та турли илдизга эга бўлса, бу оператор диагоналлашувчидир.

*Исбот.* Дастлаб ихтиёрий чизикли фазода чизикли операторнинг турли хос сонларига мос келувчи хос векторларининг чизикли эрки эканлигини кўрсатамиз.

Ушбу  $\{x_1, \dots, x_k\}$  турли хос сонларга мос келувчи хос векторлар бўлсин:  $f(x_i) = \lambda_i x_i$ ,  $(i = \overline{1, k})$ , бу ерда  $i \neq j$  учун  $\lambda_i \neq \lambda_j$ .

Бу тизимнинг чизикли эркилигини  $k$  бўйича математик индукция усулида исботлаймиз. Тасдиқ  $k = 1$  да  $x_1 \neq 0$  (ҳар қандай хос вектор учун) бўлгани учун аён. Тасдиқ  $(k-1)$  та хос векторлар учун ўринли бўлсин деб фараз қиламиз.

Энди  $x_1, \dots, x_k$  векторлар учун  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \bar{0}$  тенглик ўринли бўлсин.

Бу тенгликдан

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i x_i = \bar{0}$$

тенгликни оламиз. Ушбу  $\lambda_k \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i x_i = \bar{0}$  тенгликдан охирги

тенгликни айириб,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = \bar{0}$  тенгликни ҳосил қиламиз.

Индукциянинг фаразига кўра  $x_1, \dots, x_{k-1}$  чизикли эрки. Бунга кўра охирги тенгликдан  $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$ ,  $(i = \overline{1, k-1})$  тенгликларни оламиз.

Хос сонлар турли бўлгани учун  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ ,  $(i = \overline{1, k-1})$ . Бундан ва охирги тенгликлардан  $\alpha_i = 0$ ,  $(i = \overline{1, k-1})$  тенгликларни ҳосил қиламиз.

Булардан ва  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \bar{0}$  тенгликдан  $\alpha_k x_k = \bar{0}$  тенглик келиб чиқади. Хос

вектор  $x_k \neq \bar{0}$  бўлгани учун  $\alpha_k = 0$  бўлади. Демак,  $\alpha_i = 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ). Бу  $x_1, \dots, x_k$  векторларнинг чизиқли эркили эканлигини кўрсатади.

Энди  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  сонлар берилган чизиқли операторнинг хос сонлари,  $e_1, \dots, e_n$  эса бу хос сонларга мос хос векторлари бўлсин. У ҳолда исботланганга кўра  $e_1, \dots, e_n$  векторлар тизими чизиқли эркили бўлиб, бу фазонинг базиси бўлади. Теорема-1 га асосан,  $f$  чизиқли операторнинг бу базисдаги матрицаси диагонал кўринишга эга. *Теорема-4 исботланди.*

$\lambda$  сони  $f$  - чизиқли операторнинг хос қиймати бўлсин.

**Таъриф-4.**  $f(x) = \lambda x$  тенгликни қаноатлантирувчи  $V$  чизиқли фазонинг векторлар тўплами  $f$  - чизиқли операторнинг хос қисм фазоси дейилади ва  $V_\lambda$  деб белгилананади.

Таърифга асосан

$V_\lambda = \{x \in V / f(x) = \lambda x\} = \{x \in V / (f - \lambda)x = 0\} = \text{Ker}(f - \lambda e)$ . Шунинг учун  $V_\lambda$  қисм фазо бўлади.

**Тариф-5.**  $V_\lambda$  нинг ўлчами  $\lambda$  хос қийматнинг геометрик карралиги дейилади.

**Тариф-6.**  $\chi(\lambda)$  кўпхад  $\lambda$  илдизининг карралиги  $\lambda$  хос қийматнинг алгебраик карралиги дейилади.

**Теорема-6.**  $\lambda$  хос қийматнинг геометрик карралиги унинг алгебраик карралигидан катта эмас.

*Исбот.*  $d$  ва  $k$  сонлар мос равишда  $\lambda$  хос қийматнинг геометрик ва алгебраик карраликлари бўлсин. Демак  $\dim V_\lambda = d$ , шунинг учун  $V_\lambda$  да  $\{e_1, \dots, e_d\}$  базис мавжуд. Уни  $V$  нинг  $\{e_1, \dots, e_d, \dots, e_n\}$  базисига

тўлдирамиз. Ушбу базисда операторимизнинг матрицаси қуйидаги кўринишга эга

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda & 0 & 0}^d & & \\ 0 & \dots & 0 & * & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & 0 & & * & \end{pmatrix}.$$

Характеристик кўпхад қуйидаги кўринишга эга  $\chi(t) = \det(A - tE) = (\lambda - t)^d h(t)$ . Шунинг учун  $\chi(t)$  характеристик кўпхад  $(\lambda - t)^d$  га қолдиқсиз бўлинади. Демак  $k \geq d$ . *Теорема исботланди.*

$h(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  кўпхад берилган бўлсин.

**Таъриф-7.**  $h(t)$  кўпхаднинг  $f$  оператордаги қиймати деб қуйидаги операторга айтилади  $h(f) = a_0 e + a_1 f + \dots + a_n f^n$ .

**Теорема-7. (Гамильтон-Кэли)**  $n$  ўлчамли  $V$  чизиқли фазодаги ихтиёрий чизиқли оператор ўзининг характеристик тенгламасининг ечими бўлади.

