

**JAHON IQTISODIYOTI VA DIPLOMATIYA UNIVERSITETI**

**KETMA-KETLIK**

**\* \* \***

**FUNKSIYALAR VA  
ULARNING LIMITI**

**(Xalqaro iqtisodiy munosabatlar  
ta'limi yo'nalishi uchun)**

**Toshkent - 2006**

«Oliy matematika» kursiga oid ushbu risola «Iqtisodda miqdoriy usullar» kafedrasi yig'ilishida muhokama qilingan va ma'qullangan hamda Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti o'quv-uslubiy kengashida tasdiqlangan

**Muallif:**

**U. Dalabaev**

Mazkur risola iqtisodiyot yo'nalishidagi talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, unda «Oliy matematika» kursiga tegishli ba'zi mavzular yoritilgan. Risolaga ketma-ketlik, funksiya tushunchalari va funksiyaning uzluksizligiga oid mavzular kiritilgan.

© Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti, 2006.

## MUNDARIJA

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| <i>FUNKSIYALAR</i> . . . . .                                         | 4  |
| 1. <i>To'plam tushunchasi</i> . . . . .                              | 4  |
| 2. <i>Funksiya tushunchasi</i> . . . . .                             | 5  |
| 3. <i>Funksiyaning berilish usullari</i> . . . . .                   | 6  |
| 4. <i>Funksiya xossalari</i> . . . . .                               | 6  |
| 5. <i>Oshkor va oshkormas funksiya</i> . . . . .                     | 7  |
| 6. <i>Teskari funksiya</i> . . . . .                                 | 7  |
| 7. <i>Murakkab funksiya</i> . . . . .                                | 8  |
| 8. <i>Funksiya klassifikatsiyalari</i> . . . . .                     | 8  |
| 9. <i>Iqtisodiyotda ishlatiladigan ayrim funksiyalar</i> . . . . .   | 9  |
| <i>KETMA-KETLIK VA FUNKSIYA LIMITLARI</i> . . . . .                  | 13 |
| 1. <i>Ketma-ketlik va uning limiti</i> . . . . .                     | 13 |
| 2. <i>Monoton ketma-ketlikning yaqinlashish alomatlari</i> . . . . . | 16 |
| 3. <i>Ketma-ketlikning ijtimoiy hayotda ishlatilishi</i> . . . . .   | 17 |
| 4. <i>Funksiya limiti</i> . . . . .                                  | 19 |
| 5. <i>Funksiyaning nuqtadagi limiti</i> . . . . .                    | 22 |
| 6. <i>Bir tomonli limitlar</i> . . . . .                             | 23 |
| 7. <i>Limitlar haqida asosiy teoremlar</i> . . . . .                 | 25 |
| <i>FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI</i> . . . . .                           | 31 |
| 1. <i>Nuqtada uzluksiz funksiya xossalari</i> . . . . .              | 35 |
| 2. <i>Oraliqda uzluksiz funksiyaning xossalari</i> . . . . .         | 36 |

## Funksiyalar

**1. To'plam tushunchasi.** Biror ob'ektlar majmuiga to'plam deyiladi. To'plamni tashkil qiluvchi ob'ektlar esa to'plam elementlari yoki nuqtalari deyiladi. To'plam bosh harflar (masalan, A, B, C) orqali ifodalanadi. To'plam elementlari esa kichik harflar orqali belgilanadi. To'plamni belgilash usullaridan biri uning elementlarini  $\{ \}$  qavslar ichiga olib yozishdir. Masalan,  $X=\{2, 4, 7, 8\}$  to'plamda 2, 4, 7, 8 lar  $X$  to'plam elementlaridir.  $x$  ob'ekt S to'plamga tegishliligi  $x \in S$  ko'rinishda, tegishli emasligi esa  $x \notin S$  ko'rinishda ifodalanadi.

To'plamni ifodalash usullaridan biri quyidagichadir:

$$Z = \{ n \mid n - 5 \text{ dan kichik bo'lgan butun sonlar} \},$$

bu quyidagicha o'qiladi:

Z to'plam shunday n lardan iboratki, unda n 5 dan kichik butun sonlardir, ya'ni  $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Birorta ham elementi bo'lmagan to'plamga bo'sh to'plam deyilib, bunday to'plam  $\emptyset$  simvol orqali ifodalanadi. Masalan,  $x^2 + 1 = 0$  tenglamaning haqiqiy echimlari bo'sh to'plamdir, ya'ni  $A = \{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ .

Agar U to'plamning har bir elementi B to'plamga tegishli bo'lsa, U to'plamga B to'plamning qism to'plami deyiladi va  $U \subset B$  simvol bilan belgilanadi. Bir xil elementlardan iborat to'plamga teng to'plamlar deyiladi.

Berilgan A va B to'plamlarning yig'indisi deb, shunday C to'plamga aytiladiki uning har bir elementi A va B to'plamlarning birortasiga tegishli bo'ladi:

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}.$$

A va B to'plamlar ko'paytmasi deb, shunday D to'plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to'plamga ham B to'plamga ham tegishli bo'lishi kerak:

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$$

A va B to'plamlarning ayirmasi deb, shunday E to'plamga aytiladiki, uning elementlari B to'plamga tegishli elementlardan tashqari A ning barcha elementlarini o'z ichiga oladi:

$$E = \{x \mid x \in A \text{ va } x \notin B\}.$$

Agar to'plam elementlari sonlardan iborat bo'lsa, bunday to'plamlar sonli to'plamlar deyiladi. Bizga quyidagi to'plamlar ma'lum: R - haqiqiy sonlar to'plami, Q-ratsional sonlar to'plami, I-irratsional sonlar to'plami, Z –butun sonlar to'plami, N -natural sonlar to'plami. Ravshanki,  $N \subset Z \subset Q \subset R$ ,  $I \subset R$ ,  $R = Q \cup I$

**2. Funksiya tushunchasi.** Ko'pincha ikki o'zgaruvchi orasidagi munosabatlarda birining o'zgarishi ikkinchisiga ta'sir qiladi. Masalan, biror mahsulot uchun olinadigan nalog uning narxiga bog'liqdir; biror yopiq jism ichidagi havoning bosimi uning teperaturasiga bog'liqdir.

Doiraning yuzi uning radiusi orqali quyidagicha bog'langandir:

$$S = \pi r^2$$

Bu munosabatda  $r$  ning o'zgarishiga qarab doira yuzi  $S$ -ning qiymati ham o'zgarib boradi. Ya'ni,  $S$  ning qiymati  $r$  ning qiymatiga bog'liqdir.

Ixtiyoriy  $X$  va  $Y$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

**Ta'rif 1.** Agar  $X$  to'plamning ixtiyoriy  $x$  elementiga ( $x \in X$ ) biror qoidaga ko'ra  $Y$  to'plamning faqat bitta  $y$  elementi ( $y \in Y$ ) mos qo'yilgan bo'lsa,  $X$  to'plamda  $y = f(x)$  funksiya berilgan deyiladi.  $x$  ga erkli o'zgaruvchi yoki argument,  $y$  ga esa erksiz o'zgaruvchi deyiladi.

**Ta'rif 2.**  $X$  to'plamga funksiyaning aniqlanish sohasi,  $Y$  to'plamga esa funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi.

### Misollar.

1)  $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$  funksiya berilgan.  $f(7) = ?$

$$f(7) = \frac{7-6}{7-2} = \frac{1}{5}$$

2)  $f(x) = 4x - 17$  bo'lsa,  $f(x+5)$  ni toping.

$$f(x+5) = 4(x+5) - 17 = 4x - 5$$

3)  $f(x) = \sqrt{x(x-2)(x-4)}$  funksiyaning aniqlanish sohasini toping. Buning uchun  $x(x-2)(x-4) \geq 0$  tengsizlikni echamiz. Bundan  $x \in [0, 2]$  va  $x \in [4, \infty)$  kelib chiqadi.

1) Funksiya berilgan

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x-1) & \text{agar } x < 1, \text{ bo'lsa,} \\ 3x^2 + 1 & \text{agar } x \geq 1, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

$$f(-1/2) = ?, \quad f(2) = ?$$

$$f(-1/2) = \frac{1}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{2}{3}, \quad f(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13.$$

6)  $y = \log_3 \sin x + \sqrt{4-x^2}$  funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Buning uchun

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini echamiz.

$$\begin{cases} 2\pi n < x < \pi + 2\pi n \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\pi n < x < \pi + 2\pi n \\ |x| \leq 2 \end{cases} \rightarrow (0, 2].$$

7)  $y = \frac{6x}{1+x^2}$  funksiyaning o'zgarish sohasini toping. Bu funksiyaning o'zgarish sohasini topish uchun unga teskari  $x = \varphi(y)$  funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz; bu esa berilgan funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi. Teskari funksiyani topish uchun  $x^2y - 6x + y = 0$  dan  $x$  ni topish kerak. Oshkormas ko'rinishda berilgan bu funksiyaning aniqlanish sohasi kvadrat uch had diskriminantining musbatligidan topamiz; ya'ni  $6^2 - 4y^2 \geq 0$ ,  $y^2 \leq 9$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ . Demak, funksiyaning o'zgarish sohasi  $y \in [-3, 3]$ .

### 3. Funksiyaning berilish usullari.

1) Analitik usul. Ya'ni funksiya  $y = f(x)$  formula ko'rinishda beriladi. Masalan,  $y = \sin x + x$ ,

$$y = \begin{cases} x & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ \sqrt{1-x} & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

2) Jadval usul. Bu usulda har bir  $x$  ga  $f(x)$  qiymatlar jadvali beriladi. Funksiyaning jadval usulida berilganda ko'pincha ma'lumotlar, asosan, tajriba yoki kuzatish natijasida olinadi.

3) Grafik usul. Bu usulda funksiyaning tekislikda  $(x, y)$  nuqtalar to'plami koordinatalar tekisligida ifodalanadi. Funksiya grafik usulda berilishining qulayligi shundaki, bu grafik bo'yicha jarayonning hususiyati to'g'risida yaqqol ma'lumot olish mumkin. Odatda, funksiyaning grafigi biror chiziqdan iborat bo'ladi.

### 4. Funksiya xossalari.

1) Funksiyaning juft-toqligi.

