МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА «Высшая математика»

Ш.Наримов , М.Сангинов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Л И Н Е Й Н А Я А Л Г Е Б Р А.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

(Учебное пособие)

Ташкент-2010

•

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

КАФЕДРА «Высшая математика»

Ш.Наримов , М.Сангинов

В Ы С Ш А Я М А Т Е М А Т И К А

—

Л И Н Е Й Н А Я А Л Г Е Б Р А. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

(Учебное пособие)

Ташкент-2010

Данное учебное пособие «Линейная алгебра. Системы линейных уравнений» входит в состав комплекса учебных пособий по курсу «Высшая математика» и предназначен для студентов бакалавров Ташкентского химико-технологического института. Ёё цель - в ясной и удобной для восприятия форме дать студенту весь объём необходимых ему математических знаний в части линейной алгебры. При этом студент четко сориентирован для чего и когда ему будет полезно знание тех или иных разделов дисциплины: для решений каких экономических, технических или технологических задач нужна линейная алгебра, как с помощью систем линейных уравнений можно построить модель многоотраслевой прикладной задачи, какие методы оптимизации позволяют решить задачу максимизации прибыли и т. д.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§1. Общие понятия системы линейных уравнений

Решение многих экономических задач сводится к исследованию систем линейных уравнений**.**

Определение. ***Системой*** m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}a_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

или в сокращенной записи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,...,m$$

Здесь $x_1,x_2,\dots,x_n$ *неизвестные*, подлежащие определению, постоянные a_{ij} называются коэффициентами, а числа b_i свободными членами системы(1)., которые Все a_{ij} *коэффициенты* при переменных и все b_i - *свободные членыi* уравнений могут принимать любые действительные значения.

Определение. Линейная система уравнений **(1)** называется *однородной* если все её свободные члены равны нулю, т.е., если $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$.

Определение. Линейная система уравнений **(1)** называется *неоднородной* если хотя бы один её свободный член не равно нулю.

Определение. Линейная система уравнений **(1)** называется *квадратной* если число неизвестных и число уравнений одинаковы, т.е. когда n=m.

Определение. *Решением* системы называется упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, которая при подстановке в систему (1) обращает каждое её уравнение в тождество.

Определение. Линейная система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение, *несовместной,* если она не имеет решений.

Определение. Совместная система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной* .если она имеет более одного решения.

Определение. Две системы уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и тоже множество решений.

Системы уравнений удобно решать в матричной форме. Запишем систему (1) в виде матричного уравнения. Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

где А – матрица a_{ij} коэффициентов при переменных, которую назовем *основной матрицей* системы; Х – матрица – столбец неизвестных; В – матрица – столбец

b_i свободных членов. Тогда данная система уравнений(1) может быть представлена в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & amn \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или в компактной матричной форме

$$A \cdot X = B.$$

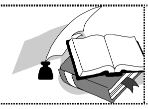
Пример.

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ .x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$ систему запишем в виде $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Линейная система уравнений и её решение.
2. Квадратная система уравнений, однородность и неоднородность.
3. Когда линейная система уравнений будет совместной и несовместной?
4. Когда линейная система уравнений будет определенной и неопределенной?
5. Равносильность системы.
6. Какую матрицу называем основной матрицей линейной системы уравнений?.



Темы для рефератов

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

Линейная система уравнений. Основные классификации

§2. Нахождение единственного решения системы линейных уравнений

В этом параграфе рассмотрим совместную квадратную систему линейных уравнений имеющих единственное решение.

2.1.Метод обратной матрицы

Метод обратной матриц применим к решению систем уравнений когда основная матрица системы невырождена, т.е. $|A| \neq 0$ и $m = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных. Поскольку основная матрица А системы невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тогда данную систему линейных уравнений можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B.$$

Умножая слева обе части этого матричного уравнения на A^{-1}, получим матричное уравнение:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

или

$$X = A^{-1} \cdot B$$

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, где по прежнему E – единичная матрица. С учетом этого имеем

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Уравнение в матричном виде решено. Для нахождения элементов матрицы неизвестных X следует найти обратную матрицу коэффициентов и умножить ее на столбец свободных членов. Таким образом, для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка. В. Рассмотрим частный пример.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Запишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Основная матрица коэффициентов системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

не вырождена (т.к. $|A| = 1$). Поэтому существует обратная матрица, которая легко может быть найдена одним из рассмотренных в [5] способов. Следовательно, находим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Далее находим произведение

$$A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & -1 & -5\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$$

Поскольку, решение системы линейных уравнений в матричном виде записывается, как , $X = A^{-1}\cdot B$, то в нашем случае имеем:

$$X=\begin{pmatrix}x_{12}\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений можно записать также в виде $\begin{pmatrix}x_1 = 3,\\ x_2 = 6,\\ x_3 = 2.\end{pmatrix}$

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, этот метод может быть легко реализован на ЭВМ.

2.2.Метод с использованием расширенной матрицы

Более эффективный способ решения системы из n уравнений с n неизвестными можно осуществить с помощью расширенной матрицы (см.[5], Замечание к разделу п.5.2.Способ построения обратной матрицы.).

Следуя этой схеме составим расширенную матрицу $(A|B)$, где A основная матрица системы линейных уравнений, а B матрица-столбец состоящий из свободных членов.

Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы приведем матрицу A к единичной. Тогда матрица-столбец B обратиться в матрицу-столбец вида $A^{-1}\cdot B$

В итоге расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид $(E|A^{-1}\cdot B)$.

Извлекая из расширенной матрицы матричное произведение $A^{-1}\cdot B$ и приравнивая его к матрице неизвестных, получаем для неизвестных равенство

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B$$

Пример**.** Решить систему уравнений (2) с помощью расширенной матрицы.

Решение. Составим расширенную матрицу системы линейных уравнений

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Приведем вначале с помощью элементарных преобразований матрицу A к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{array}\right)$$

Далее, образуем треугольник нулей выше главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Наконец, получим единицы на главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.3.Метод Крамера

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0, т.е. Чтобы выполнялось условие det A $\neq$ 0; Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = A_i/\Delta$, где

Δ = det A,(или $\Delta = |A|$) а A_i – определитель матрицы, получаемой из основной матрицы системы заменой i го столбца столбцом свободных членов b_i.

