

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND
DAVLAT UNIVERSITETI**

FIZIKA FAKULTETI

FIZIKA YO'NALISHI

NAZARIY FIZIKA VA KVANT ELEKTRONIKASI KAFEDRASI

**«Qo'zg'aluvchan chegaraga ega masalalar va ularning yechimini
sonli usullar qo'llab aniqlash» mavzusidagi**

Malakaviy bitiruv ishi

Bajaruvchi: Rosulov D.

Ilmiy rahbar: Saydullayev U.J.

Malakaviy bitiruv ishi nazariy fizika va kvant elektronikasi kafedrasida bajarildi. Kafedraning 2013 yil ____-maydagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etiladi (bayonnoma №__).

Kafedra mudiri: dots. Xaydarov X.

Malakaviy bitiruv ishi YaDAKning 2013-yil __-iyundagi majlisida himoya qilindi va ____ ballga baholandi (bayonnoma №__).

YaDAK raisi:

A'zolari:

Samarqand – 2013

MUNDARIJA

KIRISH	3
I §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA YOKI STEFAN TIPIDAGI MASALALARNING MATEMATIK MODELLARI	4
1.1 Tekis plastinkani payvandlash masalasi.....	4
1.2. Idel gidrodinamik qo'zg'aluvchang chegaraga ega masala.....	5
1.3. Stasionar qo'zg'aluvchang chegaraga ega filtrasiya masalasi.....	8
II §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA MASALALARDA CHEKLI AYIRMALI SXEMALARLAR	10
2.1. Differentsial operatorning chekli ayirmali (ChA) approksimatsiyasi.ChA masalaning qo'yilishi.	10
2.2. Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi.....	20
2.3. Ayirmali sxema. Nyutona usuli.....	22
2.4. Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun har xil oshkormas sxemalar.....	23
III. §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA MASALALARNI SONLI ECHISH USULLARI	26
3.1. Koordinata to'r qo'zg'aluvchang front tugunini elib olish metodi.....	26
3.2. Frontni to'g'irlash metodi.....	29
3.3. Aralashmani filtrlashda hosil bo'ladigan cho'kmaning chiziqlimas siqilishi masalasini sonli yechish.....	32
XULOSA	38
ADABIYOTLAR	39

KIRISH

Chiziqlimas massa almashinish masalasida Stefan masalasining sonli echimi ancha muhim sanaladi va o'znavbatida ancha murakkabdir. Biz qarayotgan filtrlash masalasida qattiq zarra bilan aralashma o'rasidagi chegaraning o'zgarishini hosil bo'ladigan chegarani qoyish uchun qullaniladigan sonli usul bu chekli ayrimalar metodidir. Masalani echishning murakkab tomoni shundan iboratki, har vaqt qadamida, yoki, har ko'chish qadamida shablon tanlab borishimiz kerak. Ana shu hususiyat chiziqlimas tekis o'zgaruvchili masalaga nisbatan ancha qiyin bo'ladi.

Qo'zg'aluvchang chegaraga ega masalasi ikki hil usulda echiladi:

- Fazolar chegarasi tanlab olingan metod. Bu metod variable domain methods metodi deb yuritiladi.

- Chegara tanlab olimagan metod yoki bir fazadan ikkinchi fazaoga o'tish (fixed domain methods) metodi deb yuritiladi.

Birinchi metodlar qo'zg'aluvchang chegara vaqtning yoki koordinataning har bir qatlanida hisoblanib boradi. Butun sonli hisoblash jarayonida har bir vat yoki koordinataga mos xos chegara topilib boradi, ya'ni hisoblash dinamik chegaraning o'zgarishida noma'lum chegara topilib boradi. Bunday metod ya'ni vaqt har bir qadamida o'zgarishida koordinatalarni topish – koordinata to'rining frontini ushlash metodi ham deb yuritiladi.

Ikkinchi metodda esa dinamik to'r fazalar chegarasiga maxkamlangan deb hisoblanadi. Umuman qo'zg'aluvchang chegara to'g'rlanadi.

Malakaviy birituv ishida ikki metodlarni xususiy hol keng qaralib o'tilgan va ulardan foydalanib masalalar echilgan

I §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA YOKI STEFAN TIPIDAGI MASALALARNING MATEMATIK MODELLARI

Kvazistasionar Stefan masalasi.

Qo'zg'aluvchang chegaraga ega klassik Stefan masalasini qaraylik. Chegaralanmagan Ω soxada issiqlik o'tkazish jarayonini qaraylik. Issiqlik o'tganda harorat u^* erish temperaturasi ga erishganda, erish v_0 tezlik bilan harakatlanadi, ya'ni S erish soxa chegarasi o'zgarib boradi. Bu jarayon qo'zg'aluvchang chegaraga ega deb ataladi. Agar jarayonni aniq masala bilan tushuntirish uchun payvandlash, idel gidrodinamik va filtrasiya masalalarini qaraymiz.

1.1 Tekis plastinkani payvandlash masalasi

Payvandlash masalasi. Cheksiz tekis qalinligi h bo'lgan plastikaga payvandlash asbobni ta'sir qildirsak. Issiqlik manbasi berilgan soxa vaqt o'tishi bilan kengayib boradi, ya'ni v_0 tezlik bilan harakatlanayotgan issiqlik soxasiga ega bo'lamiz. Erish temperaturasi u^* dan katta bo'lgan soxani Ω_+ soxa, u^* dan kichik bo'lgan soxani Ω_- deb olsak. Issiqlik manbasi berilgan soxa asta-sekinlik bilan chegarasini o'zgartirib boradi. Natijada S fazoviy o'tish chegarasi harakatlanadi. Bunday masala qo'zg'aluvchang chegaraga ega kvazistasionar masala deb nomlanadi. Issiqlik sig'imini, zichlikni va issiqlik o'tkazuvchanglik ko'effisientlarini mos ravishda $c(u)$, $\rho(u)$ va $k(u)$ deb olsak. $u = u^*$ no'qtada $c(u)$, $\rho(u)$ va $k(u)$ funksiyalar o'zgilashga ega bo'ladi.

Bu masala mos issiqlik o'tkazuvchanglik masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\rho(u)c(u)(v_0 \nabla)u = \nabla(k(u)\nabla u), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

Plastikaning yuqori chegarasida berilayotgan issiqlik oqimida Ω soxaning chegarasi:

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial N} = Q(x), \quad x_2 = h \quad (1.2)$$

Bu yerda N -normal. Plastikaning pastki soxasida $u(x)$ issiqlik saqlanib turadi va u_0 ga teng:

$$u(x) = u_0, \quad x_0 = 0. \quad (1.3)$$

Soxaning S chegarasida issiqlik uzluksiz:

$$[u] = u_+(x) - u_-(x) = 0, \quad x \in S \quad (1.4)$$

Bu yerda $u_{\pm} = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S \\ x' \in \Omega_{\pm}}} u(x')$.

Soxalarni chegarasida issiqlik oqimi uzilishga ega bo'ladi, ya'ni Stefan masalasiga mos xarakterlanadi:

$$\left[k(u) \frac{\partial u}{\partial N} \right] = \lambda(v_0 N), \quad x \in S \quad (1.5)$$

Bu yerda λ -fazaviy o'tishning entalpiyasi.

Bu (1.1)-(1.5) malalar kvazistasionar Stefan masalasi ifodalaydi.

1.2. Idel gidrodinamik qo'zg'aluvchang chegaraga ega masala.

Idel gidrodinamik masala. Kanalda silliq bo'lmagan dunglikdan o'tayotgan suvning oqishini qaraylik. Idel siqilmaydigan suyuqlik tenglamasi (Eyler tenglamasi) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\nabla u) = 0, \quad (1.6)$$

$$(u \nabla) u = -\nabla p, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_+. \quad (1.7)$$

Bu yerda $u = (u_1, u_2)$ -tezlik, p -bosim. ψ tok funksiyasi mos ravishda

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (1.8)$$

Ko'rinishda kiritamiz va u (1.6) siqilmaslik shartini qanoatlantiradi. Tezlikning yuqori qismini ω orqali belgilasak, u

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (1.9)$$

Tenglikni qanoatlantiradi.

(1.8) va (1.9) lardan ko'rish mumkinki,

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = -\omega, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.10)$$

(1.7) ni yoyib yozsak

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (1.11)$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad x \in \Omega_+. \quad (1.12)$$

(1.11) ni x_2 bo'yicha, (1.12) ni x_1 bo'yicha differensiallasak va natijalarni bir-biriga qo'shsak,

$$\frac{D(\psi, \omega)}{D(x_1, x_2)} = 0, \quad (1.13)$$

ni olamiz.

Bu yerda

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

Yakobian.

(1.13) dan ψ va ω lar funksional bog'lanishga ega

$$\omega = \omega(\psi). \quad (1.14)$$

(1.17) ni (1.10) ga qo'ysak okim Ω_+ soxasida ψ tok funksiyasi uchun quyidagi chiziqlimas Puassan tenglamasini olamiz:

$$\Delta \psi = -\omega(\psi), \quad x \in \Omega_+. \quad (1.15)$$

Oddiy xolda yuqori bo'lmagan oqim potensialida $\omega(\psi) = 0$ bo'ladi,

$$\Delta \psi = 0, \quad x \in \Omega_0 \quad (1.16)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi (1.15) va (1.16) tenglamalar uchun chegaraviy shartlarni qaraymiz. h balandlikdagi kanalning chiqish va kirishida suyuqlik tezligi o'zgarmas va berilgan deb olsak. U holda

$$u(x) = u_0, \quad x_1 = \pm\infty, \quad x_2 \in (0, h). \quad (1.17)$$

(1.8) va (1.17)lardan

$$\psi(x) = u_0 x_2 + \text{const}, \quad x_1 = \pm\infty, \quad x_2 \in (0, h)$$

ni olamiz, va masalan

$$\psi(x) = u_0 x_2, \quad x_1 = \pm\infty, \quad x_2 \in (0, h). \quad (1.18)$$

Agar Γ_+ dunglik qattiq bo'lsa, chegaraviy shart o'tkazuvchang bo'lmaydi

$$(uN) = 0, \quad x \in \Gamma_+,$$

(1.8) ni e'tiborga olsak,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \Gamma_+$$

ni olamiz.

