

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI MATEMATIKA
FAKULTETI MATEMATIKA YO'NALISHI 401-GURUH TOLIBI
ABDULLAYEV JONIBEKNING MATEMATIK ANALIZ
FANIDAN YOZGAN

KURS ISHI

Topshirdi: Abdullayev J

Qabul qildi: Saidov . Y

Mavzu: Koshi tengsizligi va uning tadbirlari

Reja:

- 1 Agyusten Lui Koshi – buyuk matematik.
- 2 Koshi tengsizligining sodda hollari.
- 3 Koshi tengsizligining isbotlash usullari.
- 4 Koshi tengsizligini umumlashtirish.
- 5 Koshi tengsizligidan foydalanib Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlash.
- 6 Yung, Gyo'lder, Minkovskiy va Yensen tengsizliklari.
- 7 Masalalar yechish namunalari.

Annatatsiya

Bu kurs ishida musbat sonlar uchun Koshi tengsizligi va uni tadbirlari mukammal urganilgan.

Matematika faning yorqin yulduzi , buyuk fransuz olimi Agyusten Lui Koshi 1789-yili aslzodalar oilasida tug'ilgan .1807-yilda Parijdagi yuqori malakali injenerlarni tayyorlaydigan mashhur politexnika maktabini tugatgan . 1810-yildan boshlab Sherburgda injener bo'lib ishlagan .

Koshi turli sohalar bilan shug'ullagan : elatiklik nazaryasi ,optika , osmon mehanikasi ,differensial tenglamalar,geometriya, algebra va sonlar nazaryasi . Koshi qiziqishlarining asosi matematik analiz bo'lgan.

U matematik analiz va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazaryasi fanlarining asoschilaridan biridir .

1816 yilda Koshi Parij fanlar akademiyasining a'zosi qilib qabul qilingan va Politexnika maktabida professor bo'lib ishlay boshlagan. Bu yerda u o'zining matematik analizdan mashhur ma'ruzalarini o'qigan . Bu maruzalar keyinchalik uchta kitob shaklida chop qilingan :

“Analiz kursi “ (1821 yil) , “Cheksiz kichiklarni hisoblash bo'yicha ma'ruzalar rezyumasi”(1823 yili), “Analizning geometriyaga tatbiqlari bo'yicha ma'ruzalar”(1826-1828-y.) Oliy matematikada Koshining nomi bilan bog'liq bo'lgan teorema va terminlar ancha ko'p, shulardan masalan:

- qavariq ko'pyoqlar uchun Koshining yagonalik teoremasi ,
- ko'phadlar uchun Koshi indeksi,
- nomanfiy sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi uchun Koshi tengsizligi,
- uzluksiz funksiyalar uchun Bolsano-Koshi teoremasi,
- Koshi turidagi integral,
- Gamma funksiya uchun Koshi formulasi ,
- Koshi-Bunyokovskiy tengsizligi,
- determinantlar nazaryasida Bine-Koshi teoremasi ,
- gruppalar nazaryasida Koshi teoramasini,
- sonli qatorlarda koshi alomati,
- Koshi-Adamar formulasi,
- differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi,
- kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun Koshi-Riman sharti,

-bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamaning xususiy yechimini topish Koshi usuli

matematikada muhim o'rin egallaydi .Nemis matematigi Feliks Kleyn

“Matematikada barcha sohalari bo'yicha erishgan ajoyib yutuqlariga ko'ra uni Gaussning deyarli yonida qo'yish mumkin “ deb Koshiga yuksak baho bergan. Rus matematigi, akademik A.D.Aleksandrov “Koshining qavariq ko'pyoqlar uchun yagonalik teoremasini isbotlashdagi fikrlashi – geometriyadagi eng ajoyib fikrlashlarning biridir” degan . Agyusten Lui Koshi 1857 yilda vafot etgan. U hayoti davomida 789 ta ilmiy ish yozgan, bu ishlar 25 ta yirik jildlarda mujassamlashtirilgan .

