

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA –MATEMATIKA FAKULTETI

AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA YO'NALISHI
202-GURUH TALABASI Salimov J onibekNING
DIFFERENSIAL TENGLAMA FANIDAN

KURS ISHI

MAVZU: CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.
KOSHI MASALASI. MAVJUDLIK VA YAGONALIK TEOREMASI.

Bajardi: Salimov J
Tekshirdi: Aktamov X

SAMARQAND 2015

Kurs ishi mavzusi: Chiziqli differensial tenglamalar. Koshi masalasi.
Mavjudlik va yagonalik teoremasi.

Reja:

1. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar;
2. Chiziqli differensial tenglamalarning xossalari;
3. Koshi masalasi;
4. Mavjudlik va yagonalik teoremlari;
5. Mavzuga oid misollar;
6. Xulosa;
7. Foydalanilgan adabiyotlar.

" Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar "

Ta'rif. No'malum funksiya va uning hosilasi birinchi darajada bo'lgan birinchi tartibli differensial tenglamaga chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bunday tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad (1)$$

dan iborat. Bunda $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ ko'rilayotgan oraliqda uzluksiz funksiyalardir. Agar ko'rilayotgan oraliqda x ning hamma qiymatlarida $A(x) \neq 0$ bo'lmasa, (1) tenglamani

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad (2)$$

Ko'rinishga keltirish mumkin.

$$\text{Bunda} \quad p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad Q(x) = -\frac{C(x)}{A(x)}$$

(2) tenglamaga bir jinsli bo'lamagan chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agar (2) da $Q(x) = 0$ bo'lsa

$$y' + p(x)y = 0 \quad (3)$$

tenglamaga bir jinsli chiziqli differensial tenglama deyiladi (2) tenglamaga mos bo'lgan).

(3) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c \quad y = c \ell^{-\int p(x)dx} \quad (4)$$

c ning o'zgarmas qiymatlarida (4), (3) tenglamani qanoatlantiradi. Ya'ni (3) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. (2) tenglamaning ham umumiy yechimini c ni x ning funksiyasi deb, (4) ko'rinishda izlaymiz.

U holda (4) dan

$$y' = c'(x) \ell^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x) \ell^{-\int p(x)dx} \quad (5)$$

(4) va (5) ga asosan (2) tenglama

$$c'(x) \ell^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x) \ell^{-\int p(x)dx} + c(x)p(x) \ell^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) \ell^{-\int p(x)dx} = Q(x) \quad c'(x) = \ell^{\int p(x)dx} Q(x)$$

Bundan

$$c(x) = \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x) dx + c_1 \quad (6)$$

U holda (4) va (6) ga asosan (2) ning umumiy yechimi

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c_1 \right] \quad (7)$$

bo'ladi.

Bu bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamaning umumiy yechimini topish formulasi.

(7) dan ko'rinadikim chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, ikkita kvadratura bilan aniqlanadi.

Chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini bunday usul bilan topishga, o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli yoki Lagranj usuli deyiladi.

Bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimini ikkita yechimlar yig'indisidan iboratdir.

Ulardan biri $c_1 e^{-\int p(x)dx}$, bir jinsli (3) tenglamaning umumiy yechimidan, ikkinchisi esa, (2) tenglamaning xususiy

$$e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx \right]$$

yechimdan iboratdir.

(7) ni integrallab bo'lgach u quyidagi ko'rinishga keladi.

$$y = c\varphi(x) + \psi(x) \quad c = const$$

Bundan ko'rinadikim chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi ixtiyoriy o'zgarmasga nisbatan chiziqli funksiyadan iboratdir.

(2) tenglamaning umumiy yechimini Eyler-Bernulli usulidan foydalanib topish ham mumkin.

(2) tenglamada

$$y = u\vartheta \quad (8)$$

almashtirishni olamiz. Bunda u va ϑ lar ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardir.

$$y' = u'\vartheta + u\vartheta'$$

$$u'\vartheta + u\vartheta' + p(x)u\vartheta = Q(x) \quad (9)$$

$$u\vartheta' + (u' + p(x)u)\vartheta = Q(x) \quad (10)$$

$u(x)$ funksiya ixtiyoriy bo'lgani uchun, uni shunday tanlab olamizkim

$$u' + p(x)u = 0$$

sharti bajarilsin.