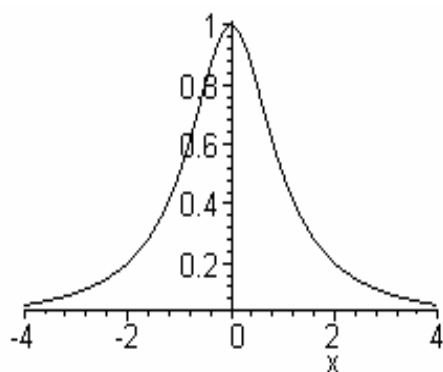
**Ta'rif 3.**  $y = f(x)$  funksiya berilgan bo'lib  $x$  funksiyaning aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $x$  uchun a)  $f(-x) = f(x)$  tenglik o'rinli bo'lsa, funksiya juft; b)  $f(-x) = -f(x)$  tenglik o'rinli bo'lsa, funksiya toq; c) a) va b) dagi xossalarga ega bo'lmasa, funksiya juft va toqlik xossalarga ega emas deyiladi.

**Misol.**  $y = \frac{x(2^x + 1)}{2^x - 1}$  funksiyaning juft-toqligini aniqlang.

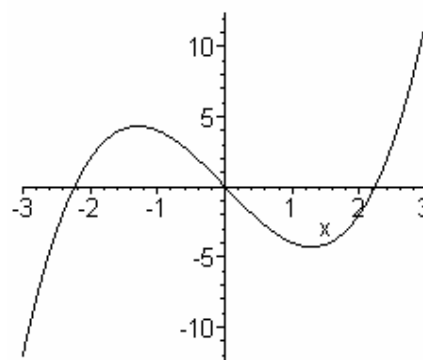
$$f(-x) = -x \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} = x \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = f(x).$$

Demak, funksiya juft.

Juft funksiyaning grafigi  $y$  o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (1-rasm), toq funksiyaning grafigi esa, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (2-rasm). Funksiya juft yoki toq xossasiga ega bo'lishi uchun uning Aniqlanish sohasi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lishi lozim.



1-rasm



2-rasm

2) Funksiya monotonligi.

**Ta'rif 4.**  $X$  oraliqda  $y = f(x)$  funksiya berilgan bo'lib, ixtiyoriy  $x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lsin. Agar  $f(x_1) < f(x_2)$  bo'lsa, funksiya  $X$  oraliqda o'suvchi deyiladi;  $f(x_1) > f(x_2)$  bo'lsa funksiya bu oraliqda kamayuvchi deyiladi.

**Ta'rif 5.**  $X$  oraliqda  $y = f(x)$  funksiya berilgan bo'lib, ixtiyoriy  $x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lsin. Agar  $f(x_1) \leq f(x_2)$  bo'lsa, funksiya  $X$  oraliqda kamaymaydigan deyiladi;  $f(x_1) \geq f(x_2)$  bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'smaydigan deyiladi.

**Ta'rif 6.** Biror  $X$  oraliqda  $y = f(x)$  funksiya o'suvchi (kamaymaydigan) yoki kamayuvchi (o'smaydigan) bo'lsa, bunday oraliq qat'iy monotonlik oraliqlari deyiladi.

3) Davriy funksiya.

**Ta'rif 7.** Agar  $y = f(x)$  funksiya  $X$  oraliqda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy  $x \in X$  uchun  $f(x+T) = f(x)$  ( $T \neq 0$ ) bo'lsa, bunday funksiya davriy funksiya deyiladi.  $f(x+T) = f(x)$  ( $T \neq 0$ ) tenglikni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat  $T$  ga funksiyaning davri deyiladi.

### 5. Oshkor va oshkormas funksiya.

**Ta'rif 8.** Agar funksiya analitik ko'rinishda berilgan bo'lib, erksiz o'zgaruvchiga nisbatan echilgan bo'lsa, funksiya oshkor berilgan deyiladi. Agar funksiya  $F(x, y) = 0$  ko'rinishda bo'lsa, funksiya oshkormas ko'rinishda berilgan deyiladi. Masalan,  $y = 3x^2 + 1$  munosabat oshkor funksiya.  $x^4 + y^2 - x = 0$  munosabat esa, oshkormas ko'rinishda berilgan funksiya.

### 6. Teskari funksiya.

**Ta'rif 9.**  $y = f(x)$  funksiyaning aniqlanish sohasi  $X$  bo'lib, qiymatlar to'plami  $Y$  bo'lsin.  $Y$  to'plamdan olingan ixtiyoriy  $y \in Y$  ga yagona  $x \in X$  mos qo'yamiz ( $f(x) = y$ ). U holda  $Y$  to'plamda aniqlangan

o'zgarish sohasi  $X$  bo'lgan  $x = \varphi(y)$  funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

$x$  - o'zgaruvchi orqali erkli o'zgaruvchini belgilash odat bo'lgani uchun, funksiyani  $y$  orqali belgilasak,  $y = f(x)$  ga teskari funksiya  $y = \varphi(x)$  bo'ladi. Teskari funksiyani odatda  $y = f^{-1}(x)$  ko'rinishda belgilanadi. O'zaro teskari funksiyalarning grafiklari  $y = x$  to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi. Masalan,  $y = a^x$  funksiyaga  $y = \log_a x$  funksiya teskari funksiyadir. Teskari funksiya ta'rifidan

$$y = f(f^{-1}(x)), \quad x = f^{-1}(f(x))$$

tengliklar kelib chiqadi.

### **7. Murakkab funksiya.**

**Ta'rif 10.**  $y = f(z)$  funksiya  $Z$  to'plamda aniqlangan bo'lib, uning o'zgarish sohasi  $Y$  bo'lsin.  $Z$  esa o'z navbatida  $X$  to'plamda aniqlangan  $x$  argumentning funksiyasi, o'zgarish sohasi  $Z$  to'plamdan iborat bo'lsin. U holda,  $X$  to'plamda aniqlangan  $y = f[\varphi(x)]$  funksiyaga murakkab funksiya deyiladi.

Masalan,  $y = \cos \ln x$  murakkab funksiya, chunki, uni quyidagi funksiyalar  $y = \cos$ ,  $z = \ln x$  kombinatsiyalari sifatida ifodalash mumkin.

**Misollar.**  $f(x) = 3x - 2$  va  $g(x) = x^2 - x$  funksiyalar berilgan.  $f(g(x))$  va  $g(f(x))$  larni toping.

$$f(g(x)) = f(x^2 - x) = 3(x^2 - x) - 2 = 3x^2 - 3x - 2,$$

$$g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 - (3x - 2) = 9x^2 - 15x + 6.$$

### **8. Funksiya klassifikatsiyalari.**

Funksiyalarning algebraik va transendent turlari mavjud.

- ko'phadlar:  $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$
- ratsional funksiyalar:  $y = N(x) / D(x)$ , bu erda  $N(x)$  va  $D(x)$  funksiyalar ko'phadlaridir.

• irratsional funksiyalar (argumentida ildizdan chiqarish amali ishtirok etadigan funksiyalar)

Algebraik bo'lmagan funksiyalarga transsendent funksiyalar deyiladi. Bunday funksiyalarga ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar kiradi. Ko'phad darajasi kichik bo'lganda ular maxsus nomlanadi.  $n=1$  bo'lsa, ya'ni  $y = ax + b$  bo'lsa, bunday funksiya chiziqli funksiya deyiladi.  $n=2$  bo'lganda ya'ni  $y = ax^2 + bx + c$  bo'lganda funksiya kvadratik funksiya deyiladi.

### 9. Iqtisodiyotda ishlatiladigan ayrim funksiyalar.

1) *Xarajat funksiyasi.* Bu funksiya  $S(x)$  orqali ifodalanib, u  $x$  xajmdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan xarajatni bildiradi. Biz ko'pincha xarajat funksiyasini  $C(x) = mx + b$  chiziqli funksiya ko'rinishida olamiz. Bu erda  $b$  o'zgarmas xarajatni,  $m$  esa birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan xarajatni bildiradi. O'zgarmas xarajatga er, bino, nalog va ishlab chiqarish resurslarining qiymatlari kiradi. Korxona ishlamagan taqdirda ham bu xarajat mavjud bo'ladi. Umuman olganda,  $C(x)$  chiziqli bo'lmaydi. Masalan, korxonaning ish unumdorligi oshganda ko'p mahsulot ishlab chiqarishi mumkin.

#### **Misollar.**

a) Ishlab chiqaruvchining o'zgarmas harajati \$200 bo'lib, har bir chiqarilgan mahsulot uchun esa \$50 sarf qiladi. Umumiy harajatni ishlab chiqariladigan mahsulot xajmi orqali ifodalovchi funksiyani toping.

$x$  orqali tovar xajmini,  $C(x)$  orqali umumiy xarajatni belgilaylik. U holda  $C(x) = 50x + 200$  bo'ladi.

b) Yil boshidan har oyda bir buxanka nonning o'sishi 2 sentni tashkil qiladi. Birinchi noyabrda (1 - chi oyda) nonning bahosi 64 sentga chiqdi. Nonning vaqtga nisbatan funksiyasini toping va 1-yanvarda non narxi qancha bo'lgan?  $x$  orqali oylarni,  $y$  orqali non narxini belgilaymiz.  $x = 10$  bo'lganda  $y = 64$  ga teng. Demak,  $y = 64 + 2(x - 10) = 2x + 44$ . Yil boshida non narxi ( $x = 0$ ) 44 sentga teng.

2) *Kirim funksiyasi.* Bu funksiya  $R(x)$  orqali ifodalanib,  $x$  tovar birligini sotishdan tushgan kirimni bildiradi. Ko'pincha,  $R(x) = mx$  chiziqli bo'lib,  $m$  bir birlik tovarning narxidir. Lekin  $R(x)$  har doim chiziqli bo'lavermaydi. Ba'zan ko'p miqdorda mahsulot xarid qiluvchi xaridorga narx tushirilib beriladi; ba'zan tovar narxi ko'tarilib yoki tushib turishi mumkin.

3) *Foyda funksiyasi.* Bu funksiya  $P(x)$  (yoki  $\pi(x)$ ) orqali ifodalanib,  $x$  birlik tovarni sotishdan tushgan foydani ifodalaydi:  $P(x) = R(x) - C(x)$ . Korxona  $P(x)$  funksiyani maksimallashtirishga intiladi.

**Misol.** Tovarning sotilish narxi 0,40\$. O'zgarmas xarajat 200\$ har bir tovar uchun ketgan xarajat esa 0,20\$ bo'lsa,

a) umumiy xarajatni b) umumiy kirimn va c) foyda funksiyalarini toping.