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

В частном случае для системы из трех линейных уравнений с тремя неизвестными утверждения теоремы имеет вид:.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{A}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \mathrm{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \mathrm{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \mathrm{A}_1/\det\mathrm{A}; \qquad x_2 = \mathrm{A}_2/\det\mathrm{A}; \qquad x_3 = \mathrm{A}_3/\det\mathrm{A};$$

Теперь займемся доказательством теоремы.

◄ Развернем матричное уравнение $X = A^{-1} \cdot B$ и запишем обратную матрицу через алгебраические дополнения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Перемножив матрицы, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11}b + A_{21}b_2 + \dots A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots A_{n2}B_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1N}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Суммы $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ представляет собой произведение чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов 1-го столбца. Она равна определителю матрицы, полученной, из данной заменой элементов этого столбца на числа $b_1, b_2, \dots, b_n$ (свойство 9 определителей). Следовательно,

$$x_1 \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|}$$

Аналогично сумма $A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n$ есть произведение чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов 2-го столбца. Тогда

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .,.. & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Продолжив вычисления, окончательно получим

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}. \blacktriangleright$$

Способ решения системы линейных уравнений, основанный на формулах Крамера, получил название метода или правила Крамера.

Пример. Решить систему уравнений (2) методом Крамера.

Решение**.** В этом примере условия, при которых правило Крамера имеет место(т.к. $m = n, |A| \neq 0$), выполнены, поэтому воспользуемся формулами Крамера. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{1} = 6; \quad x_3 \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученными выше матричными методами.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Замечание1. Рассмотренные нами методы решения систем линейных уравнений становятся трудоемкими при ручном счете уже при $n \geq 4$. Однако, они удобны при решении подобных задач на компьютере, поскольку они полностью алгоритмизируются..

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Опишите метод решения системы линейных уравнений основанной на обратной матрице.
2. Опишите метод решения системы линейных уравнений основанной на использовании расширенной матрицы.
3. Опишите метод решения системы линейных уравнений основанной на методе Крамера.
4. В чем особенности этих трех методов решения систем линейных уравнений.
5. Три метода решения систем линейных уравнений и алгоритмизация.

Темы для рефератов

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Методы решение систем линейных уравнений(невырожденный случай).
2. Матрицы. Применение матриц в решении в прикладных задач.
3. Определители и их свойства. Применение определителей в решении в прикладных задач.

§3. Общий подход к решению систем уравнений

3.1.Равносильность систем линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Рассмотренные в предыдущем параграфе методы решения систем линейных уравнений являются методами частного вида. Поскольку их можно использовать только в случаях когда выполняются $m = n, |A| \neq 0$. Теперь перейдем к рассмотрению решения систем линейных уравнений общего вида. В дальнейшем будем оперировать понятиями матричной алгебры(см.[5]).

ТЕОРЕМА(о равносильности систем при элементарных преобразованиях)

При элементарных преобразованиях строк первых четырех типов линейные системы остаются равносильными.

◄Рассмотрим элементарные преобразования каждого типа по отдельности.

1. Если система линейных уравнений получена из исходной системы элементарными преобразованиями 1-го типа, т.е. изменен порядок уравнений в системе, то решения системы не изменяются.
2. Если система линейных уравнений получена из исходной системы элементарными преобразованиями 2-го типа, т.е. одно из уравнений умножено на число $a \neq 0$, это не приведет к изменению решений системы.
3. Если система линейных уравнений получена из исходной системы элементарными преобразованиями 3-го типа, т.е. одно из которых предварительно умножено на число λ, это также не приведет к изменению решений системы.

Действительно, пусть $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ - решение системы уравнений. Тогда уравнения с произвольными номерами i и j

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i,$$
$$a_{j1}b_1 + ... + a_{jn}x_n = b_j$$

при подстановке чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ обратятся в тождества. Сложим оба уравнения, предварительно умножив первое из них на число λ:

$$\lambda(a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - b_i) + (a_{ji1}x_1 + /// + a_{jn}x_n - b_j) = 0$$

Подставив сюда числа $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, получим $\lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

4. Если система линейных уравнений получена из исходной системы элементарными преобразованиями 4-го типа, т.е. одно из уравнений, содержащее нулевые коэффициенты и нулевой свободный член, вычеркнуто, это, очевидно, не изменится решений системы. ►

Применение элементарных преобразований при решении систем линейных уравнений приводит к мощному методу решения произвольных линейных систем – методу немецкого математика и физика, профессора Геттингенского университета Карла Фридриха Гаусса (1777-1855).

3.2.Метод Гаусса

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Для системы уравнений (1) образуем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Посредством элементарных преобразований приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \ldots & \dot{a}_{1r} & \ldots & \dot{a}_{1n} & \dot{b}_1 \\ 0 & \dot{a}_{22} & \ldots & \dot{a}_{2r} & \ldots & \dot{a}_{2n} & \dot{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dot{a}_{rr} & \ldots & \dot{a}_{rn} & \dot{b}_{rr} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \dot{b}_{r+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (1)$$

Рассмотрим различные случаи ступенчатой матрицы:

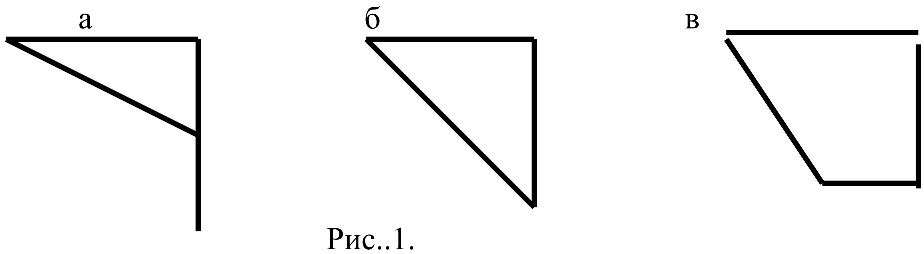


Рис..1.

