

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ТОШКЕНТ КИМЁ ТЕХНОЛОГИЯ ИНСТИТУТИ

**«ОЗИҚ ОВҚАТ МАҲСУЛОТЛАРИ ТЕХНОЛОГИЯСИ»
ФАКУЛЬТЕТИ**

«Олий математика» кафедраси

М.Б.Сангинов

**«Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика»
фанидан**

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА.

ТАШКЕНТ – 2010 й.

«Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанидан мавзулар мажмуаси сифатида тузилган ушбу ўқув-услубий қўлланма Тошкент кимё технология институти “Менежмент” ва “Маҳсулот сифати мережменти” бакалавр йўналишиларида таҳсил олаётган 2-босқич талабалар учун мўлжалланган. Унда мавзуда қаралаётган назарий маълумотлар кўп сондаги масала ва мисоллар ёрдамида амлий жиҳатдан ёритилган. Ҳар бир мавзу, ушбу мавзуга тегишли ўз-ўзини назорат қилиш саволлари билан якунланади.

Ўқув–услубий қўлланмада қаралган мавзулар «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фани асосини ташкил этганлиги сабабли ундан бошқа олий ўқув юртларининг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Муаллиф:

доцент, ф.м.ф. н.

М.Б. Сангинов

Такризчилар:

Сўз боши.

«Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» ўқув қўлланмаси Ўзбекистон Республикаси Божхона қўмитаси Олий Ҳарбий божхона институти Ўқув Методик Кенгашида тасдиқланган намунавий ва ўқув дастурлар асосида тузилган. Мазкур ўқув қўлланма Олий Ҳарбий божхона институти 2-босқич талабалари учун «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанини ўрганиш учун мўлжалланган.

Ушбу қўлланма «**Эҳтимоллар назарияси.Тасодифий ҳодисалар**» ва «**Математик статистика.Танланма фазо**» деб номланган икки қисмдан ҳамда иловадан иборат.Қўлланмада ўқув дастуридаги ўзлаштирилиши лозим бўлган маълумотлар 9та мавзуларга ажратилган ҳолда баён этилган.Бунда «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» фанининг «тасодифий ҳодисалар», «эҳтимоллик таърифлари», «комбинаторика элементлари», Бернулли схемаси масалалари, «тасодифий миқдорлар ва уларнинг тақсимот функциялари» ,«кўп узгарувчили тасодифий миқдорлар ва уларнинг сонли характеристикалари,», «корреляция коэффиценти ва регрессия чизиклари, » «математик статистика масалалари», «танланма фазо» , «баҳолаш назарияси элементлари»,«статистик гипотеза текшириш асослари», «танланма регрессия чизиклари» сингари тушунчалар назарий маълумотлар ва кўп сонли мисоллар ёрдамида ёритилан. Ҳар бир мавзу ниҳоясида талаба ўзи олган билим ва кўрикмасини назорат қилиши учун саволлар кетма-кетлиги келтирилган.

1-ҚИСМ

ЭХТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ. ТАСОДИФИЙ ҲОДИСАЛАР.

1- мавзу

Мавзу: Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани предмети.

Мақсад: Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг вужудга келиш зарурати ва ҳозирги замон фан ва техника тараққиёти давридаги аҳамиятини билиш. Фаннинг аксиоматик асосларини ўзлаштириш. Комбинаторика элементларини ўрганиш ва уларни масалалар ечиш жараёнида қўллай билиш.

Ўқув режаси

- 1. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг вужудга келиш зарурати ва ҳозирги замон фан ва техника тараққиётида тўтган ўрни.**
- 2. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг аксиоматик асоси. Эҳтимоллар фазоси.**
- 3. Комбинаторика элементлари.**

1.1 Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг вужудга келиш зарурати ва ҳозирги замон фан ва техника тараққиётида тўтган ўрни.

Инсоният узоқ давр мобайнида ўз ҳаётий фаолиятида фақат аниқ формулалар ёрдамида ифодаланадиган, аниқ функционал асосда боғланган қонуниятларни ўрганди ва ишлатди. Масалан:

- геометрик юзалар маълум формулалар орқали ҳисобланади
- асоси a томонли квадратдан, баландлиги h бўлган пирамида ҳажми аниқ $V = \frac{1}{3}a^2h$ формула билан топилади;
- агар жисм ерга эркин тушса у ҳолда t сониядан кейинги босиб ўтган йўли $skgt^2/2$ каби ҳисобланади;

➤ Бутун олам тортишиш қонуни $F = \gamma \frac{m \cdot M}{R^2}$ муносабат билан ифодаланади.

Бундай мисолларни кўплаб келтириш мумкин ва улар маълум маънода инсон фаолиятида сўзсиз муҳим ўрин тутди. Аммо инсон ҳаётида шундай ҳолатлар ёки масалалар учрайдики, улар бундай аниқлантирилган қонунлар доирасига кирмайди ва демакки, айтиш мумкин детерминантлашган қонуниятлар билан ҳал этилмайди. Сўзимиз исботи сифатида қуйидаги бир нечта долзарб саволларга эътибор қаратайлик.

