

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

AL - XORAZMIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Qo'l yozma huquqida

Abdullayev Jonibek Shokirovich

Kvaternion o'zgaruvchili funksiyalarning nollari

Mutaxassislik: 5A 46.01.01-“Matematik tahlil”

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya

Ish ko'rildi va himoyaga qilishga

Ruxsat beriladi «Funksiyalar nazaryasi»

Xudayberganov

Kafedra mudiri:

maslahatchi _____

«__» _____ 2012-yil

Ilmiy rahbar _____

f.-m.f.d., prof. G.

Ilmiy

f.-m.f.n., dots. R. Madarhimov

Urganch - 2012

MUNDARIJA

Kirish.....

0.1-§ Dissertatsiyaning umumiy tavsifi.....

0.2-§ Dissertatsiyaning mazmuni.....

I-BOB. DASTLABKI MA'LUMOTLAR VA ASOSIY TUSHUNCHALAR

1.1-§ Kvarternion sonlar va ular ustida amallar.....

1.2-§ Kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar.....

1.3-§ Ikkinchi tartibli kvarternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi.

II – BOB. KVARTERNION O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING NOLLARI.

2.1-§ Kompleks o'zgaruvchili ko'phad ildizining mavjudligi. Algebraning asosiy

teoremasi.....

2.2-§ Algebraning asosiy teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.....

2.3-§ Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning nolllari.....

2.4-§ Kvaternion o'zgaruvchili elementar funksiyalar.....

2.5-§ Kvarternion o'zgaruvchiga bog'liq ko'phadning ildizi mavjudligi.....

2.5-§ Kvaternion o'zgaruvchining funksiyaning nollar to'plami.

Foydalanilgan adabiyotlar.....

KIRISH

1. DISSERTATSIYANING UMUMIY TAVSIFI.

1.1. Mavzuning dolzarbligi.

Kvaternion - to'rt o'lchovli fazoda geometrik amalga oshuvchi giperkompleks sonidir. Kvaternion sistema 1943 yilda U. Gamilton tomonidan taklif qilingan. Haqiqiy sonlar kiritilishi bilan ko'pgina masalalar o'z yechimini topdi. Lekin bu sonlar maydonida ham $x^2 + 1 = 0$ tenglama yechimga ega emas. Demak, haqiqiy sonlar maydonini kengaytirish zarurati hosil bo'ldi. Kompleks sonlar haqiqiy sonlarning umumlashmasidir. Har qanday z kompleks son $z = x + iy$ ko'rinishida tasvirlanadi, bu yerda $i^2 = -1$ va $x, y \in R$.

Kompleks sonlar tarixi XVI asrdan boshlanadi. Italyan matematiklari Djirolamo Kardano va Rafael Bombelli $x^2 + 1 = 0$ tenglamaning formal yechimlarini $\sqrt{-1}$ simvol bilan kiritgan. $i = \sqrt{-1}$ belgilash esa XVIII asrda L. Eyler tomonidan kiritilgan. Kvarternion sonlar kompleks sonlarning umumlashmasidir va quyidagicha tasvirlanadi.

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$$

bu yerda i, j, k lar esa bazis sonlar bo'lib,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

tengliklarni qanoatlantiradi. Kvarternion sonlar 1843 yilda V. Gamilton tomonidan kiritilgan. $x = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ son x ga qo'shma kvarternion son deyiladi.

Ravshanki, $|x|^2 = x \cdot \bar{x}$ tenglik o'rinlidir. Umuman olganda, kvarternion sonlar kiritilishi bilan ko'pgina yangi amaliy natijalar olindi.

Biz bu dissertatsiyada bayon qiladigan kvarternionlar haqidagi ma'lumotlardan oily o'quv yurtlarida, o'rta maktabda, akademik litsey va kollejlarda maxsus kurs mashg'ulotlarida foydalanishlari mumkin.

1.2. Dissertatsiyaning maqsadi. Dissertatsiya ishining maqsadi kvaternion o'zgaruvchili tenglamaning ildizi qidirish masalasi o'zganiladi. Bu dissertatsiya talabalarning matematika bo'lgan qiziqishini orttiradi va tasavvur doirasini kengaytiradi. Shu bilan birga ijodiy faoliyatga chorlaydi.

1.3. Izlanish uslubi. Dissertatsiya ishida kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va algebraik tenglama yechish metodlaridan foydalaniladi

1.4. Ilmiy yangiligi. Dissertatsiyada Birinchi tartibli kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar yechimlari, Ikkinchi tartibli kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi, kvaternion o'zgaruvchili funksiya nollari haqida mukammal hulosalar chiqarilgan.

1.5. Dissertatsiya ishining nashrlari. Dissertatsiya mavzusi yuzasidan "funksiyalar nazariyasi" kafedrası ilmiy seminarlarida muntazam ma'ruzalar qilib borildi va muhokama qilindi, hamda yangi natijalar 2 ta maqola shaklida chop qilindi. [12], [24]

1.6. Ishning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya ishi kirish, ikkita bob va adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Birinchi bobda kvaternion sonlar, kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar hamda ikkinchi tartibli kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga bag'ishlangan. Mazkur magistrlik dissertatsiyasining ikkinchi bobi kvaternion o'zgaruvchili funksiyalarning nollari va ularning bir qancha xossalriga oid teoremlar isbotlandi.

I-BOB. DASTLABKI MA'LUMOTLAR VA ASOSIY TUSHUNCHALAR

1.1-§ Kvarternion sonlar va ular ustida amallar

Avvalo

$$z = a + bi \quad (1)$$

kompleks sonni olib qaraylik. Agar biz ikkita, $z_1 = a_1 + b_1i$ va $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks sonlar ustida qo'shish, ko'paytirish, bo'lish amallarini bajarsak, yana kompleks son hosil bo'ladi.

Endi (1) ko'rinishdagi songa o'xshash

$$z = a + bi + cj \quad (2)$$

sonni olib qaraylik, bunda a, b, c haqiqiy sonlar bo'lib, i, j – qandaydir belgilar (simvollar, keyinchalik mavhum birliklar deb atamiz) bo'lsin.

$z_1 = a_1 + b_1i + c_1j$ va $z_2 = a_2 + b_2i + c_2j$ bo'lsa, u holda $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ bo'lgandagina $z_1 = z_2$ deb qaraladi. Ikkita z_1 va z_2 (2) ko'rinishdagi kompleks sonni qo'shish qoidasini

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i + c_1j) + (a_2 + b_2i + c_2j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j$$

deb qabul qilaylik.

Ko'paytmani odatdagi ko'phadni ko'phadga ko'paytirishdan farq qiluvchi yangicha qoida bilan qabul qilaylik. Lekin, yangicha qabul qilish oddiy (avvalgiday) ko'paytirish bilan mos tushsin. Masalan:

$$(a + 0i + 0j)(b + 0i + 0j) = ab + 0i + 0j$$

tenglikka mos kelsin. Shu bilan birga quyidagi shartlar bajarilsin:

1) ixtiyoriy $k = k + 0i + 0j$ haqiqiy sonni ixtiyoriy (2) ko'rinishdagi songa

ko'paytirishda $(k + 0i + 0j)(a + bi + cj) = ka + kbi + kcj$ tenglik bajarilsin;

2) $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2)$ tenglik bajarilsin;

3) $z_1(z_2 + z_3) = (z_1z_2 + z_1z_3)$

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ tengliklar bajarilsin.

Bu 1) ,2), 3) shartlarni qanoatlantiradigan ko'paytirish qonunini topish muammosi vujudga keladi. Bu muammoni yechish uchun ko'paytmani

$$z_1z_2 = (a_1 + b_1i + c_1j)(a_2 + b_2i + c_2j) = a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)j \quad (3)$$

deb qabul qilish kifoya.

Bu (3) qonuniyat 1), 2), 3) shartlarni qanoatlantiradi va shu bilan birga

$$4) z_1z_2 = z_2z_1$$

$$5) (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$$

qonuniyatlarga ham bo'ysunadi, ya'ni 4) 5) tengliklar bajariladi.

Lekin, (3) qonuniyat bilan bo'lish amalini kiritib bo'lmaydi. Masalan, 1 sonini i ga bo'lib bo'lmaydi, ya'ni (3)

$$(0 + 1i + 0j) = 1 + 0i + 0j \quad (4)$$

tenglama yechimga ega emas. Boshqacha qilib aytganda, (4) tenglikni qanoatlantiruvchi (2) ko'rinishdagi (3) qonuniyat bilan topib bo'lmaydi. Umuman, (2) ko'rinishdagi sonlarning har qanday ko'paytirish qonuniyatlarini (1), (2), (3) shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlasada z_1 va z_2 sonlarni bir-biriga bo'lib bo'lmasligini qayd etamiz.

Demak, (2) ko'rinishdagi sonlardan bo'lish amali bajariladigan to'plamni tuzib bo'lmaydi. Ammo, i, j belgilarga (simvollarga) yana bitta k belgi qo'shib

$$z = a + bi + cj + dk \quad (5)$$

sonni qarasak, u holda bo'lish amali ham bajariladigan sonlar to'plamini tuzish mumkin.

Shunday qilib, (4) sonlar uchun yuqoridagi (1), (2) (3) shartlar bajariladigan va yana ko'paytirish amaliga teskari bo'lgan bo'lish amali bajariladigan ko'patma qonuniyatini ko'rsatish mumkin. Bunday (4) ko'rinishdagi sonlar kvaternion (to'rtovlon sonlar) deyiladi.

Qoshishni oddiy ma'noda

$(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$ qonuniyat bilan qabul qilamiz.

Ko'paytirishni alohida qonun bilan qabul qilamiz. Buning uchun i, j, k sonlarning ko'paytmasini quyidagicha qabul qilamiz.

$$i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1 \quad \begin{matrix} ij = k, & jk = i, & ki = j \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j \end{matrix} \quad (6)$$

Endi (6) tengliklar tushunarlidir.

1.1-Ta'rif. $z = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ ko'rinishida tasvirlanadigan songa kvarternion son deyiladi, bu yerda $x_0, x_1, x_2, x_3 \in R$, i, j, k lar esa bazis sonlar bo'lib, ular quyidagi jadval yordamida ko'paytiriladi.

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Demak, $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$.

1.2-Ta'rif. $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ kvarternion son x ning qo'shmasi deyiladi.

1.3-Ta'rif. $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ son x kvarternion sonning moduli (uzunligi) deyiladi.

Barcha kvarternion sonlar to'plami H bilan belgilanadi.

Ravshanki, $\mathbf{C} \subset H$.

1.2. Kvarternion sonlar ustida amallar va ularning xossalari.

Kvarternion sonlar quyidagi xossalarga ega.

1.1⁰. $\forall x, y, z \in H$ kvarternion sonlar uchun

$$(x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z)$$

bo'ladi.

1.2⁰. $\forall x, y, z \in H$ kvarternion sonlar uchun

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx$$

tengliklar o'rinli.

1.3⁰. $\forall x \in H$ uchun $|\bar{x}| = |x|$ tenglik o'rinli.