1) $b_{r+1} \neq 0$. Расширенная матрица в этом случае имеет вид флажка (рис. 2.1, а). Тогда система уравнений несовместна. Действительно, в случае (1) уравнение с номером $r+1$ содержит нулевые коэффициенты перед неизвестными, тогда как свободный член отличен от нуля. Пусть далее $b_{r+1} = 0$.

2) Число неизвестных n и число уравнений r совпадают. Случай (2), в этом случае расширенная матрица примет треугольный вид как показано в рис. 1, б:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & ... & \dot{a}_{1n} & \Big| \dot{b}_1 \\ 0 & \dot{a}_{22} & ... & \dot{a}_{2n} & \Big| \dot{b}_2 \\ ... & ... & ... & ... & \Big| ... \\ 0 & 0 & ... & \dot{a}_{nn} & \Big| \dot{b}_n \end{pmatrix} (2)$$

Система уравнений, соответствующая этой матрице, имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Из последнего уравнения определяется неизвестная величина x_n. Подставляем ее в предыдущее уравнение с номером n-1 и находим x_{n-1}. Продолжая этот процесс, находим неизвестные со все наименьшими номерами. Наконец, подставив найденные значения неизвестных $x_2, x_3, ..., x_n$. в первое уравнение, найдем величину x_1. Итак, при n= r система определена и имеет единственное решение.

3) Число неизвестны n больше числа уравнений r. Вид расширенной матрицы – трапеция (рис. 2.1, в). Последнее уравнение содержит переменные $x_r, x_{r+1}, ..., x_n$. Выразим в этом уравнении переменную x_r через остальные неизвестные и подставим в уравнение с номером r-1. Найдем переменную x_{r-1}, которая будет выражена через те же неизвестные $x_1, x_{r+1}, ..., x_n$. Результат подставим в уравнение с номером $r-2$ и.т.д. Таким образом, мы можем определить значения переменных $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ через неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \ddot{a}_{1,r+1}\, x_{r+1} + \ddot{a}_{1,r+2}\, x_{r+2} + ... + \ddot{a}_{1n}\, x_n + \ddot{b}_1, \\ x_2 = \ddot{a}_{2,r+1}\, x_{r+1} + \ddot{a}_{2,r+2}\, x_{r+2} + ... + \ddot{a}_{2n}\, x_n + \ddot{b}_2, \\ .... \\ x_r = \ddot{a}_{r,r+1} + \ddot{a}_{r,r+2} + ... + \ddot{a}_{rn}\, x_n + \ddot{b}_r \end{cases} \qquad (1')$$

Придавая неизвестным $x_{r+1}, ..., x_n$ произвольные значения, получаем бесконечное множество решений системы уравнений.

Пример**.** Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 + -6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Составим расширенную матрице системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований приведем уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ или } \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Исходная система эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -6x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнений x_3 через x_4 и подставим в первое уравнение системы. Тогда

$$x_1 \frac{1}{18}(12x_2 + x_4 + 7),$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(-5x_4 + 1)$$

Придавая произвольные значения неизвестным

$$x_2 = a \quad x_4 = b$$

получаем общее решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{1}{18}(12a + b + 7)$$

$$x_2 = a$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(-5b + 1)$$

$$x_4 = b\,.$$

Решение методом Гаусса представляет собой кропотливый и часто длительный процесс. Когда в конце пути может оказаться, что система не имеет решения, наступает разочарование. Столько сделано работы – и как ничтожен итог.

В середине XIX в. Леопольдом Кронекером (1823 - 1891), профессором Берлинского университета, была найдена та «лакмусовая бумажка», по реакции которой можно судить о наличии или отсутствии решений системы линейный уравнений. Ею оказался ранг.

3.3.Теорема Кронекера – Капели

ТЕОРЕМА (о совместности системы уравнений)

Линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

◄ В системе линейных уравнений (1) введем обозначения матрицы коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$A^P = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

А также обозначения столбцов, составленных из коэффициентов при неизвестных

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a_1, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = a_2, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ amn \end{pmatrix} = a_n, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = b.$$

В новых обозначениях системы выглядит так:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Необходимость. Пусть система совместна, т.е. существуют $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что выполняется равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = b$$

Из него следует, что столбец **b** есть линейная комбинация остальных столбцов матрицы системы. Следовательно, добавление в матрицу коэффициентов при неизвестных столбцах свободных членов ранга не меняет: $r(A) = r(A^P)$.▶

◀ Достаточность. Пусть матрица А и A^P имеют одинаковый ранг $r(A) = r(A^P)$. Тогда r столбцов матрица (пусть это, например, будут первые r столбцов) линейно независимы. Остальные n-r столбцов, а именно: $a_{r+1}, \dots, a_n, b$ - являются линейными комбинациями первых r столбцов. В частности, найдутся такие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r = b$$

Расширим это равенство за счет добавления в него слагаемых с коэффициентами $\lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} a_{r+1} + \dots + \lambda_n a_n = b$$

Но и это означает, что исходная система имеет решения

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = \lambda_{r+1} = 0, \dots, x_n = \lambda_n = 0 \ ▶$$

3.4.Схема решений системы уравнений

Доказанная теорема позволяет в компактном виде представить схему решений систему из m линейных уравнений с n переменными (рис. 1)

