

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

AL-XORAZMIY NOMLI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITITENING

MATEMATIKA FAKULTETI

403-GURUH TALABASI

*Matyoqubova Mohira*NING

MATEMATIK ANALIZ FANIDAN YOZGAN

KURS ISHI

MAVZU: Parametrga bog'liq integrallar.

TOPSHIRDI:

Matyoqubova Mohira

QABUL QILDI:

Vaisova Mohira

URGANCH 2008-YIL

MAVZU: PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALLAR.

REJA:

1.PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALLARNING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHALARI.

2.PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALLARNING FUNKSIONAL XOSSALARI.

3.PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALLARNING UMUMIY XOLI.

4. XULOSA.

1. *PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALNING BOSHLANG'ICH TUSHUNCHASI.*

Bizga $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya biror $M (M \subset R^m)$ to'lamda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning bitta x_k $k = (1, 2, \dots, m)$ o'zgaruvchisidan boshqa barcha o'zgaruvchilarini o'zgarmas deb hisoblasak, u holda $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiya bitta

x_k o'zgaruvchiga bog'liq bo'gan funksiyaqa aylanadi. Uning shu o'zgaruvchi bo'yicha integrali, ravshanki $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ larga bog'liq bo'ladi. Bunday integrallar parametrqa bog'liq integrallar tushunchasiga olib keladi. Sodda uchun ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiyaning bitta o'zgaruvchi bo'yicha integralini o'rganamiz.

$F(x, y)$ funksiya R^2 fazodagi biror

$$M = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$$

to'lamda berilgan bo'lsin. Y o'zgaruvchining $E (E \subset R)$ to'lamdan olingan har bir tayinlangan qiymatida $F(x, y)$ funksiya x o'zgaruvchisi bo'yicha $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi, ya'ni

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

integral mavjud bo'lsin. Ravshanki, bu integral y o'zgaruvchining E to'lamdan olingan qiymatiga bog'liq bo'ladi:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

Odatda (1) integral parametrqa bog'liq integral deb ataladi, y o'zgaruvchi esa parametr deyiladi.

Parametrqa bog'liq integrallarda, $f(x, y)$ funksiyaning funksional xossalari (limiti, uzluksizligi, differensiallanuvchiligi, integrallanuvchiligi va hokazo)

ko'ra $\Phi(y)$ funksiyaning tegishli funksional xossalari o'rganiladi. Bunday xossalarni o'rganishda $f(x,y)$ funksiyaning y o'zgaruvchisi bo'yicha limiti va unga intilishi xarakteri muhim rol o'ynaydi.

Limit funksiya. Tekis yaqinlashish. Limit funksiyaning uzluksizligi.

$F(x,y)$ funksiya $M = \{(x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b, y \in E \subset R\}$ to'plamda berilgan, y_0 esa $E(E \subset R)$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

X o'zgaruvchining $[a,b]$ oraliqdan olingan har bir tayin qiymatida $f(x,y)$ faqat y ninggina funksiyasiga aylanadi. Agar $y \rightarrow y_0$ da bu funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, ravshanki, y limit x o'zgaruvchining $[a,b]$ oraliqdan olingan qiymatiga bog'liq bo'ladi:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \varphi(x, y_0) = \varphi(x)$$

1-Ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, $\forall x \in [a,b]$ uchun shunday

$\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ topilsaki $|y - y_0| < \delta$ tengsizlikni qanaotlantiruvchi $\forall y \in E$

uchun $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$

bo'lsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya $f(x,y)$ funksiyaning $y \rightarrow y_0$ dagi *limit funksiyasi* deyiladi.

$F(x,y)$ funksiya $M = \{(x,y) \in R^2; x \in [a,b], y \in E\}$ to'plamda berilgan bo'lib, ∞ esa E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

2-Ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\forall x \in [a,b]$ uchun shunday

$\Delta = \Delta(\varepsilon, x) > 0$

topilsaki, $|y| > \Delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall y \in E$ uchun

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

bo'lsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya $f(x,y)$ funksiyaning $y \rightarrow \infty$ dagi *limit funksiyasi* deyiladi.