*Исбот.*  $\chi(t) = \det(A - tE) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  кўпхад чизиқли операторнинг характеристик кўпхади бўлсин.  $B$  орқали  $A - tE$  матрицага қўшилган матрицани белгилаймиз, яъни  $B \cdot (A - tE) = \det(A - tE) \cdot E$ . Охирги тенгликни

$$B \cdot (A - tE) = \chi(t) \cdot E \quad (1)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Таърифига асосан  $B$  матрицани  $B = B_0 + B_1 t + \dots + B_{n-1} t^{n-1}$  кўринишида ёзиш мумкин. (1) тенгликка асосан

$$(B_0 + B_1 t + \dots + B_{n-1} t^{n-1})(A - tE) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)E$$

тенгликка эга бўламиз. Бир хил даражалар олдидаги матрицаларни тенглаймиз:



$$\begin{cases} B_0 A = a_0 E \\ B_1 A - B_0 E = a_1 E \\ B_2 A - B_1 E = a_2 E \\ \dots \\ B_{n-1} A - B_{n-2} E = a_{n-1} E \\ - B_{n-1} E = a_n E \end{cases}.$$

Биринчи тенгликни  $E$  га, иккинчи тенгликни  $A$  га, учинчи тенгликни  $A^2$  га ва шу қонуният бўйича давом қилдириб охирги тенгликни ўнг тарафдан  $A^n$  га кўпайтириб барча тенгликларни қўшамиз. Натижада

$$a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0,$$

тенгликга эга бўламиз. Шундай қилиб  $\chi(A) = 0$ . Бу эса  $\chi(f) = 0$  эканлигини билдиради. *Теорема исботланди.*

### **Назарий саволлар.**

1. Чизиқли операторнинг диагоналлашувчилик критерияси.
2.  $\lambda$  сони чизиқли операторнинг хос қиймати бўлишлик критерияси.
3. Турли хос қийматларга мос келувчи хос векторларнинг ортогонал эканлигини курсатинг.
4. Хос қийматнинг геометрик карралиги унинг алгебраик карралигидан катта бўлмаслигини курсатинг.
5. Гамильтон-Кэли теоремасини исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Хос қиймат.
2. Хос вектор.
3. Характеристик қўпхад.
4. Хос қисм фазо.
5. Хос қийматнинг геометрик карралиги.
6. Хос қийматнинг алгебраик карралиги.

**Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия  
қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №7.

### Евклид фазоси.

#### Режа:

1. Евклид фазосининг таърифи.
2. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак.
3. Коши-Буняковский тенгсизлиги.

#### 1. Евклид фазосининг таърифи.

**Таъриф-1.**  $V$  – ҳақиқий фазо бўлсин. Агар  $x, y \in V$  векторларнинг ҳар бир жуфтига ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса (бу сонни  $(x, y)$  шаклида белгилаймиз) ва шу билан бирга бу мослик қуйидаги тўрт хоссага эга бўлса (шу аксиомаларни қаноатлантирса),  $V$  да скаляр кўпайтма аниқланган дейилади.

1<sup>0</sup>.  $(x, y) = (y, x)$ , яъни скаляр кўпайтма симметрик.

2<sup>0</sup>.  $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ , (бунда  $\lambda$  – ҳақиқий сон)

3<sup>0</sup>.  $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$  скаляр кўпайтманинг дистрибутивлиги).

4<sup>0</sup>. Векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси манфий эмас:  $(x, x) > 0$  ( $x=0$  бўлгандагина бу кўпайтма нолга айланади).

1<sup>0</sup>-4<sup>0</sup> шартларни қаноатлантирувчи скаляр кўпайтма аниқланган аффин фазони биз Евклид фазоси деб атаемиз.

**Мисоллар.** 1.  $V$  фазо векторларини биз  $n$  та ҳар қандай  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ҳақиқий сонлар тизимига айтайлик. Векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амалларини қуйидагича таърифлаймиз.

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n),$$

$$\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n).$$

Ушбу

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ ва } y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

векторларнинг скаляр кўпайтмасини

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n$$

формула билан аниқлаймиз.

$1^0$ - $3^0$  аксиомалар ҳақиқатан ҳам бажарилади, буни текшириб кўриш қийин эмас.  $4^0$  аксиома ҳам ўринлидир, чунки  $(x, x) = \sum \xi_i^2 \geq 0$  ва  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$  бўлган ҳолдагина  $(x, x) = \sum \xi_i^2 = 0$ .

3. 1-мисолга кўра умумийроқ мисолни кўриб чиқайлик. Векторни илгаригича,  $n$  та ҳақиқий сонлар тўплами деб қараймиз. Векторларни кўшиш ва уларни сонга кўпайтиришни 1-мисолдаги каби аниқлаймиз.

Бирор  $\|a_{ik}\|$  матрицани оламиз.  $x$  ва  $y$  векторлар скаляр кўпайтмасини ушбу формула билан аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} (x, y) = & a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \dots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\ & + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \dots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \dots + a_{nn}\xi_n\eta_n + \end{aligned} \quad (1)$$

(1) формула билан аниқланган ифода скаляр кўпайтманинг ҳамма аксиомаларини ҳақиқатан қаноатлантириши учун  $\|a_{ik}\|$  матрицага қандай шартлар қўйиш керак эканлигини кўрайлик.