Bundan
$$\frac{du}{u} = -p(x)dx$$

$$\ln|u| = -\int p(x)dx \quad u = \ell^{-\int p(x)dx} \quad (11)$$

(11) ni (10) ga olib borib qo'ysak

$$\ell^{-\int p(x)dx} g' = Q(x) \quad g' = \ell^{\int p(x)dx} Q(x) \quad g = \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \quad (12)$$

ga ega bo'lamiz

(8), (11), (12) ga asosan bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi.

$$y = \ell^{-\int p(x)dx} \left[\int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$$

Chiziqli differensial tenglamalarning xossalari

Chiziqli differensial tenglama quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. Agar bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamaning bitta xususiy y_1 yechimi berilgan bo'lsa, uning umumiy yechimi bitta kvadratura bilan aniqlanadi.

Isbot. y_1 (2) tenglamaning yechimi bo'lsin

Ya'ni
$$y_1' + p(x)y_1 \equiv Q(x) \quad (13)$$

$$y = z + y_1 \quad (14)$$

almashtirishini olamiz. Bunda Z yangi no'malum funksiyadir.

(14) dan
$$y' = y_1' + z' \quad (15)$$

(14) va (15) ga asosan (2) tenglama

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) = Q(x) \quad \text{yoki} \quad z' + p(x)z + (y_1' + p(x)y_1 - Q(x)) = 0$$

bundan

$$z' + p(x)z = 0$$

bu esa bir jinsli chiziqli differensial tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi bitta kvadratura yordamida aniqlanadi. Bu topilgan Z qiymatini (14) ga qo'ysak (2) tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'lamiz.

2 xossa. Agar y_1 bir jinsli chiziqli (3) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda cy_1 ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

3 xossa. Agar (2) tenglamaning ikkita y_1, y_2 xususiy yechimlar berilgan bo'lsa, uning umumiy yechimi kvadraturasiz aniqlanadi.

Haqiqatdan ham y_1, y_2 tenglamaning yechimi bo'lgani uchun

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv Q(x)$$

$$y_2' + p(x)y_2 \equiv Q(x)$$

bularni hadlab ayirsak $y_2' - y_1' + p(x)(y_2 - y_1) \equiv 0$

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + p(x)(y_2 - y_1) \equiv 0$$

bundan ko'rinadikim, bir jinslimas chiziqli differensial tenglamaning 2 ta xususiy yechimlar ayirmasi, bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi.

U holda 1 va 2 xossaga asosan, (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1)$$

dan iborat bo'ladi.

Misol 1. Berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini toping: $xy' + y = x^3$

Yechish:

$xy' + y = x^3$ bu differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$y' + \frac{1}{x}y = x^2$ bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama bo'lib

uning umumiy yechimini $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$ fo'rmla yordamida topamiz:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[\int e^{\int \frac{dx}{x}} x^2 dx + c \right] = e^{-\ln|x|} \left[\int e^{\ln|x|} x^2 dx + c \right] = \frac{1}{x} \left[\int x \cdot x^2 dx + c \right] = \\ &= \frac{1}{x} \left[\int x^3 dx + c \right] = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + c \right) = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} \end{aligned}$$

Demak tenglamaning umumiy yechimi $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$ ga teng ekan.

Misol 2.

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$$

Yechish: Berilgan differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x - 2xy - y^2} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{x - 2xy - y^2}{y^2}$$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1-2y}{y}x = 1$ bu tenglama x funksiyaning hosilasiga nisbatan yechilgan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. Uning

umumiy yechimini topish uchun $y = \ell^{\int p(x)dx} \left[\int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$

fo'rmuladan foydalanamiz. Berilgan tenglamamizda y(x) funksiya o'rnida x(y) funksiya, P(x) o'rnida $P(y) = \frac{1-2y}{y^2}$, Q(x) o'rnida Q(y)=1 funksiyalar kelgan, ularni fo'rmulaga qo'yib umumiy yechimni topamiz.

$$\begin{aligned} x &= \ell^{-\int \frac{1-2y}{y^2} dy} \left[\int \ell^{\int \frac{1-2y}{y^2} dy} dy + c \right] = \ell^{\frac{1}{y} + 2\ln|y|} \left[\int \ell^{-\frac{1}{y} - 2\ln|y|} dy + c \right] = \\ &= \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[\int \ell^{-\frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2} dy + c \right] = \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[\int \ell^{-\frac{1}{y}} d\left(-\frac{1}{y}\right) + c \right] = \\ &= \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[\ell^{-\frac{1}{y}} + c \right] = c \ell^{\frac{1}{y}} y^2 + y^2 \end{aligned}$$

Demak berilgan differensial tenglamamizning umumiy yechimi $x = c \ell^{\frac{1}{y}} y^2 + y^2$ ga teng ekan.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama integral chiziqlarini geometrik nuqtai nazardan tekshiramiz.