1. Эртага Тошкентда қанча йўл транспорт ҳодисаси рўй беради?
2. 17-май куни пойтахтдаги 17 шаҳар касалхонасига қанча касал келтирилади?
3. Кечагана тузилган чақалоқ қанча яшайди?
4. Маълум бир техник қурилма носозлиги қанча вақтда бартараф этилади?
5. Мазкур груҳ талабалари семестрни қандай натижа билан якунлайдилар?

Ушбу сингари кўплаб саволларга аниқлаштирилган, формулавий қонун ва қонуниятлар билан жавоб бериш мумкин эмас. Сабаби бундай масалалар ўзаро бир аҳамиятли умумийликка эга, у ҳам бўлса ушбу саволларга аниқ бир жавоб беришнинг иложи йўқ. Ушбу жараёнлар келиб чиқиши нўқтаи назаридан тўлалигича аниқликдан маҳрум эди. Бу масалаларда ҳодиса натижасини олдиндан кўриш, башорат қилиш имкони бўлмаган кўплаб сабаблар бор. Биргина биринчи саволга эътибор берсак. Ҳақиқатан, йўл транспорт ҳодисаси эртагалик об-ҳаво, асфальт йўллар ҳолати, кўчалар еритилганлиги, пиеда ва хайдовчилар руҳий ҳолати, автомобилларнинг йўлда ўзаро жойлашиш тартиби каби ҳолатларга болиқдир. Бундай ҳолатларни биз **тасодифий факторлар** деб атаймиз. Эътибор билан ўйлаб кўрилса инсон ҳаётининг фаолиятида учрайдиган муаммоларнинг салмоқли аксарияти мана шу сингари тасодифий факторларга болиқ бўлади. Тасодифий факторлар мажмуаси **тасодифий ҳодисани** юзага келтиради. Ҳаётимизга бизнинг хоҳишимизсиз кириб келаётган ва теварак атрофимиздаги ҳаёт, қолаверса табиат ҳодисалари бизга болиқсиз равишда

тасодифий руй берар экан, демак, инсон уларни ўрганиши ва шу ўрганишни аҳамиятли қиладиган усуллар ишлаб чиқиши талаб этилади. Худди шу мақсадни ўз олдига қўйган фан **эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадир.**

Ҳозирги кунда ким биринчи бўлиб тасодифий ҳодиса юз беришини миқдорий аниқлаш масаласини қўйганлигини айтиш жуда қийин. Аммо шу ўринда айтиш лозимки тасодифий ҳодисалар табиатини урганиш XVII аср бошларида бошланган.

Б.Паскал, П.Ферма ва Х.Гюгенс каби олимларнинг XVII аср ўрталарида қилган ишлари эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг классик асоси ҳисобланади. Кейинчалик эҳтимоллар назарияси ва математик статистика ривожланишига Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон каби олимлар муносиб ва салмоқли ҳисса қўшдилар.

XIX асрга келиб рус олимлари П.Я.Чебишев., А.А.Марков, В.Я. Ляпунов, Буняковскийлар эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг сезиларли равишда жиддий ва қатъий илмий ривожига муносиб ҳисса қўшдилар.

XX асрда С.Н. Бернштейн, А.Н.Колмагоров, А.Я. Хинчин, В. Романовский каби олимлар билан бир қаторда ўзбек олимлари С.Х. Сирожиддинов, Т.А. Саримсоковлар ҳамда уларнинг шогирд-лари эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг бугунги кунда тўғал фан сифатида шаклланишига муносиб ҳисса қўшдилар ва қўшиб келмоқдалар

Шуни таъкидлаш лозимки, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани ҳаётдаги ҳар қандай тасодифий ҳодисаларни ўрганиш билан шу\улланмайди, аксинча, у фақат маълум хоссаларга эга бўлган тасодифий ҳодисаларни ўрганади.

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика -ўзгармас шароитларида, чегаралланмаган миқдорда қайта-қайта юз бериши мумкин бўлган ва учровчанлик частоталари статистик барқа-рорликка

эга бўлган ҳодисаларни ўрганади. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика студентнинг бирор фандан масалан, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанидан имтихон тошириш ҳодисасини ўрганмайди, чунки бу бир марта юз бериши мумкин бўлган ҳодиса. Унинг рўй беришининг дастлабки ҳолатини қайтариб ҳам бўлмайди. Шундай қилиб, якка, қайтарилмас тасодифий ҳодисалар қанчалик долзарб ва қизиқарли бўлмасин эҳтимоллар назарияси ва математик статистика улар билан шуғулланмайди. Демаки, қўйидагига ўхшаган :

- 3-май 2006 йилда Тошкентда 8 балли зилзила бўлади.
- 2010 йилда СПИД касаллигини даволаш усуллари топилади.
- 2020 йилда А. Навоий каби қобилияти шоир тўғилади

каби ҳодисалар тасодифий бўлгани билан уларга эҳтимоллар назарияси ва математик статистика услубларининг алоқаси йўқ. Ушбу ҳодисалар эса вақт соатида, ҳаётий жараён моайнида ўз жавобини топади.