Ҳар қандай  $\|a_{ik}\|$  матрица учун  $2^0$  ва  $3^0$  аксиомаларнинг бажарилишига тўғридан тўғри текшириш билан ишонамиз.  $1^0$  аксиоманинг бажарилиши учун, яъни  $(x, y)$  ифода  $x$  ва  $y$  га нисбатан симметрик бўлиши учун

$$a_{ik} = a_{kl} \quad (2)$$

бўлиши, яъни  $\|a_{ik}\|$  матрицанинг симметрик бўлиши зарур ва етарлидир.

4<sup>0</sup> аксиома

$$(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \quad (3)$$

ифоданинг ҳар қандай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  лар учун манфий бўлмаслигини ҳамда  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$  бўлгандагина нолга айланишини талаб қиламиз.

Агар (3) формула билан аниқланадиган бир жинсли кўпхад («квадратик форма») фақат манфий бўлмаган қийматларни қабул қилса ва  $\xi_i$  ларнинг ҳаммаси нолга тенг бўлгандагина нолга айланса, у мусбат аниқланган квадратик форма дейилади. Демак, 4<sup>0</sup> аксиома (3) квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлишини талаб қилади.

Шундай қилиб, агар ҳар қандай  $\|a_{ik}\|$  матрица симметрик бўлса (2<sup>0</sup> шарт) ва унга мос квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда бу матрица (1) формула билан аниқланадиган скаляр кўпайтмани тасвирлаб беради.

Агар  $\|a_{ik}\|$  матрица матрица сифатида бирлик матрицани олсак, яъни  $a_{ii} = 1$  ва  $a_{ik} = 0$  ( $i \neq k$ ) деб олсак, у ҳолда  $(x, y)$  скаляр кўпайтма

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$$

кўринишни олади ва биз 1-мисолда аниқланган евклид фазосини ҳосил қиламиз.

4.  $(a, b)$  интервалда берилган узлуксиз функцияларни  $V$  фазонинг векторлари деб атайлик. Бундай функцияларнинг скаляр

кўпайтмаси, бу функциялар кўпайтмасининг интеграли сифатида берамиз:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Скаляр кўпайтмани бундай берилганда  $1^0-4^0$  аксиомалар бажарилади.

5.  $t$  бўйича тузилган ва даражаси  $n-1$  дан ошмайдиган кўпхадларни векторлар деб қабул қиламиз. Икки кўпхад скаляр кўпайтмасини олдинги мисолдаги каби аниқлаймиз.

$$(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt.$$

$1^0-4^0$  аксиомалар тўғрилиги 4-мисолдагидек текширилади.

## 2. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак.

Киритилган скаляр кўпайтма тушунчаси ёрдами билан векторнинг узунлиги, ҳамда векторлар орасидаги бурчаклар ҳақида таърифлар берамиз.

**Таъриф-2.** Евклид фазосида  $x$  векторнинг узунлиги деб

$$\sqrt{(x, x)} \quad (4)$$

сонга айтилади.  $x$  векторнинг узунлигини  $|x|$  билан белгилаймиз.

Векторлар орасидаги бурчак, векторнинг узунлиги ҳамда векторларнинг скаляр кўпайтмалари одатдаги муносабатлар билан боғланган: векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг узунликлари кўпайтмаси билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг. Аммо бу жумладаги «векторлар орасидаги бурчак» сўзларидан ташқари ҳамма сўзларнинг маъноси бизга тушунарли бўлиши учун қуйидаги таърифни берамиз.

**Таъриф-3.**  $x$  ва  $y$  векторлар орасидаги бурчак деб

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

сонга айтамыз, яъни

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \quad (5)$$

деб қабул қиламиз. Агар  $x$  ва  $y$  векторлар орасидаги бурчак  $\frac{\pi}{2}$  га тенг бўлса, яъни

$$(x, y) = 0$$

бўлса,  $x$  ва  $y$  векторлар ортогонал векторлар дейилади.

Кирилган тушунчалар ёрдами билан элементар геометриянинг қатор теоремаларини евклид фазосига кўчириш мумкин.

Бир мисол кўриб чиқайлик. Агар  $x$  ва  $y$  векторлар ортогонал векторлар бўлса,  $u$  ҳолда  $x+y$  векторни томонлари  $x$  ва  $y$  бўлган тўғрибурчак деб ҳисоблаш табиийдир. Энди

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

эканини, яъни тўғри тўртбурчак диагонали узунлигининг квадрати, унинг параллел бўлмаган икки томони узунликлари квадратлари йиғиндисига тенг (Пифагор теоремаси) эканини исбот қилайлик.

*Исбот.* Векторлар узунлиги квадратларининг таърифига мувофиқ:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y)$$

Скаляр кўпайтманинг дистрибутивлигига асосан ( $3^0$  аксиома):

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

$x$  ва  $y$  векторларнинг ортогоналлигидан:

$$(x, y) = (y, x) = 0.$$

Демак,

$$|x + y|^2 = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2,$$

шунини исбот қилиш керак эди.

Бу теоремани умумлаштириш мумкин. Агар  $x, y, z, \dots$  векторлар жуфт-жуфти билан ортогонал бўлса, у ҳолда

$$|x + y + z + \dots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots$$

бўлади.