Misollar: 1. Ushbu

$$f(x,y) = x \sin y$$

funksiyani $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, y \in R\}$ to'plamda qaraylik. $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ dagi

limit funksiya x ekanligini ko'rsatamiz.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ ga ko'ra, $\delta = \varepsilon$ deb olinsa, unda

$$|y - y_0| = \left| y - \frac{\pi}{2} \right| < \delta \text{ tengsizlikni qanoatlantiruvchi } \forall y \in R \text{ va } \forall x \in [0,1]$$

uchun

$$\begin{aligned} |f(x, y) - \varphi(x)| &= |x \sin y - x| = |x| |\sin y - 1| = |x| \left| \sin y - \sin \frac{\pi}{2} \right| = \\ &= |x| \left| 2 \sin \frac{y - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{y + \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| y - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, $y \rightarrow \frac{\pi}{2}$ da $f(x, y) = x \sin y$ funksiyaning limit funksiyasi

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \sin y = x$$

bo'ladi.

3-Ta'rif: M to'plamda berilgan $f(x, y)$ funksiyaning $y \rightarrow y_0$ dagi limit

funksiyasi $\varphi(x)$ bo'lsin. $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

topilsaki, $|y - y_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall y \in E$ va $\forall x \in [a, b]$

uchun

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya o'z limit funksiyasi $\varphi(x)$ ga $[a, b]$ da *tekis yaqinlashadi* deyiladi.

Aks holda yaqinlashish *notekis* deyiladi.

4-Ta'rif: M to'plamda berilgan $f(x, y)$ funksiyaning $y \rightarrow y_0$ dagi limit

funksiyasi $\varphi(x)$ bo'lsin. $\forall \delta > 0$ olinganda ham shunday $\varepsilon_0 > 0$,

$x_0 \in [a, b]$ va $|y_1 - y_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $y_1 \in E$

topilsaki, ushbu

$$|f(x_0, y_1) - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya $\varphi(x)$ ga *notekis yaqinlashadi* deyiladi.

2 Parametrga bog'liq integrallar

$f(x, y)$ funksiya

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$$

to'plamda berilgan bo'lib, o'zgaruvchining E to'plamdan olingan har bir tayin qiymatida $f(x, y)$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Ya'ni y ni o'zgarmas deb hisoblanganda

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

integral mavjud bo'lsin. Ravshanki bu integralning qiymati olingan y ga (parametrga) bog'liq bo'ladi:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

Misol: Ushbu $f(x, y) = x \sin y$ funksiyaning x o'zgaruvchisi bo'yicha $[a, b]$ dagi integrali (bu yerda $y=0$)

$$\int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \sin xy dx = \frac{1}{y} \int_a^b \sin xy d(xy) = \frac{\cos ay - \cos by}{y}$$

bo'lib, $E = R \setminus \{0\}$ to'plamda berilgan

$$\Phi(y) = \frac{1}{y} (\cos ay - \cos by)$$

funksiyadan iboratdir.

Ushbu paragrafda parametrga bog'liq (1) integralning ($\Phi(y)$ – funksiyaning) funksional xossalari o'rganamiz.

1. Integral belgisi ostida limitga o'tish.

$F(x, y)$ funksiya

$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in E \subset R\}$ to'plamda berilgan bo'lib, y_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-Teorema: $f(x, y)$ funksiya y ning E to'plamdan olingan har bir tayin qiymatida x ning funksiyasi sifatida $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Agar

$f(x,y)$ funksiya $y \rightarrow y_0$ da $\varphi(x)$ limit funksiya ega bo'lsa va unga tekis yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2)$$

bo'ladi.

Isbot: Shartga ko'ra $f(x,y)$ funksiya $y \rightarrow y_0$ da $\varphi(x)$ limit funksiya ega va unga tekis yaqinlashadi. Demak $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki, $|y - y_0| < \delta$ ni qanoatlantiruvchi $\forall y \in E$ va $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $f(x,y)$ funksiyaning uzluksizligi to'g'risidagi teorema asosan $\varphi(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi. Demak bu

funksiyaning integrali $\int_a^b \varphi(x) dx$ mavjud.

Natijada

$$\left| \int_a^b f(x,y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon \quad \text{bo'lib, undan}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

(4) munosabatni quyidagicha

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] dx$$

ham yozish mumkin. Bu esa integral belgisi ostida limitga o'tish mumkinligini ko'rsatadi.

Misol: Biz $M = \{(x,y) \in R^2 : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ to'plamda berilgan

$$f(x, y)x \sin y$$

funksiyaning $y \rightarrow 0$ da $\varphi(x) = 0$ limit funksiyaga tekis yaqinlashishini

$$\text{ko'rgan edik: } \lim_{y \rightarrow 0} x \sin y = 0$$

Berilgan funksiya y o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida x o'zgaruvchining $[0, 1]$ oraliqdagi uzluksiz funksiyasi ekanligi ravshan.