Hozirgi kunda, Agyusten Lui Koshining usullari klassik usullarga aylanib ketgan .

KOSHI TENGSIZLIGINING SODDA HOLLARI

Ixtiyoriy $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu tengsizlikda tenglik faqat

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

bo'lganda bajariladi .

Boshqacha qilib aytganda, nomanfiy sonlar o'rta geometrigi ularning o'rta arifmetigidan oshmaydi va tenglik faqat bu sonlar bir-biriga teng bo'lganda bajariladi.

Bu tengsizlik Agyusten Lui Koshi tomonidan 1821 yilda isbot etilgan. Izoh: $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, (1) tengsizlikning chap tomoni nolga aylanib , u ushbu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$$

ko'rinish oladi. Bu tengsizlikda tenglik faqat

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

bo'lganda bajariladi. Shuning uchun biz, (1) tengsizlikni isbotlashda

$a_1 > 0, a_2 > 0 \dots a_n > 0$ deb hisoblaymiz.

$n = 2, n = 3, n = 4$ bo'lgan hollarda Koshi tengsizligi osongina isbot qilinadi.

$n = 2$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Holda (1) tengsizlik

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (2) \quad \text{ko'rinishida bo'ladi. (2) tengsizlik esa ushbu}$$

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \geq 0 \quad (3) \quad \text{tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.}$$

(3) tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a_1 = a_2$ bo'lganda bajarilishi ma'lum.

$n = 3$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi ushbu

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \quad \text{ko'rinishida bo'ladi.}$$

$a = \sqrt[3]{a_1}, b = \sqrt[3]{a_2}, c = \sqrt[3]{a_3}$ belgilash kiritsak, u

$$3abc \leq a^3 + b^3 + c^3 \quad (4)$$

ko'rinish oladi. (4) tengsizlikni

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

tarzda yozib olib, chap tomoni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \geq 0,$$

$$(a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0.$$

Oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a = b = c$ bo'lganda bajarilishi ravshan, demak $n = 3$ bo'lgan holda Koshi tengsizligi bajarilishini ko'ratdik.

$n = 4$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad (5)$$

tarzda yoziladi. (5) tengsizlik (2) tengsizlikdan osongina kelib chiqadi:

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{a_3 \cdot a_4}} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

$n = 4$ bo'lgan holda o'rinli bo'lishi ko'rsatildi.

(1) tengsizlikdan quyidagi muhim natijalar kelib chiqadi :

1-Natija. Yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida ko'paytmasi eng katta bo'ladigani, bu bir-biriga teng sonlardir.

2-Natija. Ko'paytmasi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida yig'indisi eng kichik bo'ladigani bu bir –biriga teng sonlardir.

Bu natijalar eng katta va eng kichik qiymatlarni topishga doir masalalarda ishlatish mumkin.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING BIRINCHI USULI

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ma'lum. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}$$

belgilardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \quad \text{shartni qanoatlantiruvchi} \quad \forall \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$$

sonlar uchun

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \quad (6)$$

bo'ladi va tenglik faqat

$$x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$$

bo'lganda bajariladi.

Oxirgi tasdiqni matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ bajarilishini yuqorida ko'rsatilib o'tildi.

$n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \quad (7)$$

tenglikni chap tomonidagi ko'paytichuvlar orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan katta bo'lmaydi, ikkinchisi esa 1 dan kichik bo'lmaydi. Agar bu fikr bajarilmasa, (7) tenglik ham bajarilmasligi ravshan. Qulayligi uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz.

U holda

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(x_2 - 1) &\geq 0, \\ x_2 - 1 - x_1x_2 + x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 + x_1x_2 \end{aligned} \quad (8)$$

bo'ladi. Ushbu

$$x_1x_2, x_3, x_4, \dots, x_k, x_{k+1}$$

k ta son ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra

$$x_1x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k \quad (9)$$

tengsizli o'rinli bo'ladi. (8) va (9) dan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1 + x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq (1 + x_1x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1$$

Keltirilgan tasdiqni qismi isbotlandi.