**3. Коши-Буняковский тенгсизлиги.** Ўтган пунктда биз бир камчиликка йул қўйдик. Биз  $x$  ва  $y$  векторлар орасидаги  $\varphi$  бурчакни

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

формула билан аниқладик.  $\varphi$  ни бу тенгликдан аниқлаш мумкин бўлиши учун:

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq +1$$

ёки, барибир,

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2 \cdot |y|^2} \leq 1,$$

яъни

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \tag{6}$$

эканини исбот қилиш керак. Бу тенгсизлик Коши-Буняковский тенгсизлиги дейилади.

Шундай қилиб, икки вектор орасидаги бурчакни (5) формула билан аниқлаш учун, биз Коши-Буняковский тенгсизлигини исбот қилишимиз керак.



Буни исбот қилиш учун  $x-ty$  векторни қараб чиқайлик, бу ерда  $t$  – ихтиёри ҳақиқий сон. Скаляр кўпайтманинг  $4^0$  аксиомасига асосан:

$$(x-ty, x-ty) \geq 0,$$

ҳар қандай  $t$  учун:

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0$$

Биз кўрамизки, чап томондаги  $t$  га нисбатан квадрат учхад фақат манфий бўлмаган қийматларнигина қабул қилади. Шунинг учун иккита бошқа-бошқа ҳақиқий илдизи бўлиши мумкин эмас (ҳақиқий ҳар хил  $t_1$  ва  $t_2$  илдизларга эга бўлган квадрат учхаднинг кўриниши  $a(t-t_1)(t-t_2)$  бўлади ва демак, ишорасини ўзгартиради). Бинобарин,

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$$

квадрат тенгламанинг дискриминанти мусбат бўла олмайди, яъни

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) = 0$$

бўлади. Шунини исбот қилиш керак эди.

Агар  $a_{ik}$  сонлар (2) ва (3) шартларни қаноатлантирса, у ҳолда ушбу тенгсизлик ўринли бўлади.

$$\left( \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k \right)^2 \leq \left( \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \right) \left( \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \eta_i \eta_k \right)$$

Коши-Буняковский тенгсизлигининг натижаси бўлган тенгсизликка мисол келтирамиз.

**Лемма-1.** *В* евклид фазосида ҳар қандай  $x$  ва  $y$  векторлар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (7)$$

*Исбот.*

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y),$$

аммо (Коши-Буняковский тенгсизлигига асосан)  $2(x, y) \leq 2|x||y|$   
бўлгани учун

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2$$

яъни  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , шуни исбот килиш керак эди.

*Лемма исботланди.*

### **Назарий саволлар.**

1. Евклид фазосида Пифагор теоремасини исботланг.
2. Коши–Буняковский тенгсизлигини исботланг.
3. Учбурчак тенгсизлигини исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

1. Скаляр кўпайтма.
2. Евклид фазоси.
3. Векторнинг узунлиги.
4. Векторлар орасидаги бурчак.
5. Учбурчак тенгсизлиги.

### **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №8.

### Ортогонал базис. Ортогонналаштириш жараени.

#### Режа:

1. Ортогонал базис.
2. Нуқтадан қисм фазога ўтказилган перпендикуляр. Нуқтадан қисм фазогача бўлган энг қисқа масофа.

#### 1. Ортогонал базис.

Евклид фазосида энг қулай базислар борки, улар ортогонал базислардир. Бу ерда улар аналитик геометриядаги тўғри бурчакли координаталар системаси каби роль уйнайди.

**Таъриф-1.** Агар ҳеч бири нолга тенг бўлмаган  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлар жуфт-жуфти билан ортогонал бўлса, у ҳолда улар  $n$  ўлчамли  $V$  евклид фазосидан  $V$  да ортогонал базис ташкил қилади дейилади. Агар  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторлар жуфти-жуфти билан ортогонал бўлиб, ҳар бирининг узунлиги 1 га тенг бўлса, яъни

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (1)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда улар нормалланган ортогонал базис ҳосил қилади дейилади.

Ортогонал базисга биз берган бу таърифнинг тўғри бўлиши учун, таърифга кирган  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларнинг ҳақиқатан ҳам базис ташкил қилишини, яъни улар чизиқли эрки эканлигини исбот қилишимиз зарур.

Буни исбот қиламиз, яъни

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad (2)$$

тенгликнинг  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  бўлсагина ўринли бўлиши мумкин эканлигини кўрсатамиз. (2) тенгликнинг иккала томонини  $e_1$  га скаляр кўпайтирамиз. У ҳолда

$$\lambda_1(e_1, e_1) + \lambda_2(e_1, e_2) + \dots + \lambda_n(e_1, e_n) = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Аммо ортогонал базис таърифига асосан:

$$(e_1, e_1) \neq 0, \quad k \neq 1 \text{ бўлганда } (e_1, e_k) = 0.$$

Демак,  $\lambda_1 = 0$ . Шунга ўхшаш, (2) ни  $e_2$  га скаляр кўпайтириб,  $\lambda_2 = 0$  бўлиши кераклигини топамиз ва ҳакозо. Шундай қилиб, биз  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларнинг чизиқли эрки эканлигини исбот қилдик.

Ортогонал базислар мавжудлигини биз *ортогоналлаш жараёни* деб аталадиган процесс ёрдами билан исбот қиламиз. Бу жараён ихтиёрий  $f_1, f_2, \dots, f_n$  базис бўйича ортогонал  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базис ясаш усулини беради.