Demak (1) teorema ko'ra

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 x \sin y dx = \int_0^1 [\lim_{y \rightarrow 0} x \sin y] dx = 0$$

bo'ladi.

2. *Integralning parametr bo'yicha uzluksizligi.*

2-Teorema: Agar $f(x, y)$ funksiya

$$M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

funksiya $[c, d]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isbot: Ihtiyoriy $y_0 \in [c, d]$ nuqtani olaylik. Shartga ko'ra $f(x, y)$ funksiya M to'plamda (to'g'ri to'rtburchakda) uzluksiz. Kantor teoremasiga ko'ra bu funksiya M to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. Unda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki,

$$\rho((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall (x, y) \in M, \forall (x, y_0) \in M$ uchun

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $f(x, y)$ funksiyaning $y \rightarrow y_0$ da $f(x, y_0)$ limit funksiyaga tekis yaqinlashishini bildiradi. U holda (1) teorema asosan

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)] dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = \Phi(y_0) \quad (\forall y_0 \in [c, d])$$

bo'ladi. Demak, $\Phi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Teorema isbot bo'ldi.

3. *Intefralni parametr bo'yicha differensiallash.*

3-Teorema: $f(x,y)$ funksiya

$$M = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

to'plamda berilgan va y o'zgaruvchining $[c,d]$ oraliqdan olingan har bir tayin qiymatida x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Agar $f(x,y)$ funksiya M to'plamda $f'_y(x,y)$ hususiy hosilaga ega bo'lib, y uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(y)$ funksiya ham $[c,d]$ oraliqda $\Phi'(y)$ hosilaga ega va ushbu

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y) dx \quad (3)$$

munosabat o'rinlidir.

Isbot: Shartga ko'ra $f(x,y)$ funksiya x o'zgaruvchisi bo'yicha $[a,b]$ oraliqda uzluksiz. Binobarin

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

integral mavjud.

Endi $\forall y_0 \in [c,d]$ nuqtani olib, unga shunday Δy orttirma beraylikki,

$y_0 + \Delta y \in [c,d]$ bo'lsin. $\Phi(y)$ funksiyaning y_0 nuqtadagi orttirmasini topib, ushbu

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Lagranj teoremasi ga ko'ra (uni qo'llay olishimiz teorema shartlari bilan ta'minlangan)

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + o(\Delta y))$$

bo'ladi, bunda $0 < o < 1$

Natijada

$$\frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0 + o(\Delta y)) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx + \int_a^b [f'_y(x, y_0 + o(\Delta y)) - f'_y(x, y_0)] dx$$

bo'lib, undan esa

$$\left| \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b |f'_y(x, y_0 + o(\Delta y)) - f'_y(x, y_0)| dx \leq \int_a^b \omega(f'_y \Delta y) dx =$$

$$= \omega(f'_y \Delta y)(b-a) \quad (4)$$

bo'lishini topamiz, bunda $\omega(f'_y \Delta y) - f'_y(x, y)$ funksiyaning uzluksizlik moduli.

Modomiki $f'_y(x, y)$ funksiya M to'plamda uzluksiz ekan, unda Kantor teoremasiga ko'ra bu funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. U holda yuqorida keltirilgan teoremaga asosan

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \omega(f'_y, \Delta y) = 0$$

bo'ladi.

(4) munosabotdan

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y_0 + \Delta y) - \Phi(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\Phi'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

y_0 nuqta $[c, d]$ oraliqda ixtiyoriy. Teorema isbot bo'ldi.

(3) munosabatni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y) dx$$

Bu esa differensiallash amalini integral belgisi ostiga o'tkazish mumkinligini ko'rsatadi.

4. Integralni parametr bo'yicha integrallash.

$f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ to'plamda berilgan va shu to'plamda uzluksiz bo'lsin. U holda 2-teoremaga ko'ra

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

funksiya $[c, d]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi. Bu funksiya $[c, d]$ oraliq bo'yicha integrali mavjud.

Demak, $f(x, y)$ funksiya M to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda parametr bog'liq integralni parametr bo'yicha $[c, d]$ oraliqda integrallash mumkin:

$$\int_a^b \Phi(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Bu tenglikning o'ng tomoni $f(x, y)$ funksiyani avval x o'zgaruvchi bo'yicha $[a, b]$ oraliqda integrallab, so'ng natijani $[c, d]$ oraliqda integrallanadi

Ba'zan $f(x, y)$ funksiya M to'plamda uzluksiz bo'lgan halda bu fuksiyani avval y o'zgaruvchi bo'yicha $[c, d]$ oraliqda integrallab, so'ng hosil x o'zgaruvchining funksiyasini $[a, b]$ oraliqda integrallash qulay bo'ladi natijada ushbu

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

integrallar hosil bo'ladi.