Bu yerda $\frac{\partial}{\partial \tau}$ - Γ_+ dan urinma bo'yicha hosila. (1.18) ni e'tiborga olsak,

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \Gamma_+. \quad (1.19)$$

olamiz.

Endi noma'lum chegara S dagi shartni qaraymiz. Bu chegarada

$$\psi(x) = u_0 h, \quad x \in S \quad (1.20)$$

ga teng bo'ladi.

S chegara tok chizig'i deb hisoblasak, Bernulli integrali o'zgarmaz qiymatga erishadi. Atmosfera bosimi p_0 orqali ifodalasak,

$$p_0 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \rho g x_2 = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 + \rho g h, \quad (1.21)$$

olamiz. Bu yerda ρ -zichlik, g -esa erkin tushish tezlanishi. (1.20 va (1.21) larda quyidagi olamiz

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial N}\right)^2 = |\nabla \psi|^2 = u_0^2 + 2\rho g(h - x_0), \quad x \in S. \quad (1.22)$$

Bu yerda N - S chegaraga o'tkazilgan normal.

Shunday qilib (1.16), (1.18)-(1.20), (1.22) lar qo'zg'aluvchang chegarda masalasi bo'ladi.

1.3. Stasionar qo'zg'aluvchang chegaraga ega filtrasiya masalasi.

Stasionar filtrasiya. G'ovak muhitda suyuqlikning oqish masalasi qaraylik. Boshlang'ich shartdan filtrasiya tezligi u noldan boshlanadi deb olamiz. Agar p - bosim, $\rho g x_2$ - gidrostatik bosim, ρ - zichlik, g - erkin tushush tezlanishi deb olsak va to'liq bosimni P orqali belgilasak, u

$$P = p + \rho g x_2$$

ga teng bo'ladi.

Darsi qonuni bo'yicha filtrasiya jarayonni quyidagicha yozish mumkin:

$$u = -k \nabla (p + \rho g x_2). \quad (1.23)$$

Bu yerda k - filtrasiya koeffitsiyenti, umuman chiziqli emas.

Agar suyuqlikni siqilmaydigan deb qabul qilsak, uzluksizlik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\nabla u) = 0. \quad (1.24)$$

(1.23) va (1.24) lardan filtrasiya koeffitsiyenti k o'zgarmas bo'lsa, u holda bosim uchun tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\Delta p = 0 \quad (1.25)$$

(1.25) tenglama filtrasiya jarayonini o'rganish uchun asosiy tenglama hisoblanadi.

Damba orqali suyuqlikning filtrasiya masalasining qo'yilishi qaraylik. Atmosfera bosimini e'tiborga olmaylik, ya'ni havoda $p = 0$ deb qabul qilamiz. Qattiq Γ_+ asosda $(uN) = 0$ bo'ladi va (1.23) shartdan

$$\frac{\partial}{\partial N} (p + \rho g x_2) = 0, \quad x \in \Gamma_+ \quad (1.26)$$

ni olamiz.

Dambadan oldingi va keyingi suyuqlikning tezligini hisobga olmasak va to'liq gidrostatik bosimni tenglashadi. Shuning uchun dambaning Γ_+ chegara soxasida

$$p + \rho g x_2 = \rho g H, \quad x \in \Gamma_1 \quad (1.27)$$

ekanligi olamiz. Bu shartga $x_2 = H$ dan $p = 0$ bo'lishini ham qo'shamiz.

Xuddi shunday

$$p + \rho g x_2 = \rho g H, \quad x \in \Gamma_2 \quad (1.28)$$

Γ_+ chegarada ega bosim atmosfera bosimiga teng va masala shartiga ko'ra

$$p(x) = 0, \quad x \in \Gamma_3 \quad (1.19)$$

Qo'zg'aluvchang chegara S na shart quyidagicha bo'ladi:

$$p(x) = 0, \quad x \in S. \quad (1.30)$$

Ikkinchi shartni esa

$$\frac{\partial}{\partial N}(p + \rho g x_2) = 0, \quad x \in S \quad (1.31)$$

ga teng.

Shunday qilib, qo'zg'aluvchang chegaraga ega masasi (1.25)-(1.31) lardan iborat bo'ladi.

II §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA MASALALARDA CHEKLI AYIRMALI SXEMALARLAR.

2.1. Differentsial operatorning chekli ayirmali (ChA) approksimatsiyasi.

ChA masalaning qo'yilishi.

Berilgan differentsial tenglamani taqribiy ifodalovchi ayirmali sxemalarni yozish uchun quyidagi ikkita amal bajarilishi kerak.

1. Argumentning uzluksiz o'zgarish sohasini uning diskret o'zgarish sohasiga almashtirish kerak;
2. Differentsial operatorni qandaydir chekli ayirmali operatorga almashtirish, bundan tashqari chegaraviy shartlar va boshlang'ich ma'lumotlar uchun ayirmali almashtirishlar tuzish kerak.

Bu jarayon amalga oshirilgandan keyin algebraik tenglamalar sistemasiga o'tamiz.

Uzluksiz argumentning barcha qiymatlari uchun ayirmali masalani echib bo'lmaydi. Shuning uchun bu sohada qandaydir chekli sondagi nuqtalar to'plami olinadi va faqat shu nuqtalarda taqribiy echim izlanadi. Bunday nuqtalar to'plamiga to'r deyiladi. Nuqtalarning o'zi esa to'r tugunlari deb ataladi.

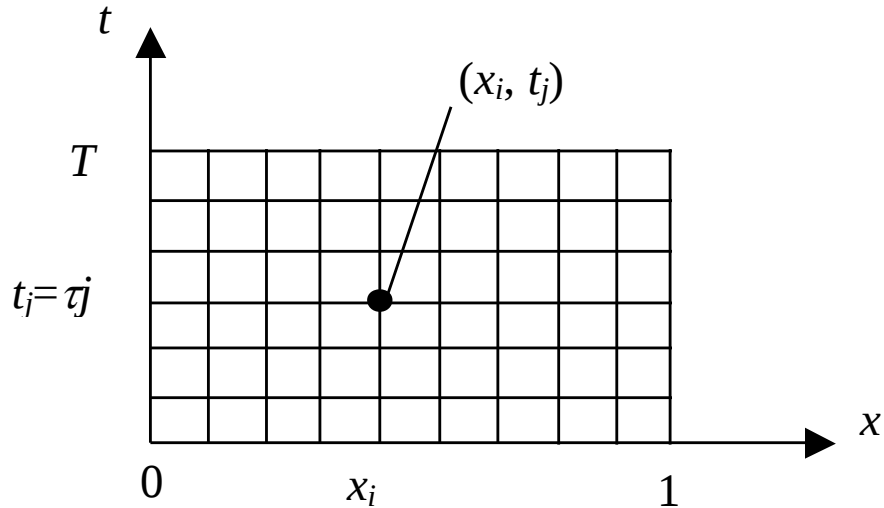
To'r tugunlarida aniqlangan funktsiyaga to'rli funktsiya deyiladi.

Shunday qilib differentsial tenglama echimlari fazosini to'r funktsiyalar fazosi bilan almashtirdik.

Kesmada tekis to'r. $[0,1]$ kesmani N ta teng bo'lakga bo'lamiz. $h = x_i - x_{i-1} = 1/N$ to'r qadami deb ataladi. Bo'linish nuqtalari $x_i = ih$ - to'r tugunlari deyiladi. Barcha tugunlar to'plami $\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{1, N-1}\}$ to'rni tashkil qiladi. Bu to'plamga $x_0 = 0, x_n = 1$ chegaraviy nuqtalarni qo'shish mumkin, ya'ni $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}\}$ deb belgilaymiz.

Tekislikda tekis to'r. $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ sohada aniqlangan ikki o'zgaruvchili $u(x,t)$ funktsiyalar to'plamini qaraymiz.

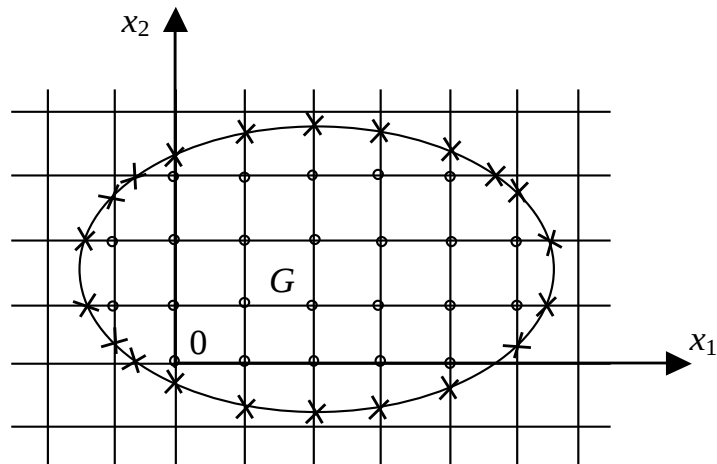
x o`qining  $[0,1]$  va  $t$  o`qining $[0,T]$ kesmalarini mos ravishda N_1 va N_2 ta bo`laklarga bo`lamiz. $h=1/N_1, \tau=T/N_2$ bo`lsin. Bo`linish nuqtalaridan o`qlarga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. Natijada bu to`g`ri chiziqlar kesishishidan (x_i, t_j) tugunlarni hosil qilamiz, ular $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$ to`rni tashkil qiladi.



Bu to`r  $x$  va  $t$  yo`nalishlar bo`yicha h va τ qadamlarga ega.

SHunga o`xshash kesmada yoki tekislikda notekis to`rni qurish mumkin.

$x = (x_1, x_2)$ tekislikda Γ chegarali murakkab ko`rinishli  $G$  soha berilgan bo`lsin.