**Теорема-1.** Ҳар қандай  $n$  ўлчамли евклид фазосида ортогонал базислар мавжуддир.

*Исбот.*  $n$  ўлчамли фазонинг таърифига мувофиқ унда бирор  $f_1, f_2, \dots, f_n$  базис мавжуддир.  $f_1, f_2, \dots, f_n$  векторлардан ортогоналлаш жараёни ёрдамида жуфт-жуфти билан ортогонал бўлган  $n$  та вектор ясаймиз.

$e_1 = f_1$  бўлсин деб фараз қилайлик.  $e_2$  векторни  $e_2 = f_2 + \alpha e_1$  кўринишда излаймиз.  $\alpha$  сонни шундай танлаб оламизки,  $(e_2, e_1) = 0$ , яъни  $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0$  бўлсин. Бундан

$$\alpha = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

Жуфти-жуфти билан ортогонал бўлган ва нолдан фарқли  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  векторлар ясалган деб фараз қилайлик.  $e_k$  векторни

шаклда излаймиз, яъни  $e_k$  векторни ясалган  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  векторларнинг чизиқли комбинацияси ёрдамида  $f_k$  векторага «тузатиш» киритиш йўли билан ундан ( $f_k$  дан) ҳосил қиламиз.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$  коэффициентларни

вектор билан  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  векторларнинг ортогоналлиги шартидан  
топамиз:

$e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  векторлар жуфт-жуфти билан ортогонал бўлганликлари учун, у тенглиklar ўшбу курунишда ёзилади:

## Булardan

$$\begin{aligned}\lambda_{k-1} &= -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}; \\ \lambda_{k-2} &= -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}; \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_1 &= -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}.\end{aligned}$$

Шу жойга келгунча  $f_1, f_2, \dots, f_n$  векторларнинг чизиқли эркилигидан фойдаланилгани йуқ. Ясалган  $e_k$  векторнинг нолдан фарқли эканиин исбот қилишда бундан фойдаланамиз. Ҳозирча  $e_k$  вектор  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, f_k$  векторларнинг чизиқли комбинацияси эканига эътибор бериб ўтайлик. Аммо  $e_{k-1}$  векторни  $f_{k-1}$  вектор, ҳамда  $e_1, e_2, \dots, e_{k-2}$  векторларнинг чизиқли комбинацияси билан алмаштириш мумкин ва ҳоказо. Шундай қилиб, биз  $e_k$  векторни ушбу кўринишда ёзилишини топамиз:

$$e_k = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1} + f_k. \quad (5)$$

Энди  $e_k \neq 0$  экани равшандир. Ҳақиқатан ҳам, акс ҳолда (5) тенгликнинг ўнг тарафи нолга тенг бўлар эди. Бу эса  $f_1, f_2, \dots, f_{k-1}$  векторларнинг чизиқли эркилигига зид бўлар эди. Шундай қилиб,  $e_k \neq 0$  ҳамда  $f_k$  векторларга кўра  $e_k$  векторни ясадик. Худди шунга ухшаш,  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ҳамда  $f_{k-1}$  ларга кўра  $e_{k+1}$  ни ясаймиз ва ҳакозо.

Бу жараёни берилган  $f_1, f_2, \dots, f_n$  векторлар тамом бўлгунча давом қилдириб, биз нолдан фарқли ва жуфт-жуфти билан ортогонал бўлган  $n$  та  $e_1, e_2, \dots, e_n$  векторларни, яъни ортогонал базисни ҳосил қиламиз. *Теорема исбот бўлди.*

Агар  $e_k$  векторларни

$$e'_k = \frac{e_k}{|e_k|}$$

вектор билан алмаштирсак, у ҳолда бу векторлар узунлиги 1 га тенг бўлган, жуфт-жуфти билан ортогонал векторлар бўлишини кўриш қийин эмас, яъни биз нормалланган ортогонал базис ҳосил қиламиз.

$e_1, e_2, \dots, e_n$  лар  $V$  евклид фазосида ортогонал базис деб фараз қилайлик. Икки вектор скаляр кўпайтмасининг бу базисда ўз координаталари орқали қандай ифода қилинишини топайлик.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  сонлар  $x$  векторнинг,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  сонлар эса  $y$  векторнинг бу базисдаги координаталари бўлсин, яъни

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n.$$

У ҳолда

$$(x, y) = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n),$$

ҳамда

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

бўлгани учун

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n \quad (6)$$

бўлади, яъни нормалланган ортогонал базисда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг мос координаталари, кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

$x$  векторнинг нормалланган ортогонал  $e_1, e_2, \dots, e_n$  базисдаги координаталарини топамиз.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

деб фараз қилайлик. Бу тенгликнинг иккала томонини  $e_1$  га скаляр кўпайтириб,

$$(x, e_1) = \xi_1(e_1, e_1) + \xi_2(e_2, e_1) + \dots + \xi_n(e_n, e_1) = \xi_1$$

эканини ва шунга ўхшаш,

$$\xi_2 = (x, e_2), \dots, \xi_n = (x, e_n) \quad (7)$$

эканини топамиз. Шундай қилиб, нормалланган ортогонал базисда векторнинг координаталари бу вектор билан мос базис векторларининг скаляр кўпайтмасидан иборатдир.