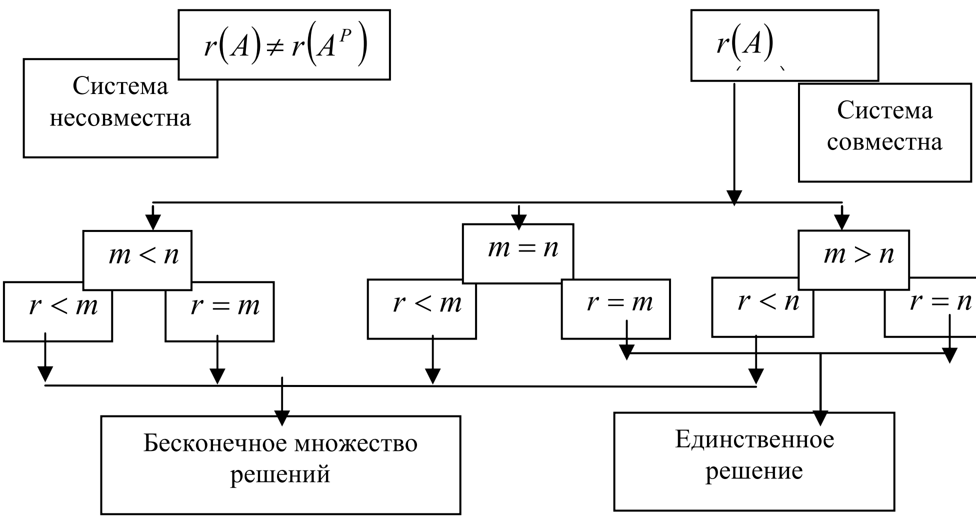


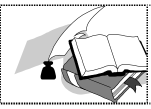
Рис. 2

Далее рассмотрим более подробно случай бесконечного множества решений. Оказывается, оно может быть определенным образом структурировано.

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1.Что так5ое равносильные системы линейных уравнений?
2.Метод Гаусса как обобщенный метод решения системы линейных уравнений.
3.Условие совместимости системы линейных уравнений.
4.Схема решений системы линейных уравнений.



Темы для рефератов

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Метод Гаусса как обобщенный метод решения системы линейных уравнений.

§4. Базисные решения системы линейных уравнений

Пусть число линейно независимых уравнений меньше числа переменных, а значит, $r < n$. Назовем r переменных *основными или базисными,* если определитель матрицы из коэффициентов при них отличен от нуля, т.е. ранг основной матрицы системы равен r. Предположим, что это переменные $x_1, x_2, ..., x_r$. Тогда переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ выражаются через переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ (см. п. 3.2. Метода Гаусса) с помощью соотношений (2). Назовем последние переменные *неосновными* или *свободными.* Количество этих переменных равно $n - r$.

Определение. Решение системы (1’), в котором все $n - r$ свободных переменных полагаются равными нулю, называется *базисным.* В системе (1’) базисным решением является

$$\begin{cases} x_1 = \ddot{b}_1, \\ x_2 = \ddot{b}_2, \\ .... \\ x_r = \ddot{b}_r, \\ x_{r+1} = 0, \\ .... \\ x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{или в матричной форме} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ x_{r+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{b}_1 \\ \ddot{b}_2 \\ ... \\ \ddot{b}_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

В сокращенной матричной форме базисное решение выглядит так:

$$x = \ddot{b} \qquad (5')$$

Базисное решение является частным решением системы (1).

В качестве основных переменных могут быть выбраны и другие переменные. Количество способов выбора r переменных из их общего числа n не может быть больше числа сочетаний из n элементов по r. Эта величина описывается формулой теории вероятностей

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Пример (3) содержит 3 уравнения с четырьмя переменными. Ранги исходной и расширенной матриц равны и составляют величину, равную2. следовательно, две переменные в системе можно выразить через оставшиеся две переменные. Формула числа сочетаний дает общее число способов выбора двух переменных из четырех:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

Возможны следующие наборы основных переменных:

$$\begin{matrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_2 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_3 & x_4 & x_4 \end{matrix}$$

Однако набор переменных x_1, x_2 не может быть основным. Так как определитель матриц из коэффициентов при этих переменных $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Любой из других наборов переменных можно сделать основным. Таким образом, число базисных решений равно пяти. В решенном примере в качестве основной были выбраны переменные x_1, x_3, а переменные x_2, x_4 объявлены свободными. Если принять их равными нулю, получим одно из базисных решений системы (3):

$$x_1 = \frac{7}{18}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{6}, x_4 = 0.$$

Подведем итог. При $r < n$ совместная система m линейных уравнений с n переменными имеет бесконечное множество решений, среди которых имеются базисные решения. Их число конечно и не превышает величины C_n^r.

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений. Базисные решения.)

1. Что такое базисное решение системы линейных уравнений?
2. Как связаны понятия общее решение и базисное решение системы линейных уравнений?

§5. Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все свободные члены системы равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

В матричном виде систему можно записать следующим образом:

$$A \cdot X = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1.Свойства однородной системы линейных уравнений

1) Однородная система всегда совместна, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение.

2) Для существования ненулевых решений ранг матрицы коэффициентов должен быть меньше числа переменных $r < n$, т.е число линейно независимых уравнений должно быть меньше числа переменных. В этом случае $|A| = 0$.

3) Если матрица – столбец (вектор) $e = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ есть решение системы (6), то и столбец $e' = \lambda \cdot e = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} \\ \lambda x_{21} \\ \dots \\ \lambda x_{n1} \end{pmatrix}$ также является решением системы.

Пусть е решение. Тогда матричное уравнение при подстановке $X = e'$ обращается в тождество $A \cdot e' = 0$.

Действительно, найдем произведение А и $\lambda \cdot e$:

$$A \cdot (\lambda e) = \lambda \cdot (A \cdot e) = \lambda \cdot O = O$$

Отсюда столбец $e' = \lambda \cdot e$ также является решением матричного уравнения.

1) Если матрицы – столбцы $e_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$ есть решения системы (6), т.е. $A \cdot e_1 = O$ и $A \cdot e_2 = O$, то и столбец $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, где λ_1, λ_2 – произвольное числа, также является решением системы $A \cdot e = O$.

Для доказательства перемножим матрицы А и $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$:

$$A \cdot (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = A \cdot (\lambda_1 e_1) + A \cdot (\lambda_2 e_2) = \lambda_1 \cdot (A \cdot e_1) + \lambda_2 (A \cdot e_2) = \lambda_1 \cdot O + \lambda_2 \cdot O = O$$

Следовательно, всякая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений также является решением этой системы.

Заметим, что среди решений однородной системы выделяются решения, которые можно назвать главными решениями. Через них выражаются другие решения. Попробуем разобраться в этом и найти эти выделяющиеся, фундаментальные, решения.