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (16)$$

tenglamaning ikkita y_1 va y_2 xususiy yechimlari berilgan bo'lsin.

Ma'lumki u holda (16) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1) \quad (17)$$

dan iborat.

Faraz etamiz, (16) tenglamaning y_1, y_2 xususiy yechimlaridan tashqari uning y_3 yechimi ham ma'lum bo'lsin.

Bu yechim, (17) umumiy yechimdan c ning c_1 qiymatida aniqlanadi, ya'ni

$$y_3 = y_1 + c_1(y_2 - y_1) \quad (18)$$

Quyidagi tengliklarni tuzamiz;

$$y_2 - y_3 = y_2 - y_1 - c_1(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(1 - c_1)$$

$$y_3 - y_1 = c_1(y_2 - y_1)$$

Bularni hadlab bo'lsak.

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{1 - c_1}{c_1} = \lambda \quad (19)$$

ga ega bo'lamiz.

(19) tenglikdan ko'rinadikim, chiziqli differensial tenglamaning har qanday integral chizig'i, bu tenglamaning ikkita integral chiziqlari orasidagi ordinata kesmasini o'zgarmas nisbatda bo'ladi.

(19) dan

$$\frac{M_2 M_3}{M_1 M_3} = \frac{N_2 N_3}{N_1 N_3} = \dots = \lambda \quad (20)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu tenglikdan ko'rinadikim, integral chiziqlarni kesuvchi to'g'ri chiziqlar yo bir-birlariga parallel bo'ladilar yoki ular bir nuqtada kesishadilar.

Agar $N_1 N_2$ kesmasini $M_1 M_2$ kesmasiga yaqinlashtirsak, integral chizig'ini kesishuvchi chiziqlar, integral chiziqlarining urunma chiziqlariga aylanadi. Shunday qilib, integral chiziqlarning ordinata o'qiga parallel bo'lgan tug'ri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalariga o'tkazilgan urunmalar yo bir-birlariga parallel bo'ladi yoki ular bir nuqtada kesishadilar.

Koshi masalasi.

Bizga ma'lumki barcha differensial tenglamalar kabi chiziqli differensial tenglama ham cheksiz ko'p yechimga ega. Bu yechimlardan bittasi $y=y(x)$ ni ajratib olish uchun erkli o'zgaruvchining birorta qiymatiga mos keladigan funksiya qiymatini ko'rsatish kerak, ya'ni $x=x_0$ da $y=y_0$ ko'rinishdagi shart berilishi kerak. Bunday shart boshlang'ich shart deyiladi va u qisqacha ushbu ko'rinishda yoziladi

$$y(x_0)=y_0 \quad (1)$$

Buning geometrik ma'nosi xOy tekislikda koordinatalari (x_0, y_0) bo'lgan nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni topishdan iborat.

Berilgan (1) boshlang'ich shartga ko'ra chiziqli differensial tenglamani integrallash masalasi chiziqli differensial tenglamaning boshlang'ich masalasi yoki Koshi masalasi deyiladi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli differensial tenglamaning $x_0 = \frac{\pi}{2}$ va $y_0 = -1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$y' + y \sin x = \sin x \cdot \cos x$$

Yechish: Dastavval bu chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topib olamiz, buning uchun chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish fo'rmulasidan foydalanamiz:

$$P(x) = \sin x; \quad Q(x) = \sin x \cdot \cos x;$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(c + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \right) = e^{-\int \sin x dx} \left(c + \int e^{\int \sin x dx} \sin x \cdot \cos x dx \right) =$$

$$= e^{\cos x} \left(c + \int e^{-\cos x} \sin x \cos x dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \\ dv = e^{-\cos x} \sin x dx \\ v = e^{-\cos x} \end{array} \right| = e^{\cos x} \left(c + \cos x \cdot e^{-\cos x} - \int e^{-\cos x} \sin x dx \right) =$$

$$= e^{\cos x} (c + \cos x \cdot e^{-\cos x} - e^{-\cos x}) = c \cdot e^{\cos x} + \cos x - 1$$

Demak berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c \cdot e^{\cos x} + \cos x - 1 \text{ ga teng ekan.}$$

Endi tenglamaning yuqoridagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz, buning uchun tenglamaning umumiy yechimiga x ning o'rniga x_0 ning qiymatini, y ning o'rniga y_0 ning qiymatini qo'yamiz va nomalum c ni topamiz:

$$-1 = c \cdot e^{\cos \frac{\pi}{2}} + \cos \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow -1 = c \cdot e^0 + 0 - 1 \Rightarrow c = 0.$$

Demak berilgan chiziqli differensial tenglamaning $x_0 = \frac{\pi}{2}$ va $y_0 = -1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $y = \cos x - 1$ ga teng ekan.