1.4⁰. $\forall x \in H$ uchun $x\bar{x} = |x|^2$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ ($x_0, x_1, x_2, x_3 \in R$) bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} x\bar{x} &= (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) \cdot (x_0 - x_1i - x_2j - x_3k) = x_0^2 - x_0x_1i - x_0x_2j - x_0x_3k + \\ &+ x_0x_1i - x_1^2 - x_1x_2ij - x_1x_3ik + x_0x_2j - x_1x_2ji - x_2^2 - x_2x_3jk + \\ &+ x_0x_3k - x_1x_3ki - x_2x_3kj - x_3^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |x|^2. \end{aligned}$$

1.5⁰. $\forall x, y \in H$ uchun $|xy| = |yx| = |x||y|$

$$\text{Isbot. } |xy|^2 = (xy)(\overline{xy}) = (xy)(\bar{y} \cdot \bar{x}) = x(y \cdot \bar{y})\bar{x} = x|y|^2\bar{x}$$

Demak, $|xy|^2 = |x|^2|y|^2$ Bundan $|xy|^2 = |yx|^2$, ya'ni $|xy| = |yx|$ ekani

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$|xy| = |yx| = |x||y|$$

1.6⁰. $\forall x, y, z \in H$ uchun $xy = yx$ tenglik hamisha o'rinli emas

(kommutativlik qonuni o'rinli emas).

Isbot. $x = 1 + i, y = j + k$ bo'lsin. U holda

$$xy = (1 + i) \cdot (j + k) = j + k + k - j = 2k$$

$$yx = (j + k) \cdot (1 + i) = j + k - k + j = 2j$$

Demak, $xy = 2k, yx = 2j, xy \neq yx$ kelib chiqadi.

1.7⁰. $\forall x \in H$ va $\forall n \in N$ uchun $|x^n| = |x|^n$.

1.8⁰. $\forall x, y \in H$ kvarternion sonlar uchun $|x + y| \leq |x| + |y|$ bo'ladi.

Endi, kvaternionlar ustida bo'lish amalini ko'rib chiqamiz, α_1 kvaternionni α_2 kvaternionga bo'lish deb $\alpha_2 z = \alpha_1$ (9) tenglama yechimiga aytiladi.

Kvaternionlarni ko'paytirishda $\alpha_2 \alpha_1 \neq \alpha_1 \alpha_2$ bo'lgani uchun

$$\alpha_2 z = \alpha_1 \quad (10)$$

$$z \alpha_2 = \alpha_1 \quad (11)$$

tenglamalarni ko'rib o'tishga to'g'ri keladi. Bu yerda (10) tenglamaning yechimi α_1 ni α_2 ga bo'lganda chap bo'linma, (11) tenglamaning yechimi o'ng bo'linma deyiladi. Yuqoridagi (10) tenglamani yechish uchun uni chapdan $\overline{\alpha_2}$ ga va

so'ngra $\frac{1}{|\alpha_2|^2}$ ga ko'paytiramiz

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_2} \alpha_2 z &= \overline{\alpha_2} \alpha_1 \\ \frac{1}{|\alpha_2|^2} \overline{\alpha_2} \alpha_2 z &= \frac{1}{|\alpha_2|^2} \overline{\alpha_2} \alpha_1 \end{aligned}$$

Bundan $\overline{\alpha_2} \alpha_2 = |\alpha_2|^2$ bo'lgani uchun

$$z_r = \frac{1}{|\alpha_2|^2} \overline{\alpha_2} \alpha_1 \quad (12)$$

bu (12) kvaternion (10) ning yechimidir. Xuddi shunday (11) ni o'ng tomondan $\overline{\alpha_2}$ ga so'ngra $\frac{1}{|\alpha_2|^2}$ ga ko'paytirib,

$$z_l = \frac{1}{|\alpha_2|^2} \alpha_1 \overline{\alpha_2} \quad (13)$$

kvaternionni topamiz. Shunday qilib (12) va (13) lar chap va o'ng bo'linmalar deyiladi. Kvaternionlar xossasidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz.

$$|\alpha_1 \alpha_2|^2 = (\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2) = (\alpha_1 \alpha_2)(\overline{\overline{\alpha_2} \alpha_1}) = \alpha_1 (\alpha_2 \overline{\alpha_2}) \overline{\alpha_1} = \alpha_1 |\alpha_2|^2 \overline{\alpha_1}$$

bunda $|\alpha_2|^2$ - haqiqiy son bo'lganligidan

$$|\alpha_1 \alpha_2|^2 = \alpha_1 \overline{\alpha_1} |\alpha_2|^2 = |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2 \quad (14)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu (14) dan $|\alpha_1 \alpha_2| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2|$ kelib chiqadi.

Endi (14) ni bunday yozaylik,

$$|\alpha_1 \alpha_2|^2 = |\alpha_1|^2 \cdot |\alpha_2|^2 \quad (15)$$

Agar biz $\alpha_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ va $\alpha_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ desak, u holda kvaternion ta'rifiga asosan (15) dan

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = \\ & = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_2c_2)^2 + \\ & + (a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - b_1d_2)^2 + (a_1d_2 + d_1a_2 + c_2b_1 - c_1b_2)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, ikkita to'rtta kvadratlar yig'indisi ko'paytmasi yana to'rtta kvadratlar yig'indisiga teng. Bu oxirgi tasdiq (16) kompleks sonlar uchun ikkita kvadratlar yig'indisidan iborat, ya'ni $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_2b_1)^2 + (a_1b_1 + b_2a_2)^2$

Kompleks sonlar va kvaternionlar asosida quyidagi muammoni qo'yish mumkin.

Muammo: n – son qanday bo'lganda ikkita n va kvadratlar yig'indisining ko'paytmasi n – ta kvadratlar yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2$$

tenglik n ning qaysi qiymatida bajariladi?

Bu muammo $n=1$ da o'z-o'zidan ravshan. $n=2, n=4$ bo'lganda muammo yechimga ega. $n=3, n=5, n=6$, va hokazo bo'lganda-chi? Bunday muammoni uzoq vaqtlar davomida yechib bo'lmadi. L. Eyler (1707-1783) 4 ta kvadratlar uchun misol ko'rsatgan edi. Keyinroq esa 8 ta kvadratlar uchun misol ko'rsatilgan edi. 1898-yili bu muammo nemis matematigi A. Gurvits (1859-1919) tomonidan uzil-kesil yechildi, ya'ni ko'rsatilgan faqat $n=1, 2, 4, 8$ bo'lgandagina mavjud bo'lib, n ning boshqa qiymatlarida mavjud emas.

1.2-§ Kvaternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar

1-Teorema. $a, b \in H$ va $a \neq 0$ bo'lsin. U holda $ax = b$ kvaternion o'zgaruvchili tenglama yagona yechimga va u quyidagi formula orqali topiladi.

$$x = \frac{\bar{a}b}{|a|^2}$$

Isbot. Bu tenglikning har ikkala tomonini chapdan

$$\bar{a} \text{ ga ko'paytiramiz. } \bar{a} \cdot (ax) = \bar{a} \cdot b \Leftrightarrow (\bar{a} \cdot a)x = \bar{a} \cdot b \Leftrightarrow |\bar{a}|^2 x = \bar{a}b$$

$$\text{Ravshanki, } |\bar{a}|^2 = |a|^2$$

$$\text{Demak, } x = \frac{\bar{a}b}{|a|^2} \text{ ekani kelib chiqadi}$$

1.1-Misol . Quyidagi tenglamani yeching.

$$(i + j)x = 1 + k$$

Yechilishi. Bu tenglamaning har ikkala tomonini chapdan $i + j$ ning qo'shmasi $-i - j$ ga ko'paytiramiz

$$(-i - j)(i + j)x = (-i - j)(1 + k)$$

$$(i + j)^2 x = -i - ik - j - jk = -i + i - j - i$$

$$(1^2 + 1^2)x = -2i \Leftrightarrow x = -i$$

Javob: $x = -i$.

1.2-Misol: $x^2 = 1$ kvadrat tenglamani yeching, bu yerda $x \in H$.

Yechilishi. Bu tenglikdan modul olamiz

$$|x^2| = 1 \Rightarrow |x|^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \quad x^2 = 1 \text{ tenglikning ikkala tomonini}$$

chapdan $\bar{x}$ ga ko'paytiramiz.

$$\bar{x}(x \cdot x) = \bar{x}$$

$$\text{Bundan } (\bar{x} \cdot x)x = \bar{x} \Rightarrow |x|^2 x = \bar{x}.$$

Demak , $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \bar{x}$

$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ bo'lsin. U holda

$\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ $x = \bar{x}$ tenglikdan $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ekani kelib chiqadi.

Demak $x = x_0 \in R$ $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

1.3-Misol: $z^2 = 1 + i + k$ tenglamani yeching, bu yerda $z \in H$.

Yechilishi: Ravshanki, $|z^2| = |z|^2 = |1 + i + k| = \sqrt{3}$.

Demak $|z| = \sqrt[4]{3}$.

$$\bar{z}(z \cdot z) = \bar{z}(1 + i + k), \quad (\bar{z} \cdot z) = \bar{z}(1 + i + k) \quad \sqrt{3}z = \bar{z}(1 + i + k)$$

$$z = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$$

U holda $\bar{z} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ bo'ladi.

$$\bar{z}(1 + i + k) = x_0 + x_1 + x_3 + (x_0 - x_1 - x_2)i + (x_1 - x_2 - x_3)j + (x_0 + x_2 - x_3)k$$

$$\sqrt{3}z = \sqrt{3}x_0 + \sqrt{3}x_2j + \sqrt{3}x_3k$$

Demak, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x_0 = x_0 + x_1 + x_3 \\ \sqrt{3}x_1 = x_0 - x_1 - x_2 \\ \sqrt{3}x_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \sqrt{3}x_3 = x_0 + x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x_0 + x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 - (\sqrt{3} + 1)x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - (\sqrt{3} + 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasidan x_0 ni topamiz.

$$x_0 = (\sqrt{3} + 1)x_1 + x_2$$

x_0 ning ifodasini yuqoridagi sistemaning birinchi va to'rtinchi tengliklariga qo'yamiz.

$$\begin{cases} -2x_1 + (1 - \sqrt{3})x_2 + x_1 + x_3 = 0 \\ (\sqrt{3} + 1)x_1 + 2x_2 - (\sqrt{3} + 1)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 + (1 - \sqrt{3})x_2 = 0 \\ ((\sqrt{3} + 1)x_1 + 2x_2 - (\sqrt{3} + 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu tengliklar o'zaro teng kuchli. Birinchi tenglikdan x_3 ni topamiz.

$$x_3 = x_1 + (\sqrt{3} - 1)x_2$$

x_3 ni berilgan sistemaning uchinchi tenglikiga qo'yib quyidagini hosil qilamiz.

$$x_1 - (\sqrt{3} + 1)x_2 - x_1 - (\sqrt{3} - 1)x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Demak, $x_0 = (\sqrt{3} - 1)x_1$. Ma'lumki, $|z| = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sqrt{3}$.