**Echish.** a) umumiy xarajat  $C(x) = 200 + 0,20x$ .

b) kirim funksiyasi -  $R(x) = 0,40x$  bo'ladi.

c) foyda funksiyasi -  $P(x) = 0,40x - (200 + 0,20x)$  yoki  $P(x) = 0,20x - 200$ .

4) *Talab funksiyasi*. Bu funksiya  $D(x)$  orqali ifodalanib,  $x$  pul birligida sotilishi mumkin bo'lgan tovarlar sonini bildiradi.  $D(x)$  doimo kamayuvchi funksiya bo'ladi (tovar narxi oshirilsa kamroq tovar sotiladi).  $D(x) = 0$  bo'ladigan nuqta  $x$  ning shunday kichik qiymatiki bu narxda hech kim tovar sotib olmaydi. Masalan,  $D(x) = -10x + 400$  bo'lsa,  $x = 40$  bo'lganda sotib oluvchilar soni nolga teng. Agar  $x = 0$  bo'lsa, 400 kishi tovarni sovg'a sifatida olgan bo'ladi. Bu xol  $D(x)$  funksiyaning umuman chiziqli emasligini ko'rsatadi.

5) *Taklif funksiyasi*. Bu funksiya  $S(x)$  orqali ifodalanib, bu  $x$  narxda ishlab chiqaruvchining taklif qilgan tovarlar sonini bildiradi. Tovar narxi oshsa, ishlab chiqaruvchi yuqori foyda olishga harakat qiladi; shuning uchun u ishlab chiqarishlar sonini ko'paytirishga intiladi.  $S(x)$  o'suvchi funksiya bo'ladi.

$D(x) = S(x)$  tenglikni qanoatlantiruvchi narxga muvozanat narx deyiladi.

### **Misollar.**

1) Tovarining taklif va talab funksiyalari.

$S = \{(q, p) \mid q - p = -7\}$ ,  $D = \{(p, q) \mid q + 3p = 10\}$  bo'lsin. Taklif funksiyasi  $q_S$  va talab funksiyasi  $q_D$  hamda ularga teskari bo'lgan funksiyalarni aniqlang.

To'plam ta'rifidan foydalansak,

$$q_S(p) = p - 7 \text{ va } p_S(q) = q + 7$$

$$q_D(p) = 10 - 3p \text{ va } p_D(q) = \frac{1}{3}(10 - q) \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

2) Taklif va talab funksiyalari

$$S = \{(q, p) \mid 5p - q^2 - 2q = 27\}, \quad D = \{(p, q) \mid p + q^2 + 2q = 15\}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Teskari talab va taklif funksiyalarini keltiring. Muvozanat to'plam  $E = S \cap D$  ni toping.

$$p = p_S(q) = \frac{1}{5}(q^2 + 2q + 27), \quad p_D(q) = -q^2 - 2q + 15.$$

$E = S \cap D$  to'plamni topish uchun

$$\frac{1}{5}(q^2 + 2q + 27) = 15 - q^2 - 2q$$

tenglamani echamiz. Bundan  $q = -4$ ,  $q = 2$  hosil bo'ladi. Demak,  $E = \{(-4, 7), (2, 7)\}$ . Iqtisodiy nuqtai nazardan  $q = -4$  bo'la olmaydi. Demak, muvozanat narx  $p = 7$  dan iborat.

3) Fabrikaning ishlab chiqargan har bir ruchkasining xarajati \$2. Agar ruchkani \$5 dan sotganda bir oyda 4000 ta ruchka sotiladi. Fabrikaning oylik foydasini ruchka narxi orqali ifodalang.

$x$  orqali ruchkaning sotilishi mumkin bo'lgan narxini,  $P(x)$  orqali esa, foydani belgilaylik. U xolda  $x$  narxda sotilishi mumkin bo'lgan ruchkalar soni  $N = 4000 - 400(x - 5)$  bo'ladi. Bir dona ruchkadan qoladigan foyda  $x - 2$  bo'ladi. Demak, umumiy foyda  $P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$  ko'rinishda bo'ladi.

### **Mashqlar.**

1)  $y = \frac{1}{3}(x^2 - 10x + 21)$  parabolaning  $3y = 3 + 11$  to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini toping.

2)  $A(1,2), B(2,3)$  va  $C(3,5)$  nuqtalardan o'tuvchi parabola tenglamasini tuzing.

3)  $f(x) = \frac{x-6}{x-2}$  funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

4)  $y = |x-2| + 1$  funksiyaning o'zgarish sohasini toping.

5)  $f(x) = 4x - 17$  bo'lsa,  $f(2x+8)$  ni toping.

6)  $f(x) = 7x - 13$  bo'lsa,  $3f(x) - f(3x) + 26 = 0$  ekanligini isbot qiling.

7)  $f(x) = x - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 2$  funksiylar berilgan bo'lsa,  $f(g(4))$  va  $g(f(4))$  larni hisoblang.

8)  $f(x) = \frac{5}{x-2} + 4(x-2)^3$  funksiya berilgan. Shunday  $h(x)$  va  $g(u)$  funksiylarni topingki  $f(x) = g[h(x)]$  bo'lsin.

9)  $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{agar } t < -5 \text{ bo'lsa,} \\ t+1 & \text{agar } -5 \leq t \leq 5 \text{ bo'lsa,} \\ \sqrt{t} & \text{agar } t > 5 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

funksiya berilgan bo'lsa,  $f(-6)$ ,  $f(-5)$  va  $f(16)$  larni aniqlang.

10) Quyidagi funksiylarning aniqlanish sohasini toping.

a)  $y = \frac{\sqrt{t^2-4}}{\sqrt{t-4}}$ ,      b)  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ ,      c)  $y = \sqrt{|x-3|}$ ,  
d)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ ,      e)  $y = \sqrt{x} + \lg(2x-5)$ ,      f)  $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$ .

11) Quyidagi funksiylarning o'zgarish sohasini toping.

a)  $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$       b)  $y = \frac{x}{1+x^2}$   
c)  $y = \sin x + \cos x$       d)  $y = \frac{4x}{2+x^2}$

12) Quyidagi funksiyalarning juft (toq) ligini aniqlang.

a)  $y = x^3 \sin x$       b)  $y = x - x^3 + 5x^5$

c)  $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$       d)  $y = x^2 + \sin x$

13) Bir bozorning talab va taklif funksiyalarining to'plami

$$S = \{(p, q) \mid 3p - q = 5\}, \quad D = \{(q, p) \mid 3p + q^2 + 2q = 9\}$$

bo'lsin.  $E = S \cap D$  ni aniqlang.

14) Taklif va talab to'plamlari berilgan

$S = \{(q, p) \mid q - 3p = -1\}$ ,  $D = \{(q, p) \mid q + p = 2\}$ . Taklif  $S_q(p)$  va talab  $D_q(p)$  larni va ularga teskari  $S_p(q)$ ,  $D_p(q)$  funksiyalarni toping.

15) Anvar keramik mahsulot uchun kichik do'koncha ochdi. Do'koncha uchun 50\$ sarf qildi. Bir dona mahsulotning xomashyosi uchun ketadigan xarajat 2\$ ni tashkil qiladi. Umumiy harajadni ifodalovchi harajat funksiyasi -  $C(x)$  ni toping. Anvar 25 dona, 50 dona va 80 dona mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha harajat qiladi?

16) Anvar ishlab chiqargan mahsulotlarining har birini 8\$ dan sotdi. Anvarning kirim funksiyasi -  $R(x)$  ni toping. Foyda funksiyasi qanday bo'ladi.  $p(25)$ ,  $P(50)$  va  $P(80)$  larning qiymati nimaga teng.

17) Hisoblashlarga qaraganda kompaniyaning bir oylik xarajat va daromad funksiyalari  $R(x) = 32x - 0,21x^2$ ,  $C(x) = 195 + 12x$  ko'rinishda ekanligi aniqlangan. Kompaniyaning kirim bilan chiqimning teng bo'ladigan holatini aniqlang. Qaysi hollarda kompaniya foyda ko'radi.

18) Korxona qo'g'irchoq ishlab chiqarish uchun 3000\$ sarf qilib, bir dona qo'g'irchoqni ishlab chiqarish uchun esa 2\$ dan sarf qiladi. Toping: 1) 2000 dona qo'g'irchoq ishlab chiqarish uchun umumiy xarajat qancha bo'ladi. 2) 5000\$ ga qancha qo'g'irchoq ishlab chiqarish mumkin?

19) 18 misolda keltirilgan qo'g'irchoqlar 10\$ dan sotilgan. Daromad -  $R(x)$  va foyda -  $P(x)$  funksiyalarini toping va 1) 8000 qo'g'irchoq sotganda kirim qancha bo'ladi? 2) kirim 7000 bo'lganda foyda qancha bo'ladi?

20) Korxonaning kirim  $R(x) = 21x$  va chiqim  $C(x) = 9x + 900$  funksiyalari berilgan. Toping: 1) foyda funksiyasini; 2) agar foyda 1000\$ bo'lsa, kirim qancha ekanligini aniqlang.

21) Korxona bir dona radioni ishlab chiqarish uchun 10\$ sarf qiladi. Hisoblashlaricha, agar radio donasi  $x$  dollardan sotilsa, har oyda xaridorlar  $80 - x$  dona sotib olar edi. Korxonaning foyda funksiyasini  $x$  orqali ifodalang va foydaning eng katta qiymatini toping.

22) Ishxona har bir kassetani ishlab chiqarish uchun 20\$ sarf qiladi. Agar kassetalar  $x$  dollardan sotilsa, bir oyda  $120 - x$  dona kasseta sotilishi aniqlangan. Foyda funksiyasini  $x$  orqali ifodalang. Optimal sotilish narxini toping.

23) Biror mahsulotning talab va taklif funksiyalari  $D(p) = 410 - p$ ,  $S(p) = p^2 + 2p - 70$  ekanligi ma'lum. Muvozanat narxni toping.

24) Kitob do'koni avtordan kitoblarni 3\$ dan sotib oladi. Agar do'kon kitoblarni 15\$ dan sotsa, bir oyda 200 dona sotiladi. Xaridorlarning sonini oshirish uchun do'kon kitob narxini tushirdi. Hisolashlaricha, agar kitobning sotilish narxi har donasiga 1\$ ga tushirilganda sotiladigan kitoblar soni 20 dan oshib boradi. Do'konning kitob sotishdan tushgan foydani kitobning sotilish bahosi orqali ifodalang. Optimal sotilish narxini toping.