$x_{1i} = ih_1, x_{2j} = jh_2, i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1, h_2 > 0$ to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. U holda  $(ih_1, jh_2)$  to`rni hosil qilamiz. «o» bilan ichki, «x» bilan esa tashqi nuqtalar belgilangan. Ichki nuqtalar to`plamini  $\omega_h$  bilan, chegaraviy nuqtalar to`plamini γ_h

bilan belgilaymiz. Shunday qilib ω_h to'ra ox_1, ox_2 yo'nalishlar bo'yicha tekis, ammo $\bar{G}$ soha uchun $\overline{\omega_h} = \omega_h + \gamma_h$ to'ra esa chegara yaqinida notekis.

Uzluksiz $x \in \bar{G}$ argumentli $u(x)$ funktsiyalar o'rniga $y(x_i)$ to'ra funktsiya olinadi. $y(x_i)$ to'ra funktsiyani vektor ko'rinishda berish mumkin.

Odatda $\{\omega_h\}$ to'ra to'plami h qadamga bog'liq bo'ladi. Mos ravishda $y_h(x)$ to'ra funktsiyalar ham h parametrdan bog'liq bo'ladi. Agar to'ra notekis bo'lsa h sifatida $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ vektor qaraladi.

Uzluksiz argumentli $u(x), x \in G$ funktsiyalar qandaydir H_0 funktsional fazo elementlaridan iborat. $y_h(x)$ to'ra funktsiyalar esa H_h fazoning elementlari. SHunday qili chekli ayirmalar usuli H_0 fazoni $y_h(x)$ to'ra funktsiyalarning H_h fazosiga o'tkazadi.

H_0 fazodagi $\|\cdot\|_0$ norma kabi H_h chiziqli fazoda $\|\cdot\|_h$ norma kiritiladi.

Bir qator normalarni keltiramiz

1) C da normaning to'ra ko'rinishi:

$$\|y\|_c = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)| \text{ yoki } \|y\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|.$$

2) L_2 da normaning to'ra ko'rinishi:

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} \text{ yoki } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{1/2}.$$

Taqribiy usullar nazariyasining asosiy e'tibori y_h ning $u(x)$ ga yaqinligini baholashga qaratiladi. Biroq y_h va $u(x)$ lar turli fazolarning vektorlaridir.

Baholashning ikkita imkoniyati mavjud:

1. $\omega_h(G)$ da berilgan y_h funktsiya G sohaning barcha nuqtalarida aniqlanadi (masalan, chiziqli interpolatsiya yordamida). Natijada $x \in G$ uzluksiz argumentli $\tilde{y}(x, h)$ funktsiyani olamiz. $\tilde{y}(x, h) - u(x)$ ayirma H_0 ga tegishli bo'ladi. y_h ning u ga yaqinligi $\|\tilde{y}(x, h) - u(x)\|_0$ bilan xarakterlanadi, bunda $\|\cdot\|_0$ - H_0 dagi norma.
2. H_0 fazo H_h ga akslantiriladi. Har bir $u(x) \in H_0$ funktsiyaga mos $u_h(x), x \in \omega_h$ to'ra funktsiyaga o'tkaziladi, ya'ni $u_h = \mathfrak{R}_h u \in H_h$. Bunda $\mathfrak{R}_h$ - H_0 dan H_h ga

oʻtkazuvchi chiziqli operator. Bu moslikni turli yoʻllar bilan amalga oshirish mumkin ($\mathfrak{R}_h$ turli operatorlarni tanlash bilan). Agar $u(x)$ uzluksiz funktsiya boʻlsa, $u_h(x) = u(x)$ deyish mumkin, bu erda $x \in \omega_h$. Baʼzan $x_i \in \omega_h$ tugunda $u_h(x_i)$ berilgan $x_i \in \omega_h$ tugunning qandaydir atrofi boʻyicha $u(x)$ ning oʻrta integral qiymati bilan aniqlanadi. Bundan keyin $u(x)$ - uzluksiz funktsiya va barcha $x_i \in \omega_h$ lar uchun $u_h(x_i) = u(x_i)$ boʻladi deb faraz qilamiz.

u_h toʻr funktsiyaga ega boʻlib, H_h fazoning vektori boʻlgan $y_h - u_h$ ayirmani hosil qilamiz. y_h ning u ga yaqinligi $\|y_h - u_h\|_h$ bilan xarakterlanadi, bunda $\|\cdot\|_h$ - H_h dagi norma. Bunda H_h fazodagi norma $\|\cdot\|_0$ normani barcha $u \in H_0$ vektor uchun approksimatsiyalaydi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

deb faraz qilish tabiiydir. Bu shartni H_h va H_0 fazodagi normalarning oʻzaro kelishganlik sharti deb ataymiz.

Biz bundan keyin ikkinchi yoʻldan foydalanamiz.

1. $Lv = dv/dx$.

x nuqtani fiksirlaymiz va $x-h, x+h$ nuqtalarni olamiz, bu erda $h > 0$. Lv approksimatsiya qilish uchun quyidagi ifodalardan biridan foydalanish mumkin

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x, \quad (2.1)$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_x^-. \quad (2.2)$$

(2.1) ifoda oʻng ayirmali hosila, (2.2) esa chap ayirmali hosilani tasvirlaydi. Ayirmali ifodalar ikki nuqtada aniqlangan.

Yana quyidagi ifodani olish mumkin

$$L_h^\sigma v \equiv \sigma v_x + (1 - \sigma) v_x^-,$$

bunda σ - ixtiyoriy haqiqiy son. Xususiyl holda $\sigma = 0,5$ boʻlganda markaziy ayirmali hosilani olamiz

$$v_x^\circ \equiv \frac{1}{2} (v_x + v_x^-) = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (2.3)$$

(2.1), (2.2), (2.3) approksimatsiyalarda qanday xatolikga yo'l qo'yildi va x nuqtada $h \rightarrow 0$ da $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$ ayirma qay holda o'zini tutadi kabi savollarga javob berish muhimdir. $\psi(x)$ miqdor x nuqtada Lv ayirmali approksimatsiya xatoligi deyiladi.

$v(x)$ ni Teylor qatoriga yoyamiz

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + O(h^3).$$

Bu ifodani (2.1), (2.2), (2.3) larga qo'yamiz

$$v_x = v'(x) + \frac{h}{2} v''(x) + O(h^2), \quad v_x^- = v'(x) - \frac{h}{2} v''(x) + O(h^2), \quad v_x^+ = v'(x) + O(h^2).$$

Bundan ko'rinib turibdiki

$$\phi = v_x - v'(x) = O(h), \quad \phi = v_x^- - v'(x) = O(h), \quad \phi = v_x^+ - v'(x) = O(h).$$

V - L_h ayirmali operatorning $h < h_0$ o'lganda $III(x, h)$ shablondan iborat x nuqtaning $III(x, h_0)$ atrofida berilgan etarlicha silliq funktsiyalar $v \in V$ sinfi bo'lsin.

Agar

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m)$$

bo'lsa L_h operator L differentsial operatorni x nuqtada $m > 0$ tartib bilan approksimatsiyalaydi deymiz.

Endi $Lv = v'' = \frac{d^2 v}{dx^2}$ ni misol sifatida approksimatsiyalash masalasini qaraylik

Uch nuqtali shablonda

$$L_h v = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}.$$

$$v_x(x) = v_x^-(x+h), \quad L_h v = \frac{v_x^-(x) - v_x^-(x)}{h} = \frac{1}{h} [v_x^-(x+h) - v_x^-(x)] = v_{xx}^-(x).$$

Ushbu holda approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo'ladi, ya'ni $v_{xx}^-(x) - v''(x) = O(h^2)$.

Besh nuqtali shablonda

$$(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h) \tag{2.4}$$

$Lv = v^{(4)}$ hosila uchun

$$L_h v = v_{xxxx}^- = \frac{1}{h^2} [v_{xx}^-(x+h) - 2v_{xx}^-(x) + v_{xx}^-(x-h)] =$$

$$= \frac{1}{h^4} [v(x+2h) - 4v(x+h) + 6v(x) - 4v(x-h) + v(x-h)]$$

olinadi.

Approksimatsiya tartibi ikkiga teng, ya'ni

$$\psi = v_{xxxx}^- - v^{(4)} = \frac{h^2}{6} v^{(6)} + O(h^4).$$

h daraja bo'yicha $\psi = L_h v - L v$ approksimatsiya xatoligi yoyilmasidan approksimatsiya tartibini oshirish uchun foydalanish mumkin. SHunga binoan

$$v_{xx}^- - v'' = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4) \leq \frac{h^2}{12} v_{xxxx}^- + O(h^4)$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan (4) shablonda aniqlangan

$$L_h v = v_{xx}^- - \frac{h^2}{12} v_{xxxx}^-$$

operator $L v = v''$ ni to'rtinchi tartib bilan approksimatsiya qilishi kelib chiqadi.

Lemma. Agar $v \in C^{(2)}[x-h, x+h]$ bo'lsa

$$v_{xx}^- = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = v''(\xi), \quad \xi = x + \theta h, \quad |\theta| \leq 1,$$

va agar $v \in C^{(4)}[x-h, x+h]$ bo'lsa

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi), \quad \xi = x + \theta_1 h, \quad |\theta_1| \leq 1,$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Integral shakldagi qoldiq hadi bilan olingan Teylor formulasidan foydalanamiz

$$v(x) = v(a) + (x-a)v'(a) + \dots + \frac{(x-a)^r}{r!} v^{(r)}(a) + R_{r+1}(x), \quad (2.5)$$

bunda

$$R_{r+1}(x) = \frac{1}{r!} \int_a^x (x-\xi)^r v^{(r+1)}(\xi) d\xi = \frac{(x-a)^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-s)^r v^{(r+1)}(a+s(x-a)) ds.$$

Integral uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llaymiz

$$R_{r+1}(x) = \frac{(x-a)^{r+1}}{(r+1)!} v^{(r+1)}(\xi),$$

bunda ξ - $[a, x]$ kesmada x ning o`rta qiymati,

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \int_0^1 (1-s)^r ds = \frac{1}{r+1}.$$

(2.5) da x ni $x+h$ va a ni x bilan almashtirib, $r=1$ va $r=3$ uchun mos ravishda quyidagilarni olamiz

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + h^2 \int_0^1 (1-s)v''(x+sh)ds, \quad (2.6)$$

$$v(x+h) = v(x) + hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + \frac{h^3}{6} v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(x+sh)ds. \quad (2.7)$$

Bu erda h ni $-h$ ga, s ni $-s$ almashtirib

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + h^2 \int_{-1}^0 (1+s)v''(x+sh)ds, \quad (2.8)$$

$$v(x-h) = v(x) - hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) - \frac{h^3}{6} v'''(x) + \frac{h^4}{6} \int_{-1}^0 (1+s)^3 v^{(4)}(x+sh)ds \quad (2.9)$$

formulalarni olamiz.