5.2.Фундаментальные решения

Решения $e_1, e_2, ..., e_P$ однородной системы называются *линейно независимыми,* если линейная комбинация этих решений $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_P e_P$ равна нулевому столбцу только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$. Построим матрицу решений, расположив матрицы – столбцы решений при по столбцам новой матрицы. В соответствии с теоремой о ранге матрицы ранг новой матрицы будет численно равен числу столбцов новой матрицы т.е. числу линейно независимых решений системы.

Определение. Совокупность линейно независимых решений $e_1, e_2, ..., e_P$ однородной системы уравнений называется *фундаментальной* если общее решение системы является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, ..., e_P$.

ТЕОРЕМА(о фундаментальных решениях однородной системы)

Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных однородной системы уравнений меньше числа переменных n , то:

1) существует совокупность линейно независимых решений системы;

2) число линейно независимых решений равно $n - r$;

3) любое решение системы можно представить в виде совокупности этих независимых решений, т.е. в виде линейной комбинации фундаментального набора решений.

◄ Решим систему (6) в общем виде. Выпишем матрицу коэффициентов и приведем ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & ... & \dot{a}_{1r} & ... & \dot{a}_{1n} \\ 0 & \dot{a}_{22} & ... & \dot{a}_{2r} & ... & \dot{a}_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \dot{a}_{rr} & ... & \dot{a}_{rn} \end{pmatrix}$$

Базисными возьмем переменные $x_1, x_2, ..., x_r$, тогда свободными переменными станут $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Если в процессе приведения матрицы коэффициентов к ступенчатому виду пришлось поменять столбцы, можно перенумеровать переменные. Для свободных переменных введем обозначения $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, ..., x_n = c_{n-1}$.

Далее, действуя по методу Гаусса, из последнего уравнения с номером r найдем величину x_r, которую подставим в предыдущее уравнение с номером $r-1$. Из уравнения с номером $r-1$ найдем величину x_{r-1}, которую подставим в уравнение с номером $r-2$, и т.д. В результате получим решение системы в общем виде:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + ... + x_{1,n-r}c_{n-r}, \\ x_2 = x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + ... + x_{2,n-r}c_{n-r}, \\ .... \\ x_r = x_{r1}c_1 + x_{r2}c_2 + ... + x_{x,n-r}c_{n-r}, \\ x_{r+1} = c_1 \\ ...., \\ x_n = c_{n-r} \end{cases}$$

Здесь коэффициенты x_{ij} полученные в результате преобразований, $i = 1,...,r$, $j = 1,...,n-1$. Запишем решения в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{r1} \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{r2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_{n-r} \begin{pmatrix} x_{1,n-r} \\ x_{2,n-r} \\ \dots \\ x_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

или в сокращенной матричной форме:

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_r r_r, \qquad (7')$$

Где $x, e_1, e_2, \dots, e_r$ - соответствующие матрицы – столбцы (векторы). Величины $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ могут принимать любые действительные значения. Примем $c_1 = 1, c_2 = 0, \dots, c_{n-r} = 0$. Тогда частное решение системы будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{r1} \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Придавая величинам $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ другие значения, убедимся, что матрицы – столбцы

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{r2} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_{1,n-r} \\ x_{2,n-r} \\ \dots \\ x_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

также являются решениями системы однородных уравнений. Число этих столбцов равно $n-r$. Составим их них матрицу, записав более подробно последние $n-r$ строк:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица содержит минор M_{n-r} порядка $n-r$, по главной диагонали которого стоят единицы, остальные элементы равны нулю. Очевидно, $M_{n-r} = 1$. Следовательно, ранг матрицы равен $n-r$. Но тогда эти столбцы линейно независимы.

Мы доказали, что матрицы – столбцы, стоящие в правой части выражения (7), являются решениями однородной системы, они линейно независимы. Их число равно $n-r$. Общее решение (7) однородной системы получено в виде линейной комбинации этих независимых решений. Теорема доказана. ►

Замечание 1. Базисными переменными мы выбрали неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$. В качестве базисных можно выбрать любой набор из r переменных при условии, что определитель матрицы из коэффициентов при них отличен от нуля. Количество способов выбора таких r переменных из их общего числа n не превышает величины.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Отсюда следует, что число фундаментальных наборов решений (ФНР) ограниченно.

Замечание 2. Для нахождения множества решений однородной системы достаточно найти какой – нибудь ФНР системы и составить его линейную комбинацию.

Замечание 3. Любая однородная система уравнений, имеющая ненулевые решения, обладает ФНР.

Замечание 4. Если матрицы – столбцы в (7) не содержат иррациональностей, подбором коэффициентов $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ всегда можно создать ФНР, все элементы которого будут целыми числами.

Пример. Решить систему однородных уравнений, выделив какой – либо ФНР,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу коэффициентов и, совершив элементарные преобразования со строками, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы $r = 2$. Вернемся от матрицы к системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

За базисными переменными возьмем $x_1, x_2,$ тогда, свободными останутся $x_3, x_4,$. Найдем $x_1, x_2,$ и запишем решения в удобной для дальнейшей записи форме:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_3 - \frac{1}{5} x_4, \\ x_2 = 1 \cdot x_3 - \frac{7}{5} x_4, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4. \end{cases}$$

В матричном виде решение системы можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{x_4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Обозначим коэффициенты перед столбцами в правой части как

$$x_3 = c_1, \qquad -\frac{x_4}{5} = c_2$$

и запишем общее решение системы еще раз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R \tag{9}$$

Задавая коэффициентам c_1, c_2 произвольные значения, получаем совокупность всех решений системы. Столбцы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, линейно независимы и представляют набор из двух фундаментальных решений (ФНР), через которые выражаются все остальные решения системы.

Другой подход к форме записи заключается в составлении таблицы для системы (8):

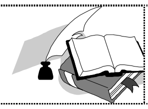
	x_1	x_2	x_3	x_4
α_1	0	1	1	0
α_2	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	1

Заполняем таблицу, задавая значения свободным членам переменным x_3, x_4. Рассчитываем значения переменных x_1, x_2. Подбираем коэффициенты α_1, α_2 так, чтобы при умножении их на элементы соответствующей строки получились целые числа. Пусть $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -5$. Решение системы запишем в виде (9).