Mavjudlik va yagonalik teoremlari.

Bizga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama $y' + P(x)y = Q(x)$ (1) berilgan bo'lsin, bu yerda $f(x, y)$ funksiya xOy tekislikdagi G sohada aniqlangan bo'lsin.

Qaralayotgan sohada tenglama yechimga egami yoki yo'qmi va agar yechim mavjud bo'lsa, yagonami ya'ni (1) differensial tenglama

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

shartni qanoatlantiradimi degan savollarga javob berish kerak bo'ladi.

Yuqoridagi savollarga javob beradigan teoremlar mavjudlik va yagonalik teoremlari deb yuritiladi.

Teorema (mavjudlik teoremasi). Agar $f(x, y) \in C(G)$ bo'lsa, u holda G sohaning ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in G$ nuqtasi uchun (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.

G sohaga tegishli bo'lgan yopiq R turtburchak

$R = \{x - x_0 \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, $a > 0$, $b > 0$ ni qaraymiz, $R \subset G$. Bu to'rtburchakda $f(x, y)$ funksiya chegaralangan, ya'ni

$$|f(x, y)| \leq M$$

R dagi barcha nuqtalar uchun $M > 0$, chunki yopiq sohada uzluksiz funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatini qabul qiladi.

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \text{ belgilanish kiritamiz,}$$

$$|x - x_0| \leq h \text{ Peano kesmasi deyiladi.}$$

Peano teoremasi. Agar $f(x, y) \in C(R)$ bo'lsa, u holda R to'rtburchakning ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in R$ nuqtasi uchun, (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiradigan Peano kesmasida aniqlangan kamida bitta yechimi mavjud.

Ta'rif. Agar $f(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan bo'lib, shu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy ikkita $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$ nuqtalar uchun ushbu

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \quad (L)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x, y)$ funksiya G sohada y bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshis o'zgarmasi deyiladi.

Teorema (mavjudlik va yagonalik teremasi). Agar $f(x, y)$ funksiya R to'g'ri to'rtburchakda x, y lar bo'yicha uzluksiz bo'lib, R da y bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantirsa, u holda har bir $(x_0, y_0) \in R$ uchun $y' = f(x, y)$ tenglama x ning $|x - x_0| \leq h$ qiymatlari uchun aniqlangan va uzluksiz

$$y_0 = \varphi(x_0)$$

qiymatlarni qabul qiluvchi yagona $y = \varphi(x)$ yechimga egadir.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Koshi masalasi, ushbu integral tenglamaga

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

ekvivalent.

Haqiqatan, $y=y(x)$ (1) differensial tenglamaning $|x - x_0| \leq h$ oraliqda aniqlangan biror yechimi bo'lib, u $(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantirsin.

Demak, biz ushbu

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$$

ayniyatga egamiz. Bu holda $y(x)$ funksiya $|x - x_0| \leq h$ oraliqda

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

integral ayniyat o'rinli. Aksincha, agar biror uzluksiz $y(x)$ funksiya uchun $|x - x_0| \leq h$ oraliqda (4) ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $y=y(x)$ funksiya differensiallanuvchi (1) differensial tenglamaning yechimi va $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiradi.

Chiziqli differensial tenglamalar va Koshi masalasi mavzulariga taluqli misollar va ularning yechilishlari.