(2.6), (2.8) dan quyidagini olamiz

$$v_{xx}^- = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} = \int_{-1}^1 g_2(s)v''(x+sh)ds,$$

bunda

$$g_2(s) = \begin{cases} 1+s & \text{agar } -1 \leq s \leq 0 \text{ da,} \\ 1-s & \text{agar } 0 \leq s \leq 1 \text{ da.} \end{cases}$$

$g_2(s) \geq 0$ bo`lganligidan o`rta qiymat haqidagi teoremdan foydalanish mumkin, natijada

$$v_{xx}^- = v''(x+\theta h) \int_{-1}^1 g_2(s)ds = v''(x+\theta h) = v''(\xi), \quad -1 \leq \theta \leq 1,$$

bu erda ξ - $[x-h, x+h]$ kesmada o`rta nuqta.

(2.7) va (2.9) dan

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^2}{6} \int_{-1}^1 g_4(s)v^{(4)}(x+sh)ds$$

hosil qilamiz, bu erda

$$g_4(s) = \begin{cases} (1+s)^3 & \text{agar } -1 \leq s \leq 0 \text{ da,} \\ (1-s)^3 & \text{agar } 0 \leq s \leq 1 \text{ da,} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 g_4(s) ds = \frac{1}{2}.$$

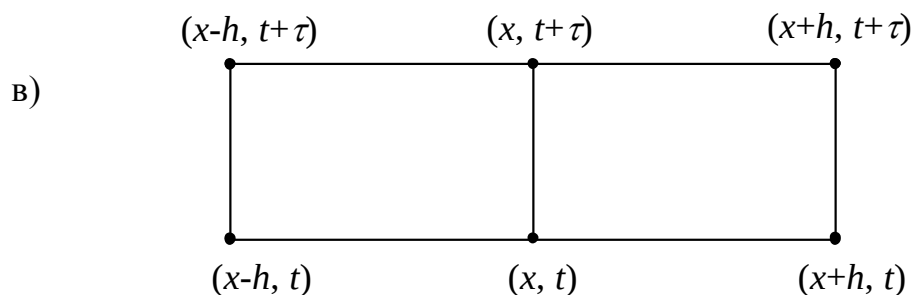
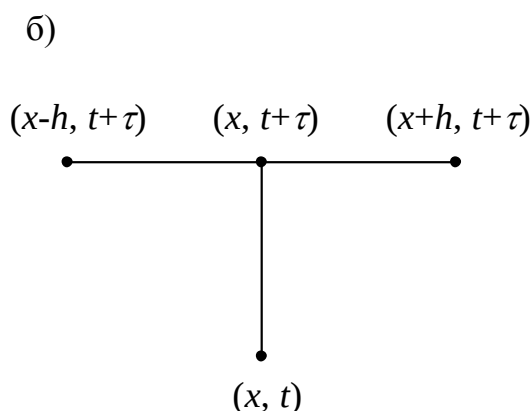
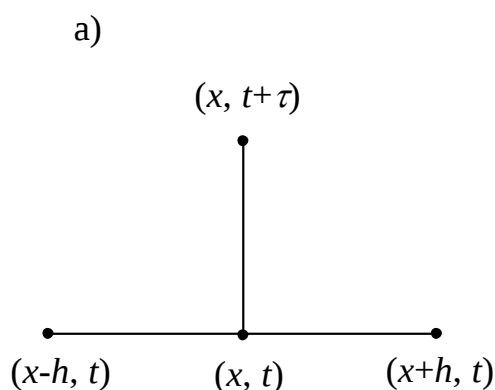
$g_4(s) \geq 0$ va $v^{(4)}(x)$ uzluksizligidan, o`rta qiymat haqidagi teoremani qo`llab

$$v_{xx}^- = v''(x) + \frac{h^{(4)}}{12}(x + \theta h), \quad |\theta| \leq 1$$

ni olamiz va shu bilan lemma isbotlanadi.

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v = v(x, t) \text{ ni ChAS ga yoyaylik.}$$

(x, t) - tekislikda nuqta bo`lsin. Shablonni aniqlaymiz. U to`rtta nuqtadan tashkil topgan bo`lsin (a rasm).



$L_{h\tau}$ ni quyidagicha aniqlaymiz

$$L_{h\tau}^{(0)} v = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x + h, t) - 2v(x, t) + v(x - h, t)}{h^2}.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$v = v(x, t), \quad \widehat{v} = v(x, t + \tau), \quad \check{v} = v(x, t - \tau).$$

Unda

$$v_t = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} = \frac{\widehat{v} - v}{\tau}$$

va

$$L_{h\tau}^{(0)} = v_t - v_{xx}^-. \quad (2.10)$$

b rasmdagi shablondan foydalanilganda, $t + \tau$ momentda v_{xx}^- olinsa, u holda

$$L_{h\tau}^{(1)} = v_t - \widehat{v}_{xx}^-. \quad (2.11)$$

(2.10) va (2.11) larning chiziqli kombinatsiyasini olib, $\sigma \neq 0$ va $\sigma \neq 1$ bo'lganda oltinuqtali shablonda (v rasm) aniqlangan chekli operatorlarning bir parametrli oilasini hosil qilamiz

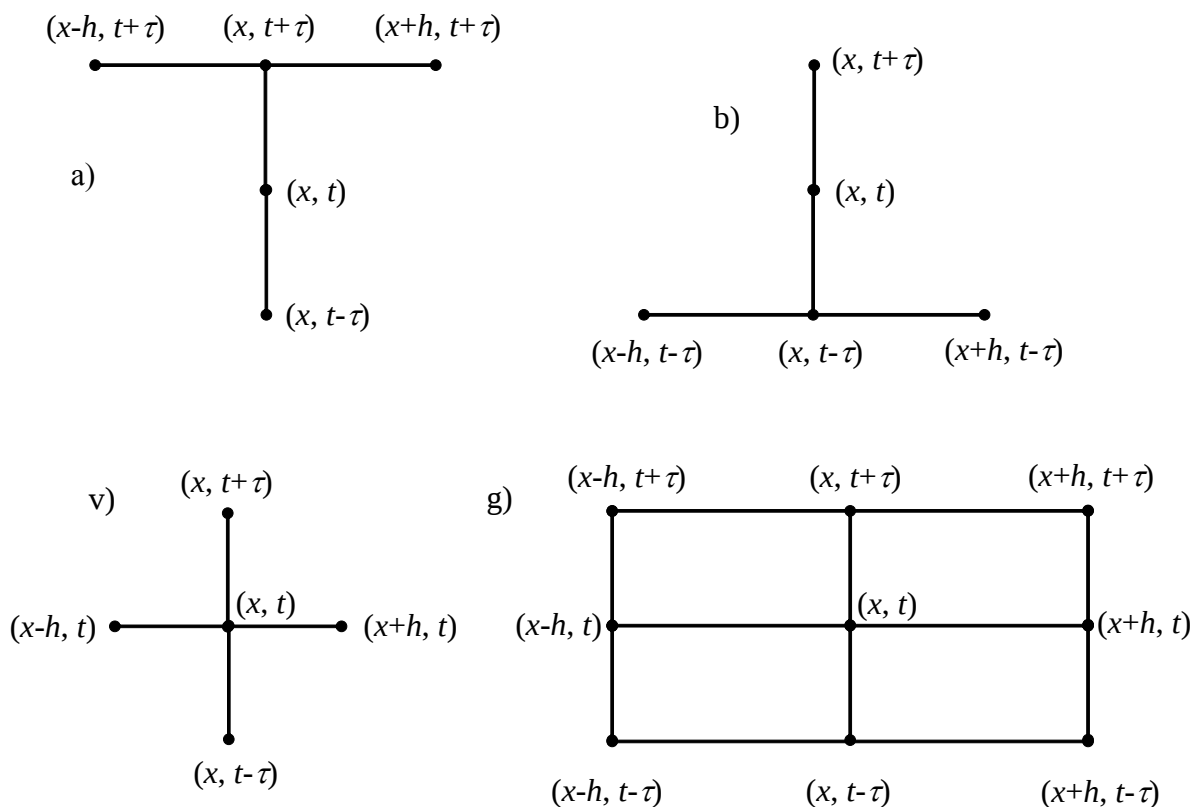
$$L_{h\tau}^{(\sigma)} v = v_t - (\sigma \widehat{v}_{xx}^- + (1 - \sigma) v_{xx}^-). \quad (2.12)$$

$L_{h\tau}^{(0)}$ operatorlar $L_{h\tau}^{(1)}$ ning approksimatsiya tartibiga ega, (2.12) esa $\sigma < 0,5$ bo'lganda $O(h^2 + \tau)$, $\sigma = 0,5$ bo'lganda $O(h^2 + \tau^2)$ approksimatsiya tartibiga ega.

Endi

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ qaraylik.}$$

Quyidagi shablonlardan foydalanilamiz



Аппроксимациялардан бири (v rasm)

$$L_{h\tau} = v_{tt} - v_{xx}, \quad (2.13)$$

бунда

$$v_{tt} = (v(x, t + \tau) - 2v(x, t) + v(x, t - \tau)) / \tau^2.$$

a) shablonda:

$$L_{h\tau} v = v_{tt} - \hat{v}_{xx}. \quad (2.14)$$

To'qqiznuqtali shablonda (g rasm) ayirmali operatorlarning ikkiparametrli oilasini yozish mumkin

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)} v = v_{tt} - (\sigma_1 \hat{v}_{xx} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{xx} + \sigma_2 \check{v}_{xx}). \quad (2.15)$$

(2.15) dan $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ bo'lganda (2.13), $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = 1$ bo'lganda esa (2.14) kelib chiqadi.