Bundan $(1 + \sqrt{3})^2 x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = \sqrt{3}$ tenglikka ega bo'lamiz.

$$(6 + 2\sqrt{3})x_1^2 = \sqrt{3} \Rightarrow x_1^2 = \frac{\sqrt{3}(6 - 2\sqrt{3})}{24} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

$$x_1 = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}; \quad x_0 = \pm (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}$$

Demak, umumiy yechim quyidagiga teng.

$$z_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2} (\sqrt{3} + 1 + i + k)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2} (-\sqrt{3} - i - k)$$

1.4-Misol. Quyidagi tenglamani yeching

$$(1 + i - j - k)x = 3j + 4k$$

Yechilishi. Bu tenglamaning har ikkala tomonini chapdan $1 + i - j - k$ ning qo'shmasi $1 - i + j + k$ ga ko'paytiramiz

$$\begin{aligned}
(1-i+j+k)(1+i-j-k)x &= (1-i+j+k)(3j+4k) \\
|1-i+j+k|^2 x &= 3j+4k-3ij-4ki+3j^2+4jk+3kj+4k^2 \\
(1^2+1^2+1^2+1^2)x &= 3j+4k-3k+4j-3+4i-3i-4 \\
4x &= -7+i+7j+k \\
x &= -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}i+\frac{7}{4}j+\frac{1}{4}k
\end{aligned}$$

Javob: $x = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{7}{4}j + \frac{1}{4}k$.

1.5-Misol.Quyidagi tenglamani yeching.

$$(i+j)x = 1+k$$

Yechilishi. Bu tenglamaning har ikkala tomonini chapdan $i+j$ ning qo'shmasi $-i-j$ ga ko'paytiramiz

$$\begin{aligned}
(-i-j)(i+j)x &= (-i-j)(1+k) \\
|i+j|^2 x &= -i-ik-j-jk = -i+j-j-i \\
(1^2+1^2)x &= -2i \quad x = -i
\end{aligned}$$

Javob: $x = -i$

1.3-§ Ikkinchi tartibli kvarternion o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi.

2.1-kramer usuli. $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in H$ bo'lsin

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1-Ta'rif. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \end{vmatrix} = a_1\overline{a_2}b_2 - b_1\overline{a_2}a_2$ songa $\overline{a_2}$ ga nisbatan ikkinchi tartibli

determinant deyiladi.

Ihtiyoriy $b \neq 0$, $b \in H$ uchun $\frac{a}{b} = b^{-1}a$ belgilash kiritamiz.

2.1-Teorema. Agar $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \end{vmatrix} \neq 0$ va $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa, u holda (2.1) tenglamalar

sistemasi yagona yechimga ega va quyidagi formulalar bo'yicha topiladi.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_2} & \overline{b_2} \end{vmatrix}}.$$

Isbot. Berilgan shartlardan $a_2 \neq 0$ va $b_2 \neq 0$ ekani kelib chiqadi.

(2.1) ning ikkinchi tengligidan y ni topamiz.

$$\overline{b_2}a_2x + |b_2|^2 y = b_2c_2 \quad y = \frac{\overline{b_2}c_2 - \overline{b_2}a_2x}{|b_2|^2}$$

y ning bu qiymatini (2.1) ning birinchi tengligiga qo'yamiz.

$$a_1x + \frac{b_1\overline{b_2}c_2 - b_1\overline{b_2}a_2x}{|b_2|^2} = c_1$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini $|b_2|^2$ ga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$(a_1|b_2|^2 - b_1\overline{b_2}a_2)x = c_1|b_2|^2 - b_1\overline{b_2}c_2$$

Demak,

$$x = \frac{c_1\overline{b_2}c_2 - b_1\overline{b_2}c_2}{a_1\overline{b_2}b - b_1\overline{b_2}a_2} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ \overline{b_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{b_2} & b_2 \end{vmatrix}}$$

Endi xuddi shunday metod bilan y ni topamiz. (2.1) ning ikkinchi tengligidan x ni topamiz

$$|a_2|^2 x + \overline{a_2}b_2y = \overline{a_2}c_2 \Leftrightarrow x = \frac{\overline{a_2}c_2 - \overline{a_2}b_2y}{|a_2|^2}.$$

x ning bu qiymatini (2.1) ning birinchi tengligiga qo'yamiz.

$$\frac{a_1\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_2}b_2y}{|a_2|^2} + b_1y = c_1$$

Bu tenglikdan y ni topsak, quyidagiga teng bo'ladi.

$$y = \frac{c_1\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_2}c_2}{b_1\overline{a_2}a_2 - a_1\overline{a_2}b_2} = \frac{a_1\overline{a_2}c_2 - c_1\overline{a_2}a_2}{a_1\overline{a_2}b_2 - b_1\overline{a_2}a_2}$$

Shunday qilib,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ \overline{a_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \overline{a_2} & b_2 \end{vmatrix}}$$

Teorema isbotlandi.

2.2-Gauss usuli.

Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} (2+i)x + (i+j)y = -3+3j+5k \\ (3i-4k)x + (i+k)y = 3+2i-5j+5k \end{cases}$$

Yechilishi : Ravshanki, $\forall x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ songa qo'shma son

$x = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ bo'lib, $x \cdot \bar{x} = |x|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ tenglik o'rinlidir.

Bu sistemaning birinchi tengligidan, x ni y orqali topib, ikkinchi tengligiga qo'yib, y ga nisbatan bir no'malumli tenglama hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasining birinchi tengligini $2+i$ ning qo'shmasi $2-i$ ga chapdan ko'paytiramiz.

$$(2-i)(2+i)x + (2-i)(i+j)y = (2-i)(-3+3j+5k)$$

Ravshanki

$$(2-i)(2+i) = |2+i|^2 = 4+1=5$$

$$(2-i)(i+j) = 2i+2j-i^2-ij = 2i+2j-k+1$$

$$(2-i)(-3+3j+5k) = -6+6j+10k+3i-3ij-5ik = -6+3i+11j+7k$$

U holda

$$5x + (2i+2j-k+1)y = -6+3i+11j+7k$$

Bunda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x = \frac{1}{5}(-6+3i+11j+7k - (2i+2j-k+1)y)$$

Topilgan x ning bu ifodasini berilgan sistemaning ikkinchi tengligiga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} (3i-4k)(-6+3i+11j+7k) - (3i-4k)(2i+2j-k+1)y + (5i+5j)y = \\ = 15+10i-25j+25k \end{aligned}$$

Ravshanki

$$\begin{aligned} (3i-4k)(-6+3i+11j+7k) &= -18i+9i^2+33ij+21ik+24k-12ki-44kj-28k^2 = \\ &= -19i^2+26i+57k-33j = 19+26i+57k-33j \end{aligned}$$

$$(3i - 4k)(2i + 2j - k + 1) = 6i^2 + 6ij - 3ik + 3i - 8ki - 8kj + 4k^2 - 4k = \\ = -10 + 11i - 5j + 2k$$

Demak,

$$(5i + 5k + 10 - 11i + 5j - 2k)y = -4 - 16i + 8j - 32k \Leftrightarrow$$

$$(10 - 6i + 5j + 3k)y = -4 - 16i + 8j - 32k.$$

Bu tenglikni $10 - 6i + 5j + 3k$ ning qo'shmasi $10 + 6i - 5j - 3k$ ga chapdan ko'paytiramiz.

$$|10 - 6i + 5j + 3k|^2 y = (10 + 6i - 5j - 3k)(-4 - 16i + 8j - 32)$$

$$(10^2 + 6^2 + 5^2 + 3^2)y = -40 - 160i + 80j - 320k - 24i - 96i^2 + 48ij - 192ik + \\ 20j + 80ji - 40j^2 + 160jk + 12k + 48ki - 24kj + 96k^2 = 340j - 340k.$$

Demak, $y = 2j - 2k$. U holda

$$x = \frac{1}{5}(-6 + 3i + 11j + 7k - (2i + 2j - k + 1)(2j - 2k))$$

Ravshanki,

$$(2i + 2j - k + 1)(2j - 2k) =$$

$$4ij - 4ik + 4j^2 - 4jk - 2kj + 2k^2 + 2j - 2k = -6 - 2i + 6j + 2k$$

Demak, $x = i + j + k$

Javob: $x = i + j + k, y = 2j - 2k$.

II – BOB. KVARTERNION O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING NOLLARI.

2.1-§ Kompleks o'zgaruvchili ko'phad ildizining mavjudligi. Algebraning asosiy teoremasi

Koeffisientlari haqiqiy bo'lib, haqiqiy ildizga ega bo'lmagan ko'phadlar ma'lum:

$x^2 + 1$ shunday ko'phadlardan biri. Hatto ko'mpleks sonlar ichida ham ildizga ega bo'lmagan ko'phad mavjud deb kutish mumkin. Agar shunday bo'lib chiqqanda edi, kompleks sonlar sistemasini kengaytishga to'g'ri kelar edi. Shunday bo'lsada, aslida, ushbu teorema – kompleks sonlar teoremasining algebrasi o'rinlidir.

Teorema: (Algebraning asosiy teoremasi) *Darajasi birdan kichik bo'lmagan istalgan son koeffisientli ko'phadning hech bo'lmaganda bitta ildizi, umumiy holda kompleks ildizi mavjud.*

Bu teorema matematikaning eng katta yutuqlaridan hisoblanadi va fanning xilma-xil sohalarida tadbiiq qilinadi. Xususan koeffisientlari sonlardan iborat bo'lgan ko'phadlarning kelgusi nazaryasi shu teoremaga asoslangan shuning uchun ham ilgari bu teorema oliy algebraning asosiy teoremasi deyilar edi. Aslida asosiy teorema sof algebra emas. Uning barcha isbotlari (uni dastlab 18-asr oxirida isbot qilgan Gaussdan keyin bunday isbotlar juda ko'p topildi) haqiqiy va kompleks sonlarning topologik xossalridan, ya'ni uzluksizlik bilan bog'liq bo'lgan xossalaridan ozmi ko'pmi foydalanishga majbur. Quyidagi keltirilgan isbotda kompleks koeffisientli $f(z)$ ko'phad kompleks o'zgaruvchili z ning kompleks funksiyasi sifatida qaraladi. Demak, z ixtiyoriy kompleks qiymatlar qabul qilishi mumkin ya'ni $z \in \mathbb{C}$.

Asosiy teoremani isbotlashdan avval quyidagi lemma va teoremlarini isboti bilan keltiramiz.

Bizga kompleks o'zgaruvchili va kompleks koeffitsientli

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

ko'phad berilgan bo'lsin.

1-lemma Agar $f(z)$ ko'phadning ozod hadi nolga teng bo'lsa ya'ni $a_n = 0$ ($f(0) = 0$) bo'lsa, u holda har qanday $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\exists \delta > 0$ topish mumkinki, $|z| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha z lar uchun $|f(z)| < \varepsilon$ bo'ladi.

Isbot: Haqiqatan ham,

$$A = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$$

bo'lsin.

ε bizga oldindan berilgan. Agar δ uchun

$$\delta = \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon} \quad (1)$$

ni oladigan bo'lsak, u talab qilinayotgan shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham,

$$|f(z)| \leq |a_0| |z|^n + |a_1| |z|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| |z| \leq A(|z|^n + |z|^{n-1} + \dots + |z|)$$

ya'ni

$$|f(z)| \leq A \frac{|z| - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

$|z| < \delta$ va (1) ko'ra $\delta < 1$ bo'lganligi sababli

$$\frac{|z| - |z|^{n+1}}{1 - |z|} < \frac{|z|}{1 - |z|}$$

shuning uchun

$$|f(z)| < \frac{A|z|}{1-|z|} < \frac{A\delta}{1-\delta} = \frac{A \cdot \frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{A+\varepsilon}} = \varepsilon$$

shuni isbotlash talab etilgan edi.