1-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo’yicha misol va masalalar” 84-misol)

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping

$$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$$

$$\text{Yechish: } (1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2 \quad |:(1+x^2)$$

$$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$$

$$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2}, \quad Q(x)=(1+x^2)$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(c+\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right)=e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\left(c+\int e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx}(1+x^2)dx\right)=$$

$$=e^{\ln(1+x^2)}\left(c+\int e^{-\ln(1+x^2)}(1+x^2)dx\right)=(1+x^2)\left(c+\int (1+x^2)^{-1}(1+x^2)dx\right)=$$

$$=(1+x^2)\left(c+\int (1)dx\right)=(1+x^2)(c+x)$$

$$y=c(1+x^2)+x+x^3$$

Javob: Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c(1+x^2)+x+x^3 \text{ ga teng.}$$

2-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo’yicha misol va masalalar” 85-misol)

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping

$$ydx+2(x+y)dy=0$$

$$\text{Yechish: } ydx+2(x+y)dy=0 \quad | : dy$$

$$y\frac{dx}{dy}+2(x+y)=0, \quad yx'+2(x+y)=0$$

$$x'+\frac{2}{y}x=-2$$

$$P\left(\frac{2}{y}\right), \quad Q(y) = -2$$

$$x = e^{-\int P(y)dy} \left(c + \int e^{\int P(y)dy} Q(y)dy \right) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(c + \int e^{\int \frac{2}{y} dy} (-2)dy \right) =$$

$$y = e^{-2\ln y} \left(c - 2 \int e^{2\ln y} dy \right) = y^{-2} \left(c - 2 \int y^2 dy \right) = y^{-2} \left(c - 2 \cdot \frac{1}{3} y^3 \right)$$

$$x = cy^{-2} - \frac{2}{3} y$$

Javob: Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$x = cy^{-2} - \frac{2}{3} y \text{ ga teng ekan.}$$

3-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo'yicha misol va masalalar” 86-misol)

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping

$$(xy + e^x)dx - xdy = 0$$

Yechish: $(xy + e^x)dx - xdy = 0 \quad | : dx$

$$(xy + e^x) - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$xy + e^x - xy' = 0, \quad -xy' + xy = -e^x \quad | : (-x)$$

$$y' - y = -\frac{e^x}{x} \Rightarrow \quad P(x) = -1, \quad Q(x) = -\frac{e^x}{x}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(c + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \right) = e^{-\int -1 dx} \left(c + \int e^{\int -1 dx} \frac{e^x}{x} dx \right) =$$

$$= e^x \left(c + \int e^{-x} \frac{e^x}{x} dx \right) = e^x \left(c + \int \frac{dx}{x} \right) = e^x (c + \ln(x))$$

$$y = ce^x + e^x \ln(x)$$

Javob: Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = ce^x + e^x \ln(x) \text{ ga teng ekan.}$$

4-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo’yicha misol va masalalar” 87-misol)

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping

$$x^2 y' + xy + 1 = 0$$

Yechish:

$$x^2 y' + xy + 1 = 0 \quad | : x^2$$

$$y' + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(c + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \right) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(c + \int e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right) =$$

$$= e^{-\ln(x)} \left(c - \int e^{\ln(x)} \frac{1}{x^2} dx \right) = x^{-1} \left(c - \int \frac{1}{x} dx \right) = x^{-1} (c - \ln(x))$$

$$y = x^{-1} (c - \ln(x))$$

Javob: Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = x^{-1} (c - \ln(x)) \text{ ga teng ekan.}$$

5-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo’yicha misol va masalalar” 88-misol)

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini toping

$$y = x(y' - x \cos x)$$

$$\text{Yechish :} \quad y = x(y' - x \cos x) \quad | : x$$

$$\frac{y}{x} = y' - x \cos x \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = x \cos x$$

$$y = e^{\int P(x)dx} \left(c + \int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx \right) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} \left(c + \int e^{\int \frac{1}{x} dx} x \cos x dx \right) =$$

$$= e^{-\ln(x)} (c + \int e^{\ln(x)} x \cos x dx) = x^{-1} (c + \int x \cdot x \cdot \cos x dx) =$$

$$= \frac{1}{x} (c + \int x^2 \cos x dx) = \oplus$$

$$\int x^2 \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - 2(-x \cos x - \int -\cos x dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x + \sin x$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x + \sin x$$

$$\oplus = \frac{1}{x} [c + (x^2 \sin x + 2x \cos x + \sin x)]$$

$$y = \frac{c}{x} + x \sin x + 2 \cos x + \frac{\sin x}{x}$$

Javob: Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{c}{x} + x \sin x + 2 \cos x + \frac{\sin x}{x} \text{ ga teng.}$$

6-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev “Differensial tenglamalar bo’yicha misol va masalalar” 89-misol)