(2.13), (2.14), (2.15) ayirmali operatorlar $O(h^2 + \tau^2)$ аппроксимация tartibiga ega.

2.2. Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi

Yuqori temperaturada o'tuvchi jarayonlar uchun, masalan plazmada, issiqlik o'tkazuvchanlik ko'effitsiyenti temperaturaning chiziqlimas funksiyasi bo'ladi (zichligi ham), bir qator masalalarda esa temperatura gradiyenti funksiyasi ham chiziqlimas funksiya bo'ladi. Bundan tashqari yana issiqlik manbalari (issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining o'ng tarafi) temperaturadan bog'liq bo'lishi mumkin, masalan issiqlik ximyaviy reaksiya natijasida ajralsa. Muhitning issiqlik sig'imi ham temperaturadan bog'liq bo'lishi mumkin.

Shu tarzda biz chiziqlimas issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasiga kelimiz:

$$\frac{\partial \varepsilon(x, t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial x} + f(x, t, u),$$

bunda issiqlik oqimi (ε - ichki energiya) quyidagicha bo'ladi

$$w = w\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

va u ham i temperatura va uning hosilasining chiziqlimas funksiyasi bo'ladi. Agar issiqlik oqimi di/dx hosiladan chiziqli bog'liq bo'lsa va Furrye qonuni bajarilsa

$$w = -k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

u holda biz kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini hosil qilamiz

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u),$$
$$c(x, t, u) > 0, \quad k(x, t, u) > 0.$$

Bu holda issiqlik sig'imi s , issiqlik o'tkazuvchanlik ko'effitsiyenti k va o'ng taraf f (issiqlik manbalari zichligi) $i(x, t)$ temperaturadan bog'liq. Birjinslimas muhitda k , s , f lar x va t ning uzulishli funksiyalari bo'lishi mumkin (har xil moddalar uchun k , s , f lar i temperaturadan har xil bog'liq bo'lishi mumkin).

$k=k(u)$, $c=c(u)$, $f=f(u)$ funksiyalar faqat i temperaturadan bog'liq hol tipik hol sanaladi:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u). \quad (2.16)$$

Yangi o'zgaruvchi kiritsak

$$v = \int_0^u k(\xi) d\xi,$$

(2.16) tenglama ushbu ko'rinishga keladi

$$\frac{\partial \varphi(v)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \hat{f}(v), \quad \varphi(v) = \int_0^u c(\xi) d\xi.$$

Agar o'zgaruvchini

$$v = \int_0^u c(\xi) d\xi,$$

deb kiritsak, u holda (1) o'rniga quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v),$$

shunday qilib

$$\int_0^v \chi(v) dv = \int_0^u k(u) du$$

tenglik bajariladi (bu x bo'yicha differensiallab tekshiriladi).

Ko'pincha $s(i)$ va $k(i)$ temperaturaning darajali funksiyasi ko'rinishida bo'ladi

$$c(u) = c_0 u^\alpha, \quad k(u) = k_0 u^\beta.$$

Bu holda

$$v = \int_0^u c(\xi) d\xi = c_0 \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

o'zgaruvchini kiritamiz va

$$k \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k}{c_0 u^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} u^{\beta-\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k_0}{c_0} \left(\frac{\alpha+1}{c_0} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} v^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}} \frac{\partial v}{\partial x},$$

ekanligini hisobga olib (1) tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_0 v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v), \quad \sigma = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+1},$$

$$\chi_0 = \frac{k_0}{c_0} \left(\frac{\alpha+1}{c_0} \right) \frac{\beta-\alpha}{\alpha+1}.$$

2.3. Ayirmali sxema. Nyutona usuli

Agar $k(u)$, $s(i)$, $f(i)$ lar temperaturaning tez o'zgaruvchi funksiyalari bo'lsa kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun oshkor sxemalarni qo'llash ma'sadga muvofiq emas.

Oshkor sxemaning turg'unlik sharti

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\min c(u)}{\max k(u)}$$

bo'lib, vaqt bo'yicha kichik qadamni talab etadi, k , s funksiyalar qiymatlari ko'pincha katta bo'lmagan tugunlar sonida aniqlanadi. Shuning uchun shartsiz turg'un oshkormas sxemalar qo'llaniladi. Avval ushbu tenglamani

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad (2.17)$$

quyidagi boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan qaraymiz

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(x), \quad u(1,t) = \mu_2(t).$$

y^{j+1} ga nisbatan chiziqsiz ayirmali sxemani qo'llaymiz

$$\frac{\varphi(y^{j+1}) - \varphi(y^j)}{\tau} = y_{xx}^{j+1}, \quad x = x_i = ih, \quad 0 < i < N, \quad hN = 1. \quad (2.18)$$

y^{j+1} yechimni yangi qatlamda topish uchun biz chiziqlimas tenglamaga ega bo'lamiz

$$\varphi(y^{j+1}) - \tau y_{xx}^{j+1} = \varphi(y^j).$$

Uni yechish uchun Nyutona iterasion usulini qo'llaymiz

$$\varphi(y) + \varphi'(y) \left(y - y^j \right) - \tau y_{xx}^{j+1} = \varphi(y^j). \quad (2.19)$$

$$F = \varphi(x) + x - f = 0, \quad \varphi(x) = \varphi(y^{j+1}), \quad x = -\tau y_{xx}^{j+1}, \quad f = \varphi(y^j),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \quad x_{k+1} - x_k = -\frac{\varphi + x_k - f}{\varphi' + 1},$$

$$(x_{k+1} - x_k)(\varphi' + 1) = -\varphi - x_k + f,$$

$$\varphi + (x_{k+1} - x_k)\varphi' + x_{k+1} = f \quad - (4) \text{ bilan solishtiring.}$$

Bu yerda y^{k+1} ni aniqlash uchun

$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{j+1}), \quad y_N^{k+1} = \mu_2(t_{j+1}),$$

chegaraviy shartlarda progonkani qo'llash mumkin va progonka

$$\varphi'(y^k) \geq 0$$

shart bajarilsa turg'un bo'ladi.

Agar tenglamalarni quyidagi ko'rinishda yozsak

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{k+1} - \left(\varphi'(y^k) + \frac{2\tau}{h^2} \right) y_i^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{k+1} = F_i^k,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$F_i^k = \varphi(y^k) - \varphi(y) - \varphi'(y^k) y^k, \quad y = y^j.$$

Turg'unlik sharti haqiqatdan ham yuqoridagi kabi bo'lishini ko'rishimiz mumkin.

2.4. Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun har xil oshkormas sxemalar

Endi oddiy ko'rinishdagi kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun ikki tipdagi sof oshkormas sxemani qaraymiz ($\sigma = 1$ holdagi)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(x), \quad u(1, t) = u_2(t),$$

bunda $k(i) > 0$.

a) sxema:

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(y_i). \quad (2.20)$$

b) sxema:

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(\hat{y}_i). \quad (2.21)$$

bunda

$$\hat{y}_i = y_i^{j+1}, \quad y_i = y_i^j, \quad a_i(v) = a_i(v_{i-1}, v_i),$$

masalan,

$$a_i(v) = 0,5[k(v_{i-1}) + k(v_i)],$$

$$a_i(v) = k\left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2}\right),$$

$$a_i(v) = \frac{2k(v_{i-1})k(v_i)}{k(v_{i-1}) + k(v_i)}.$$

$a_i(v)$ ni hisoblash yo'lidan temperatura to'liqligini hisoblash aniqligi kuchli bog'liq.

(2.20) va (2.21) sxemalarni taqqoslaymiz. Bu sxemalarning aproksimasiya xatoligi $O(\tau + h^2)$. Ularning ikkalasi ham absolyut turg'un.

a) sxema y^{j+1} ga nisbatan chiziqli va uning qiymatlarini y^j funksiyaning qiymati bo'yicha topish mumkin, masalan progonka usuli bilan. τ qadam faqat aniqlikni talablari asosida tanlanadi. b) sxema y^{j+1} ga nisbatan chiziqlimas va uni topish uchun iteratsiya usuli qo'llaniladi. Iteratsiya jarayoni quyidagi tarzda quriladi:

$$\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}^{(s)}(y) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i^{(s)}(y) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f(y_i^{(s)}). \quad (2.22)$$

$y_i^{(s+1)}$ ga nisbatan ayirmali sxema chiziqlidir. Boshlang'ich iteratsiya sifatida vaqt bo'yicha avvalgi qadamdagi u funksiya olinadi: $u^{(0)} = y^j$.

(2.21), (2.22) iterasion sxema bo'yicha hisoblashda yoki iterasiya soni yoki iterasiya yaqinlashishi aniqligi ε beriladi va quyidagi shart bajarilishi talab etiladi

$$\max_i \left| y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s)} \right| \leq \varepsilon.$$

(2.21), (2.2) sxemaning kamchiligi shundan iboratki a) sxema bilan taqqoslaganda iterasiyani hisoblashda mashina xotirasi yacheykalarini egalagan sonlar ikki marta oshadi, shunday qilib $y^{(s+1)}$ ni hisoblash uchun $y^{(s)}$ va u larni «eslab qolish» kerak. a) sxema bo'yicha y^{j+l} ning qiymati birdaniga topiladi.

Madomiki ikkala sxema ham absalyut turg'un va bir xil tartibli approksimasiyaga ega ekan, u holda bu munosabatdan a) sxema b) sxemadan afzal ko'rinadi. Ammo bunday emas. a) va b) sxemalar bo'yicha bir xil aniqlikda olib borilgan hisoblash natijalari ko'rsatdiki b) sxemani vaqt bo'yicha yetarlicha yirik qadamlar bilan qo'llash mumkin ekan. Bu esa b) sxemada iterasiya zarurligiga qaramasdan hisoblash ishlari hajmining kamayishiga olib keladi.