25) Asoslari kvadratli va xajmi  $250 \text{ m}^3$  li yashiklar tayyorlash uchun asoslarining kvadrat metriga 2\$ li material yon tomonlariga esa 1\$ li materiallar ishlatilgan. Yashikni qurish uchun ketadigan xarajatni asos tomoni uzunligi orqali ifodalang.

## Funksia va ketma-ketlik limiti

### 1. Ketma-ketlik va uning limiti.

Agar har bir natural  $n$  ga biror qoida bo'yicha biror  $a_n$  soni mos qo'yilgan bo'lsa,  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sonlar qatoriga sonli ketma-ketlik deyiladi va  $\{a_n\}$  ko'rinishda belgilanadi. Ketma-ketlikka, masalan, arifmetik va geometrik progressiyalar misol bo'la oladi.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  larga ketma-ketlikning hadlari deyiladi.  $a_n$  -ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi. Boshqacha qilib aytganda,  $\{a_n\}$  ketma-ketlik natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiyadir.

**Misol.**  $a_n = 1 / (2n)$  ketma-ketlikning birinchi to'rtta hadini toping.

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}.$$

Bu ketma-ketlik odatda quyidagicha yoziladi:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

**Ta'rif 1.** Agar shunday o'zgarmas  $M$  soni mavjud bo'lsaki,  $\{a_n\}$  ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni  $a_n \leq M$  bo'lsa, bu ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deb aytiladi.

Masalan, Ushbu

$$-2, -4, -6, -8, -10, \dots, -2n, \dots$$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ketma-ketlikning har bir hadi -2 dan katta emas.

**Ta'rif 2.** Agar shunday o'zgarmas  $m$  soni mavjud bo'lsaki,  $\{a_n\}$  ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo'lmasa, ya'ni  $a_n \geq m$  bo'lsa, bu ketma-ketlik quyidan chegaralangan deb aytiladi.

Masalan, Ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki ketma-ketlikning har bir hadi 1 dan kichik emas.

**Ta'rif 3.** Agar  $\{a_n\}$  ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan ketma-ketlik deb aytiladi.

Masalan, Ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

ketma-ketlik chegaralangandir.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**Ta'rif 4.** Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun, shunday  $N$  nomer topilsaki,  $a_n$  ketma-ketlikning  $n > N$  shartini qanoatlantiruvchi hadlari uchun  $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$  ( $|a_n - A| < \varepsilon$ ) tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $A$  soni ketma-ketlikning limiti deyiladi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  yoki  $a_n \rightarrow A$  ko'rinishda yoziladi.

**Ta'rif 5.** Agar  $A$  soni chekli bo'lsa, ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi. Agar ketma-ketlikning limiti chekli bo'lmasa yoki ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa, ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar  $a_n$  ketma-ketlikning elementlarini tekislikda  $(n, a_n)$  nuqtalar orqali ifodalasak,  $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$  tengsizlik  $n > N$  shartini qanoatlantiruvchi  $(n, a_n)$  barcha nuqtalar absissa o'qiga parallel bo'lgan  $A - \varepsilon$  va  $A + \varepsilon$  to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan bo'ladi.

**Misol.**  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  ketma-ketlikning  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  ekanligini ko'rsatamiz.  $\varepsilon = 0,1$

bo'lganda  $N$ -ni topaylik. U holda  $|a_n - 0| < \varepsilon$  tengsizlik, ya'ni  $\frac{1}{n} < \varepsilon$

tengsizlik  $n > 10$  bo'lganda bajariladi. Ya'ni  $N = 10$  bo'ladi.  $\varepsilon = 0,01$

bo'lganda esa,  $N = 100$  bo'ladi. Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun esa,  $\frac{1}{n} < \varepsilon$

tengsizlik  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  da bajariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  shunday  $N = \frac{1}{\varepsilon}$  son topiladiki,  $n > N$  lar uchun  $|a_n - 0| < \varepsilon$  tengsizlik bajariladi, bu esa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  ekanligidir.

**Ta'rif 6.** Agar  $a_n$  ketma-ketlik uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  bo'lsa,  $a_n$  cheksiz kichik miqdor deyiladi.

**Ta'rif 7.** Agar etarli katta musbat  $M$  son uchun shunday nomer  $N$  topilsaki,  $n > N$  lar uchun  $|\beta_n| > M$  bo'lsa,  $\beta_n$  ketma-ketlik cheksiz katta miqdor deyiladi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$  ko'rinishda yoziladi.

$a_n$  va  $b_n$  ketma-ketliklar berilgan bo'lib,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  limitlar mavjud bo'lsin. U holda ketma-ketliklar yig'indisining, ko'paytmasining,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$  bo'lganda esa, ketma-ketliklar nisbatlarining ham limiti mavjud bo'lib, quyidagilar o'rinlidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Endi, agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  bo'lganda,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  mavjud bo'lishi mumkin. Bunday holda  $\infty - \infty$  tipidagi aniqmaslik deyiladi. Xuddi shuningdek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n)$  mavjud bo'lishi mumkin. Bunday holatda aniqmaslikning tipi  $\infty / \infty$  ko'rinishda deyiladi. Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n)$  mavjud bo'lishi mumkin; bunday holatda  $0 / 0$  tipidagi aniqmaslik deyiladi.

Keltirilgan holatlarda yuqoridagi xossalarni ishlatib bo'lmaydi. Aniqmasliklarni ochish uchun algebraik almashtirishlar amalga oshirilib, limitning xossalardan foydalaniladi.

### Misollar.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n-1} \text{ hisoblang. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 + \frac{1}{n} \right)}{n \left( 4 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 2 + \frac{1}{n} \right)}{\left( 4 - \frac{1}{n} \right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3n^2+4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4-1}{n^3+4} \text{ ni hisoblang.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4-1}{n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4\left(6-\frac{1}{n^4}\right)}{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(6-\frac{1}{n^4}\right)}{1+\frac{4}{n^3}} = \infty.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 0.$$

## 2. Monoton kema-ketlikning yaqinlashish alomatlari.

**Teorema.** Agar  $\{a_n\}$  ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $\{a_n\}$  ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

*e soni.* Ushbu ketma-ketlikni qaraylik:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Bu ketma-ketlikning o'suvchi va chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

Nyuton binomi formulasidan foydalansak,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

O'ng tomonda joylashgan ifodadan ko'rinib turibdiki,  $n$ -haddan  $n+1$ -hadga o'tganimizda har biri musbat bo'lgan qo'shiluvchilar soni birga oshadi va har bir qo'shiluvchi (uchinchisidan boshlab) ham oshib boradi, chunki qavs ichida joylashgan ifoda kattalashib boradi. Haqiqatan,

$$1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Bu esa (1) ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi ekanligini bildiradi:

$$a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Quyidagi

$$1 - \frac{j}{n} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

va

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

tengsizliklardan  $n > 1$  bo'lganda (2) dan

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3,$$

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$a_n < 3, \quad (6)$$

ya'ni (1) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. (3) va (6) tengsizliklardan teorema ko'ra  $a_n$  ketma-ketlik chekli limitga ega. Bu limitni  $e$  soni deyiladi. Demak, ta'rif bo'yicha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (7)$$

$e$  irratsional son bo'lib uning qiymati taqriban  $e \approx 2,718281828$  ga tengdir.

### 3. Ketma-ketlikning ijtimoiy hayotda ishlatilishi.

Bu erda biz bankka qo'yilgan mablag'ning qancha miqdorda qo'shilish jarayoniga to'xtalamiz. Bankka qo'yilgan mablag' ko'payishining bir necha turlari bor.

1) Oddiy foiz turi. Bankka qo'yilgan birinchi mablag'  $P$  bo'lsin. Agar qo'shish oddiy foizli bo'lib, bank har yili  $r\%$  dan qo'shsa, bank bir xil summa:  $\frac{r}{100}P$  ni qo'shib boradi.

Bir yildan so'ng bankdagi mablag'  $Q_1 = P + \frac{r}{100}P$  ga teng bo'ladi. Ikki yildan so'ng esa, bankda  $Q_2 = Q_1 + \frac{r}{100}P = P + \frac{2r}{100}P = \left(1 + \frac{2r}{100}\right)P$  miqdorda mablag' jamg'ariladi va x.k.  $t$  yildan so'ng esa

$$Q_t = P \left( 1 + \frac{rt}{100} \right) \quad (8)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2) Murakkab foiz turi. Praktika da ko'pincha bankka qo'yilgan mablag' murakkab foiz turi bo'yicha amalga oshiriladi. Bu turdagi hisoblashda bankka qo'yilgan mablag' har yili  $\left( 1 + \frac{r}{100} \right)$  dan ortib boradi. Birinchi yil oxiridagi mablag' miqdori  $Q_1 = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)$  ga teng bo'ladi. Ikkinchi yil

oxirida esa, mablag'  $Q_2 = Q_1 + \frac{r}{100} Q_1$  ga teng bo'ladi, ya'ni

$$Q_2 = Q_1 \left( 1 + \frac{r}{100} \right) = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^2$$

bo'ladi.  $t$  yildan so'ng esa, bankka qo'yilgan mablag' miqdori

$$Q_t = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^t \quad (9)$$

3) Foizi yilda bir necha marta hisoblanadigan, murakkab jamg'arma turlari. Ba'zan foizni bir yilda bir marotaba emas, balki bir nech marta qayta hisoblanadi. Aytaylik, bir yilda  $m$  marta hisoblansin, unda yilning  $1/m$  qismiga  $r/m\%$ . Yangi yil boshidagi  $P$  miqdordagi mablag' yilning  $1/m$  qismida  $P(1 + r/(100 \cdot m))$  ga teng bo'ladi, yilning  $2/m$  qismida esa

$P(1 + r/(100 \cdot m))^2$  ga teng bo'ladi va yil oxirida esa, mablag' miqdori  $Q_1 = P(1 + r/(100 \cdot m))^m$  ga teng bo'ladi. Ikkinchi yilning  $1/m$  qismida esa,  $P(1 + r/(100 \cdot m))^{m+1}$  bo'ladi; ikkinchi yilning  $2/m$  qismida esa  $P(1 + r/(100 \cdot m))^{m+2}$  bo'ladi va x.k. Ikkinchi yil oxirida esa,  $Q_2 = P(1 + r/(100 \cdot m))^{2m}$  bo'ladi. Demak,  $t$  yildan so'ng mablag' miqdori quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$Q_t = P(1 + r/(100 \cdot m))^{mt} \quad (10)$$

4) Foizni uzluksiz hisoblash. Har yili bo'ladigan hisoblash ko'lamini  $m$  ni oshiraylik. Ya'ni hisoblash har oyda ( $m = 12$ ) har kunda ( $m = 256$ ), har soatda, har minutda va x.k., uzluksiz  $m \rightarrow \infty$  bo'lsa,

$$\begin{aligned} Q_t &= \lim_{m \rightarrow \infty} P \left( 1 + \frac{r}{100 \cdot m} \right)^{mt} = \\ &= P \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{r}{100 \cdot m} \right)^{100 \cdot m/r} \right]^{rt/100} = P e^{rt/100}. \end{aligned}$$

Demak, foiz uzluksiz hisoblanganda  $t$  yildan keyin bankka  $P$  miqdorda qo'yilgan mablag'ning miqdori

$$Q_t = P e^{rt/100} \quad (11)$$

formula yordamida aniqlanadi.