2-lemma (Yuqori had moduli haqida) Agar koeffisientlari ixtiyoriy kompleks sonlar bo'lgan n – darajali ($n \geq 1$)

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

ko'phad berilgan bo'lsa va agar k istalgan musbat haqiqiy son bo'lsa, u holda z noma'lumning moduli bo'yicha yetarlicha katta qiymatlarida

$$|a_0 z^n| > k |a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| \quad (2)$$

tengsizlik o'rinlidir, ya'ni yuqori hadning moduli qolgan barcha hadlar yig'indisining modulidan katta, shu bilan birga istalgancha marta katta bo'ladi.

Isbot: Haqiqatan ham, $a_1, a_2, \dots, a_n$ koeffisientlar modullari ichida eng kattasi A bo'lsin:

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

U holda

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| < |a_1| |z|^{n-1} + |a_2| |z|^{n-2} + \dots + |a_n| \leq A(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + 1) = A \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$$

$|z| > 1$ deb,

$$\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < \frac{|z|^n}{|z| - 1}$$

ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| < A \frac{|z|^n}{|z| - 1}$$

Shunday qilib, agar z noma'lum $|z| > 1$ shartdan tashqari yana ushbu

$$kA \frac{|z|^n}{|z| - 1} \leq |a_0 z^n| = |a_0| |z|^n$$

Tengsizlikni ham qanoatlantirsa, ya'ni

$$|x| \geq \frac{kA}{|a_0|} + 1 \quad (3)$$

Bo'lsa, (2) tengsizlik bajariladi. (3) tengsizlikning o'ng tomoni 1 dan katta bo'lgani uchun z ni bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (2) tengsizlik bajariladi. Shu bilan lemma isbot bo'ldi.

3-lemma (Ko'phad moduli o'sishi haqidagi lemma)

Koeffisientlari kompleks, darajasi birdan kichik bo'lmagan har qanday $f(z)$ ko'phad uchun va istalgancha katta bo'lgan harqanday musbat haqiqiy $\forall M > 0$ son uchun shunday musbat haqiqiy $\exists N > 0$ son topish mumkinki, $|z| > N$ bo'lganda $|f(z)| > M$ bo'ladi.

Isbot: Aytaylik

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

bo'lsin. U holda $|\alpha + \beta| \geq |\alpha| - |\beta|$ tengsizlikka ko'ra

$$|f(z)| = |a_0 z^n + (a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n)| \geq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| \quad (4)$$

bo'ladi. $k=2$ deb, yuqori had moduli haqidagi lemmani qo'llaymiz: shunday $\exists N_1 > 0$ son mavjudki, $|z| > N_1$ bo'lganda

$$|a_0 z^n| > 2|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n|$$

bo'ladi. Bu yerdan

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| < \frac{1}{2} |a_0 z^n|$$

ya'ni (4) ga ko'ra

$$|f(z)| > |a_0 z^n| - \frac{1}{2} |a_0 z^n| = \frac{1}{2} |a_0 z^n|$$

Bu tengsizlikni o'ng tomoni

$$|z| > N_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$$

bo'lganda M dan katta bo'ladi. Shunday qilib, $|z| > N = \max(N_1, N_2)$ bo'lganda $|f(z)| > M$ bo'ladi. Lemma isbot bo'ldi.

Bu lemmaning ma'nosi quyidagi geometrik illyutratsiya yordamida ochib berilishi mumkin. Kompleks tekislining har qaysi z_0 nuqtasida bu tekislikka uzunligi (berilgan masshtab birligida) $f(z)$ ko'phadning shu nuqtadagi qiymati moduliga, ya'ni $|f(z_0)|$ ga teng bo'lgan perpendikulyar chiqarilgan deb faraz qilaylik. Ko'phad modulining yuqoridagi isbot qilingan uzluksizligiga ko'ra perpendikulyarlarning oxirlari (uchlari) kompleks tekislikning tepasida joylashgan birorta uzluksiz egri chiziq sirt tashkil etadi. Ko'phad modulining o'sishi haqidagi lemma bu sirt $|z_0|$ o'sganda kompleks tekislikdan borgan sari uzoqlashib borishini ko'rsatadi. Bunday uzoqlashish, tushunarliki, monoton bo'lmaydi. 1-rasm bu sirtning kompleks tekislikka perpendikulyar va 0 nuqtadan o'tuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini sxematik tasvirlaydi.

Quyidagi lemma asosiy teoremani isbotida muhim rol o'ynaydi.

Dalamber lemmasi. Agar n – darajali ($n \geq 1$) $f(z)$ ko'phad $z = z_0$ nuqtada nolga aylanmasa, ya'ni $f(z_0) \neq 0$ va shuning uchun $|f(z_0)| > 0$ bo'lsa, u holda umuman kompleks bo'lganshunday $\exists h$ orttirma topish mumkinki,

$$|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$$

bo'ladi.

Isbot: Teylor formulasiga ko'ra, hozircha h orttirma ixtiyoriy desak,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

bo'ladi. Shart bo'yicha, z_0 son $f(z)$ uchun ildiz emas. Biroq tasodifan bu son $f'(z)$ uchun, shuningdek, boshqa bazi bir hosilalari uchun ildiz bo'lib qolishi mumkin. z_0 ildizi bo'lmagan eng birinchi hosila k – hosila bo'lsin ($k \geq 1$), ya'ni

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Bunday k mavju, chunki agar a_0 son $f(z)$ ko'phadning yuqori koeffisienti bo'lsa, u holda

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_0 \neq 0$$

Shunday qilib,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(z_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0) .$$

$f^{(k+1)}(z_0), \dots, f^{(n)}(z_0)$ sonlarning ba'zilar nolga teng bo'lishi mumkin. Biroq bu biz uchun muhim emas.

Bu tenglikning ikkala tomonini shartga ko'ra noldan farqli bo'lgan $f(z_0)$ ga

bo'lib va $c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j! f(z_0)}, j = k, k+1, \dots, n$ belgilash kiritib,

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = 1 + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + \dots + c_n h^n$$

ni yoki $c_k \neq 0$ bo'lgani uchun

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = (1 + c_k h^k) + c_k h^k \left(\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right)$$

ni hosil qilamiz. Modullarga o'tsak,

$$\left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| \leq |1 + c_k h^k| + |c_k h^k| \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right| \quad (5)$$

ni hosil qilamiz.

Shu paytga qadar h ortirma hech narsa faraz qilmadik. Endi h ni tanlab olamiz, bunda uning modulini va argumentini alohida- alohida tanlaymiz. h ning moduli quyidagicha tanlanadi:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}$$

h ning ozod hadsiz ko'phad bo'lgani uchun 1-lemmaga ko'ra ($\varepsilon = \frac{1}{2}$ deb

olamiz) shunday $\exists \delta_1 > 0$ topish mumkinki, $|h| < \delta_1$ bo'lganda

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right| < \frac{1}{2} \quad (6)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{|c_k|^{-1}}$$

bo'lganda

$$|c_k h^k| < 1 \quad (7)$$

bo'ladi.

h ning moduli

$$|h| < \min(\delta_1, \delta_2) \quad (8)$$

tengsizlik asosida tanlangan deb faraz qilaylik. U holda (6) ga ko'ra (5) tengsizlik quyidagi qa'tiy tengsizlikka aylanadi:

$$\left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| < |1 + c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k| \quad (9)$$

(7) shartdan keyinchalik foydalamiz.

h ning argumentini tanlash uchun $c_k h^k$ son manfiy haqiqiy son bo'lishligini talab qilamiz. Boshqacha aytganda,

$$\arg(c_k h^k) = \arg c_k + k \arg h = \pi$$

bu yerdan

$$\arg h = \frac{\pi - \arg c_k}{k} \quad (10)$$

h ni bunday tanlashda $c_k h^k$ son o'zining absolyut qiymatidan ishora bo'yicha farq qiladi:

$$c_k h^k = -|c_k h^k|,$$

shuning uchun (7) tengsizlikdan foydalanib,

$$|1 + c_k h^k| = |1 - |c_k h^k|| = 1 - |c_k h^k|$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, h ni (8) va (10) shartlar asosida tanlab olishda (9) tengsizlik ushbu ko'rinishga keladi:

$$\left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| < 1 - |c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k| = 1 - \frac{1}{2} |c_k h^k| < 1$$

ya'ni

$$\left| \frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} \right| = \frac{|f(z_0 + h)|}{|f(z_0)|} < 1,$$

bu yerdan

$$|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$$

kelib chiqadi, bu Dalamber lemmasini isbotlaydi. Isbot tugadi.

Yuqorida keltirilgan geometrik illyutratsiya yordamida Dalamber lemmasini quyidagicha tushuntirish mumkin. $|f(z_0)| > 0$ ekanligi berilgan. Bu z_0 nuqtada kompleks tekislikka o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi noldan farqli degani.

U holda Dalamber lemmasiga ko'ra shunday $\exists z_1 = z_0 + h$ nuqta topish mumkinki, $|f(z_1)| < |f(z_0)|$ bo'ladi, ya'ni z_1 nuqtadagi perpendikulyar z_0 nuqtadagiga qaraganda qisqaroq bo'ladi va demak, perpendikulyarlarning oxirlaridan hosil bo'lgan sirt bu yangi nuqtada kompleks tekislikka ancha yaqin bo'ladi. Lemmaning isboti h ning modulini hohlagancha kichik qilib olish mumkinligini, ya'ni z_1 nuqtani z_0 nuqtaga istalgancha yaqin qilib olish mumkinligini ko'rsatadi.

$f(z)$ ko'phadning ildizlari bo'lin shunday kompleks sonlar (ya'ni kompleks tekislikning nuqtalari) hizmat qiladi, perpendikulyarlarning oxirlaridan hosil bo'lgansirt kompleks tekislikka o'sha nuqtada urinadi. Dalamber lemmasining o'ziga tayanib bunday nuqtalarning mavjudligini isbotlash mumkin emas. Haqiqatan ham, bu lemmadan foydalanib nuqtalarning shunday cheksiz ketma-ketligi $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ ni topish mumkinki,

$$|f(z_0)| > |f(z_1)| > |f(z_2)| > \dots \quad (11)$$

bo'ladi. Biroq, bu yerdan $f(\bar{z})=0$ bo'ladigan $\bar{z}$ nuqtaning mavjudligi kelib chiqmaydi. Undan tashqari, musbat haqiqiy sonlarni kamayuvchi (11) ketma-ketligi nolga intilishi hech ham shart emas.

Kelgusi bayonimiz kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazaryasidagi bir teoreмага asoslangan bo'lib, bu teorema bizga matematik analizkursidan ma'lum bo'lgan Veyershtass teoremasining umumlashganidir. U kompleks o'zgaruvchining haqiqiy funksiyalariga, ya'ni kompleks o'zgaruvchini haqiqiy qiymatlarigina qabul qiluvchi funksiyalarga tegishlidir; bunday funksiyalarga ko'phad moduli misol bo'ladi.