Tenglama kvazichiziqliligi kuchsiz bo'lgan holda, masalan $k=k(x,t)$, $f=f(u)$, $c=c(x,t)$ bo'lganda, ba'zan aniqligi $O(\tau^2 + h^2)$ bo'lgan *prediktor-korrektor* deb ataluvchi sxemalar qo'llaniladi. $c=k=1$, $f=f(u)$ bo'lganda bunday sxemaga misol keltiramiz:

$$\frac{\bar{y} - y}{0,5\tau} = \bar{y}_{xx} + f(y), \quad \bar{y} = y \left(t_{j+\frac{1}{2}} \right), \quad \frac{\hat{y} - y}{\tau} = \frac{1}{2} (\bar{y}_{xx} + y_{xx}) + f(y).$$

Shuni ta'kidlaymizki (2.22) masalani yechish uchun Nyuton usulini qo'llash mumkin.

III. §. QO'ZG'ALUVCHANG CHEGARAGA EGA MASALALARNI SONLI ECHISH USULLARI.

3.1. Koordinata to'r qo'zg'aluvchang front tugunini elib olish metodi.

Masalaning quyilishi

Bu metodni qullash uchun bir o'lchivli Stefan masalasini qaraylik.

$\Omega = (0,1)$ kesmani qaraylik, kesma $x = \eta(t)$ nuqtada (qo'zg'aluvchang chegara), $\eta(0) > 0$ da ikkita yarim sohaga ajratilgan:

$$\Omega^+(t) = \{x | 0 < x < \eta(t)\}, \quad \Omega^-(t) = \{x | \eta(t) < x < 0\}.$$

Sodda hol uchun chegarada fazoviy almashinish nolga teng deb hisoblaymiz yoki $u^* = 0$. Shuning uchun qattiq zarra fazosini Ω^- bilan, yani $u(x, t) < 0$, suyuq fazani esa Ω^+ bilan yani $u(x, t) > 0$ deb qaraymiz.

U holda suyuq fazoda bir o'lchovli massa almashinish tenglamasi quyidagicha bo'ladi (bir o'lchovli sohada):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in \Omega^+(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.1)$$

(3.1) tenglamaga mos boshlang'ich shart

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega^+(t) \quad (3.2)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Kesmaninga chap tomonida massa ko'chishi :

$$u(0, t) = g(t) > 0, \quad 0 < t \leq T \quad (3.3)$$

shartni qanoatlantirsin.

Fazoviy ko'chish quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(x, t) = 0, \quad x = \eta(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\lambda \frac{d\eta}{dt}, \quad x = \eta(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.5)$$

Bu erda λ - fazoviy almashinish entalpiyasi deb yuritiladi.

(3.1)-(3.5) tenglamalar bosh'ang'ich va chegaraviy shartlar bilan berilgan Stefan masalasi formulasini beradi. Fazoviy o'tish chegara tezligi musbat ($v_n = \frac{d\eta}{dt}$) va u suyuq fazoga qarab oshib boradi.

$\eta(t)$ monotong o'suvchi funksiya va parabolik tenglama uchun maksimumlik shartini qanoatlantiradi.

Endi (3.1)-(3.5) tenglamalar uchun sonli metodlarning bir nechtasini qullab ko'ramiz.

Bir o'lchamli (3.1) – (3.5) tenglamalarni sonli echish masalasini qaraylik. Qo'zg'aluvchang chegara suyuq fazoga qarab harakatlansin.

Ω sohaga h tekis qadamli to'r keritamiz :

$$\varpi = \{x | x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}.$$

va ω - ichki tugunlar to'plami bo'lsin. Vaqt bo'yicha esa notekis to'r kiritamiz

$$\omega_\tau = \{t | t = t_n = t_{n-1} + \tau_n, t_0 = 0, n = 1, 2, \dots, N, t_N = T\}$$

$\tau_n > 0$ o'zgaruvchang vaqt qadami.

τ_{n+1} vaqt qadamini quyidagicha tanlab olinadi: bu vaqt intervalida (t_n dan t_{n+1} gacha) qo'zg'aluvchang chegara koordinata to'rida bir qadamga siljiydi, yani vaqt bir qadamga siljiganda koordinata qadamining keyingi qadami topib olinadi.

Bu jarayonni quyidagicha ko'rsatish mumkin, boshlang'ich soha $\Omega^+(0)$ ω to'rning bir qismini egallasin va bu sohani biz $\omega_0^+ (\omega_0^+ \subset \omega)$ bilan belgilaymiz. t_n uxtiyoriv vaqt momentida qo'zg'aluvchang soha $\Omega^+(t_n)$ ω_n^+ deb belgilab boriladi, va hakoza har bir to'r $\omega_n^+ \subset \omega_{n+1}^+$ shart ko'rinishida tanlab borilaveradi. Bu to'rning dinamik tuguni $x = \eta(t_n) = i_n h$ ko'rinishda aniqlanadi.

(3.1) tenglamaga mos oshkormas chekli ayirma sxemasi quysak quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + \Lambda y_{n+1} = 0, \quad x \in \omega_{n+1}^+, \quad n = 0, 1, \quad (3.6)$$

bu erda

$$\Lambda y = -y_{\bar{x}x}.$$

(3.2) boshlang'ich shart approksimatsiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$y_0(x) = u_0(x), \quad x \in \omega_0^+. \quad (3.7)$$

(3.3), (3.4) chegaraviy shartlardagi funksiyalarni quyidagi to'r funksiyalar bilan almashtiramiz:

$$y_{n+1}(0) = g(t_{n+1}), \quad (3.8)$$

$$y_{n+1}(x) = 0, \quad x = i_{n+1}h. \quad (3.9)$$

Endi esa faqatgina (3.5) shart qoldi. Bitta tugunning o'zgarish fronti qabul qilingan metodga mos quyidagicha tanlab olamiz:

$$\frac{d\eta}{dt} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}.$$

(3.5) shart approksimatsiya echimini h ning ikkinchi tartibini saqlab qolib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{y_{n+1}(x) - y_n(x)}{h} + \frac{\lambda h + 0,5(y_{n+1}(x) - y_n(x))}{\tau_{n+1}} = 0, \quad x = i_{n+1}h. \quad (3.10)$$

Shunday qilib, (3.1)-(3.5) ayirmali sxema (3.6)-(3.10) differensial tenglamani $O(\tau + h^2)$ aniqlik bilan appoksimatsiyalaydi.

Shunday qilib (3.6), (3.7)-(3.10) tenglamalarning echini yangi vaqt qatlamlarida topilga y_{n+1} va vaqt qadami τ_{n+1} bo'yicha topilib boradi. Berilgan τ_{n+1} bo'yicha ayirmali echimlar (3.6), (3.7), (3.8) chegaraviy shartlardan yoki aralash chegaraviya masalalar (3.1), (3.9), (3.10) dan topiladi.

Chiziqlimas (3.6)-(3.10) algebraik tenglama echimlari uchun har bir yangi vaqt qatlami $t = t_{n+1}$ da iteratsiya jarayonita topilib boradi. Vaqt qadami oldingi qadam bilan iteratsiya ko'rinishida τ_{n+1} lar topiladi.

Agar τ_{n+1}^0 boshlang'ich yaqinlashish berilgan bo'lsin (masalan, $\tau_{n+1}^0 = \tau_n$ ga teng desak). Berilgan τ_{n+1}^k ga mos taqribiy echim y_{n+1} uchun quyidagi chiziqli ayirmali masalani echishga to'g'ri keladi:

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+1}^k - y_n^k}{\tau_{n+1}^k} + \Lambda y_{n+1}^k &= 0, \quad x \in \omega_{n+1}^+, \quad n = 0, 1, \\ y_{n+1}^k(0) &= g(t_{n+1}), \\ y_{n+1}^k(x) &= 0, \quad x = i_{n+1}h.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Bu masalani echish algoritmi uch deoganalli progonka metodi yordamida echiladi.

(3.10) ayirmali munosabatdan vaqt qadamini aniqlash mumkin. Sodda ko'rinishda quyidagicha bo'ladi:

$$\tau_{n+1}^{k+1} = (\lambda h + 0,5(y_{n+1}^k(x) - y_n^k(x))) \left(\frac{y_{n+1}^k(x) - y_{n+1}^k(x-h)}{h} \right)^{-1}, \quad x = i_{n+1}h. \tag{3.13}$$

Bunday taqribiy ketma-ketlikni topilshda relaksion parametrlari iteratsidan foydalanil topamiz.

Frontni elib olish metodi har bir to'ring fiksirlangan koordinatasi amalgam oshirilib boradi

3.2. Frontni to'g'irlash metodi

(3.1)-(3.5) bir o'lhamli masala uchun x o'zgaruvchi o'rnida yangi bog'liq bo'lmagan ξ ni qo'yamiz. Bu kiritilgan yangi o'zgaruvchi fiksirlangan sohaga o'tkazadi deb faraz qilamiz. (3.1)-(3.5) masalani quyidagi almashtirish olamiz

$$x = \xi \eta(t). \tag{3.14}$$

Yangi o'zgaruvchi ξ fiksirlangan kesma 0 dan (kesmaning chap tomoni $x = 0$) 1 gacha (fazoviy o'tish chegarasi $x = \eta(t)$) o'zgaradi.

(3.1)-(3.5) Stefan masalasi yangi (ξ, t) o'zgaruvchi kiritganda quyidagi ko'rinishga keladi. Agar

$$u(x, t) = v(\xi, t),$$

U holda (3.14) ga asosan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\eta(t)} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\xi}{\eta(t)} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

ni olamiz.

(3.1) tenglama esa quyidagi ko'rinishga keladi

$$\eta^2(t) \frac{\partial v}{\partial t} - \xi \eta(t) \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.15)$$

Boshlang'ich shart (3.2)

$$v(\xi, 0) = u_0(\xi \eta(0)), \quad (3.16)$$

ko'rinishga keladi.

(3.3), (3.5) chegaraviy shartlarni esa quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$v(0, t) = g(t) > 0, \quad (3.17)$$

$$v(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(1, t) = -\lambda \eta(t) \frac{d\eta}{dt}, \quad 0 < t \leq T. \quad (3.19)$$

Olingan (3.15)-(3.19) chegaraviy masalaladagi $v(\xi, t)$ va $\eta(t)$ lar chiziqli emas, lekin berilgan (3.15)-(3.19) masaladan o'rilgan $0 < \xi < 1$ fiksirlanga sohada qaraladi.