### **Misollar.**

1). Har yili hisob qilinadigan 8% bankka \$5000 qo'yildi. 3 yildan so'ng qo'yilgan mablag' qancha bo'ladi?  $P=5000$ ,  $r=8$ ,  $t=3$ , bo'lgani uchun (9) formuladan

$$Q_3 = 5000 \cdot (1 + 0,08)^3 = 5000 \cdot 1,08^3 = 5000 \cdot 1,259712 = 5298,56$$

2). 6% li daromad beradigan bankka \$1000 qo'yilgan. Bank hisoblashni yilning har choragida amalga oshirsa, yil oxirida qo'yilgan mablag' miqdori qancha bo'ladi?  $P=1000$ ,  $r=6$ ,  $m=4$  va  $t=1$  qiymatlarni (10) formulaga qo'yamiz:

$$Q_1 = 1000(1 + 0,06 / 4)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 = 1000 \cdot 1,06136 \approx 1061,31$$

Demak, yil oxirida mablag' xajmi \$1061,31 bo'ladi.

3). 6% li daromad beradigan bankka \$1000 qo'yilgan. Bank hisoblashni har oyda har kunlik hisoblashlarda amalga oshirsa yil oxirida qo'yilgan mablag' miqdori qancha bo'ladi?  $P=1000$ ,  $r=6$ ,  $m=12$  va  $t=1$  qiymatlarni (10) formulaga qo'yamiz:

$$Q_1 = 1000(1 + 0,06 / 12)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} = 1000 \cdot 1,06167781 \approx 1061,68$$

Demak, yil oxirida mablag' xajmi \$1061,68 bo'ladi.

4). 6% li daromad beradigan bankka \$1000 qo'yilgan. Bank hisoblashni uzluksiz amalga oshirsa, yil oxirida qo'yilgan mablag' miqdori qancha bo'ladi?

$Q_t = P \cdot e^{rt/100}$  formulaga ko'ra,  $Q_1 = 1000 \cdot e^{0,06} \approx 1061,84$  dollar bo'ladi.

### **4. Funksiya limiti.**

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

Ushbu funksiyani ko'raylik

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Bu funksiyaning grafigini 1-jadval yordamida chizish mumkin.

1-Jadval

| $x$                    | 0 | 1 | 2             | 3               | 4               | 5               | 10                | 100                   | 1000                      |
|------------------------|---|---|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------------|---------------------------|
| $\frac{2x^2}{x^2 + 1}$ | 0 | 1 | $\frac{8}{5}$ | $\frac{18}{10}$ | $\frac{32}{17}$ | $\frac{50}{26}$ | $\frac{200}{101}$ | $\frac{20000}{10001}$ | $\frac{2000000}{1000001}$ |

Jadvaldan ko'rinib turibdiki,  $x$  ni etarli kattalashtirib borsak,  $f(x)$  ning qiymati 2 ga yaqinlashib boradi. Boshqacha qilib aytganda, biz  $(f(x) - 2)$  ayirmani,  $x$  ni etarli katta qilish hisobiga, etarli kichik qilish mumkin, ya'ni ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday musbat  $N$  topish mumkinki,  $x > N$  shartni qanoatlantiruvchi argumentlarda  $|f(x) - 2| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$x$  ni cheksiz kattalashtirishni  $x \rightarrow +\infty$  belgi bilan ifodalanadi. Shuning uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

2-jadval.

| $x$                    | 0 | -1 | -2            | -3              | -4              | -5              | -10               | -100                  | -1000                     |
|------------------------|---|----|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------------|---------------------------|
| $\frac{2x^2}{x^2 + 1}$ | 0 | 1  | $\frac{8}{5}$ | $\frac{18}{10}$ | $\frac{32}{17}$ | $\frac{50}{26}$ | $\frac{200}{101}$ | $\frac{20000}{10001}$ | $\frac{2000000}{1000001}$ |

Xuddi yuqoridagidek,  $x$  ni cheksiz kamaytirsak,  $f(x)$  2 ga yaqinlashadi, ya'ni ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $N < 0$  son topish mumkinki,  $x < N$  lar uchun  $|f(x) - 2| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu holatni quyidagicha yozish mumkin.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

**Ta'rif 1.**  $f(x)$  funksiya  $(a, +\infty)$  oraliqda Aniqlangan funksiya bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $M > 0$  son topilsaki,  $x > M$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (8)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda  $A$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x \rightarrow +\infty$  dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$$

kabi yoziladi.

**Ta'rif 2.**  $f(x)$  funksiya  $(-\infty, a)$  oraliqda aniqlangan funksiya bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $M < 0$  son topilsaki,  $x < M$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (8)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda  $A$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x \rightarrow -\infty$  dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A,$$

kabi yoziladi.

$|f(x) - A| < \varepsilon$  tengsizlik qo'sh tengsizlikka  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$  ekvivalent bo'lganligi uchun  $|x| > M$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  lar uchun  $f(x)$  funksiya grafigining ordinatalari  $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$  tengsizlikni qanoatlantiradi (1-rasm).

**Misollar.**

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x} = 3$  ekanligini isbot qiling.

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun  $\left| \frac{3x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon$  tengsizlik, yoki  $\left| \frac{2}{x} \right| < \varepsilon$  tengsizlik  $x > \frac{2}{\varepsilon}$  lar uchun bajariladi. Demak, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday

$N = \frac{2}{\varepsilon}$  son topiladiki,  $x > N$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda  $|f(x) - 3| < \varepsilon$  bo'ladi. Ya'ni  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x} = 3$  bo'ladi.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x+5}$  hisoblang.

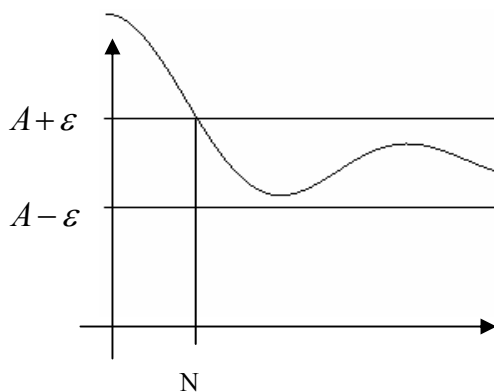
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 4 + \frac{3}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{5}{x} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)} = \frac{4 + 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = \frac{4}{2} = 2$$

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$  hisoblang.

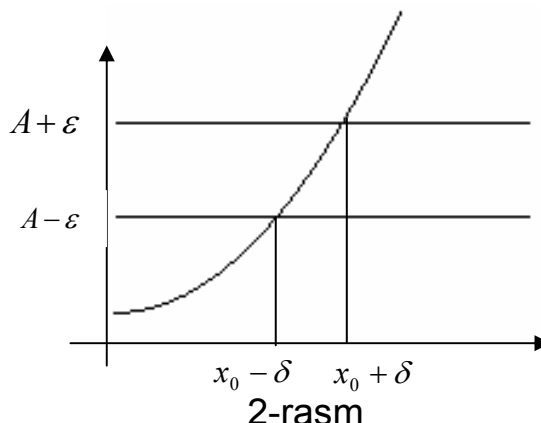
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 4 - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{0}{4} = 0$$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$  hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{4}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 + 5 \cdot 0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



1-rasm



2-rasm

### 5. Funksiyaning nuqtadagi limiti.

$x$  biror haqiqiy o'zgaruvchi bo'lib,  $C$  fiksirlangan haqiqiy son bo'lsin.  $x$  o'zgaruvchi  $C$  songa yaqinlashadi deyilganda  $x$  o'zgaruvchi  $C$  ga yaqin bo'lgan ixtiyoriy qiymatga erisha olishi tushiniladi.  $x$  ning  $C$  ga yaqinlashishini ifodalash uchun  $x \rightarrow C$  simvol ishlatiladi.

Funksiyaning limiti tushunchasi quyidagichadir: Agar  $x$   $C$  ga yaqinlashganda  $f(x)$  ning qiymati  $A$  ga yaqinlashsa,  $A$  ga  $f(x)$  funksiya  $x$  ning  $C$  ga yaqinlashgandagi limiti deyiladi.

**Misol.** Quyidagi funksiyaning  $x \rightarrow 3$  dagi limitini hisoblaylik

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  funksiya  $x = 3$  dan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangandir. Biz quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} = x + 3$$

Agar biz 3 ga yaqin ixtiyoriy sonni tanlasak,  $f(x)$  funksiyaning qiymati 6 ga yaqinlashishining guvohi bo'lamiz.

Quyidagi jadvallarda funksiyaning argumentlari 3 ga yaqin joylashgandagi qiymatlari keltirilgan.

|        |   |     |     |      |       |
|--------|---|-----|-----|------|-------|
| $x$    | 2 | 2.5 | 2.9 | 2.99 | 2.999 |
| $f(x)$ | 5 | 5.5 | 5.9 | 5.99 | 5.999 |

yoki

|        |   |     |     |      |       |        |
|--------|---|-----|-----|------|-------|--------|
| $x$    | 4 | 3.5 | 3.1 | 3.01 | 3.001 | 3.0001 |
| $f(x)$ | 7 | 6.5 | 6.1 | 6.01 | 6.001 | 6.0001 |

Jadvallardan ko'rinib turibdiki,  $x$  3 ga yaqinlashganda funksiyaning qiymati 6 ga yaqinlashadi. Biz  $x$  ni 3 ga etarli yaqin tanlasak, funksiyaning qiymati 6 ga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun, 6 soni argumentning 3 ga intilgandagi limitidir.