4-Teorema: Agar $f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ to'plamda uzluksiz bo'lsa, uholda

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

bo'ladi.

Isbot: $\forall t \in [c, d]$ nuqtani olib, quyidagi

$$\varphi(t) = \int_c^t \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \psi(t) = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx$$

integralni qaraylik. $\varphi(t), \psi(t)$ hosilalarini hisoblaymiz.

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

funksiyani $[c, d]$ oraliqda uzluksiz bo'lganligi sababli quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi'(t) = \left(\int_c^t \Phi(y) dy \right)'_t = f(x, t) \quad (5)$$

bo'ladi.

$f(x, y)$ funksiya M to'plamda uzluksizligidan

$$\left(\int_c^t f(x, y) dy \right)'_t = f(x, t)$$

bo'ladi. Demak, $\int_c^t f(x, y) dy$ funksiyaning $M = \{(x, t) \in R^2 : x \in [a, b], t \in [c, d]\}$

to'plamdagi t bo'yicha xususiy hosilasi $f(x, t)$ ga teng va demak, uzluksiz. U holda 5-teoremaga muvofiq

$$\psi'(t) = \left(\int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right] dx \right)'_t = \int_a^b \left[\int_c^t f(x, y) dy \right]'_t dx = \int_a^b f(x, t) dx \quad (6)$$

bo'ladi.

(5) va (6) munosabatdan

$$\varphi'(t) = \psi'(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\varphi(t) = \psi(t) + c \quad (c - \text{const})$$

Biroq $t = c$ bo'lganda $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ bo'lib, Undan $c = 0$ bo'lishini topamiz

Demak, $\varphi(t) = \psi(t)$ bo'ladi. Xususan, $t = d$ bo'lganda $\varphi(d) = \psi(d)$ bo'lib, u teoremani isbotlaydi.

3. PARAMETRGA BOG'LIQ INTEGRALLARNING UMUMIY XOLI.

$f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ to'plamda berilgan. y o'zgaruvchining $[c, d]$ oraliqda olingan har bir tayin qimatida $f(x, y)$ funksiya x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin.

$x = \alpha(y), x = \beta(y)$ funksiyaning har biri $[c, d]$ da berilgan va $\forall y \in [c, d]$ uchun

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b \quad (7)$$

bo'lsin.

Ravshanki, ushbu

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

integral mavjud, y o'zgaruvchiga bog'liqdir:

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \quad (8)$$

haqiqqtdan ham (7) da $\alpha(y) = a, \beta(y) = b, (y \in [c, d])$ bo'lganda (8) integral (1) ko'rinishdagi integralga aylanadi.

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

integralning xossalarini o'rganamiz.

5-Teorema. $f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ to'plamda uzluksiz, $\alpha(y)$ va $\beta(y)$ funksiyalarning har biri $[c, d]$ da uzluksiz va ular (7) shartni qanoatlantirsin. U holda

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

funksiya ham $[c, d]$ oraliqda uzluksiz.

Isbot. $\forall y_0 \in [c, d]$ nuqtani olib unga shunday $\Delta y (\Delta y \geq 0)$ ortirma beraylikki, $y_0 + \Delta y \in [c, d]$ bo'lsin. U holda

$$F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dy = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx +$$

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \quad (8)$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonini qo'shiluvchilarini baholaymiz.

$f(x, y)$ funksiya M to'plamda uzluksiz, demak, Kantor teoremasiga asosan, tekis uzluksiz bo'ladi. U holda $\Delta y \rightarrow 0$ da $f(x, y_0 + \Delta y)$ funksiya o'z limit funksiya $f(x, y_0)$ ga tekis yaqinlashadi. 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx =$$

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx = 0 \quad (9)$$

bo'ldi.

(8) munosabatdagi

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx, \quad \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

integrallar uchun quyidagi bahoga egamiz:

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| \leq M |\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \right| \leq M |\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)|, \quad (10)$$

bunda $M = \sup(|f(x, y)| | (x, y) \in M)$

Shartga ko'ra $\alpha(y), \beta(y)$ funksiyalarning har biri $[c, d]$ da uzluksiz. Demak,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] = 0$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] = 0 \quad (11)$$

Yuqoridagi (9), (10), (11) munosabatlarni e'tiborga olib, (8) tenglikda

$\Delta y \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, unda

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} [F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)] = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $F(y)$ funksiya $\forall y_0 \in [c, d]$ da uzluksiz.