(3.15)—(3.19) masalalarni sonli echish uchun yangi o'rgaruvchi bo'yicha ariymasi metoddan foydalanamiz (3.15) tenglamani notekis

$$\omega = \{\xi | \xi = \xi_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = 1\}$$

tor'da appoksimatsiyalaymiz va quyidagicha yozib olamiz

$$\theta_{n+1} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \xi \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2\tau} \frac{y_{n+1}(\xi + h) - y_{n+1}(\xi - h)}{2h} + \Lambda y_{n+1} = 0, \quad (3.20)$$

$$\xi \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots,$$

bu erda $\theta = \eta^2(t)$.

Ayirmali (320) tenglamaning qo'shimcha shartlari

$$y_0(\xi) = u_0(\xi \eta(0)), \quad \xi \in \omega, \quad (3.21)$$

$$y_{n+1}(0) = g(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.22)$$

$$y_{n+1}(1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.23)$$

ko'rinishda ayniqlanadi.

(3.15) va (3.19) larda $\xi = 1$ da quyidagi tenglik bajariladi

$$\eta^2(t) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{d\eta^2}{dt} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad \xi = 1, \quad 0 < t \leq T.$$

(3.20) tenglamaning echimini chegaraviy shart h ning ikkinchi tartibi bo'yicha approksimatsiyalash mumkin

$$\frac{y_{n+1}(\xi) - y_{n+1}(\xi - h)}{h} + \lambda \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2\tau} + \frac{h}{2} \left[\theta_{n+1} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\tau} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.24)$$

$$\xi = 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Bu oligan ohirgi tenglikni husoblash masalani echish mumkin

3.3. Aralashmani filtrlashda hosil bo'ladigan cho'kmaning chiziqlimas siqilishi masalasini sonli yechish

Aralashmani filtrlash texnikaviy jarayonlardan ancha murakkab hisoblanadi va bu jarayonlar ko'p miqdordagi mikro va makro faktorlardan bog'likdir. Aralashmalarni filtrlashni modellash fundamental ko'p fazali mexanik tenglamalar, ko'p komponentali muhitdan va filtrlash konsolidasiya nazariyasidan bog'liq bo'ladi. Cho'kma qatlamida bosimning tarqalishi masalasi qo'zg'aluvchang chegaraga ega parabolik tipdagi klassik tenglamalarning yechimidan kelib chiqadi. Umumiy holda, Aralashmani filtrlashda real fizik shartlart cho'kmaning tuzilish strukturasi, filtrlash siqilishi bosim ta'sir farqidagi bir jinslimas muhit holati va boshqa konsolidasiya kuchlardan bog'liq bo'ladi. Shunday qilib, konsolidasiya koeffiyenti o'zgaruvchang bo'ladi va osadka qalinligidagi bosimning tarqalishidan bog'liq bo'ladi. Shuning uchun aralashmani filtrlashda hosil bo'ladigan cho'kmaning analiz qilish uchun konsolidasiya koeffisiyentini o'zgaruvchi qilib olamiz.

Tekis filtrlanuvchi elementni qaraylik. Filtrlash jarayonida aralashmaning yo'nalashga teskari ravishda filtr qatlami qandaydir z_0 bo'lsin. Vaqt o'tishi davomida filtr qatlami bosimning ta'sir farqidan qat'iy nazar o'zgarmas bo'lsin. Aralashma filtrga tushgandan so'ng o'zluksiz $h(t)$ cho'kma qatlami chiziqli bo'lmagan holda o'sib boradi, ya'ni cho'kma – aralashma chegarasi ko'chib boradi. U holda bu soxalarni ikkita soxashga ajratish mumkin: $\Omega_1(0, z_0)$ - filtrlanuvchi qatlam soxasi va $\Omega_2(z_0, h(t))$ - cho'kma soxasi, bu yerda albatta $z = h(t)$ - qo'zg'aluvchang chegara. Bu shartlarda jarayon xuddi Stefan masalasiga mos keladi.

Agar p - umumiy bosim, p_0, p_1, p_2 - suyuqlikning boshlang'ich momentdagi, cho'kma qatlamiga suyuqlikning kirishdagi va chiqishdagi bosimlari deb olsak, filtrlash jarayonining matematik modeli quyidagi ko'rinishda yozamiz [1,2]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b(p) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad 0 < t \leq T, \quad z \in \Omega_2, \quad (3.25)$$

$$p(z, 0) = p_0(z), \quad z \in \Omega_1, \quad (3.26)$$

$$p(0, t) = p_2 \quad 0 < t \leq T, \quad (3.27)$$

$$p[h(t), t] = p_1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = l \frac{dh}{dt}, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.29)$$

Bu yerda $h(0) = z_0$, $b(p) = b_0 e^{\alpha(p-p_1)}$ - konsolidasiya koeffitsiyenti, $p_0 = p_2 + \frac{z(p_1 - p_2)}{z_0}$,

$0 \leq z \leq z_0$ $l = \frac{r\mu}{u}$, r - cho'kmaning solishtirma qarshiligi μ - qovushqoqlik koeffitsiyenti, u - cho'kma sirtida qatlamning hosil bo'lish koeffitsiyenti, α - parametr.

Bu (3.25)-(3.29) tenglamalar chiziqlimas tenglamalar bo'lgani uchun Yangi o'zgaruvchi kiritamiz.

Yangi o'zgaruvchi quyidagi qabul qilamiz:

$$v = \int_0^p \frac{d\xi}{b(\xi)} = a(e^{-\alpha p} - 1), \quad a = \frac{1}{-\alpha b_0 e^{-\alpha p_1}}$$

Bundan

$$p = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{v}{a} + 1\right) \quad (3.30)$$

ekanligi olamiz.

U holda (3.25) tenglama almashtirishlardan so'ng quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(v) \frac{\partial v(p)}{\partial z} \right), \quad k(v) = -\frac{1}{\alpha(v+a)}. \quad (3.31)$$

Xudi shunday bu almashtirishdan foydalanib (3.26)-(3.29) lar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$v|_{t=0} = v_0(z) = a(e^{-\alpha p_0(z)} - 1), \quad (3.32)$$

$$v|_{z=0} = v_2 = a(e^{-\alpha p_2} - 1), \quad (3.33)$$

$$v|_{z=h(t)} = v_1 = a(e^{-\alpha p_1} - 1), \quad (3.34)$$

$$k(v) \frac{\partial v(p)}{\partial z} = l \frac{dh}{dt}. \quad (3.35)$$

(3.31) – (3.35) masalaning yechimini chekli ayirmalar metodi bilan yechamiz.

z o'qi bo'yicha f qadam bilan notekis to'r tanlaymiz
 $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \{z_i \mid z_i = if, i = 0, 1, \dots, m+j\}$, vaqt bo'ficha notekis to'r hosil qilamiz

$$\bar{\omega}_\tau = \{t \mid t = t_j = t_{j-1} + \tau_j, t_m = 0, j = m+1, m+2, \dots, N, t_N = T\}$$

$\tau_j > 0$ -vaqt o'zgaruvchi qadami. Vaqt qadami $[t_j, t_{j+1}]$ intervalda so'rilganda qo'zg'aluvchi chegarra ham bita qadamga so'riladi. Qadamlarni bunday ko'rinishda izlash tugunni ilib olish metodi deb nomlanadi. To'rning dinamik tuguni $z = f(t_j) = i_j f$ ko'rinishda tanlab olamiz.

(3.31) tenglama oshkor bo'lmagan sxema ko'rinishda approksimasiya qilinadi

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{1}{f} \left(\chi_{i+1} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{f} - \chi_i \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{f} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.36)$$

Bu yerda

$$\chi_i = 0,5[k(v_i^j) + k(v_{i-1}^j)].$$

Approksimasiya nachalnogo i granichnykh usloviy boshlang'ich va chegaraviy shartlar (3.32)-(3.34) approksimasiya qilib

$$v_i^0 = a \exp(\alpha p_i^0 - 1), \quad p_i^0 = p_2 + \frac{if(p_1 - p_2)}{mf}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (3.37)$$

$$v_0^{j+1} = v_2, \quad (3.38)$$

$$v_i^{j+1} = v_1, \quad z = i_{j+1} h_1 \quad (3.39)$$

tengliklarni olamiz.

$$(3.35) \text{ shartnida esa } \frac{dh}{dt} \approx \frac{f}{\tau_{j+1}} \text{ ekanligi e'tiborga olib quyidagicha}$$

diskerizasiya qilamiz:

$$\frac{1}{\alpha(v_i^{j+1} + a)} \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{f} + l \frac{f}{\tau_{j+1}} = 0, \quad z = i_{j+1} f. \quad (3.40)$$

(3.36) tenglamani

$$A_i v_{i-1}^{j+1} - C_i v_i^{j+1} + B_i v_{i+1}^{j+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, j}, \quad (3.41)$$

ko'rinishga olib kelamiz.