Bu fikr matematik tilda quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Endi funksiya limitining nuqtadagi ta'rifini keltiramiz.

**Ta'rif.** Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $x$  o'zgaruvchining  $|x - c| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x) - A| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $A$  son  $f(x)$  funksiyaning  $C$  nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Funksiya nuqtadagi limitining tushunchasini quyidagicha izohlash mumkin.

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun,  $C$  nuqtaning shunday  $\delta$  atrofi topiladiki,  $x \neq c$  shartni qanoatlantiruvchi shu atrofdagi barcha  $x$  lar uchun funksiya grafigining mos ordinatalari  $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$  oraliqqa joylashadi (2-rasm).

**Misol.**  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8$  bo'lsa,  $|(3x - 1) - 8| < 0.0015$  shartni

qanoatlantiruvchi  $\delta$  ni toping.

Avvalo,  $|(3x - 1) - 8|$  va  $|x - 3|$  lar orasidagi munosabatni topamiz.

$|(3x - 1) - 8| = |3x - 9| = 3|x - 3|$  bo'lgani uchun,  $|(3x - 1) - 8| < 0.0015$  tengsizlikdan,

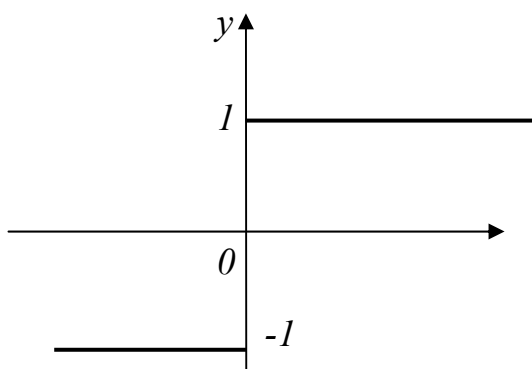
$3|x - 3| < 0.0015$  yoki  $|x - 3| < 0.0005$ , bundan esa,  $\delta = 0.0005$  ni hosil qilamiz.

## 6. Bir tomonli limitlar.

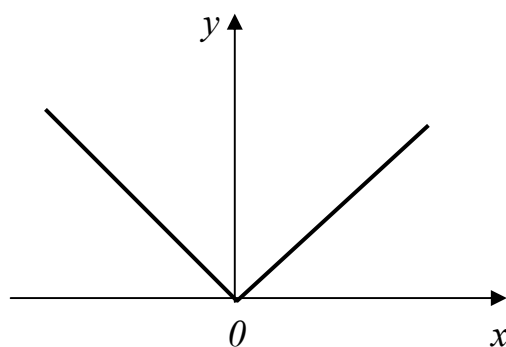
**Ta'rif 1.**  $f(x)$  funksiya  $(a, c)$  oraliqda aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta_1 > 0$  son topish mumkin bo'lsaki,  $0 < x - a < \delta_1$  shartni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  lar uchun  $|f(x) - K| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $K$  songa  $f(x)$  funksiyaning  $a$  ga o'ng tomondan yaqinlashgandagi (o'ng tomonli) limiti deyiladi va  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = K$  ko'rinishda belgilanadi.

**Ta'rif 2.**  $g(x)$  funksiya  $(b, a)$  oraliqda aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta_2 > 0$  son topish mumkin bo'lsaki,  $-\delta_2 < x - a < 0$

shartni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  lar uchun  $|g(x) - L| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $L$  songa  $g(x)$  funksiyaning  $a$  ga chap tomondan yaqinlashgandagi (chap tomonli) limiti deyiladi va  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L$  ko'rinishda belgilanadi.



3-rasm



4-rasm

**Misol.**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{agar } x < 0 \\ 0 & \text{agar } x = 0 \\ 1 & \text{agar } x > 0 \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 3-rasmda keltirilgan.

Chap va o'ng limitlarni hisoblasak,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Shuning uchun  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

**Misol.**

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{agar } x \neq 0 \\ 2 & \text{agar } x = 0 \end{cases} \quad \text{funksiyaning bir tomonli limitlarini hisoblaylik.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

Shuning uchun,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

Shu narsani qayd qilish kerakki, o'ng limitning mavjudligidan chap limitning mavjudligi va aksinchasi kelib chiqmaydi. Bir tomonli limitlar mavjud bo'lgani bilan ularning qiymatlari har xil bo'lishi mumkin.

**Teorema.** Agar chap  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  va o'ng  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  limitlar mavjud bo'lib, ularning limitlari teng bo'lgandagina  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  limit mavjud bo'ladi.

**Misol.**

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{agar } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{agar } x > 1 \end{cases} \text{ funksiyaning } x = 1 \text{ nuqtadagi chap va o'ng}$$

limitlarini hisoblaylik.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + x^2) = 3,$$

$$\text{Shuning uchun, } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3.$$

$$\textbf{Misol. } f(x) = \begin{cases} x & \text{agar } x < 1 \\ -1 & \text{agar } x \geq 1 \end{cases} \text{ funksiyaning } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ hisoblang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1) = -1 \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1.$$

Chap va o'ng limitlar o'zaro teng bo'lmaganligi uchun,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  limit mavjud emas.

**7. Limitlar haqida asosiy teoremlar.**

Teorema (Limitning yagonaligi haqida).

Agar  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  va  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$  bo'lsa,  $L = M$  bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni  $L \neq M$  bo'lsin. Bu farazning noto'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  bo'lganligi uchun, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta_1 > 0$  topiladiki,  $0 < |x - c| < \delta_1$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|f(x) - L| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$  bo'lganligi uchun, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta_2 > 0$  topiladiki,  $0 < |x - c| < \delta_2$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|f(x) - M| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M|$$

Demak, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta_1 > 0$  va  $\delta_2 > 0$  topiladiki,  $0 < |x - c| < \delta_1$  va  $0 < |x - c| < \delta_2$  shartlarni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|L - M| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$  o'rinli bo'ladi. Agar biz  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  deb olsak,  $0 < |x - c| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|L - M| < 2\varepsilon$  bo'ladi.

Agar biz  $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M|$  deb tanlab olsak,  $0 < |x - c| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|L - M| < |L - M|$  qarama-qarshi tengsizlikka kelamiz. Shuning uchun,  $L = M$  bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  va  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$  bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \pm M$$

bo'ladi.

Isboti. Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  berilgan bo'lsin.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  bo'lgani uchun, shunday  $\delta_1$  topiladiki,  $0 < |x - c| < \delta_1$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xuddi shuningdek,

$0 < |x - c| < \delta_2$  bo'lganda  $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$  bo'ladi. U holda etarli kichik  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  uchun,  $0 < |x - c| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  larda

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

o'rinli bo'ladi.

Demak, ta'rifga ko'ra yuqoridagi xossa isbotlandi.

**Teorema.** Agar  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  va  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$  bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  va  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \neq 0$  bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}$$

bo'ladi.

**Misollar.** Isbot qiling:  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right) = \frac{9}{11}$

**Echish.** Ta'rifga ko'ra ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun, shunday  $\delta > 0$  topiladiki,  $0 < |x - 5| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun

$$\left| \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right) - \frac{9}{11} \right| < \varepsilon \text{ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatishimiz kerak.}$$

yoki

$$\left| \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{9}{11} \right| = \left| \frac{4x-20}{11(2x+1)} \right| = \frac{4}{11} \left| \frac{x-5}{2x+1} \right| = \frac{4}{11} \frac{|x-5|}{|2x+1|} < \varepsilon$$

Bu tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun  $\delta$  ni qanday tanlash lozim?  
O'z-o'zidan ravshanki

$$x \rightarrow 5 \Rightarrow 2x+1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{2x+1} < 1,$$

U holda

$$\left| \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{9}{11} \right| = \frac{4}{11} \frac{|x-5|}{|2x+1|} < \frac{4}{11} |x-5|$$

Demak,  $\delta = \frac{11}{4} \varepsilon$  ko'rinishda tanlab olinsa,

$$\left| \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{9}{11} \right| = \frac{4}{11} \frac{|x-5|}{|2x+1|} < \frac{4}{11} |x-5| < \frac{4}{11} \delta = \frac{4}{11} \cdot \frac{11}{4} \varepsilon = \varepsilon$$

o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun,  $0 < |x-5| < \delta$  shartni qanoatlantiruvchi  $x$  lar uchun

$$\left| \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{9}{11} \right| < \varepsilon$$

o'rinli bo'ladi.

Endi limitning xossalaridan foydalanib, limitlarni hisoblashga oid misollar ko'raylik.

**Misollar.**  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5)$  Hisoblang.

**Echish.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 7x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 9 + 21 - 5 = 25$$

**Misol.** Aniqlang  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$

**Echish.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} = \sqrt{\frac{15}{9}}$$

**Misol.** Hisoblang  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

**Echish.**  $x \neq 3$  bo'lganda

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = x^2 + 3x + 9$$

Demak, 3 ga teng bo'lmagan, lekin unga etarli yaqin bo'lgan nuqtalarda

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 27$$

**Misol.** Agar  $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{agar } x \neq 4 \\ 5 & \text{agar } x = 4 \end{cases}$  bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  ni

hisoblang.

**Echish.**  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  limitni hisoblashda  $x$  ning 4 dagi qiymatini emas balki  $x$  ga yaqin nuqtalarida qaraymiz. Shuning uchun,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3) = 4 - 3 = 1$$

**Teorema.**  $c$  nuqtaning biror atrofida  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  bo'lsin. U holda, agar  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$  bo'ladi.

**Isboti.**  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  tengliklardan, ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun, shunday  $\delta > 0$  topiladiki,  $|x - c| < \delta$  uchun,

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad |g(x) - L| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinlidir. Bulardan

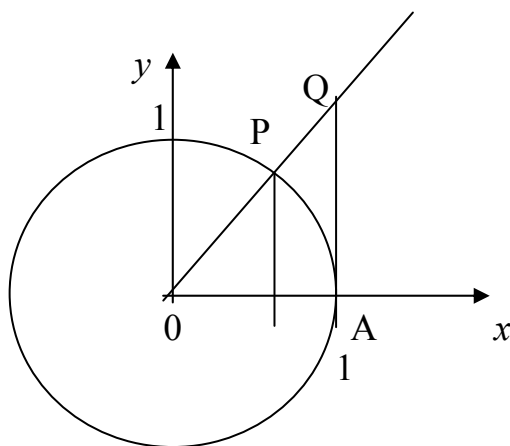
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \quad L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  tengsizlikdan,  $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ , ya'ni  $|h(x) - L| < \varepsilon$ , bundan  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$  kelib chiqadi.