$x$  вектор билан узунлиги 1 га тенг бўлган  $e$  векторнинг скаляр кўпайтмасини  $x$  векторнинг  $e$  вектордаги проекцияси деб аташ табиийдир. Исбот қилинган тасдиқ, аналитик геометриядаги каби, нормалланган ортогонал базисда векторнинг координаталари, бу векторнинг базис векторларига (координаталар ўқларига) туширилган проекцияларидан иборат эканлигини билдиради.

## **2. Нуқтадан қисм фазога ўтказилган перпендикуляр. Нуқтадан қисм фазогача бўлган энг қисқа масофа.**

**Таъриф-2.**  $R_1$  -евклид фазоси ( $V$ ) нинг қисм фазоси бўлсин. Агар  $h \in R$  вектор  $R_1$  фазонинг ҳар қандай  $x$  вектори билан ортогонал бўлса, у ҳолда  $h$  вектор  $R_1$  қисм фазога ортогонал деймиз.

Агар  $h$  вектор  $e_1, e_2, \dots, e_m$  векторлар билан ортогонал бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар қандай чизиқли комбинацияси билан ҳам ортогоналдир. Ҳақиқатан,

$$(h, e_i) = 0$$

тенгликлардан кўринадик,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  сонлар ҳар қандай бўлганда ҳам



$$(h, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m) = 0$$

бўлади. Демак,  $h$  векторнинг  $m$  ўлчамли  $R_1$  қисм-фазо билан ортогонал бўлиши учун, унинг  $R_1$  даги  $m$  та чизиқли эркин вектор билан ( $R_1$  даги базис билан) ортогонал бўлиши етарлидир.

$V$  фазода  $m$  ўлчамли бирор  $R_1$  қисм-фазони ва  $R_1$  га тегишли бўлан  $f$  векторни қараб чиқайлик. Сўнгра бундай масала қўямиз:  $f$  нуқтадан  $R_1$  га перпендикуляр туширилсин, яъни  $R_1$  да шундай  $f_0$  вектор топилсинки,  $h = f - f_0$  векторни яъни вектор  $R_1$  билан ортогонал бўлсин. Бу ҳолда  $f_0$  вектор  $f$  векторнинг  $R_1$  қисм-фазога туширилган ортогонал проекцияси деб аталади. Бу масала ҳамма вақт ечимга эга бўлиб, бу ечимнинг ягона эканлигини биров кейинроқ кўрамиз. Ҳозир биз элементар геометриядаги каби перпендикулярнинг нуқтадан қисм-фазога бўлган энг қисқа масофа эканини кўрсатамиз. Бошқача қилиб айтганда, агар  $f_1$  вектор  $R_1$  даги  $f_0$  дан фарқли вектор бўлса, у ҳолда  $|f - f_1| > |f - f_0|$  эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,  $f_0 - f_1$  вектор  $R_1$  дан олинган икки вектор айирмаси бўлгани учун  $R_1$  га тегишлидир ва шунинг учун,  $h = f - f_0$  вектор билан ортогоналдир. Пифагор теоремасига асосан:

$$|f - f_0|^2 + |f_0 - f_1|^2 = |f - f_0 + f_0 - f_1|^2 = |f - f_1|^2$$

ва демак,  $|f - f_1| > |f - f_0|$ .

Энди  $f$  бўйича унинг қисм-фазога туширилган  $f_0$  ортогонал проекциясини амалда қандай ҳисоблашни (яъни  $f$  дан  $R_1$  га перпендикуляр туширишни) кўрсатамиз.  $R_1$  қисм-фазонинг базиси  $e_1, e_2, \dots, e_m$  векторлардан иборат бўлсин.  $f_0$  векторни

$$f_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m \quad (9)$$

кўринишида излаймиз, бундаги  $c_k$  коэффицентларни  $f - f_0$  нинг  $R_1$  га ортогоналлиги шартидан фойдаланиб топамиз.  $f - f_0$  нинг  $R_1$  га ортогонал бўлиши учун қуйидаги кўринишдаги  $m$  та тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

$$(f - f_0, e_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

яъни

$$(f_0, e_k) = (f, e_k), \quad (10)$$

бундаги  $f_0$  ўрнига унинг (9) ифодасини қўйиб,  $c_i$  сонларга нисбатан  $m$  та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$c_1(e_1, e_k) + c_2(e_2, e_k) + \dots + c_m(e_m, e_k) = (f, e_k), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

Дастлаб, кўпинча учраб турадиган ҳолни, яъни  $e_1, e_2, \dots, e_m$  базис нормалланган ва ортогонал бўлган ҳолни алоҳида кўриб чиқамиз. Бу ҳолда масала жуда содда ҳал қилинади. Ҳақиқатан, (11) система бу базисда керакли коэффицентларни бирданига аниқлаб берадиган

$$c_i = (f, e_i) \quad (12)$$

тенгламалар системасига айланади. Ҳар бир  $m$  ўлчамли қисм-фазога нормалланган ортогонал базис танлаб олиш мумкин бўлгани учун ҳар бир  $f$  векторнинг  $R_1$  қисм-фазога туширилган  $f_0$  ортогонал проекциячи мавжудлигини ва унинг ягоналигини исбот қилдик.