Bu teoremani ta'riflash soddaligi uchun yopiq doira E haqida gapiramiz; Yopiq doira deganda kompleks tekislikning barcha nuqtalari o'zida qo'shilgan doirani tushunamiz.

Agarda kompleks o'zgaruvchi z ning haqiqiy $g(z)$ funksiyasi yopiq doira E ning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda E da shunday z_0 nuqta mavjudki, E dan olingan barcha z lar uchun $g(z) \geq g(z_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Binobarin, z_0 nuqta $g(z)$ uchun E doiradagi minimum nuqta bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazaryasiga doir barcha kurslardan topish mumkin, shu sabali uni keltirmaymiz.

$g(z)$ funksiya E doiraning hamma nuqtalarida manfiy bo'lmagan hol bilan chegaralanib-faqat ana shu hol biz uchun qiziqish tug'diradi-yuqorida foydalanilgan illyutratsiya yordamida bu teoremaning geometrik ma'nosini tushuntiramiz. E doiraning har bir z_0 nuqtasidan $g(z_0)$ uzunlikdagi perpendikulyar o'tkazamiz. Bu perpendikluyarlarning oxirlari uzluksiz egri chiziqli sirtning bo'lagini tashkil etadi, shu bilan birga E doiraning yopiqqligi tufayli sirtning ana shu bo'lagi uchun minimum nuqtalarining mavjudligi geometrik jihatdan yetarlicha oydinlashadi. Bu illyutratsiya, albatta, teoremani isbotini o'rnini bosa olmaydi.

Endi asosiy teoremani isbotiga o'tamiz.

Teorema: (Algebraning asosiy teoremasi)

Darajasi birdan kichik bo'lmagan istalgan son ko'effitsentli ko'phadning hech bo'lmaganda bitta ildizi, umumiy holda kompleks ildizi mavjud.

Isbot: n – darajali $f(z)$ ko'phad berilgan bo'lsin ($n \geq 1$). Agar ozod hadi a_n bo'lsa, ravshanki, $f(0) = a_n$. Bu ko'phadga, $M = |f(0)| = |a_n|$ deb, ko'phad modulining o'sishi haqidagi lemmani qo'llaymiz. Demak, shunday $\exists N > 0$ mavjudki, $|x| > N$ bo'lganda $|f(z)| > |f(0)|$ bo'ladi. Veyershtrass teoremasini yuqoridagi umumlashmasini, yopiq E doirani tanlab olinganda ham, $|f(z)|$ funksiyaga tadbiq etilishi mumkinligi ravshan. E sifatida markazi 0 nuqtada bo'lgan N radiusli aylana bilan chegaralangan yopiq doirani olamiz. $|f(z)|$ uchun E doiradagi minimum nuqta z_0 bo'lsin, u holda, hususan, $|f(z_0)| \leq |f(0)|$ ekanligi kelib chiqadi.

z_0 nuqta aslida $|f(z)|$ uchun butun kompleks tekislikda minimum nuqta bo'lishi ko'rish oson: agar z' nuqta E dan tashqarida yotsa, u holda $|z'| > N$ bo'ladi va shuning uchun

$$|f(z')| > |f(0)| \geq |f(z_0)|$$

Nihoyat, bu yerdan $f(z_0) = 0$ ekanligi, ya'ni z_0 nuqta $f(z)$ uchun ildiz bo'lishi kelib chiqadi: agar $f(z_0) \neq 0$ bo'lganda edi, u holda Dalamber lemmasiga ko'ra shunday $\exists z_1$ nuqta mavjud bo'lardiki, bu nuqtada $|f(z_1)| < |f(z_0)|$ bo'lardi; biroq bu z_0 nuqtaning hozirgina tayinlangan xossasiga ziddir. Asosiy teorema isbot bo'ldi.

2.2-§ Algebraning asosiy teoremasidan kelib chiqadigan natijalar.

Koeffisientlari ixtiyoriy kompleks sonlar n – darajali ($n \geq 1$)

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (12)$$

ko'phad berilgan bo'lsin. Biz uni bu yerda ham o'zining koeffisientlari to'plami bilan to'la aniqlangan formal algebraik ifoda deb qaraymiz. Ildizning mavjudligi haqida asosiy teoreмага ko'ra $f(z)$ uchun kompleks yoki haqiqiy α_1 ildiz mavjud. Shu sababli $f(z)$ ko'phad

$$f(z) = (z - \alpha_1) \varphi(z)$$

yoyilmaga ega. $\varphi(z)$ ning koeffisientlari ham haqiqiy yoki kompleks sonlardan iborat bo'ladi, shuning uchun u α_2 ildizga ega, bu yerdan

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \psi(z)$$

Shu yo'sinda davom etsak, chekli sondagi qadamdan keyin n – darajali $f(z)$ ko'phadning n ta chiziqli ko'paytuvchilar shaklida yoyilmasiga kelamiz:

$$f(z) = a_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \quad (13)$$

a_0 koeffisient quyidagi sababga ko'ra paydo bo'ladi: agar (13) ifodaning o'ng tomoni birorta b koeffisient turganida edi, u holda qavslarni ochgandan so'ng $f(z)$ ning yuqori hadi bz^n ko'rinishda bo'lar edi, vaholanki, aslida (11) ga ko'ra, u $a_0 z^n$ bo'lishi kerak. Shuning uchun $b = a_0$ (13) yoyilma shu tipdagi yoyilma ko'paytuvchilarning tartibi aniqligida yagonadir.

Haqiqatan ham, ayatlyik,

$$f(z) = a_0 (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n) \quad (14)$$

yoyilma ham o'rinli bo'lsin (13) va (14) dan.

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n) \quad (15)$$

tenglik kelib chiqadi.

α_j ildiz barcha β_j , $j=1,2,\dots,n$ lardan farqli bo'lganda edi, u holda (15) da noma'lum o'rniga α_j ni qo'yib, chap tomonda nol, o'ng tomonda esa noldan farqli sonni hosil qilgan bo'lar edik. Shunday qilib, har qanday α_j ildiz bironta β_j ildizga teng va aksincha.

Bu yerdan (13) va (14) yoyilmalarning ustma-ust tushishi kelib chiqmaydi. Haqiqatan ham, α_j , $j=1,2,\dots,n$ ildizlart orasida bir-biriga tenglari ham bo'lishi mumkin. Masalan, bu ildizlarning s tasi α_1 ga teng bo'lsin va ikkinchi tomondan β_j , $j=1,2,\dots,n$ ildizlar ichida α_1 ga teng bo'lgan t ta ildiz mavjud bo'lsin deylik. $s=t$ ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Ko'phadlar ko'paytmasining darajasi ko'paytuvchilar darajalari yig'indisiga teng bo'lganligi sababli, noldan farqli ikkita ko'phadning ko'paytmasi nolga teng bo'lishi mumkin emas. Bu yerdan, agar ko'phadlarning ikkita ko'paytmasi bir-biriga teng bo'lsa, u holda tenglikning ikkala tomonini umumiy ko'paytuvchiga qisqartirish mumkinligi kelib chiqadi: agar

$$f(z)\varphi(z)=g(z)\varphi(z)$$

va $\varphi(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$[f(z)-g(z)]\varphi(z)=0$$

dan $f(z)-g(z)=0$ kelib chiqadi, ya'ni

$$f(z)=g(z)$$

Buni (15) tenglikka tadbiq etamiz. Masalan, agr $s>t$ bo'lsa, u holda (15) tenglikning ikkala tomonini $(z-\alpha_1)^t$ ko'paytuvchiga qisqartirib, chap tomoni hali ham $z-\alpha_1$ ko'paytuvchiga ega bo'lgan, o'ng tomoni esa bu ko'paytuvchiga ega bo'lamagan tenglikni hosil qilamiz. Biroq yuqorida bu qarama-qarshilikka olib kelishi ko'rsatilgan edi. Shunday qilib, (13) yoyilmani $f(z)$ ko'phad uchun yagonaligi isbot qilindi.

Bir xil ko'paytuvchilarni jamlab, (13) yoyilmani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(z) = a_0 (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_l)^{k_l} \quad (16)$$

bu yerda

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$$

Bunda, endi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ ildizlar orasida bir-biriga teng bo'lganlari yo'q deb hisoblanadi.

(16) dagi $k_i, i = 1, 2, \dots, l$ son α_i ildizning $f(z)$ ko'phaddagi karrasi ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, bu karralilik (takroriylik) s_i ga teng bo'lsa, u holda $k_i \leq s_i$ bo'ladi. Aytaylik, $k_i < s_i$ bo'lsin, $f(z)$ ko'phad uchun ildiz karraliligining ta'rifiga asosan

$$f(z) = (z - \alpha_i)^{s_i} \varphi(z)$$

yoyilma mavjud. Bu yoyilmada $\varphi(z)$ ko'paytuvchini uning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi bilan almashtirsak, $f(z)$ ning (13) dan farqli chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasini hosil qilgan bo'lar edik, ya'ni bu yoyilmaning yuqorida isbot qilingan yagonaligiga zid hulosaga kelar edik.

Shunday qilib, quyidagi muhim natijani isbot qildik:

Koeffisientlari ixtiyoriy sonlardan iborat bo'lgan n -darajali ($n \geq 1$) $f(z)$ ko'phad- agar uning ildizlarining har birini ularning karraligi nechta bo'lsa, shuncha marta sanasak n ta ildizga ega bo'ladi.

Teorema $n=0$ da ham o'rinli ekanini qayd qilib o'taylik, chunki nolinch darajali ko'phadning ildizga emasligi tushunarli. Bu teorema darajaga ega bo'lmagan va z ning istalgan qiymatida nolga teng bo'lgan 0 ko'phadga tadbiq qilib bo'lmaydi. Bu aytilga izohdan quyidagi teoremani isbot qilishda foydalanamiz:

Agar darajalari n dan yuqori bo'lmagan $f(z)$ va $g(z)$ ko'phadlar noma'lumning n tadan ortiq turli qiymatlarida teng qiymatlarga ega bo'lsa, u holda holda $f(z) = g(z)$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $f(z) - g(z)$ ko'phad farazimizga ko'ra n tadan ortiq ildizga egadir, uning darajasi, esa n tadan yuqori bo'lmaganligi sababli $f(z) - g(z) = 0$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Shunday qilib, har xil sonlar cheksiz ko'p ekanligi hisobga olsak, ixtiyoriy ikkita turli $f(z)$ va $g(z)$ ko'phad uchun z noma'lumning shunday $\exists c$ qiymatlari topiladiki, $f(c) \neq g(c)$ bo'ladi deb aytish mumkin. Bunday c larni faqatgina kompleks sonlar orasida emas, balki haqiqiy, ratsional va hatto butun sinlar orasida ham topish mumkin.

Shunday qilib, z noma'lumning hech bo'lmaganda birorta darajasida turlicha koeffitsientlarga ega bo'lgan son koeffitsientli ikkita ko'phad z kompleks o'zgaruvchining turlicha kompleks funksiyalari bo'ladi.