**Misol.** Ajoyib limit deb ataluvchi limitni ko'raylik.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

**Echish.** Markazi koordinatalar boshida joylashgan, radiusi  $r = OA = 1$  ga teng aylanani ko'raylik.  $P$  nuqta  $0 < \angle POA < \frac{\pi}{2}$  shartni qanoatlantiruvchi aylanada yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Burchak  $POA = x$  bo'lsin.  $Q$  nuqta  $OP$  kesmaning davomida bo'lib,  $AQ$  chizig'i  $x$  -o'qi bilan to'g'ri burchak tashkil qilsin.



4- Rasm

Rasmdan ko'rinib turibdiki,  $\triangle OAP$  ning yuzi  $\frac{1}{2} \sin x$  ga,  $OAP$  sektorning yuzi  $\frac{1}{2} x$  ga, va  $\triangle OAQ$  ning yuzi esa  $\frac{1}{2} \tan x$  tengdir.

$$\Delta OAP \leq \text{sector } OAP \leq \Delta OAQ$$

bo'lgani uchun,

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$$

Demak,

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad \frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}, \text{ bundan } \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Lekin  $\cos(-x) = \cos(x)$  va  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$  bo'lgani uchun,

$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$  tengsizlik barcha  $x \neq 0$  uchun o'rinlidir.

Lekin,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  va  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  bo'lgani uchun, yuqoridagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

### **Misollar.**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$  ni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  ni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$  ni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{15} = e^{15}.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$  ni hisoblang.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

### **Mashqlar.**

1. Ketma-ketlik limitlarini hisoblang.

$$\begin{aligned} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n+1}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{6n^2+5n+3}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n, \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+3n}}{2n-1}, \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{2n}, \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} \right)^{n-2}. \end{aligned}$$

2. Funktsiyalar limitini hisoblang.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-2}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^3}{2x^3}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x}, \\ d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}). \end{aligned}$$

3. Quyidagi funksiyalarning o'ng va chap limitlarini toping.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow -6^+} [x], \quad d) \lim_{x \rightarrow -6^-} [x], \\ e) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x-1}, \quad f) \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x^2+5x-3}{2x-1}. \end{aligned}$$

4. Funksiya limitini aniqlang.

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin 3x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x-1)}{(x-1) \cos 3x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x}, \\ d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x+4} \right)^{x+4}, \quad e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x-1} \right)^{2x+2}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}. \end{aligned}$$

5. Yilda 10% qo'shadigan bankka 6000\$ qo'yilganda 5 yildan keyin agar hisoblash a) yilda bir marta; b) yilning har choragida; c) uzluksiz bo'lgandagi qiymatlarini toping.

6. Hisoblash jarayonlari a) har kvartalda; b) har oyda; c) har kunda; d) uzluksiz bo'lganda 6% qo'shadigan bankka 1000\$ qo'yilganda 10 yildan keyin qancha bo'lishini aniqlang.

7. Hozir 7% qo'shadigan bankka qancha miqdorda pul qo'yilganda 20 yildan so'ng 20000\$ bo'ladi? (hisoblash uzluksiz deb olinsin).

8. Bankka qo'yilgan pul miqdori 13 yilda ikki martaga ko'paysa, bankning yillik foizi qancha? ( $r = ?$ ) (hisoblash uzluksiz bo'lsin).

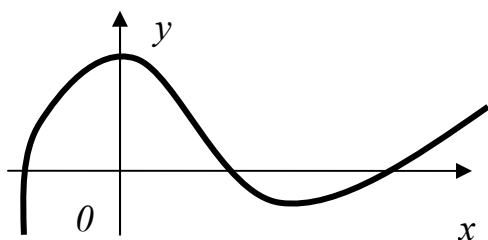
9. 8% qo'shimcha daromad beradigan bankka qancha vaqtdan so'ng qo'yilgan pul miqdori ikki barobar ortishini aniqlang, agar hisoblashlar:

- a) yilning har choragida amalga oshirilsa;
- b) uzluksiz tarzda amalga oshirilsa.

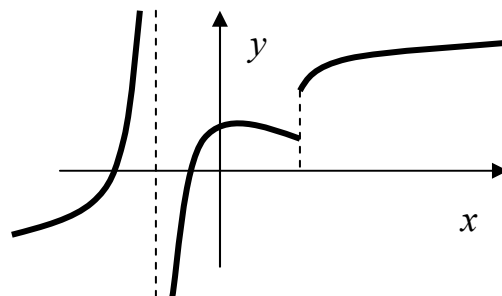
11. Bir bank hisoblashni yilning har choragida amalga oshiradi va 6,1% daromad beradi, ikkinchi bank 6% dan daromad berib, hisoblashni uzluksiz tarzda amalga oshiradi. Qaysi bank effektiv?

## Funksiyaning uzluksizligi

Tabiiyki, agar funksiya grafigini chizish jarayonida ruchka yoki qalamning uchini qog'ozdan uzmasdan chizish imkoniyati bo'lsa, bunday funksiya uzluksiz bo'ladi. Masalan, 1-rasmda ko'rsatilgan funksiya uzluksizdir.



1-rasm



2-rasm

Lekin 2-rasmda ko'rsatilgan funksiya grafigi uzluksiz emas, chunki uning grafigini qalam yoki ruchkani kerakli joyda qog'ozdan ko'tarmasdan chizib bo'lmaydi; grafikda uzilishga ega nuqtalar mavjuddir.

Ko'p hollarda kundalik turmushimizda ishlatiladigan funksiyalarni uzluksiz funksiyalar orqali ifodalash mumkin. Masalan, ishlab chiqarilgan mahsulotimiz 50 so'mdan sotiladigan bo'lsa, kirim funksiyasi  $R(x) = 50x$  ko'rinishda bo'lib, u uzluksizdir.

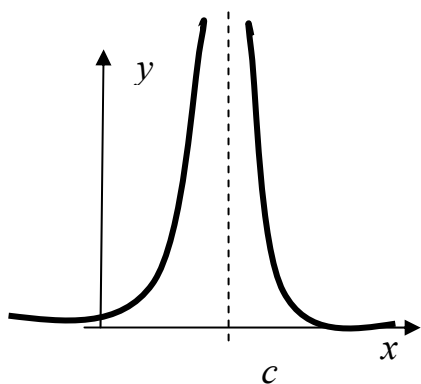
Hayotda ishlatiladigan ko'p funksiyalar uzluksiz bo'lavermaydi. Masalan, xatni pochta orqali jo'natish jarayonida uning og'irligi bilan xatni jo'natish uchun ketadigan xizmat xaqini uzluksiz funksiya orqali ifodalab bo'lmaydi.

Endi uzluksizlikning to'la ta'rifini keltiramiz.

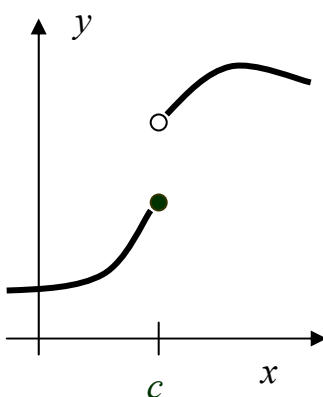
**Ta'rif 1.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $f(x)$  funksiya  $x = c$  nuqtada uzluksiz bo'ladi:

- 1)  $c$  nuqtada aniqlangan ( $f(c)$  mavjud);
- 2)  $x \rightarrow c$  dagi funksiya limiti mavjud;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

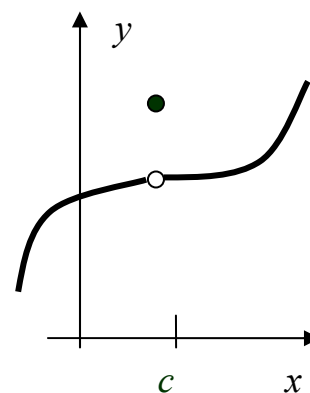
(1)



a)  $f(c)$  aniqlanmagan



b)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  mavjud emas



c)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$

3-rasm.

3-rasmda keltirilgan funksiyalarning grafiklari  $x = c$  nuqtada uzilishga ega. 3a-rasmda funksiya  $x = c$  nuqtada aniqlanmaganligi uchun uzilishga egadir. 3b-rasmda esa, limit mavjud bo'lmagani uchun  $x = c$  nuqtada funksiya uzluksiz emas. 3c-rasmda esa,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$  bo'lgani uchun  $x = c$  nuqtada funksiya uzluksiz bo'la olmaydi.

Yuqoridagi ta'rifda(1) shart amalga oshishi uchun, 1) va 2) punktlardagi shartlar bajarilishi kerak.(1) munosabatni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = 0. \quad (2)$$

Agar  $x - c = \Delta x$  deb belgilasak,  $x = c + \Delta x$  bo'ladi. Odatda,  $\Delta x$  ga  $x$  ning  $c$  nuqtadagi orttirmasi deb ataladi. Ravshanki,  $x \rightarrow c$  da  $\Delta x \rightarrow 0$  va

$$f(x) - f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \quad (3)$$

bo'ladi. Ushbu  $f(c + \Delta x) - f(c)$  ayirmaga  $y = f(x)$  funksiyaning  $c$  nuqtadagi orttirmasi deyiladi va  $\Delta y$  yoki  $\Delta f(c)$  kabi belgilanadi:

$$\Delta y = \Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \quad (4)$$

(2),(3) va(4) munosabatlardan foydalanib,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0.$$

Bu esa funksiyaning uzluksizlik ta'rifini quyidagicha berish mumkinligini ko'rsatadi.

**Ta'rif 2.** Agar argument orttirmasi  $\Delta x$  nolga intilganda funksiya orttirmasi  $\Delta y$  ham nolga intilsa, ya'ni  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$  bo'lsa, u holda,  $f(x)$  funksiya  $c$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Misol.**  $f(x) = 3x + 5$  funksiya  $x = 2$  da uzluksizdir. Chunki,

$$1) f(2) = 11$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11 = f(2)$$

Ko'phadlar uchun yuqoridagi uchta shart bajariladi, ya'ni ko'phad uzluksiz funksiya bo'ladi.