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений)

1,Что такое система линейных однородных уравнений .
2. Особенности системы линейных однородных уравнений .
3. Что такое фундаментальное решение системы линейных однородных уравнений .



Темы для рефератов

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Решение системы однородных линейных уравнений.

§6. Общее решение системы неоднородных линейных уравнений

ТЕОРЕМА(об общем решении системы неоднородных уравнений)

Общее решение системы линейных уравнений с n переменными равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений и некоторого частного решения исходной системы.

◄ Для системы m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Используя элементарные преобразования, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \ldots & \dot{a}_{1r} & \ldots & \dot{a}_{1n} & \dot{b}_1 \\ 0 & \dot{a}_{22} & \ldots & \dot{a}_{2r} & \ldots & \dot{a}_{2n} & \dot{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dot{a}_{rr} & \ldots & \dot{a}_{rn} & \dot{b}_{rr} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \dot{b}_{r+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Убедившись, что система имеет решения, методом Гаусса найдем последовательно переменные $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$, выраженные через свободные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Для свободных переменных введем обозначения $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$. В результате получим решение системы в общем виде:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \ldots + x_{1,n-r}c_{n-r} + \ddot{b}_1, \\ x_2 = x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + \ldots + x_{2,n-r}c_{n-r} + \ddot{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = x_{r1}c_1 + x_{r2}c_2 + \ldots + x_{r,n-r}c_{n-r} + \ddot{b}_r, \\ x_{r+1} = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_n = c_{n-r} \end{cases}$$

Коэффициенты $x_{ij}, \ddot{b}_i$ получены в результате преобразований, $i = 1,...,r$, $j = 1,...,n-r$. Величины $c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_re_r$ могут принимать любые действительные значения. Запишем решения в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ x_{r+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ ... \\ x_{r1} \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ ... \\ x_{r2} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + c_{n-r} \begin{pmatrix} x_{1,n-r} \\ x_{1,n-r} \\ ... \\ x_{r,n-r} \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{b}_1 \\ \ddot{b}_2 \\ ... \\ \ddot{b}_r \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

или в сокращенной матричной форме:

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_re_r + \ddot{b},$$

где $x, e_1, e_2, ..., e_r, \ddot{b}$ - соответствующие матрицы – столбцы (векторы). Линейная комбинация $c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_re_r$ есть общее решение (7) системы однородных линейных уравнений, вектор $\ddot{b}$ - частное решение (5) исходной системы. в сокращенной матричной форме эти решения представлены формулами (7') и (5'). ►

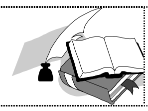
Таким образом, бесконечное множество решений – это не случайные наборы чисел, а бесконечное множество определенным образом структурированных совокупностей.

В заключение главы рассмотрим задачу балансового анализа – одну из экономико – математических моделей «затраты - выпуск», которые разрабатывал экономист, русский по происхождению, закончивший Ленинградский госуниверситет и эмигрировавший в 1931 г. в США, Василий Леонтьев. За цикл этих работ он в 1971 г. получил Нобелевскую премию.

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений. Общее решение системы неоднородных линейных уравнений)

1. Как определяется общее решение системы линейных уравнений ?
2. Объясните суть рассмотренной теоремы.



Темы для рефератов

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений .

§7. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Многоотраслевое хозяйство требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль является, с одной стороны, производителем одного определенного набора видов продукции, а с другой – потребителем другого набора видов продукции. Возникает сложная задача: согласовать объемы производства каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукте каждой отрасли. Эта задача может быть сформулирована в виде экономико– математической модели межотраслевого баланса (модели Леонтьева), требующей привлечения аппарата матричной алгебры.

рассмотрим для определенности производственную сферу из n отраслей, каждая из которых производит один (свой) продукт. Выделим определенный период времени, например год, в течение которого все коэффициенты остаются постоянными.

Пусть

x_i - общий (валовой) выпуск i – й отрасли $(x_i \geq 0)$, $i = 1,2,...,n$;

x_{ij} - объем продукции i – й отрасли, поставляемой для j – й отрасли в процессе производства;

y_i - конечный спрос на продукцию i – й отрасли $(y_i \geq 0)$. Сюда относятся личное потребление граждан, содержащие государственных и общественных институтов, чистый экспорт, производственное накопление и т.д. Тогда балансовые соотношения примут вид

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + y_2, \\ ...., \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + y_n \end{cases} \qquad (10)$$

Введем коэффициенты прямых затрат $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j} \geq 0; i.j = 1,2,...,n$, показывающие затраты i – й отрасли на выпуск одной единицы продукции для j – й отрасли. Заменив в (10) $x_{ij} = a_{ij}x_j$, получим систему n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_2 + y_2, \\ ...., \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = A \cdot X + Y, \qquad (11)$$

где X – матрица (вектор) выпусков отраслей;

А – матрица прямых затрат;

У – матрица (вектор) конечного спроса.

Упрощенная экономико – математическая модель межотраслевого баланса составлена. Это матричное уравнение может быть решено. Из (11) следует, что

$$(E - A)E = Y \qquad (12)$$

Матрица $(E - A)$ не вырождена, что можно доказать, исходя из экономических соображений. Тогда

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.* Ее коэффициенты имеют четкий экономический смысл. Зададим конечный спрос, например, в виде вектора

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

т.е. требуется обеспечить конечный спрос на одну единицу продукции 1-й отрасли. матрица (вектор) выпусков отраслей будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & ... & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & ... & S_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ S_{n1} & S_{N2} & ... & S_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ ... \\ S_{n1} \end{pmatrix}$$

следовательно, каждый элемент $S_{i1}, i = 1,2,...,n$ матрицы полных затрат S есть выпуск продукции каждой из отраслей для обеспечения единицы конечного спроса на продукцию 1-й отрасли.

Рассмотрим применение модели на примере.