Agar (6) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida 1 dan farqlisi bo'lsa, bu sonlar ko'paytmasi 1 bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki (aytayli x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \Rightarrow n = x_1 + x_2 + \dots + x_n > 1 + x_1x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 + (n-1) = n$$

ziddiyat kelib chiqdi. Demak $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi

$$\forall x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$$

sonlar uchun

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \quad (6)$$

Belgilashimizga qaytsak :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING IKKINCHI USULI

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0 \dots a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_n}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}$$

belgilashlardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi:

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall x_1 > 0, x_2 > 0 \dots, x_n > 0$ sonlar uchun

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1 \quad (10)$$

bo'ladi va tenglik faqat $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lganda bajariladi.

Bu fikrni matematik induksiya usulida isbotlaymiz:

$n = 2$ bo'lganda bajarilishini avvalroq ko'rsatgan edik .

$n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz.

Ushbu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = k + 1 \quad (11)$$

tenglikning chap tomonidagi qo'shiluvchilari orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan kichik bo'lmaydi va ikkinchisi 1 dan kichik bo'lmaydi. Agar fikr bajarilmasa, (11) tengli ham bajarilmasligi ma'lum. Qulayligi uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz. U holda

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(x_2 - 1) &\geq 0, \\ x_2 - 1 - x_1x_2 + x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - 1 &\geq x_1x_2 \end{aligned} \quad (12)$$

bo'ladi. Ushbu

$$x_1 + x_2 - 1, x_3, x_4, \dots, x_k, x_{k+1}$$

k ta son yig'indisi k ga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra

$$(x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \leq 1 \quad (13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (12) va (13) tengsizliklardan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{k+1} \leq (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_{k+1} \leq 1.$$

Keltirilgan tasdiqning birinchi qismi isbotlandi.

Agar (10) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida birdan farqlisi bo'lsa, bu sonlar yig'indisi n bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki (aytaylik x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$ bo'ladi.

Bundan

$$(x_1 + x_2 - 1) > 1,$$

$$1 = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n < (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1$$

ziddiyat kelib chiqadi.

Demak farazimiz to'g'ri ekan. Bu farazimizdan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING UCHUNCHI USULI.

Avval $x \geq 0$ bo'lganda ushbu

$$x^n + n - 1 \geq nx \quad (14)$$

tengsizlik bajarilishini isbot qilamiz. Bu yerda tenglik faqat $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Buning uchun (14) tengsizlikni

$$x^n - 1 - n(x - 1) \geq 0$$

ko'rinishida yozib olib, chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} x^n - 1 - n(x - 1) &= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x - 1) = (x - 1)[(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \dots + (x - 1)] = \\ &= (x - 1)^2[(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) + (x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1) + \dots + (x + 1) + 1] \geq 0, \end{aligned}$$

chunki $x \geq 0$. Bu tengsizlikda tenglik bajarilishi uchun $x = 1$

bo'lishi kerak.

(14) tengsizlikda $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, ($a \geq 0, b > 0$) desak,

$$\frac{a}{b} + n - 1 \geq n\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a + (n - 1)b \geq na^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}b \geq a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}} \quad (15)$$

kelib chiqadi. (15) tengsizlik $b = 0$ bo'lganda xam bajariladi. (15) tengsizlikda tenglik faqat $a = b$ bo'lganda bajariladi.

Endi esa Koshi tengsizligini matematik induksiya usulida isbotlashga o'tamiz. $n = 2$ da bajarilishi ma'lum. $n = k$ da to'g'ri deb olib,

$n = k + 1$ bo'lganda xam to'g'riligini ko'rsatamiz.