2.3-§ Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning nollari.

Golomorf funksiyaning nollari haqidagi xossani keltirishdan avval ba'zi tushunchalar va tasdiqlarni bayon etamiz.

Faraz qilaylik, biror $f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislik $\overline{C}$ da berilgan bo'lib, $a \in \overline{C}$ bo'lsin.

Agar

$$f(a) = 0$$

bo'lsa, a kompleks son $f(z)$ funksiyaning noli deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu funksiya a nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (1)$$

Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda

$$f(a) = c_0 = 0$$

bo'lib, (1) formula ushbu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (1) formulada

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0 \quad (2)$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. U holda (1) tenglikdan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_m (z - a)^m + c_{m+1} (z - a)^{m+1} + \\ &+ c_{m+2} (z - a)^{m+2} + \dots = (z - a)^m [c_m + c_{m+1} (z - a) + \dots] \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki

$$c_i = \frac{f^{(i)}(z)}{i!}$$

Yuqoridagi (2) munosabatni e'tiborga olib,

$$f^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

bo'lishini topamiz.

Bu holda $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli deyiladi.

Shunday qilib, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'lsa, u holda

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

bo'lib,

$$g(z) = c_m + c_{m+1}(z - a) + c_{m+2}(z - a)^2 + \dots$$

($g(a) \neq 0$) funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

ifodalanib $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lsa, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiya ushbu

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \quad (3)$$

qatorga yoyiladi.

$z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin.

Ravshanki, bu holda

$$c_0 = f(\infty) = 0$$

bo'lib, (3) formula ushbu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \quad (4)$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (4) formulada

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karralli noli bo'ladi. U holda (4) formuladan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} = c_m \frac{1}{z^m} + c_{m+1} \frac{1}{z^{m+1}} + c_{m+2} \frac{1}{z^{m+2}} \dots = \\ &= \frac{1}{z^m} \left(c_m + c_{m+1} \frac{1}{z} + c_{m+2} \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^m} \varphi(z) \end{aligned}$$

bo'lishi topamiz. Bu yerda

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1} \frac{1}{z} + c_{m+2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

funksiya uchun

$$\varphi(\infty) = c_m \neq 0$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \varphi(z)$$

ifodalanib $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

Endi golomorf funksiyaning nollari haqidagi xossani keltiramiz.

T e o r e m a. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lib, shu $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin: $f(a) = 0$. U holda yo $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aynan nolga teng: $f(z) \equiv 0$, yoki a

nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa noli bo'lmaydi.

I s b o t. Shartga ko'ra $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf. Unda funksiya $z = a$ nuqta atrofida qatorga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (5)$$

Aytaylik, (5) ifodada barcha $c_n = 0$ bo'lsin:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$$

Ravshanki, bu holda funksiya $z = a$ nuqta atrofida $f(z) = 0$ bo'ladi.

Endi (5) da

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'lib, u holda quyidagicha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

Ifodalanadi. Bu yerda $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf va $g(z) \neq 0$. Ayni paytda $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada uzluksiz ham bo'ladi. Unda $g(z) \neq 0$ bo'lganligi sababli $z = a$ nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $g(z) \neq 0$ bo'ladi. Binonarin, shu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa nollari bo'lmaydi.

Bu xossa golomorf funksiya nollari yakkalangan bo'lishini bildiradi.

2.4-§ Kvaternion o'zgaruvchili elementar funksiyalar.

Kompleks analiz kursidan ma'lumki $e^z, \sin z, \cos z$ funksiyalar quyidagi darajali katorlarga yoyiladi.

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

X,amma z kompleks sonlarda yaqinlashadi. SHuning uchun $e^z, \sin z, \cos z$ bu funksiyalarni Kvaternion uzgaruvchilarga bog'likdini anikdash tugrisida tabiiy savol tugiladi.

(1) Kvaternion uzgaruvchiga bog'lik elementar funksiyalarni karaymiz.

Misol uchun: eksponentsial funksiya formal ravishda quyidagi ko'rinishda aniqlanadi.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x^0$$

Bu erda darajasini 1 ga teng deb hisoblanadi. $0!=1$ eksponentsial funksiyaning argumentiga haqiqiy sonlarni emas balki boshqa algebraning sonlarini bu holda ham nolinch darajaga ko'tarish bu algebraning sonlarini bu holda ham nolinch darajaga ko'tarish bu algebraning birlik sonini beradi deb hisoblaymiz.

Misol uchun: Kompleks sonlar algebrasiga tegishli bulsa x , u holda eksponentsial funksiya kuyidagi Eyler tenglamasi bilan aniklanadi.

$$e^{x_0 + ix_1} = e^{x_0} (\cos(x_1) + i \sin(x_1))$$

xuddi shunga o'xshash Mauvur sinus va kosinus tenglamalari aniqlanadi. SHunday holni qaraymizki, o'zgaruvchan elementar funksiyalar sifatida

Kvarternion qatnashadi. Funksiyaning ta'rifini berishdan Kvarternionlardan foydalanilmaydi, faqat haqiqiy yoki qiymatlar to'plami haqiqiy sonlar. Kvarternion umumiy holda quyidagilardan hisoblanadi.

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

Elementar funksiyalarning argumenta sifatida Kvarternion olinganda kompleks sonlarga o'xshab ularni mavhum birlik ko'rinishida ta'svirlash mumkin.

$$q = q_0 + \frac{iq_1 + jq_2 + kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$$q = Q_0 + IQ_1$$

$$Q_0 = q_0$$

$$I = \frac{iq_1 + jq_2 + kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

$$Q_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Kvaternionni yuqoridagi ko'rinishda yozganda kompleks sonlarga o'xshash xossasi saqlanadi.

$$|q|^2 = Q_0^2 + Q_1^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$q^2 = Q_0^2 - Q_1^2 + 2IQ_0Q_1$$

$$I^2 = -1.$$

Bu xossalardan foydalanib, bir kompleks o'zgaruvchili elementar funksiyalarni Kvaternion o'zgaruvchilarni quyidagilarga asoslanib hosil qilish mumkin.

1. Kvaternionni shartli kompleks son bilan almashtirish
2. Funksiyalarni kompleks o'zgaruvchili funksiyalar sifatida ochish.
3. Belgilashlarni teskarisiga almashtirish.

$$Q_0 = q_0$$

$$I \rightarrow \frac{iq_1 - jq_2 - kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

$$Q_1 \rightarrow \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Ba'zi Kvaternion funksiyalarni ko'rinshlarini yozamiz.

$$e^q = e^{Q_0 + iQ_1} = e^{Q_0} (\cos Q_1 + i \sin Q_1) =$$

$$= e^{q_0} \left(\cos \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + \frac{iq_1 + jq_2 + kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \cdot \sin \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \right)$$

$$\sin(q) = \sin(Q_0 + IQ_1) = \sin Q_0 \operatorname{ch} Q_1 + I \cos Q_0 \operatorname{sh} Q_1 =$$

$$= \sin q_0 \operatorname{ch} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + \frac{iq_1 + jq_2 + kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \cdot \cos q_0 \operatorname{sh} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$$\cos(q) = \cos(Q_0 + IQ_1) = \cos Q_0 \operatorname{ch} Q_1 - I \sin Q_0 \operatorname{sh} Q_1 =$$

$$= \cos q_0 \operatorname{ch} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} - \frac{iq_1 - jq_2 - kq_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \sin q_0 \operatorname{sh} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Qolgan funksiyalar logarifm, sinus, kosinus, giperboliklar xuddi shu usullar bilan tasvirlanishi mumkin. Demak, Kvaternionni shartli kompleks son bilan almashtirib, Kvaternion o'zgaruvchilarga bog'lik elementar funksiyalarning analitik ifodasini olish mumkin

2.5-§ Kvarternion o'zgaruvchiga bog'liq ko'phadning ildizi mavjudligi

Biz quyidagi tenglamani kvaternion ildizi mavjudligini isbotlaymiz:

$$a(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m = 0, \quad a_m \neq 0 \quad (1)$$

bu yerda a_m ko'effitsientlar haqiqiy kvaternion algebrasidan olingan noldan farqli haqiqiy sonlar, x esa kvaternion o'zgaruvchi.

(1) ning ko'effitsientlari haqiqiy yopiq R maydondan olingan kvaternionlardir. a_r kvaternionlarni ularni qo'shmasi $\overline{a_r}$ bilan almashtirib, $\overline{a}(x)$ ko'phadni olamiz. Buni o'ngdan $a(x)$ ga ko'paytiramiz va x ning ko'effitsientlari bilan kommutativ bo'lsin deb olamiz. Biz ko'effitsientlari R da bo'lgan $\alpha(x)$ ko'phad olamiz, bu ko'phad algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, $R(x, i)$ da chiziqli ko'paytuvchilarga ajraladi, bundan $R(i, j, x)$ dagi $\alpha(x)$ barcha boshqa ko'paytituvchilarga ixtiyoriy ajralganda chiziqli ko'paytuvchiga ega bo'lishi shart.

Endi $a(x)$ boshqa ajralmaydigan boshqa ajralmaydigan ko'paytuvchilarga ajraladi bular $\alpha(x)$ ni ham ko'paytuvchilari bo'ladi.

Bunda Ore teoremasiga ko'ra ularning ham chiziqliligi kelib chiqadi.

$x - c$ ni o'ng chiziqli ko'paytuvchi sifatida olib, quyidagini yozish mumkin,

$$a(x) = (x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \dots + b_{m-1})(x - c)$$

Lekin, $x = c$ $a(x) = 0$ ni yechimi ekanligi bu tenglamadan osongina kelib chiqmaydi, chunki, x ning ko'effitsientlari bilan kommutativ emas deb faraz qilgan edik. Lekin, shunga qaramasdan, yuqoridagi tenglamani (1) ga o'xshash ko'rinishda qayta yozib olib,

$$a(x) = x^m + (b_1 - c)x^{m-1} + (b_2 - b_1)x^{m-2} + \dots + (b_{m-1} - b_{m-2})x - b_{m-1}c$$

biz c $a(x)$ ni ildiz ekanligini darhol tekshirib ko'rish mumkin.

II. O'ng bo'lish algoritmi. Ixtiyoriy x kvaternion n normasi x bilan $\bar{x}$ ko'paytmasi orqali aniqlanadi va x va $\bar{x}$ ning yig'indisi x ning t yo'lini beradi. Ma'limki, x quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$x^2 - tx + n = 0 \quad (2)$$

Endi $a(x)$ ni o'ng tarafini bu ifodaga bo'lib, quyidagi ifodani olamiz:

$$a(x) = q(x^2 - tx + n) + f(a_r, t, n)x + g(a_r, t, n) \quad (3)$$

qoldiq keyingi ikki qism orqali ifodalanadi va ular n va t ga hamda $a(x)$ ning koeffitsientlariga bo'g'liq ko'phadlardir. q bo'linmaning tabiati bizni qiziqitmaydi. Eslatib o'tamizki, qoldiq (1) tenglama yechimi uchun nolga yaqinlashadi va aksincha.