Berilgan differensial tenglamaning $x_0 = 0$ va $y_0 = -\frac{1}{2}$ boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping

$$2x(x^2 - y)dx = dy$$

Yechish:

$$2x(x^2 - y)dx = dy \quad | : dx$$

$$2x(x^2 - y) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' + 2xy = 2x^3$$

$$P(x) = 2x, \quad Q(x) = 2x^3$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} (c + \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx) = e^{-\int 2x dx} (c + \int e^{\int 2x dx} 2x^3 dx) =$$

$$= e^{-x^2} (c + 2 \int e^{x^2} x^3 dx) = \oplus$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = e^{x^2} x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \int \frac{1}{2} e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\oplus = e^{-x^2} (c + \frac{1}{2} e^{x^2} x^2 - \frac{1}{2} e^{x^2})$$

$$y = e^{-x^2} c + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} - \text{bu tenglamaning umumiy yechimidir.}$$

Endi boshlang'ich shartlarni tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib

$$c \text{ ni topamiz: } -\frac{1}{2} = e^{-0^2} c + \frac{1}{2} 0^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = c - \frac{1}{2} \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Javob: Berilgan differensial tenglamaning } x_0 = 0 \text{ va } y_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi } y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \text{ ga teng.}$$

7-misol

(Ya. Muxtorov, A. Soliyev "Differensial tenglamalar bo'yicha misol va masalalar" 96-misol)

Berilgan differensial tenglamaning $x_0 = 1$ va $y_0 = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping

$$(2e^y - x)y' = 1$$

$$\text{Yechish: } (2e^y - x)y' = 1$$

$$\Rightarrow (2e^y - x) \frac{dy}{dx} = 1 \quad | : \frac{dy}{dx}$$

$$2e^y - x = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x' + x = 2e^y$$

$$P(y) = 1,$$

$$Q(y) = 2e^y$$

$$y = e^{-\int P(y)dy} (c + \int e^{\int P(y)dy} Q(y)dy) = e^{-\int dy} (c + \int e^{\int dy} 2e^y dy) =$$

$$= e^{-y} (c + 2 \int e^y e^y dy) = e^{-y} (c + 2 \int e^{2y} dy) = e^{-y} (c + e^{2y})$$

$x = e^{-y} (c + e^{2y})$ - bu tenglamaning umumiy yechimidir.

Endi boshlang'ich shartlarni tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib c ni topamiz:

$$1 = e^{-1} (c + e^2) \Rightarrow e = c + e^2 \Rightarrow c = e - e^2$$

Javob: Berilgan differensial tenglamaning $x_0 = 1$ va $y_0 = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $x = e^y (e - e^2 + 2y)$ ga teng.

Xulosa

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak chiziqli differensial tenglama deb no'malum funksiya va uning hosilasi birinchi darajada bo'lgan, umumiy ko'rinishi

$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$ bo'lgan birinchi tartibli differensial tenglamaga aytilar ekan. Bunday tenglamani

$y' + p(x)y = Q(x)$ ko'rinishida ham yozish mumkin ekan.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$ fo'rmuladan foydalanamiz.

Chiziqli differensial tenglamalarni o'rganish muhim hisoblanadi. Chunki ko'plab differensial tenglamalarni yechish aynan chiziqli differensial tenglamalarni yechishga keltiradi. Misol uchun bunday differensial tenglamalarga misol qilib Bernulli va Rikkati tenglamalarini yoki differensial tenglamalar sistemasini Dalanber usulida yechish va boshqalarni misol qilib olishimiz mumkin.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak Koshi masalasi bu differensial tenglama umumiy yechimining $x=x_0$ da $y=y_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish ekan.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak qaralayotgan sohada berilgan differensial tenglamamiz yechimga egami yoki yo'qmi va agar yechim mavjud bo'lsa, yagonami ya'ni differensial tenglama $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiradimi degan savollarga javob beradigan teoremlar mavjudlik va yagonalik teoremlari deb yuritilar ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

- a) Differensial tenglamalar fanidan maruzalar matni, Sam DU 2014-2015-yil.
- b) Ya. Muxtorov, A. Soliyev "Differensial tenglamalar bo'yicha misol va masalalar"
- c) Saloxiddinov M.S. Nasriddinov G.N. "Oddiy differensial tenglamalar", Toshkent, "O'zbekiston", 1994-yil.
- d) Filippov A.F. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям". М. наука, 1979 (5 –е издание).
- e) Sharipov Sh.R, Muminov N.S "Oddiy differensial tenglamalar" Toshkent, "O'zbekiston", 1992-yil.
- f) <http://www.mcce.ru>, <http://lib.mexmat.ru>