Пример1. В ниже следующей таблице приведены данные по балансу между двумя отраслями за конечный период. Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление 1-й отрасли увеличится вдвое.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
Производство	1	$x_{11} = 11$	$x_{12} = 12$	$y_1 = 77$	$x_1 = 100$
	2	$x_{21} = 21$	$x_{22} = 22$	$y_2 = 157$	$x_2 = 200$

Решение. Находим матрицу прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{pmatrix}$$

Матрица полных затрат:

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{pmatrix}$$

По условию вектора конечного продукта должен быть равен

$$Y = \begin{pmatrix} 154 \\ 157 \end{pmatrix}$$

Найдем вектор валового выпуска:

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 154 \\ 157 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 188{,}12 \\ 220{,}56 \end{bmatrix}$$

Следовательно, валовой выпуск в 1-й отрасли необходимо увеличить на 88,12 усл.ед., а во 2-й отрасли – 20,56 усл.ед.

Данные по балансу между двумя отраслями за следующей период:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
Производство	1	$x_{11} = 20{,}69$	$x_{12} = 13{,}23$	$y_1 = 154$	$x_1 = 188{,}12$
	2	$x_{21} = 39{,}5$	$x_{22} = 24{,}26$	$y_2 = 157$	$x_2 = 220{,}56$

Расчеты проводились с точностью до 2-й значащей цифры после запятой, поэтому возникла погрешность в десятых долях.

Пример 2. Математическая модель межотраслевого баланса.

Модель межотраслевого баланса, разработанная профессором В. Леонтьевым (Гарвардский университет, США), имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = x_i \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{5.12}$$

или, в матричной форме,

$$AX + Y = X, \tag{5.13}$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых затрат, X - вектор валовых выпусков, Y - вектор конечного продукта.

Перепишем систему (5.13) в виде

$$(E - A)\, X = Y, \tag{5.14}$$

где E - единичная матрица n-го порядка, тогда решение системы (5.14) относительно неизвестных значений объемов производства продукции при заданном векторе конечного продукта находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1}\, Y. \tag{5.15}$$

Здесь $(E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных затрат. Элемент b_{ij} матрицы $(E - A)^{-1}$ характеризует потребность в валовом выпуске отрасли *i*, который необходим для получения в процессе материального производства единицы конечного продукта отрасли *j*. Благодаря этому имеется возможность рассматривать валовые выпуски x_i в виде функций планируемых значений y_j конечных продуктов отраслей:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j .$$

Пример 3. Пусть дана леонтьевская балансовая модель “затраты - выпуск” X = AX +Y. Найти вектор конечной продукции Y при заданном X, где

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix};$$

Решение. Имеем: Y = (E - A) X, где E - единичная матрица третьего порядка.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix},$$

значит,

$$Y = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \cdot 100 + 0 - 0{,}6 \cdot 150 \\ 0 + 0{,}3 \cdot 200 - 0{,}2 \cdot 150 \\ -0{,}7 \cdot 100 - 0{,}1 \cdot 200 + 0{,}9 \cdot 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть дана леонтьевская балансовая модель “затраты-выпуск”. Определить, будет ли продуктивной матрица технологических коэффициентов A. Найти вектор валовой продукции X при заданном Y, где

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125 \end{pmatrix}; \ Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для решения вопроса о продуктивности матрицы А следует найти собственные значения этой матрицы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0{,}125-\lambda & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(0{,}125-\lambda)^2 - 0{,}140625 = 0 \Rightarrow 0{,}125 - \lambda = \pm\, 0{,}375.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = -0{,}25$. Оба корня по модулю меньше единицы, значит, матрица технологических коэффициентов А продуктивная. Для определения вектора валовой продукции X имеем формулу $X = (E - A)^{-1} Y$. Найдем обратную матрицу для матрицы

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$$

Обозначим B = E-A, тогда $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$X = \frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix} = \frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875\cdot 300 + 0{,}125\cdot 400 \\ 1{,}125\cdot 300 + 0{,}125\cdot 400 \end{pmatrix} = \frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 312{,}5 \\ 687{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57{,}9 \\ 127{,}3 \end{pmatrix}.$$

§8. Задачи на использование систем линейных уравнений при решении экономических задач

Задача 1. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя			Всего
	1	2	3	
А	3	2	1	360
Б	1	6	2	300
В	4	1	5	675

Записать в математической форме условия выполнения задания.

Решение. Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа А, при втором - $2y$, при третьем - z.

Для полного выполнения задания по заготовкам типа А сумма $3x + 2y + z$ должна равняться 360, т.е.

$$3x + 2y + z = 360.$$

Аналогично получаем уравнения

$$x + 6y + 2z = 300$$
$$4x + y + 5z = 675,$$

которым должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам Б и В. Полученная система линейных уравнений и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В. Решим систему методом исключения неизвестных. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 3 & 2 & 1 & 360\\ 4 & 1 & 5 & 675\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & -16 & -5 & -540\\ 0 & -7 & 2 & 15\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 16 & 5 & 540\\ 0 & -14 & 4 & 30\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 16 & 5 & 540\\ 0 & 2 & 9 & 570\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 2 & 9 & 570\\ 0 & 16 & 5 & 540\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 300\\ 0 & 2 & 9 & 570\\ 0 & 0 & -67 & -4020\end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x + 6y + 2z &= 300,\\ 2y + 9z &= 570,\\ -67z &= -4020. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим $z = 60$; подставляя найденное значение z во второе уравнение, получим $y = 15$ и, наконец, из первого имеем $x = 90$. Итак, вектор С (90, 15, 60) есть решение системы.

Экономический вывод. . Таким образом, количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами должны быть 90*,*15 и 60.

Задача 2. Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Разгрузку можно производить как непосредственно в железнодорожные вагоны для последующей доставки потребителям, так и на портовые склады. В вагоны можно разгрузить 8000 т, а остаток груза придется направить на склады. Необходимо учесть, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30, 5,25 и 2,20 ден. ед., а на склады 7,80, 6,40 и 3,25 ден. ед.

Записать в математической форме план полной разгрузки судов и решить задачу, при этом затраты на нее должны составить 58850 ден. ед.