Agar $f \neq 0$ bo'lsa, qoldiqning nolga yaqinlashish quyidagi formula orqali ifodalash mumkin:

$$x = -\frac{1}{f} \cdot g = -\frac{1}{\overline{f}f}(fg) \quad (4)$$

Bu yerda $\overline{f}$ f ni qo'shmasi bo'lib, u f dagi har bir a_r ni uning $\overline{a_r}$ qo'shmasi bilan almashtirish bilan hosil qilingan. Ko'paytmaning qo'shmasi teskarisi olingan qo'shmalar ko'paytmasiga teng bo'lgani uchun, quyidagini olamiz.

$$\bar{x} = -\frac{1}{\overline{f}f}(\overline{g}f)$$

Keyingi ikki tenglamani ko'paytirish va qo'shish yordamida x ning normasi va yo'lini topamiz:

$$n = \frac{1}{\overline{f}f}(\overline{g}g), \quad t = \frac{1}{\overline{f}f}(\overline{f}g + \overline{g}f) \quad (5)$$

$\overline{f}f$ va $\overline{g}g$ haqiqiy koeffitsientlarga ega va boshqa ko'phadlar bilan kommutativ.

Bu tenglamalar quyidagi formada ham yozish mumkin:

$$N(t, n) = n\overline{f}f - \overline{g}g, \quad T(t, n) = t\overline{f}f + \overline{f}g + \overline{g}f = 0 \quad (6)$$

Bu yerda $N(t, n)T(t, n)$ lar t va n ga bo'g'liq haqiqiy koeffitsientli ko'phadlar. Dastlab (1) ning har qanday x_0 ildizi (6) tenglamani qanoatlantiruvchi t_0 yo'l va n_0 normaga ega ekanligini aytamiz. Yuqoridagi fikrlar o'rinli. $f(a_r, t_0, n_0) = 0$ shart

bajarilganda hamma vaqt o'rinli, bu holda (3) dan kelib chiqadiki $g(a_r, t_0, n_0)$ nolga intiladi va (6) tenglama bajariladi.

Aksincha, (6) tenglamaning ixtiyoriy shunga o'xshash haqiqiy (t_0, n_0) yechimi (1) ning bir yoki bir nechta ildizlarini beradi.

Birinchidan faraz qilaylik $f(a_r, t_0, n_0) \neq 0$ bo'lsin. t_0 va n_0 qiymatlari x_0 kvaternion olish uchun (4) ga qo'yiladi va bu qiymatlar (2) ni qanoatlantirgani uchun (3) tenglama ko'rsatadiki x_0 $a(x)$ ning ildizi bo'ladi. Shu narsani takidlab o'tish kerakki, bu holda (6) tenglamaning bir yechimi (1) tenglamaning aniq bir yechimini beradi.

Ikkinchidan $f(a_r, t_0, n_0) = 0$ bo'lsa, u holda (6) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\overline{g}(a_r, t_0, n_0)g(a_r, t_0, n_0) = 0$$

Lekin kvaternion va uning qo'shmasi nolga teng bo'ladi faqat va faqat shu holdaki kvaternion nolga teng bo'lsa, bundan $g(a_r, t_0, n_0) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. (3) tenglamaga qaytib quyidagini olamiz:

$$x^2 - t_0x + n_0 = 0 \quad (7)$$

(7) tenglamani har qanday yechimi (1) ning ham yechimi ekanligini ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi analizlar (1) tenglamaning ildizlar sonini aniqlashga imkon beradi, lekin biz dastlab (7) tenglamani kvaternion sonini bilishimiz kerak.

4. Kvadrat tenglama

Quyidagi tenglamani qaraymiz

$$x^2 + bx + c = 0 \quad c \neq 0 \quad (8)$$

Bu yerda b, c lar kvaternionlar deb faraz qilamiz. $t(b)$ bilan b ning yo'li nolga bo'lsin, aks holda $x = y - \frac{1}{4}t(b)$ belgilash bilan so'ralayotgan shartga kelamiz.

Misol uchun (7) tenglamadagi $x = y + \frac{1}{2}t_0$ belgilash bilan

$$y^2 - d = 0 \quad d = \frac{1}{4}t_0^2 - n_0 \quad (9)$$

(8) dagilar bilan bu tenglamani tuzatish mumkin.

Faraza qilamiz, $y = y_0 + y_1i + y_2j + y_3ij$ bo'lsin, shu bilan birga y ning subcriti haqiqiy bo'lsin. Buni (9) ga qo'yamiz va natijani chiziqli erkli birliklarga $1, i, j$ nisbatan ajratamiz.

$$y^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = d, \quad y_0y_1 = y_0y_2 = y_0y_3 = 0$$

Agar $d \geq 0$ bo'lsa, u holda $y_1 = y_2 = y_3$ hamda (9) ning ildizlari $\pm \sqrt{d}$ bo'ladi.

Agar $d < 0$ bo'lsa, u holda $y_0 = 0$ hamda (9) ning haqiqiy $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -d^2$ yechimiga mos keluvchi cheksizlashtirilgan yechimini olamiz. Bundan kelib chiqadi b va c larni bir vaqtda nol emas.

(3) da bo'linish algaritmini qo'llab f va g :

$$f = b + t, \quad g = c - n \quad (10)$$

Bundan (6) ni ko'rinishini

$$nt^2 + nb\bar{b} + -c\bar{c} + n(c + \bar{c}) - n^2 = 0 \quad (11)$$

hamda

$$t^3 + tb\bar{b} - 2nt + t(c + \bar{c}) + \bar{b}c + \bar{c}b = 0 \quad (12)$$

Chunki $b + \bar{b}$ nolga teng. Agar bu tenglamalarning $t = t_0, n = n_0$ haqiqiy yechimi bo'lsa, u holda $b = -t_0$ va $c = n_0$ ni olamiz, lekin t_0 haqiqiy va b nolga teng yo'lga ega bo'lgani uchun $f = 0$ va $g = 0$ hamda c – haqiqiy bo'lishi shart.

(8) tenglama (9)ni bir ko'rinishga kamaytiradi, bu esa farazimizga zid natija (11) va (12) ning yechimlari $f = 0$ ni qanoatlantirmaydi va shunga amin bo'ldikki bu haqiqiy yechilarning har biri (8) ning aniq bir yechimi bo'ladi.

Bu yechim (10) dagi funksiyalarni (4) tenglamaga qo'yish bilan olingan.

Quyidagi belgilash kiritamiz:

$$B = b\bar{b} + c + \bar{c}, \quad C = c\bar{c}, \quad D = \bar{b}c + \bar{c}b \quad (13)$$

bu yerda B, C, D lar haqiqiy . Dastlab biz $t = 0$ bo'lganda (11) va (12) tenglamalarning yechimlarini qaraymiz. (12) ga ko'ra $D = 0$ (11) formula bilan berilgan n – ning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha kamayadi

$$n^2 - Bn + c = 0 \quad (14)$$

Bizga haqiqiy ildizlar kerak, ixtiyoriy haqiqiy ildiz musbat bo'ladi chunki, (11),(12) tenglamadagi o'rnatilganholatga ko'ra, shuning uchun kelib chiqadiki biz (8) ning $B^2 - 4C$ ifoda manfiy nol, musbat holatga ko'ra, mos ravishda 0,1 yoki 2 ildizlarini olamiz.

Natijada $t \neq 0$ uchun (11) va (12) larning yechimlarini qidiramiz. Biz (12) ni n – uchun yechamiz. Yuqoridagilardan kelib chiqadiki:

$$n = (t^2 + tB + D) / 2t \quad (15)$$

hamda bu qiymatni (11) ga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$t^6 + 2Bt^4 + (B^2 - 4C)t^2 - D^2 = 0 \quad (16)$$

Bu tenglamalarning har bir aniq haqiqiy ildizi (15) yordamida, (8) ning ildizini beradi. (16) tenglamani haqiqiy ildizlar sonini topish maqsadida biz, quyidagini isbotladik:

Lemma: Agar $B < 0$ bo'lsa, u holda $B^2 - 4C < 0$ ham manfiy bo'ladi.

Isbot: $b \cdot \bar{b}$ manfiy emasligidan farazga ko'ra $c + \bar{c}$ ham manfiy bo'lishi kerak.

Biz quyidagi tenglikni yoza olamiz

$$B^2 - 4C = b\bar{b}B + b\bar{b}(c + \bar{c}) + (c - \bar{c})^2$$

Agar c quyidagi formada $c = c_0 + c_1i + c_2j + c_3ij$ bo'lsa, u holda bu tenglamaning o'ng tarafini oxirgi hadi $-4(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$ teng. Bundan kelib chiqadiki o'ng tarafdagi 3 ta had ham haqiqiy va ularning hech biri musbat emas, ularning hammasi nol bo'la olmaydi. Shuning uchun $b = 0, c = \bar{c}$ bu esa farazga zid va bu lemmani isbotlaydi.

Biz (16) ni t^2 ni kubi sifatida qaraymiz va musbat deb qidiramiz. Agar $D \neq 0$ bo'lsa, musbat ildizlar soni ishorani Discartes qoidasiga ko'ra va Lemma1 ga ko'ra 1 ga teng bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki (16) $D \neq 0$ bo'lsa, 2 ta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Agar $D = 0$ bo'lsa, biz (16) dan oddiy nol ildizlarini ajratib olamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$t^4 + 2Bt^2 + B^2 - 4C = 0 \quad (17)$$

Buni kvaternion tenglama deb qarasak ko'rishimiz mumkinki uning diskriminanti manfiy emas, shuning uchun ildizlar haqiqiy. Agar $B^2 - 4C > 0$ bo'lsa, Lemma1 ga ko'ra $B > 0$, (17) kvadrat tenglama manfiy ildizga ega. Bundan kelib chiqadiki shunga o'xshash (17) haqiqiy ildizga ega emas, agar $B^2 - 4C = 0$ bo'lsa.

2.5-§ Kvaternion o'zgaruvchining funksiyaning nollar to'plami.

Bizga H – haqiqiy kvaternion algebra berilgan bo'lsin, uning elementlarini va xossalari yuqoridagi paragraflarda batafsil ko'rib chiqqan edik. S – bilan ikki o'lchovli kvaternion birlik sferani belgilaymiz:

$$S = \{q \in H, q^2 = -1\}$$

Ixtiyoriy $I \in S$ mavhum birliklar uchun, $0,1$ va I dan o'tuvchi $L_I = R + IR$ kompleks to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Golomorflik ta'rifi quyidagicha ta'riflanadi:

T a ' r i f : H da Ω soha va $f : \Omega \rightarrow H$ funksiya bo'lsin. $\forall I \in S$ uchun $\Omega_I = \Omega \cap L_I$ va $f|_{\Omega_I}$ f_I ni qo'shmasini belgilaymiz, f_I funksiya golomorf deyiladi agar $f_I \in C^1(\Omega_I)$ va $\overline{\partial}_I f(x + Iy) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + Iy)$ bo'lsa. Bu tenglik aynan nolga teng bo'lsa ya'ni $\overline{\partial}_I f(x + Iy) \equiv 0$ bo'lsa va $\forall I \in S$ da f_I golomorf bo'lsa, u holda f funksiya bo'lakli regulyar deyiladi.