Энди базис ихтиёрий бўлган ҳолга қайтамиз. Бу ҳолда ҳам (11) система яна ягона ечимга эга бўлиши керак. Ҳақиқатан, исбот қилинганига мувофиқ  $f_0$  вектор мавжуд ва ягона  $e_1, e_2, \dots, e_m$  базисда  $f_0$  вектор бутунлай аниқ  $c_1, c_2, \dots, c_m$  координаталарга эга. Бу сонлар (11) системани қаноатлантиргани учун бу система ягона ечимга эга.  $m$

номаълумли  $m$  та тенгламалар системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлган ҳолдагина система ягона ечимга эга бўлиши мумкин. Бундан (11) системанинг

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \dots & (e_m, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \dots & (e_m, e_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (e_1, e_m) & (e_2, e_m) & \dots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

детерминанти нолдан фарқли эканлиги келиб чиқади. Бу детерминант  $e_1, e_2, \dots, e_m$  векторларнинг Грам детерминанти деб аталади.

Шундай қилиб,  $R_1$  қисм-фазодаги базис ортогонал бўлган ҳолда  $f$  векторни  $R_1$  га туширилган ортогонал проекциясини топиш учун биз  $f$  векторнинг  $c_i$  координаталарини (12) формулалардан аниқлашимиз керак.  $R_1$  да базис ихтиёрий бўлган ҳолда эса бу координаталар (11) тенгламалардан топилади.

### Назарий саволлар

1. Ҳар қандай  $n$  ўлчамли фазода ортогонал базис мавжудлигини кўрсатинг.
2. Нуқтадан қисм фазогача бўлган энг қисқа масофани топиш формуласини келтириб чиқаринг.

### Таянч тушунчалар

1. Ортогонал базис.
2. Нормалланган ортонормал базис.
3. Ортогоналлаштириш жараёни.
4. Нуқтадан қисм фазога ўтказилган перпендикуляр.
5. Нуқтадан қисм фазогача бўлган масофа.

**Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия  
қилинган адабиётлар.**

1. Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
2. Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
3. Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
4. Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## Маъруза №9.

### Евклид фазосидаги чизиқли операторлар.

#### Режа:

1. Ўз-ўзига қўшма операторнинг турли хос қийматларга мос келувчи хос векторлари.
2. Икки ўлчамли евклид фазосида симметрик оператор хос векторларининг мавжудлиги.
3. Симметрик операторнинг мусбат аниқланганлик критерияси.

$V$  евклид фазоси ва  $f : V \rightarrow V$  чизиқли оператор бўлсин.

**Таъриф-1.** Агар ихтиёрий  $x, y \in V$  лар учун  $(f(x), y) = (x, f^*(y))$  тенглик бажарилса,  $f^*$  оператор  $f$  операторга қўшма оператор дейилади.

**Таъриф-2.** Агар ихтиёрий  $x, y \in V$  лар учун  $(f(x), y) = (x, f(y))$  тенглик бажарилса,  $f$  оператор ўз-ўзига қўшма ёки симметрик оператор дейилади.

**Лемма-1.** Ўз-ўзига қўшма операторнинг турли хос қийматларига мос келувчи хос векторлари ортогонал.

*Исбот.*  $x, y \in V$  векторлар  $f$  операторнинг  $\lambda$  ва  $\mu$  хос қийматларига мос келувчи хос векторлари бўлсин, яъни  $f(x) = \lambda x$  ва  $f(y) = \mu y$  бўлсин. Охирги тенгликларни  $(f(x), y) = \lambda(x, y)$  ва  $(x, f(y)) = \mu(x, y)$  кўринишларда ёзиш мумкин.  $f$  оператор ўз-ўзига қўшма бўлганлиги учун  $(f(x), y) = (x, f(y))$  бўлади. Демак  $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ .

Лемманинг шартига кўра  $\lambda \neq \mu$  бўлгани учун  $(x, y) = 0$ . *Лемма исботланди.*

$U \subset V$  бўлсин. Қуйидаги қисм фазони киритамиз

$$U^\perp = \{x \in V / (x, u) = 0, \forall u \in U\}.$$

**Лемма-2.** Агар  $U$  евклид фазосидаги  $f$  симметрик чизиқли операторга нисбатан инвариант қисм фазо бўлса  $U^\perp$  ҳам  $f$  га нисбатан инвариант қисм фазо бўлади.

*Исбот.* Биз  $x \in U^\perp$  бўлишидан  $f(x) \in U^\perp$  эканлигини эканлигини кўрсатишимиз керак.  $U$  инвариант қисм фазо бўлгани учун ихтиёрий  $y \in U$  лар учун  $f(y) = u \in U$ . Шунинг учун

$$(f(x), y) = (x, f(y)) = (x, u) = 0.$$

$y$  ихтиёрий бўлгани учун  $f(x) \perp U$  яъни  $f(x) \in U^\perp$ . *Лемма исботланди.*

**Лемма-3.** Икки ўлчамли евклид фазосидаги симметрик оператор учун хос вектор мавжуд.

*Исбот.* Симметрик операторнинг матрицаси симметрик бўлади,

яъни  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Шунинг учун характеристик кўпҳадимиз

$\chi(t) = t^2 - (a + c)t + ac - b^2$  кўринишда бўлади. Унинг дискриминанти

$D = (a - c)^2 + b^2 \geq 0$  ва шунинг учун унинг камида битта илдизи бор.