Bu yerda

$$A_i = \frac{\chi_i \tau}{f^2}, \quad B_i = \frac{\chi_{i+1} \tau}{f^2}, \quad C_i = 1 + \frac{\chi_i \tau}{f^2} + \frac{\chi_{i+1} \tau}{f^2}, \quad F_i = v_i^j.$$

(3.36) - (3.41) chiziqli bo'lmagan ayirmali masalani yechish uchun xar bir yangi $t = t_{j+1}$ vaqt qatlamida iterasiya jarayonidan foydalanish mumkin bo'ladi. Oddiy iterasiyada bu sxema vaqt qadami τ_{j+1} topilib davom ettiriladi. Boshlang'ich shartda taxminiy τ_{j+1}^0 qadam beriladi. Berilgan yangi vaqt qadami τ_{j+1}^s dan v_i^{j+1} uchun quyidagi chiziqlimas ayirmali masalaning yechimi topiladi

$$A_i v_{i-1}^{s,j+1} - C_i v_i^{s,j+1} + B_i v_{i+1}^{s,j+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, j}, \quad (3.42)$$

$$v_0^{s,j+1} = v_2, \quad (3.43)$$

$$z_i = i_{j+1} f \text{ tugunda } v_i^{s,j+1} = v_1. \quad (3.44)$$

Bu masalani yechish uch no'qtali progonka usuliga keltiriladi. (3.40) munosabatdan foydalanib oddiy holda vaqtning qadamini topish mumkin

$$z_i = i_{j+1} f \text{ tugunda } \tau_{j+1}^{s+1} = l f \left(\frac{1}{\alpha(v_i^{j+1} + a)} \frac{v_{i-1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{f} \right)^{-1}. \quad (3.45)$$

Endi (3.42)-(3.44) ayirmali masalani yechish uchun teskari progonka metodidan foydalanamiz. Bu yerda $i = m$, $0 < m < h(t)$ - ichki tugunlar. $0 \leq i \leq m$ soxada malalani yechish uchun to'g'ri progonka metodi formulasidan foydalanamiz

$$v_i^{s,j+1} = \alpha_{i+1} v_{i+1}^{s,j+1} + \beta_{i+1} \quad i = m-1, m-2, \dots, 1, 0, \quad (3.46)$$

bu yerda

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \alpha_1 = 0, \quad (3.47)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \beta_1 = v_2, \quad (3.48)$$

$m < i < h(t)$ soxada esa chap progonka metodi qullaymiz

$$v_{i+1}^{s,j+1} = \xi_{i+1} v_i^{s,j+1} + \eta_{i+1}, \quad i = m, m+1, \dots, N-1, \quad (3.49)$$

bu yerda

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \xi_{i+1}}, \quad i = N-1, N-2, \dots, m, \quad \xi_N = 0, \quad (3.50)$$

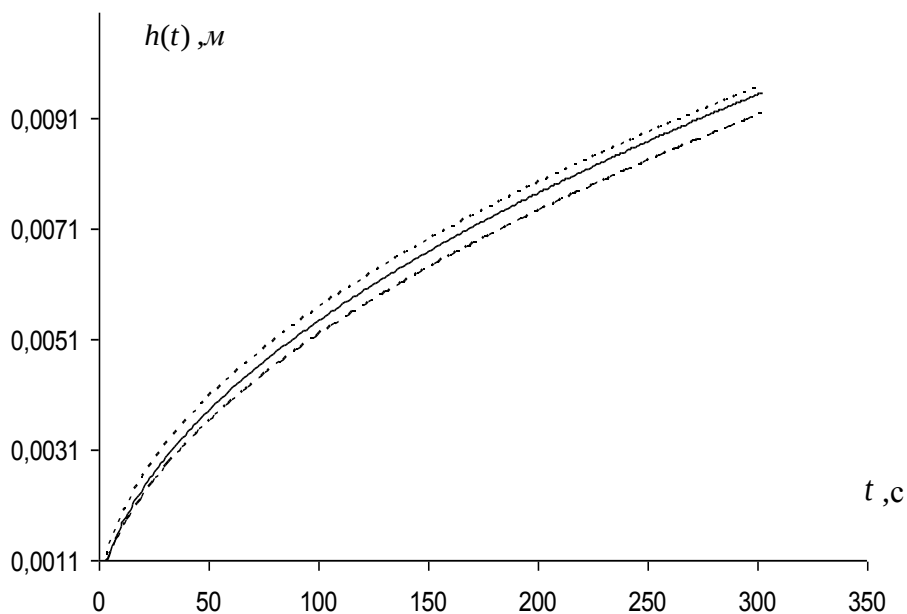
$$\mu_i = \frac{F_i + B_i \eta_{i+1}}{C_i - B_i \xi_{i+1}}, \quad i = N-1, N-2, \dots, m, \quad \eta_N = v_0. \quad (3.51)$$

(3.49), (3.46) larni $i = m$ tugunda birlashtirak

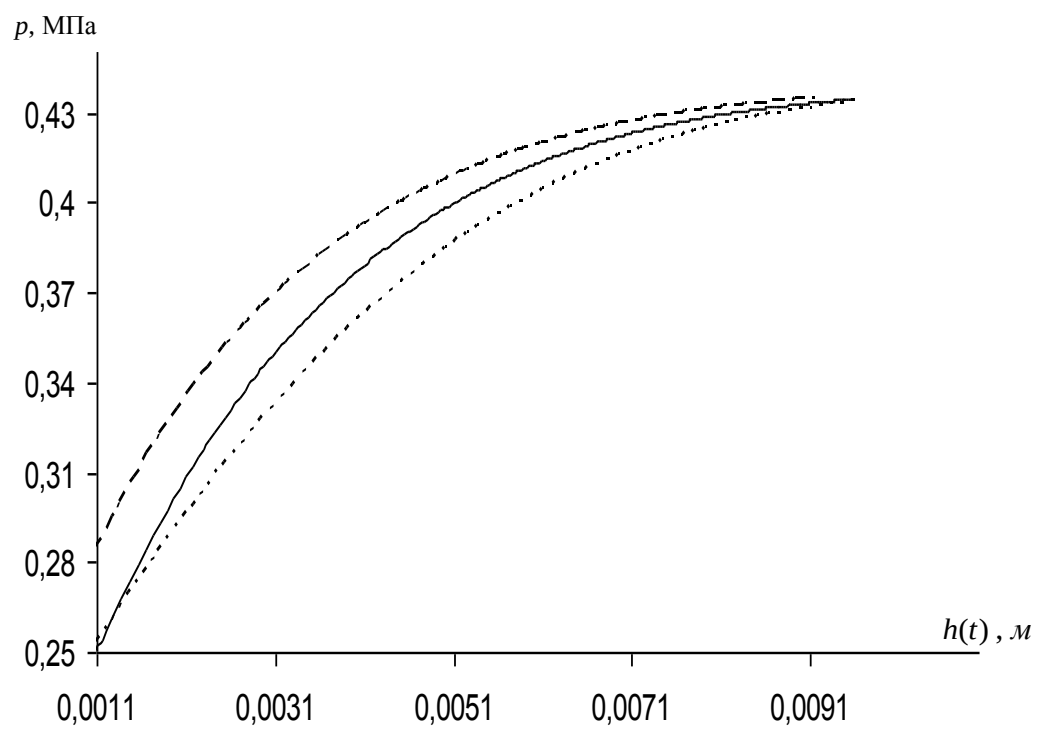
$$v_m^{s,j+1} = \frac{\eta_m + \xi_m \beta_m}{1 - \xi_m \alpha_m} \quad (3.52)$$

ga kelimiz.

Shundan qilib masalani sonli yechib filtra va cho'kmada bosimning tarqalish, $h(t)$ qo'zg'aluvchang chegara grafiklarini olamiz. (1-4 rasmlar). Bu grafiklardan cho'kma qatlamining o'sishi va bosimning tarqalishni baholash mumkin bo'ladi. α qiymatning oshishi bilan mos ravishda konsolidasiya koeffitsiyenti ham oshirb borar ekan. O'z navbatida cho'kma qatlami va bosimning tarqalishi ham ortib boradi. α qiymatning ortishi bilan $h(t)$ ning dinamik o'sishi kuzatish mumkin.



1-rasm. α ning har xil qiymatlarida cho'kma qatlamining o'zgarishi қийматларида $\alpha = 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$ (—); $\alpha = 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$ (- -); $\alpha = 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$ (.....). $t = 350 \text{ с}$.



2-rasm. α ning har xil qiymatlarida cho'kma qatlamida bosimning tarqalishi
 $\alpha = 10^{-6} Pa^{-1}$ (.....); $\alpha = 10^{-7} Pa^{-1}$ (----); $\alpha = 10^{-8} Pa^{-1}$ (——). $t = 350$ c.

XULOSA

Xulosa qilib shuni aytish kerakki, qo'zg'aluvchang chegaraga ega sizish masalasini sonli echimi ancha murakkab masala bo'lib, ularni faqatgina sonli echim olib taqribiy echimlar olish mumkin. Biz bu masalalarni sonli echishning bir nechta metodlarini ko'rdik. Sonli echimlar olib quyidagi xulosalarga ega bo'ldik:

1. Sonli echishda qaralayotgan itatsiya qadami oldingi qadamga nisbatan topilib borar ekan.
2. Go'vak muhitlarda chiziqli bo'lmagan Stefan masalasini qarab, qo'zg'aluvchang chegara monotong oshib borar ekan.
3. Chiziqli bo'lmagan filtrlash masalasini sonli echib cho'kmaning oshib borishi ham monoton ortib borishi ko'rsatildi..
4. Chiziqli bo'lmagan filtrlash masalasini sonli echishda cho'kmaning o'stidagi bosim bir xil bo'lib, to'siq ustidagi bosim esa vaqt o'tishi bilan oshib borar ekan.
5. Cho'kma oshib borishi bilan to'siq ostidagi bosim esa kamayib borar ekan.
6. Suyuqliklar biri ikkinchisini itarayotganda vaqt o'tishi bilan parametrlar ham koordinataning keyingi qadamlarida kamayib borar ekan.

ADABIYOTLAR

1. Федоткин И.М., Воробьев Е.И., Вьюн В.И. Гидродинамическая теория фильтрования суспензией. Киев:Вища. шк.,Головное изд-во.1986. -166с
2. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. Киев: Вища шк., Головные изд-во. 1988.-415с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. II. М., Наука, 1987.-389с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. –М.: Едиториал УРСС, 2003-784 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. -656с.
6. Жужиков, В.А. Фильтрование: Теория и практика разделения суспензий./ В.А. Жужиков – М.: Химия, 1980. – 400 с.
7. Рубинштейн, Л.И. Проблема Стефана./ Л.И. Рубинштейн – Рига: Звайгзне, 1967. – 458 с.
8. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатке, 1980.
9. Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М: Изд-во МГУ, 1987.
- 10.Гловински Р., Лионе Ж.-Д., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
- 11.Данилюк И. И. О задаче Стефана // Успехи математических наук. Т. 40. 1985. Вып. 5 В45). С. 133-185.
- 12.Дюво Г., Лионе Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
- 13.Мейрманов А. М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.
- 14.Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
- 15.Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободной границей. М.: Наука, 1989.