Решение. По условию задачи, доставленные в порт чугун, железную руду и апатиты можно разгрузить двумя способами: либо в железнодорожные вагоны, либо в портовые склады. Обозначим через x_{ij} количество груза (в тоннах) i-го вида (i= 1,2,3), которое предполагается разгрузить j-м способом (j = 1, 2). Таким образом, задача содержит шесть неизвестных. Условие полной разгрузки чугуна можно записать в виде

$$x_{11} + x_{12} = 6000, \qquad (8.1)$$

где x_{11}, x_{12} - части чугуна, разгружаемого соответственно в вагоны и на склады. Аналогичное условие должно выполняться и для железной руды:

$$x_{21} + x_{22} = 4000. \qquad (8.2)$$

Что же касается апатитов, то их можно разгружать только на склады, а поэтому неизвестное $x_{31} = 0$, и условие полной разгрузки апатитов принимает вид

$$x_{32} = 3000. \qquad (8.3)$$

Условие полной загрузки всех поданных в порт вагонов запишется так:

$$x_{11} + x_{21} = 8000. \qquad (8.4)$$

Затраты на разгрузку, по условию, определены в 58850 ден. ед., что можно выразить записью:

$$4{,}3x_{11} + 7{,}8\,x_{12} + 5{,}25\,x_{21} + 6{,}4x_{22} + 3{,}25x_{32} = 58850. \qquad (8.5)$$

Итак, с учетом сложившейся в порту ситуации условия полной разгрузки судов выражаются в математической форме системой линейных уравнений (8.1) - (8.5). С учетом (8.3) уравнение (8.5) перепишется в виде:

$$4{,}3x_{11} + 7{,}8x_{12} + 5{,}25x_{21} + 6{,}4x_{22} = 49100,$$

и теперь мы имеем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$, расширенная матрица которой имеет вид:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 4{,}3 & 7{,}8 & 5{,}25 & 6{,}4 & 49100 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем ее к треугольному виду:

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 4{,}3 & 7{,}8 & 5{,}25 & 6{,}4 & 49100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 3{,}5 & 5{,}25 & 6{,}4 & 23300 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 8{,}75 & 6{,}4 & 30300 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 0 & 0 & 0 & -2{,}35 & -4700 \end{pmatrix}.$$

Наша система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} \qquad\qquad &= 6000, \\ -x_{12} + x_{21} \qquad &= 2000, \\ x_{21} + x_{22} &= 4000, \\ -2{,}35\,x_{22} &= -4700, \end{aligned}$$

откуда $x_{22} = 2000$, $x_{21} = 2000$, $x_{12} = 0$, $x_{11} = 6000$.

Экономический вывод. В наших обозначениях план разгрузка будет выглядит в следующим виде:

	В вагон	В склад	
Чугун	6000	0	6000
Железная руда	2000	2000	4000
Апатит	0	3000	3000

При выполнении этого разгрузку по этому плану затраты будут:

	В вагон	В склад	Всего затраты
Затраты на разгрузку чугуна	25800	0	**25800**
Затраты на разгрузку железной руды	10500	12800	**23300**
Затраты на разгрузку апатита	0	9750	**9750**
Всего затраты	**36300**	**22550**	**58850**

Задача 3. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 94, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 574, \\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 328. \end{aligned}$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574 \\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2080 \end{pmatrix}.$$

Имеем: r (A) = r (A) = 3, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 94 - x_4, \\ -x_2 + 5x_3 &= 386 - 2x_4, \\ 26x_3 &= 2080 - 9x_4. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 80 - 9/26\ x_4$, подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2 = 14 + 7/26x_4$ и, наконец, из первого уравнения получим: $x_1 = -12/13\ x_4$. С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными, тогда из соотношения $x_1 = -12/13\ x_4$ получим: $x_1 = x_4 = 0$. Тогда вектор (0, 14, 80, 0) является решением данной системы.

Экономический вывод. Производство надо планировать таким образом, чтобы из 94 единиц сырья, 14 единиц должны быть расходованы по второй технологии, а 80 единиц сырья должны быть расходованы по третьей технологии. Первую и четвертую технологии не следуют использовать.

Контрольные вопросы

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1.В чем особенность модели Леонтьева?

2.Как оцениваете заслугу Леонтьева в развитие мировой экономическом развитии?

ПОВТОРЕНИЕ – МАТЬ УЧЕНИЕ

Вопросы для самопроверки освоенных теоретических знаний.

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

.

1. В чем заключается метод обратной матрицы решения системы линейных уравнений?

2. Объяснить, как работает метод расширенной матрицы при решении системы уравнений.

3. Привести формулы Крамера и решить систему уравнений.

4.В чем заключается метод Гаусса?

5.Сформулировать условие совместимости системы линейных уравнений?

6. Что такие базисные решения системы?

7. Какие решения системы уравнений называются фундаментальными?

8. Из каких решений складывается общее решение неоднородной системы линейных уравнений?

9. На произвольном примере рассмотреть модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Задачи для самостоятельного решения.

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ x + 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

2. Найти общее и фундаментальную систему решений следующей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + u - 5v = 0, \\ 2x - 3y + 4z - 2u + v = 0, \\ x - 12y + 17z - 7u + 17v = 0. \end{cases}$$

3. Найдите те значения параметра λ, при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 2y - 6z = 0, \\ 2x + 4y + 4z = 0, \\ 3x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения, и найдите одно из них.

Литература

(Линейная алгебра.Системы линейных уравнений)

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов.- 2- е изд.,перераб.и доп.-М.: Наука,1997.-288с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. :Учеб. пособие для втузов. М: Интеграл-Пресс. Т.1.-2001.-416с.,1997,2002,2003
3. Геворкян П.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для техн.вузов.- М.:ФИЗМАТЛИТ.2007-208с.
4. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2006. – 224 с.(Высшая экономическое образование)
5. Ш. Наримов, М.Сангинов Матричная алгебра. Учебное пособие. – Т.: ТКТИ, 2009. – 40 с.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука,1978. – 420 с.
7. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1999. – 220 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