Хос қиймат мавжуд бўлгани учун хос вектор ҳам мавжуд бўлади.

*Лемма исботланди.*

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

**Теорема-1.**  $n$  ўлчамли евклид фазосидаги ихтиёрий симметрик оператор учун хос векторларидан ташкил топган ортонормалланган

базис мавжуд. Бу базисда берилган операторнинг матрицаси диагонал кўринишда бўлади.

**Таъриф-3.** Агар  $f$  симметрик оператор учун ихтиёрий  $x \in V, x \neq 0$  ларда  $(f(x), x) > 0$  тенгсизлик бажарилса,  $f$  оператор мусбат аниқланган дейилади.

**Лемма-4.** Симметрик оператор мусбат аниқланган бўлиши учун унинг барча хос қийматлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

*Исбот.* Олдинги теоремага асосан  $f$  симметрик операторнинг хос векторларидан ташкил топган ортонормалланган базис мавжуд, яъни  $f(e_1) = \lambda_1 e_1, f(e_2) = \lambda_2 e_2, \dots, f(e_n) = \lambda_n e_n$ , шунинг учун

$$\begin{aligned} (f(x), x) &= \left( f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \left( \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

*Лемма исботланди.*

**Лемма-5.**  $n$  ўлчамли евклид фазосидаги ихтиёрий махсусмас  $f$  оператор учун  $f^* f$  оператор симметрик ва мусбат аниқланган бўлади.

*Исбот.* Олдин симметриглигини текшираамиз:

$$((f^* f)(x), y) = (f^*(f(x)), y) = (f(x), f(y)) = (x, f^*(f(y))) = (x, (f^* f)(y)).$$

Симметриклиги кўрсатилди. Мусбат аниқланганлигини кўрсатамиз:

$$(f^* f(x), x) = (f(x), f(x)) > 0, \text{ чунки агар } x \neq 0 \text{ бўлса, } f(x) \neq 0.$$

*Лемма исботланди.*

**Лемма-6.** Ихтиёрий мусбат аниқланган симметрик  $f$  оператор учун симметрик мусбат аниқланган  $g$  оператор топилиб,  $g^2 = f$  тенглик бажарилади.

*Исбот.* 1-теоремага ва 4-леммага асосан  $f$  симметрик операторнинг хос векторларидан ташкил топган ортонормалланган базис мавжуд. Ушбу базисда  $f$  операторнинг матрицаси қуйдагича бўлади:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Қуйидаги матрицани қараймиз:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Матрицаси қаралаётган базисда  $C$  га тенг бўладиган  $g$  оператор биз излаётган оператор бўлади. *Лемма исботланди.*

**Таъриф-3.** Агар ихтиёрий  $x \in V$  учун  $|f(x)| = |x|$  тенглик бажарилса,  $f$  оператор ортогонал дейилади.

**Теорема-2. (Қутб ёйилма хақида)**  $n$  ўлчамли евклид фазосидаги ихтиёрий махсусмас  $f$  оператор учун  $g$  ортогонал ва  $h$  симметрик операторлар топилиб, улар учун  $f = gh$  тенглик бажарилади.

### Назарий саволлар.

1. Ўз-ўзигага қўшма операторнинг турли хос қийматларга мос келувчи хос векторлари ортогонал эканлигини кўрсатинг.



2. Икки ўлчамли евклид фазосида симметрик оператор учун хос вектор мавжудлигини кўрсатинг.
3. Симметрик оператор учун мусбат аниқланганлик критериясини исботланг.

### **Таянч тушунчалар.**

- 1.Қўшма оператор.
- 2.Симметрик оператор.
3. Мусбат аниқланган оператор.
- 4.Ортогонал оператор.
- 5.Хос векторлардан тузилган базис.
- 6.Кутб ёйилма ҳақидаги теорема.

### **Фойдаланилган ва фойдаланишга тавсия қилинган адабиётлар.**

- 1.Хожиев Ж., Файнлейб А.С. «Алгебра ва сонлар назарияси курси», Тошкент, «Ўзбекистон», 2001.
- 2.Искандаров Р.И., Назаров Р. «Алгебра ва сонлар назарияси», I қисм., Тошкент, «Ўқитувчи», 1977.
- 3.Гельфанд И.М. «Чизиқли алгебрадан лекциялар», Тошкент, 1961.
- 4.Окунев Л.Я. «Олий алгебра», Тошкент 1950.
5. Курош А.Г. «Олий алгебра курси», Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра», Москва, «Наука», 1974.

## МУНДАРИЖА

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| 1. $N$ ўлчамли чизикли фазо. . . . .                    | 3  |
| 2. Қисм фазолар. . . . .                                | 16 |
| 3. Бичизикли ва квадратик формалар. . . . .             | 22 |
| 4. Чизикли акслантиришлар ва изоморфизм. . . . .        | 32 |
| 5. Чизикли операторлар ва уларнинг матрицалари. . . . . | 37 |
| 6. Хос вектор ва хос қийматлар. . . . .                 | 43 |
| 7. Евклид фазоси. . . . .                               | 51 |
| 8. Ортогонал базис. Ортогонналаштириш жараёни. . . . .  | 59 |
| 9. Евклид фазосидаги чизикли операторлар. . . . .       | 69 |