Teorema isbot bo'ldi.

6-Teorema. $f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ to'plamda

uzluksiz, $f'_y(x, y)$ hususiy hosilaga ega va u uzluksiz, $\alpha(y), \beta(y)$ funksiyalar

esa $\alpha'(y), \beta'(y)$ hosilalarga ega hamda ular (7) shartni qanoatlantirsin. U

holda

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

funksiya $[c, d]$ oraliqda $F'(y)$ hosilaga ega va

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y)$$

bo'ldi.

Isbot. $\forall y_0 \in [c, d]$ nuqtani olib unga shunday Δy orttirma beraylikki

$y_0 + \Delta y \in [c, d]$ bo'lsin.

(8) munosabatdan foydalanib quyidagini topamiz.

$$\begin{aligned} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx + \frac{1}{\Delta y} \cdot \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta y} \cdot \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta y \rightarrow 0 \text{ da } \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta y}$$

funksiya o'z limit funksiyasi $f'_y(x, y_0)$ ga $[a, b]$ oraliqda tekis

yaqinlashadi. Unda

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx \quad (13)$$

integrallarga o'rta qiymat haqidagi teoramani qo'llab, ushbu

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(x', y_0 + \Delta y) [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)],$$

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(x'', y_0 + \Delta y) [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)],$$

tengliklarni hosil qilamiz, bunda x' nuqta $\beta(y_0), \beta(y_0 + \Delta y)$ nuqtalar orasida x'' esa $\alpha(y_0), \alpha(y_0 + \Delta y)$ nuqtalar orasida joylashgan. $f(x, y)$ funksiyaning M to'plamda uzluksizligini, $\alpha(y)$ va $\beta(y)$ funksiyalarning esa $[c, d]$ oraliqda hosilaga ega bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{\Delta y} \cdot \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [f(x', y_0 + \Delta y) \times \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y}] =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} = f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0),$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{\Delta y} \cdot \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [f(x'', y_0 + \Delta y) \times \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}] =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} f(x'', y_0 + \Delta y) \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} = f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (14)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi (12) munosabatda, $\Delta y \rightarrow 0$ da limitga o'tib, (13) va (14) tengliklarni e'tiborga olib ushbuni topamiz.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)}{\Delta y} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Demak,

$$F'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0).$$

Modomiki, y_0 nuqta nuqta $[c, d]$ oraliqdagi ixtiyoriy nuqta ekan, u holda

$\forall y \in [c, d]$ uchun

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

bo'lishi ravshandir. Bu esa teoremani isbotlaydi.

4.XULOSA.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, biz ko'p o'zgaruvchili funksiyalar va ularni diferensial hisobini batafsil o'rganganmiz. Endi bunday funksiyalarning integral hisobi bilan shug'ullanamiz. SHuni aytish kerakki, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga nisbatan integral tushunchasi turlicha bo'ladi.

Mazkur mavzu ko'p o'zgaruvchili funksiyaning bitta o'zgaruvchisi bo'yicha integrali bilan tanishdik va uni o'rgandik.

Parametrga bog'liq integrallarda, $f(x,y)$ funksiyaning limiti, uzluksizligi, differensiallanuvchiligi, integrallanuvchiligi, va boshqa funksional xossalarga ko'ra $\Phi(y)$ funksiyaning tegishli funksional xossalari o'rganildi. Bunday xossalarni o'rganishda limiti va unga intilishi xarakteri muhim rol o'ynaydi.

Parametrga bog'liq integrallarni parametr bo'yicha integralidan foydalanib, ushbu

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (0 < a < b)$$

integralni hisoblaymiz.

Ravshanki, $(x > 0)$

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

bo'ladi. Demak

$$A = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$$

Integral ostidagi $f(x,y) = x^y$ funksiya $M = \{(x,y) \in R^2 : x \in [0,1], y \in [a,b]\}$

To'plamda uzluksizdir. U holda

$$A = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

bo'ladi. Ammo

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}$$

bo'lganligidan

$$A = \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

bo'ladi. Demak

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Matematik analiz. 2-qism. T. Azlarov, H. Mansurov.

“O'zbekiston” nashriyoti. 1993-yil.

2. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami.

2-qism. A.Sadullayev, X.Mansurov ,G. Xudayberganov,

A.Borisov,R.G'ulomov. Toshkent. "O'zbekiston" nashriyoti

1995-yil.