(15) tengsizlik va induksiya faraziga asosan

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k + 1} &= \frac{1}{k + 1}a_{k+1} + \frac{k}{k + 1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq a^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}} \geq \\ &\geq a^{\frac{1}{k+1}} \left(\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \right)^{\frac{k}{k+1}} = \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k+1}} \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar orasida bir-biriga teng bo'lmaganlari bor deb faraz qilaylik. U holda $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan kamida bittasi qolganlarining o'rta arifmatigiga teng bo'lmaydi. Qulayligi uchun

$$a_n \neq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1}$$

deb hisoblaymiz. U holda (15) tengsizlikka asosan

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= \frac{1}{n} a_n + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} > a_n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \\ &\geq a_n^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \end{aligned}$$

ziddiyat kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Izoh: (14) tengsizlikda $x = 1 + \alpha, (\alpha \geq -1)$ desak,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{tengsizlik hosil bo'ladi.}$$

Bu tengsizlikda tenglik faqat $\alpha = 0$ bo'lganda bajariladi ($n \geq 2$).

Ohirgi tengsizlikka Bernulli tengsizligi deyiladi. (Yokob Bernulli (1654-1705) Shvetsiariyalik olim).

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING TO'RTINCHI USULI.

Matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ da to'g'riligi ma'lum. $n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Qulayligi uchun

$$a_{k+1} \geq a_1, a_{k+1} \geq a_2, \dots, a_{k+1} \geq a_k$$

deb hisoblaymiz. Ushbu

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

belgilashni kiritib olamiz. U holda

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{(k+1)A_k + (a_{k+1} - A_k)}{k+1} = A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1},$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = 1 + \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k},$$

bo'ladi. Bernulli tengsizligidan

$$\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k} = \frac{a_{k+1}}{A_k}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlikni ushbu

$$(A_{k+1})^{k+1} = a_{k+1}(A_k)^k$$

tarzda yozish mumkin. Induksiya faraziga ko'ra

$$(A_k)^k \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$$

bo'ladi.

Demak

$$(A_{k+1})^{k+1} \geq a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}$$

o'rinli ekan. Bundan esa

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi.

Isbot tugadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING BESHINCHI USULI

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

U holda

$$\begin{aligned} (n+1)A_{n+1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = nA_n + a_{n+1} \\ (G_{n+1})^{n+1} &= a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = (G_n)^n a_{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Quyidagi ayirmani ko'rib chiqamiz:

$$R = (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}) - n(A_n - G_n).$$

(16) ayniyatlardan ushbu

$$R = a_{n+1} + nG_n - (n+1)\sqrt[n+1]{(G_n)^n a_{n+1}} \quad (17)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar $G_n = x^{n+1}$, $a_{n+1} = y^{n+1}$ belgilash kiritsak, (17) tenglikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned}
R &= y^{n+1} + nx^{n+1} - (n+1)x^n y = nx^n(x-y) - y(x^n - y^n) = \\
&= nx^n(x-y) - y(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = \\
&= (x-y)[(x^n - yx^{n-1}) + (x^n - y^2x^{n-2}) + \dots + (x^n - y^n)] = \\
&= (x-y)^2 [x^{n-1} + x^{n-2}(x+y) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})] \geq 0.
\end{aligned}$$

Demak, ushbu

$$(n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}) \geq n(A_n - G_n) \quad (18)$$

tengsizlik o'rinli bo'lar ekan.

$A_2 - G_2 \geq 0$ bo'lgani uchun (18) tengsizlikdan n ning ixtiyoriy natural qiymatida $A_n \geq G_n$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli. Isbot tugadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING OLTINCHI USULI.

(LOGARIFMIK TENGSIZLIK USULI).