Kasr-ratsional funksiyalarning uzluksizlik nuqtalarini topish uchun uning uzilishga ega bo'lgan nuqtalari topiladi. Bunday funksiyalarda maxrajning qiymati nolga teng nuqtalarda funksiya uzulishga ega bo'ladi.

**Misol.**  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  funksiya  $x = 1$  nuqtada uzluksizmi?

**Echish.** 1)  $f(1) = 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1)$$

Demak, funksiya  $x = 1$  nuqtada uzluksiz.

**Misol.**  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  funksiya  $x = -1$  nuqtada uzluksizmi?

**Echish.** Funksiya  $-1$  nuqtada aniqlanmagan. Shuning uchun funksiya  $x = -1$  nuqtada uzilishga ega. Lekin bu nuqtadagi funksiyaning limiti mavjud:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$$

Bunday xarakterdagi uzilishga yo'qotilishi mumkin bo'lgan uzilish deyiladi. Bu funksiya grafigi  $x = -1$  nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda  $y = x - 1$  to'g'ri chiziqniki bilan bir xil.

**Misol.**  $f(x) = 1 / (x - 1)$  funksiya uzluksizmi?

**Echish.**  $x = 1$  bo'lganda funksiyaning maxraji nolga teng. Shuning uchun:

1)  $x = 1$  nuqtada funksiya aniqlanmagan

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ va } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Demak,  $f(x) = 1 / (x - 1)$  funksiya  $x = 1$  nuqtada uzilishga ega. Bu misolning uzilish xarakteri yuqorida keltirilgan funksiyaning uzilish xarakteridan mutlaqo farq qiladi. Bu nuqtada funksiya cheksiz uzilishga ega.

Ba'zi funksiyalar yagona formula orqali ifodalanmaydi. Masalan, 0 dan kichik qiymatlarda funksiya nol qiymatni, 0 ga teng va undan katta qiymatlarda  $x$  qiymatni qabul qiladigan funksiya quyidagicha yoziladi:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } x < 0, \text{ bo'lsa} \\ x & \text{agar } x \geq 0, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

**Misol.**  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } x < 0, \text{ bo'lsa} \\ x & \text{agar } x \geq 0, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$  funksiya uzluksizmi?

**Echish.** Funksiyani  $x = 0$  nuqtada tekshiramiz.

$$1) f(0) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ va } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \text{ demak, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Demak, funksiya uzluksiz.

$$\textbf{Misol. } f(x) = \begin{cases} x & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2 & \text{agar } 0 < x \leq 4 \text{ bo'lsa,} \\ 2x + 4 & \text{agar } x > 4 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiya uzluksizmi?

**Echish.** Funksiya  $x = 0$  va  $x = 4$  nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin.  $x = 0$  nuqtada funktsiyani tekshiramiz.

$$1) f(0) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \text{ demak, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Demak, funksiya  $x = 0$  nuqtada uzluksizdir.

Endi funktsiyani  $x = 4$  nuqtada tekshiramiz.

$$1) f(4) = 16$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 16, \text{ va } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x + 4 = 12,$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

bu esa,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  mavjud emasligini ko'rsatadi. Ya'ni funksiya  $x = 4$  nuqtada uzluksiz emas.

**Misol.**  $f(x) = \sin x$  funktsiyaning uzluksizligini ko'rsataylik. Bu funksiya  $(-\infty; +\infty)$  da aniqlangan. Argument  $x$  ga  $\Delta x$  ortirma berib, funktsiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Yoki

$$\Delta f = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

bo'ladi. Bundan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 0.$$

Bu esa  $f(x) = \sin x$  funktsiyaning  $x \in (-\infty; +\infty)$  oraliqda uzluksiz ekanligini bildiradi.

Endi funksiya uzluksizligining " $\varepsilon - \delta$ " tilidagi ta'rifini keltiramiz.

**Ta'rif 3.** Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, funksiya argumenti  $x$  ning  $|x - c| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $c$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

**Ta'rif 4.** Uzluksiz bo'lmagan nuqtalar funktsiyaning **uzilish nuqtalari** deyiladi. Funktsiyaning uzilish nuqtalari ikki turga bo'linadi. Birinchi tur uzilishda funktsiyaning shu nuqtadagi bir tomonli limitlari mavjud bo'lib, ular o'zaro teng emas ya'ni  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ . Bunday uzilishda funksiya grafigi sakrash nuqtasiga ega bo'ladi.

Ikkinchi tur uzulishda funksiyaning chap va o'ng limitlarining birortasi cheksizga teng yoki mavjud bo'lmaydi.

### 1. Nuqtada uzluksiz funksiya xossalari.

1) Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x = c$  nuqtada uzluksiz bo'lsa,  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  va  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(c) \neq 0$ ) funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi.

2) Agar  $y = f(u)$  funksiya  $u = u_0$  nuqtada uzluksiz bo'lib,  $u = g(x)$  funksiya  $c$  nuqtada ( $u_0 = g(c)$ ) uzluksiz bo'lsa, murakkab funksiya  $y = f[g(x)]$   $c$  nuqtada uzluksiz bo'ladi. Ya'ni,

$$\lim_{x \rightarrow c} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right] \quad (5)$$

Agar funksiya  $X$  oraliqning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya  $X$  oraliqda uzluksiz deyiladi.

(5) xossadan foydalanib, funksiya limitlarini topishda qo'llaniladi.

### Misollar.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$  ( $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ) limitni hisoblaylik.

Logarifmik funksiyaning uzluksizligidan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [\log_a(1+x)^{1/x}] = \log_a \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] = \log_a e$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$  ( $a \neq 1$ ,  $a > 0$ ) limitni hisoblaylik.

Bu limitni hisoblash uchun  $a^x - 1 = t$  deb olamiz. Agar  $x \rightarrow 0$  bo'lsa,  $t \rightarrow 0$  va  $x = \log_a(1+t)$  kelib chiqadi.

Natijada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}.$$

Bundan

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a \neq 1, a > 0)$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$  limitni hisoblaylik.

tenglik o'rinli bo'lganligi uchun va

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

(bu erda  $t = \alpha \ln(1+x)$ , hamda  $x \rightarrow 0$  da  $t \rightarrow 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha$$

tengliklarga ko'ra,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

## 2. Oraliqda uzluksiz funksiyaning xossalari.

Uzluksiz funksiyaning xossalariга mansub bo'lgan ba'zi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

**Veyershtrass teoremasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda funksiya chegaralangan bo'ladi.

**Teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi

**Bolsano-Koshi teoremasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib, chegaralarda  $f(a), f(b)$  har xil ishorali bo'lsa, shunday  $c \in [a, b]$  nuqta mavjudki,  $f(c) = 0$  bo'ladi.

### Misollar.

1.  $y = \frac{1}{2-x}$  funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uzilish xarakterini aniqlang. Funksiya  $x = 2$  nuqtada aniqlanmagan va  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} = \infty$ .

Shuning uchun funksiya  $x = 2$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

2. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari va uzilish xarakterini aniqlang.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{agar } x < 1, \text{ bo'lsa,} \\ 2 & \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x-2} & \text{agar } x \neq 2, \text{ bo'lsa,} \\ 1+x & \text{agar } x = 2 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x-2} & \text{agar } x \neq 2, \text{ bo'lsa,} \\ 1+x & \text{agar } x = 2 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{agar } x < 2, \text{ bo'lsa,} \\ 3x^2 & \text{agar } x \geq 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

$$d) f(x) = [x], \quad e) f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$$

a) funksiya  $x = 0$  da birinchi tur uzilish(sakrash)ga ega, chunki  $f(0) = 2$ , lekin  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

b) funksiya ikkinchi tur uzilishga ega, chunki,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+x}{x-2} = \infty$  va  $f(2) = 3$ .

c) funksiya  $x = 1$  da sakrashga ega, chunki chap va o'ng limitlar teng emas.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 = 3$$

d)  $f(x)$  funksiya sonlar o'qining barcha butun nuqtalarida birinchi tur uzilishga ega, chunki, chap va o'ng limitlar  $x \in \mathbb{Z}$  nuqtalarda teng emas:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n.$$

e) funksiya  $x = 0$  da aniqlanmagan va  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty$  bo'lgani uchun ikkinchi tur uzilishga ega.

### **Mashqlar.**

1. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini va uning tipini aniqlang.

a)  $(x-3)^2 + 2$ , b)  $-6 + \frac{9}{x}$ , c)  $[3-2x]$ , d)  $|5x-1|$ ,

e)  $\frac{x^2 - 11x + 30}{6-x}$ , f)  $\frac{4x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 1}$ .

2. Quyidagi funksiyalarning keltirilgan nuqtalarda uzluksizligini tekshiring

a)  $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$ ;  $x = 2$

b)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ ;  $x = 0$

c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ;  $x = 1$

d)  $f(x) = \frac{2x-4}{3x-6}$ ;  $x = 2$

e)  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{agar } x \leq 2, \\ 2 & \text{agar } x > 2, \end{cases}$  bo'lsa  $x = 2$

f)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{agar } x \leq 3, \\ 2x + 4 & \text{agar } x > 3, \end{cases}$  bo'lsa  $x = 3$

[illegible]

**JAHON IQTISODIYOTI VA DIPLOMATIYA UNIVERSITETI**

**KETMA-KETLIK**

**\* \* \***

**FUNKSIYALAR VA ULARNING LIMITI**

**(Xalqaro iqtisodiy munosabatlar  
ta'limi yo'nalishi uchun)**

Nashr uchun mas'ul: Sh.Ko'chimov

Muharrir: F.Fayziyev

EHM operatori: Q.Rohataliyev

Nashrga tayyorlangan materiallarning sifati, keltirilgan faktlar, atoqli otlar va boshqa ma'lumotlarning aniqligi, shuningdek, ochiq nashr etish man qilingan ma'lumoylarni ommalashtirgani uchun ma'ruzalar matni muallifi javobgardir.

JIDU ruxsatisiz qayta chop etish man qilinadi

Formati 84x108 1/32. Hajmi 9 b.t.  
Nusxa soni 100. Kelishilgan narxda.

---

JIDUning nusxa ko'paytirish bo'limida chop etildi.  
700113, Toshkent sh., Buyuk Ipak yo'li ko'chasi, 54.