Misol. Kvaternion darajali qator $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n, a_n \in H$ yaqinlashish sohasida regulyar funksiya aniqlaydi, yaqinlashish sohasi quyidagi $B(0, R) = \{q \in H, |q| < 1\}$ dan iborat bo'ladi.

Teorema. $f : \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsin. Agar $p \in \Omega \cap R$ va $B = B(p, R) - \Omega$ da yotuvchi va markazi p nuqtada bo'lgan eng katta ochiq shar bo'lsin, u holda $\exists a_n \in H$ mavjudki, $\forall q \in B$ uchun $f(q) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (q - p)^n a_n$ bo'ladi.

Ω sodda simmetrik sohadagi regulyar funksiyalar to'plami R bo'yicha algebra bo'ladi, qachonki oddiy qo'shish va regulyar ko'paytirish deb nomlanadigan va $*$ bilan belgilangan mos ko'paytirish bilan ta'minlangan bo'lsa.

Xususiyl holda, bunda soha markazi O nuqtada bo'lgan shar, biz darajali qatorga yoyish va

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n b_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

formula yordamida (*) ko'paytirishdan foydalanishimiz mumkin.

Lemma1. (Bo'linish haqidagi lemma)

$\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha va $f: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsin. Ixtiyoriy $I, J \in S$ uchun, bunda $I \perp J$, shunday $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$ golomorf funksiyalar mavjudki, barcha $z \in \Omega_I$ uchun

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J \quad (4) \text{ bo'ladi.}$$

Ω sodda simmetrik sohadagi ikkita f, g regulyar funksiyalarning ko'paytmasini aniqlash uchun $I, J \in S$ $I \perp J$ qo'llab va shunday $F, G, H, K: \Omega_I \rightarrow L_I$ olib, barcha $z \in \Omega_I$ larda

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J, g_I(z) = H(z) + K(z)J \quad (5)$$

bo'ladi.

$$f_I * g_I: \Omega_I \rightarrow L_I \quad f_I * g_I(z) = [F(z)H(z) - G(z)\overline{K(z)}] + [F(z)K(z) + G(z)\overline{H(z)}]J \quad (6)$$

da aniqlangan golomorf funksiya bo'lsin.

Ta'rif. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha va $f: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsin. (6)

yoyilmadagidek aniqlangan

$$f * g(q) = \text{ext}(f_I * g_I)(q)$$

funksiya f va g ning regulyar ko'paytmasi deyiladi.

Izoh. (*) ko'paytirish assosiativ, distributiv, lekin kommutativ emas.

Regulyar qo'shish darajali qatorlar (6) da $\left(\sum_{n \in N} q^n a_n \right)^c = \sum_{n \in N} q^n \overline{a_n}$ yordamida

aniqlangan.

Ta'rif. $f - \Omega$ sodda simmetrik sohadagi regulyar funksiya bo'lsin va $f - \Omega_I$ da (5),

$f(z) = F(z) + G(z)J$ formula kabi ajralsin deb faraz qilamiz.

$$f_I^c(z) = \overline{F(z)} - G(z)J \quad (7)$$

golomorf funksiyani qaraymiz va yoyilish haqidagi lemmaga ko'ra f regulyar qo'shma funksiyasini

$$f^c(q) = \text{ext}(f_I^c)(q) \quad (8)$$

formula yordamida aniqlaymiz.

Bundan tashqari quyidagi ta'rif xuddi shunday farazni beradi.

Ta'rif. f funksiyani simmetrikligi quyidagi tarzda aniqlanadi.

$$f^s = f * f^s = f^s * f \quad (9)$$

Darajali qatorlar holida

$$\left(\sum_{n \in N} q^n a_n \right)^s = \sum_{n \in N} q^n \sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}}$$

bunda barcha $n \in N$ larda $\sum_{k=0}^n a_k \overline{a_{n-k}} \in R$.

Ummumiy holda $f - \Omega_I$ da (5) formuladek ajralsa, u holda

$$f_I * f_I^c = (F(z) + G(z)J) * (\overline{F(z)} - G(z)J) = F(z)\overline{F(z)} + G(z)\overline{G(z)} \quad (10)$$

bo'ladi. Bundan

$$f^s(q) = \text{ext}(f_I * f_I^c)(q) \quad (11)$$

Ta'rif. $f - \Omega$ sodda simmetrik sohadagi regulyar funksiya bo'lsin. f ga teskari regulyar $f^{-*} : \Omega \setminus Z_{f^s} \rightarrow H$ funksiya

$$f^{-*}(q) = \frac{1}{f^s(q)} f^c(q) \quad (12)$$

tenglama yordamida aniqlanadi. (*)-ko'paytirishga asosan f uchun f^{-*} teskari funksiya hisoblanganda $\Omega \setminus Z_{f^s}$ da $f * f^{-*} = f^{-*} * f \equiv 1$ to'g'ri.

Nol to'plamlarning algebraik xossalari.

Bu paragrafda biz f va g ning nollari orasidagi moslikni, ularning $f * g$ ko'paytmasining f^c qo'shma va f^s simmetrikligini o'rganamiz. Quyidagi sodda mulahazadan boshlaymiz.

Mulohaza1. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha va $f, g : \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsin. Barcha $q \in \Omega$ larda agar $f(q) = 0$ bo'lsa, u holda $f * g(q) = 0$,

$$f * g(q) = f(q)g(f(q)^{-1}qf(q)) \quad (13)$$

bo'ladi.

Natija. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha va $f, g: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsin. U holda $f * g(q) = 0$ bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki $f(q) = 0$ yoki $f(q) \neq 0$ va $g(f(q)^{-1} q f(q)) = 0$ bo'lganda.

Odatda, $S = x + yS$ dagi ixtiyoriy $f * g$ ning har bir noli uchun S dagi f funksiyalar yoki g funksiyaning noli mavjud. Birgina nollari f va g funksiyalarning nolari to'plamlarining birlashmasi bilan o'zaro bir qiymatli bo'lmagan $f * g$ ko'paytmaning misoli [6] da ifodalangan. Endi biz f va f^c, f^s funksiyalarning nollari orasidagi bog'lanishni o'rganamiz.

Lemma2. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha va shunday $f: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya bo'lsinki, barcha $I \in S$ larda $f(\Omega_I) \subseteq L_I$. Agar biror $I_0 \in S$ da $f(x_0 + y_0 I_0) = 0$ bo'lsa, u holda barcha $I \in S$ larda $f(x_0 + y_0 I) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Barcha $I \in S$ larda $f(\Omega_I) \subseteq L_I$ shartdan barcha $x \in \Omega \cap R$ larda $f(x)$ haqiqiy bo'ladi. Endi R da $\Omega \cap R$ akslanuvchi $f_{I_0}: \Omega_{I_0} \rightarrow L_{I_0}$ golomorf funksiya ega bo'lamiz. Shvarts akslanish printsipiga ko'ra barcha $x + yI_0 \in \Omega_{I_0}$ larda $f(x + yI_0) = f(x - yI_0)$ bo'ladi. Demak, $f(x_0 + y_0 I_0) = 0$

Xulosa chiqaramiz, $f(x_0 - y_0 I_0) = 0$ va natija isboti yakunlashga imkon beradi.

Lemma3. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha bo'lsin. $f: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya va f^s uning simmetrizatsiyasi bo'lsin. U holda barcha $I \in S$ larda $f^s(\Omega_I) \subseteq L_I$ bo'ladi.

Bu lemmaning isboti (10) tenglamadan kelib chiqadi.

Mulohaza. $\Omega \subseteq H$ sodda simmetrik soha bo'lsin. $f: \Omega \rightarrow H$ regulyar funksiya va $S = x + yS \subset \Omega$ ni olamiz. S dagi f funksiyaning noli f^s ga nisbatan ozaro bir qiymatli bo'lgan f^s -simmetrizatsiya S da aynan nol bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki f^s S da nolga ega bo'lsa, bu ham faqat va faqat f S da nolga ega bo'lsa.

Isboti. Agar $q_0 = x_0 + y_0 I_0$ f funksiyaning noli bo'lsa, u holda 1-mulohazaga ko'ra q_0 nuqtada $f^s = f * f^c$ yo'qoladi. 1-va 2- lemmalarga ko'ra barcha $I \in S$ larda

$f^S(x_0 + y_0 I) = 0$ bo'ladi. Natijada ko'ra va $f^S(\overline{q_0}) = f^S(x_0 - y_0 I_0) = 0$ shartdan yoki $f(\overline{q}) = 0$ yoki $f^c(f(\overline{q_0})\overline{q_0}f(q_0)) = 0$ ekani kelib chiqadi.

Birinchi holda biz, $f - S$ da aynan nol ekani bu ham (7) formulaga ko'ra $f^c - S$ da aynan nol ekani kelib chiqishini xulosa qildik.

Ikkinchi holda, $f^c - f\left(\left(\overline{q_0}\right)^{-1}\overline{q_0}f(\overline{q_0})\right) = x_0 - y_0\left[f(\overline{q_0})^{-1}I_0f(\overline{q_0})\right] + S$ nuqtada nolga teng.

Agar $f - S$ da nolga ega bo'lsa, u holda butun S da f^S ni yo'qolishiga olib keldigan f^S ni S da nolga ega ekanini isbotlaydigan. Bundan S da f^c funksiyaning noli mavjudligi kelib chiqadi. Demak, $(f^c)^c = f$, f va f^c ning o'rnini almashtirish mumkin mulohazasi isbotlandi.

Adabiyotlar:

1. И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. Москва. "Наука". 1973.
2. Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
3. Садуллаев А.С. Голоморфные функции многих переменных. Ургенч. 2005. 168 с
4. A. Sudbery, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85(1979) 199-225
5. V. P. Palamodov, *Quaternionic Cauchy-Rieman system, removable singularity of solutions*, A talk at the Conference "Linear problems in quaternion Analysis", Oberwolfach, August 20-26, 1995
6. Brackx, F.; Delanghe, Richard; Sommen, F.; Clifford analysis. Research Notes in Mathematics, 76. Pitman, Boston, MA, 1982
7. Moisil, Gr.C.; Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math., Ser. 55, 1931, 168-194.

8. Palamodov, Victor P. ; Holomorphic synthesis of monogenic functions of several quaternionic variables. J. Anal. Math. 78 (1999), 177-204.
9. Pertici, Donato ; Quaternion regular functions and domains of regularity. Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 7 (1993) , no. 4, 973-988.
10. Sudbery, A.; Quaternionic analysis. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), no. 2, 199-224.
11. Gursev, Feza; Tze, Hsiung Chia; Complex and quaternionic analyticity in chiral and gauge theories. I. Ann. Physics 128 (1980), no. 1, 29-130.
12. Курош А. Г. «О линейной алгебре курси» Т. 1976-й.
13. Худайбергенов Г, Ворисов А. Комплекс анализдан маърузалар. Қарши. Университет. 1998.
14. Alesker S., Non-commutative linear algebra and plurisubharmonic functions of quaternionic variables, Bull. Sci. Math. 127(2003), no. 1, 1-35; also: math.CV/0104209
15. Alesker S., Verbitsky M., Plurisubharmonic functions on hypercomplex manifolds and HKT-geometry, J. Geom/Anal. 16 (2006), no. 3, 375-399; also: math.CV/0510140.