Avval, $x > 0$ bo'lganda ushbu

$$\ln x \leq x - 1$$

tengsizlikni isbotlab olamiz. Bu yerda tenglik faqat $x=1$ bo'lganda bajariladi. Buning uchun $f(x) = \ln x - x + 1$ yordamchi funksiya tuzib olamiz va bu funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. Ushbu

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

tenglikka asosan $f(x)$ funksiya $(0,1]$ oraliqda o'suvchi va $[1,\infty)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi. Bunga ko'ra oraliqda kamayuvchi bo'ladi. Bunga ko'ra $0 < x < 1$ bo'lganda $f(x) < f(1)$ va $x > 1$ bo'lganda $f(1) > f(x)$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya eng katta qiymatini $x=1$ bo'lganda qabul qiladi. Shuning uchun $f(x) \leq f(1)$ bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned}
\ln x - x + 1 &\leq 0, \\
\ln x &\leq x - 1.
\end{aligned}$$

$a_1 > 0, a_2 > 0 \dots a_n > 0$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

belgilash kiritsak, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ bo'ladi.

Yuqorida isbot qilingan tengsizlikka ko'ra

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} &= e^{\frac{\ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{n}} = e^{\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}} \leq e^{\frac{(x_1-1) + (x_2-1) + \dots + (x_n-1)}{n}} = \\ &= e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n}{n}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

bo'ladi. Bundan esa belgilashlarga asosan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun yuqoridagi tengsizlikda $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lishi kerak. Aks holda tengsizlik belgisi qat'iy bo'ladi. **Isbot tugadi.**

KOSHI TENGSIZLIGIDAN FOYDALANIB

KOSHI-BUNYAKOVSKIY TENGSIZLIGINI ISBOTLASH.

Ixtiyoriy $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar uchun ushbu

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \quad (24)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda tenglik faqat

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \dots, a_n = \lambda b_n \quad (25)$$

bo'lganda bajariladi. (24) tengsizlikka **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizligi deyiladi. (**V.Ya.Bunyakovskiy (1804-1889) rus matematigi**). Agar

$a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlarning barchasi nolga teng bo'lsa, (24) tengsizlik bajarilishi ma'lum. Shuning uchun $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar orasida teng bo'lmaganlari bor deb hisoblaymiz.

Yuqorida keltirgan fikrni Koshi tengsizligidan foydalanib isbotlaymiz.

Buning uchun ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}},$$

$$y_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, y_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \dots, y_n = \frac{b_n}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}$$

belgilashlarni kiritib olamiz. Quyidagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &\leq \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} y_1^2 \\ x_2 y_2 &\leq \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} y_2^2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n y_n &\leq \frac{1}{2} x_n^2 + \frac{1}{2} y_n^2 \end{aligned} \tag{26}$$

natijada

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

kelib chiqadi. Bunga ko'ra

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

bo'radi. Bundan esa

$$-(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

tengsizlik ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun (26) tengsizliklarning har birida tenglik bajarilishi kerak. Isbot tugadi.

KOSHI TENGSIZLIGINI UMUMLASHTIRISH.

Yuqorida isbot qilingan ushbu

$$\ln x \leq x - 1, (x > 0) \quad (27)$$

tengsizlik, Koshi tengsizligini umumlashtirishga imkon beradi.

Buning uchun yig'indisi 1 ga teng bo'lgan $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlarni olamiz va

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}, \\ x_2 &= \frac{a_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ x_n &= \frac{a_n}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}, \end{aligned} \quad (28)$$

belgilashlarni kiritamiz. Bu yerda $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ixtiyoriy sonlar.

(27) va (28) ga asosan

$$\begin{aligned} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} &= e^{p_1 \ln x_1 + p_2 \ln x_2 + \dots + p_n \ln x_n} \leq e^{p_1 (x_1 - 1) + p_2 (x_2 - 1) + \dots + p_n (x_n - 1)} = \\ &= e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)} = e^{1-1} = e^0 = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

bo'ladi. (29) tengsizlikka (28) belgilashni qo'yib,

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \quad (30)$$

bo'lishini ko'ramiz. (30) tengsizlik Koshi tengsizligining umumlashmasidir, chunki xususan $p_1 = \frac{1}{n}, p_2 = \frac{1}{n}, \dots, p_n = \frac{1}{n}$ bo'lganda

(30) tengsizlik Koshi tengsizligiga aylanadi. (30) tengsizlikda

$$p_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}, p_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}, \dots, p_n = \frac{k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

deymiz. Bu yerda $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, (k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0)$ ixtiyoriy sonlar.

Natijada (30) tengsizlik ushbu

$$(a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n})^{\frac{1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}} \leq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \quad (31)$$

ko'rinishni oladi.

(31) tengsizlikda, xususan $k_1 = 1, k_2 = 1, \dots, k_n = 1$ bo'lganda Koshi tengsizligi kelib chiqadi. Demak, (31) tengsizlik Koshi tengsizligi umumlashmasi ekan.

YUNG, GYO'LDER VA MINKOVSKIY TENGSIZLIKLARI.

$n = 2$ bo'lganda holda, (31) Koshi tengsizligining umumlashmasi ushbu

$$(a_1^{k_1} a_2^{k_2})^{\frac{1}{k_1+k_2}} \leq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2}{k_1 + k_2} \quad (32)$$

ko'rinish bo'ladi. Agar biz bu yerda

$$\frac{1}{p} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{k_2}{k_1 + k_2},$$

$$a = a_1^{\frac{1}{p}}, \quad b = a_2^{\frac{1}{q}}$$

belgilash kiritsak, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bo'ladi va (32) tengsizlik

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (33)$$

ko'rinish oladi. (33) tengsizlikka Yung tengsizligi deyiladi.

(V.YUNG (1882-1946) ingliz matematigi) .

Yuqoridagi belgilashlarga asosan Yung tengsizligida tenglik faqat

$a^p = b^q$ bo'lganda bajariladi.

$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ va $b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_n > 0$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin.

Ushbu

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a_1}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_1 &= \frac{b_1}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}, \\
x_2 &= \frac{a_2}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_2 &= \frac{b_2}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}, \\
&\dots \dots \dots & & \dots \dots \dots \\
x_n &= \frac{a_n}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, & y_n &= \frac{b_n}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

belgilashlarni kiritamiz. Quyidagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{aligned}
x_1 y_1 &\leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{y_1^q}{q}, \\
x_2 y_2 &\leq \frac{x_2^p}{p} + \frac{y_2^q}{q}, \\
&\dots \dots \dots, \\
x_n y_n &\leq \frac{x_n^p}{p} + \frac{y_n^q}{q}
\end{aligned}$$

natijada ushbu

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \frac{1}{p} (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p) + \frac{1}{q} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Yuqoridagi belgilashlarni hisobga olib, oxirgi tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}. \quad (34)$$

(34) tengsizlikka Gyo'lder tengsizligi deyiladi. (Otto Lyudvig Gyo'lder (1859-1937) nemis matematigi). Gyo'lder tengsizligida $p = 2, q = 2$ desak, **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizligi kelib chiqadi. Demak, Gyo'lder tengsizligi **Koshi-Bunyakovskiy** tengsizligining umumlashmasi ekan.

Gyo'lder tengsizliga asoslanib quyidagi baholashlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned}
& (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p = [a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + a_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots \\
& \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1}] + \\
& + [b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + b_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}] \leq \\
& \leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} + \\
& + [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}} \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} = \\
& = \{[a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}}\} \times \\
& \times \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}} \quad (35)
\end{aligned}$$

Oxirgi tengsizlikda $(p-1)q = p$ tenglik ishlatildi. Agar (35) baholashning ikkala tomonini ham

$$\begin{aligned}
& \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}} \\
& \text{ifodaga bo'lsak va } 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \text{ tenglikni e'tiborga olsak, ushbu} \\
& \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{q}} \leq \\
& \leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p]^{\frac{1}{p}} \quad (36)
\end{aligned}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. (36) tengsizlikka Minkovski tengsizligi deyiladi. (**German Minkovski (1864-1909) nemis matematigi**)

YENSEN TENGSIZLIGI

Aslida Koshi tengsizligi $f(x) = \ln x$ funksiya qavariqligining sodda natijasidir. Umumiy holda, ya'ni $f(x)$ ixtiyoriy qavariq yoki botiq funksiya bo'lgan holda Koshi tengsizligiga o'xshash tengsizliklarni isbot qilish mumkin. Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$

sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda qavariq deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$

sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda botiq deyiladi.

Teorema: a) Agar $f''(x) < 0$, $x \in (a, b)$ bo'lsa ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

tenglikni qanoatlantiruvchi $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlari uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (37)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

b) Agar $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$ bo'lsa ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

tenglikni qanoatlantiruvchi $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlari uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (38)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. a) Avvalo ixtiyoriy $c \in (a, b)$ va $x \in (a, b)$ uchun ushbu

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad (39)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

funksiyaning (a, b) oraliqda eng katta qiymatini topamiz.

$$g'(x) = f'(x) - f'(c), \quad g''(x) = f''(x) < 0$$

bo'lgani uchun $g'(x)$ kamayuvchi. $g'(c) = 0$ ekanligidan $g'(x)$ ning ishorasi $x = c$ nuqtadan o'tishda musbatdan manfiyga o'zgarishi kelib chiqadi. $x = c$ nuqtadan boshqa nuqtada $g'(x)$ nolga aylanmasligidan $g(x)$

funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatini qabul qilishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) \leq g(c)$ bo'ladi, ya'ni (39) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(39) tengsizlikda tenglik faqat $x = c$ bo'lganda bajariladi. $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. Agar $c = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$ bo'lsa, $c \in (a, b)$ bo'ladi. (39) tengsizlikka ko'ra

$$\begin{aligned} p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) &\leq p_1 [f(c) + f'(c)(x - c)] + \\ &+ p_2 [f(c) + f'(c)(x - c)] + \dots + \\ &+ p_n [f(c) + f'(c)(x - c)] = \\ &= f(c) + f'(c)(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - c) = \\ &= f(c) + f'(c)(c - c) = f(c) = f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \geq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n)$$

bo'ladi.

Teorema isbot bo'ldi.

$m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_n \geq 0$, $(m_1 + m_2 + \dots + m_n > 0)$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin.

(37) va (38) tengsizliklarda

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \dots, p_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

deymiz. U holda (37) va (38) tengsizliklar mos ravishda quyidagi ko'rinish oladi:

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \geq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (40)$$

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (41)$$

(37), (38), (40) va (41) tengsizliklarga YENSEN tengsizliklari deyiladi.

(Iogan Lyudvig Yensen (1859-1925) daniyalik matematik).

YENSEN tengsizliklarida $f(x)$ funksiyani turli xil qilib tanlash hisobiga ajoyib tengsizliklarni olish mumkin. Masalan,

1) $f(x) = \ln x$ bo'lsa,

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n},$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

boladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ bo'lsa,

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

3) $f(x) = x^p$ bo'lsa,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ va $p > 1$.

4) $f(x) = \sin x$ bo'lsa,

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \pi]$.

5) $f(x) = xe^x$ bo'lsa,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} + \dots + x_n e^{x_n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

6) $f(x) = x^2$ bo'lsa,

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)^2 \leq (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

bo'ladi. Bu tengsizlikda

$$m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \dots, m_n = b_n^2, \quad x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

desak,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

$$7) \quad f(x) = x^p, \quad p > 1, x > 0 \quad \text{bo'lsa,}$$

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^p \leq \frac{m_1 x_1^p + m_2 x_2^p + \dots + m_n x_n^p}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n)^p \leq (m_1 x_1^p + m_2 x_2^p + \dots + m_n x_n^p)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^{p-1}$$

bo'ladi. Bu tengsizlikda

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad m_1 = b_1^q, m_2 = b_2^q, \dots, m_n = b_n^q,$$

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1^{q-1}}, x_2 = \frac{a_2}{b_2^{q-1}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n^{q-1}}$$

desak,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^p \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{p}{q}}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Gyo'lder tengsizligi kelib chiqadi.

MASALA YECHISH NAMUNALARI.

1-Misol. Perimetri $2p$ bo'lgan uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'lgan uchburchakni topish so'ralsin.

Yechish: Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Demak, perimetri $2p$ bo'lgan ixtiyoriy uchburchakning yuzasi

$$\frac{p^2}{3\sqrt{3}} \text{ dan oshmaydi. } \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \text{ ga faqat } p-a = p-b = p-c, \text{ ya'ni } a=b=c$$

bo'lganda teng bo'ladi. Bu esa, bir xil perimetrli uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'ladigan teng tomonli uchburchak bo'lishini bildiradi.

2-Misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlik chap tomonini guruhlab yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \left(a^3 + \frac{1}{a}\right) + \left(b^3 + \frac{1}{b}\right) + \left(c^3 + \frac{1}{c}\right) &\geq 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b^3 \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{c}} = \\ &= 2a + 2b + 2c = 4p \end{aligned}$$

Bu yerda tenglik faqat

$$a^3 = \frac{1}{a}, \quad b^3 = \frac{1}{b}, \quad c^3 = \frac{1}{c} \quad \text{bo'lganda, ya'ni } a=b=c=1 \quad \text{bo'lganda}$$

bajariladi.

3-Misol. $y = x^2 + x^6 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, ($x > 0$) funksiyaning eng kichik qiymatini

topamiz. Buning uchun berilgan funktsiyani ushbu

$$y = x^2 + x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \text{ko'rinishida yozib olamiz va Koshi}$$

tengsizligini qo'llaymiz:

$$y \geq 7 \sqrt[7]{x^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 7.$$

Bu yerda tenglik $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Demak, berilgan funksiyaning eng kichik qiymati 7 ekan.

4-Misol. Agar $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_5 > 0$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \geq \frac{5}{2}$$

tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz. $a_6 = a_1, a_7 = a_2$ belgilash kiritib, berilgan tengsizlikni ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_6} + \frac{a_5}{a_6 + a_7} \geq \frac{5}{2}$$

ko'rinishda yozib olamiz va Yensen tengsizligidan foydalanamiz.

Yensen tengsizligini $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun yozamiz:

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^{-1} \leq \frac{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n} \geq \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}.$$

Oxirgi tengsizlikda $n = 5, m_i = a_i, x_i = a_{i+1} + a_{i+2}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ desak, ushbu

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_6} + \frac{a_5}{a_6 + a_7} \geq \\ & \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)} \end{aligned}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi esa quyidagi tengsizlikni isbotlashga o'tamiz:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)} \geq \frac{5}{2},$$

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq$$

$$\geq 5[a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)],$$

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_5^2) \geq$$

$$\geq a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5,$$

$$5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2,$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Bu tengsizlik o'rinli, chunki u Koshi-Bunyokovskiy tengsizligidir .

Demak $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_5 > 0$ uchun

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \geq \frac{5}{2} \quad \text{tengsizlik o'rinli.}$$

Isbot tugadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Hasanov.A.B, Yaxshimurotov A.B “Koshi tengsizlikligi va uning tadbiqlari” Urganch-2003
2. Mirzaahmedov M.A, Sotiboldiyev D.A “ O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash” Toshkent-1993
3. Azlarov T, Mansurov H “Matematik analiz” 1-qism Tosh:1994
4. Nazarov X, Ostonov K “Matematika tarixi” Toshkent-1996
5. Toxirov.A, Mo'minov.F “Matematika olimpiada masalalari” Tosh:1996