1.2 Эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг аксиоматик асоси. Эҳтимоллар фазоси.

Биз юқорида қисқача эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани доирасида ечиладиган масалалар мажмуасига аниқлик киритдик. Ҳар бир фан фан сифатида шаклланиши учун унинг қатъий илмий асоси бўлиши лозим. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг ҳозирги кундаги аксиоматик асосини 1933 йилда А.Н.Колмогоров таклиф қилган. +уйида ана шу асосга эътибор қаратамиз. Дастлаб эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фанининг асосий белгилари ва тушунчаларига тўхталсак. Олдин таъкидлаганимиздай тасодифий ҳодиса маълум бир шарт-шароитлар асосида амалга ошади, бошқача айтганда юз беради. Шу шарт-шароитлар мажмуасини **шарт-шароитлар комплекси** деб атаб Ω харфи билан белгилаймиз. Шарт-шароитлар комплекси Ω ўзаро биргаликда бўлмаган, тенг имкониятли натижалар мажмуасидан иборат.

Ўзаро биргаликда бўлмаган деганда агар бир натижа амалга ошган ҳисобланса, қолганларидан ҳеч бири амалга ошмаслиги тушунилади. Ушбу

натижаларни **элементар ҳодисалар** деб атаймиз. (индексли еки индексиз ω харфи билан белгилаймиз) Масалан, шашқол тошини бир марта ташлашда олтита элементар ҳодисада бири юз бериши мумкин ва элементар ҳодисалар сифатида қўйидагилар қаралади:

$$\omega_1 = \{1\}; \quad \omega_2 = \{2\}; \quad \omega_3 = \{3\}; \quad \omega_4 = \{4\}; \quad \omega_5 = \{5\}; \quad \omega_6 = \{6\}$$

Тасодифий ҳодиса деганда маълум элементар ҳодисалар мажмуасини тушуниб латин алифбосининг катта харфлари билан белгилаймиз. Масалан, $A = \{\omega_i\}$, $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; $C = \{\omega_i, \omega_j\}$ ва х.к.

Айтиш жоизки Ω даги ҳодисалар ўртасида маълум муносабатлар бўлиши мумкин ва масала ушбу муносабатларни ўрганишдадир. Ушбу муносабатларни илмий тарзда изоҳлайлик.

Агар A ҳодисанинг ҳар бир рўй бериши натижасида B ҳодиса ҳам рўй берса, у ҳолда $A \subset B$ деб ёзилади ва « **A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради**» деб айтилади. Агар A ҳодиса B ҳодисани эргаштирса, у ҳолда A га кирган ҳар бир элементар ҳодиса B га ҳам тегишли бўлади.

Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса $A \subset B$ бўлади. У ҳолда A ва B ҳодисалар **тенг кучли ҳодисалар** дейилади.

A ва B ҳодисалар **қупайтмаси** деб A ва B ҳодисаларнинг бир вақтда юз бериши ҳодисасига айтилади. Қупаймани $A \cdot B$ каби белгилаймиз.

A ва B ҳодисалар **бирлашмаси** деб A ва B ҳодисалардан камида бирининг юз бериши ҳодисасига айтилади. Ҳодисалар бирлашмасини $A \cup B$ каби белгилаймиз.

A ҳодиса юз бериб B ҳодиса юз бермаслиги ҳодисаси A ва B ҳодисалар **айирмаси** деб аталади, $A \setminus B$ каби белгиланади.

Муқаррар ҳодиса деб ҳар доим амалга ошадиган ҳодисага айтилади ва Ω билан белгиланади.

Ҳеч қачон юз бермайдиган ҳодисани **мумкин бўлмаган** ҳодиса деб аталади ва $\emptyset$ каби белгиланади

$\bar{A}$ орқали A нинг юз бермаслик ҳодисасини белгилаймиз.

Агар бир вақтда $A + \bar{A} = \Omega$ ва $A \bar{A} \subset \emptyset$ бўлса, A ва $\bar{A}$ **қарама қарши ҳодисалар** деб атаймиз,

Агар A ва B ҳодисалар учун $AB \subset \emptyset$ бўлса A ва B **биргаликда эмас** дейилади.

Агар $A = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ бўлиб $B_i \cap \overline{B_j} \neq \emptyset$ $i = 1, n$ ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаса (яъни $B_i B_j \subset \emptyset$ барча $i \neq j$ учун) A ҳодиса $B_1, B_2, \dots, B_n$ каби **хусусий ҳолларга ажралади** дейилади.

$B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$ бўлиб $B_i \cap B_j = \emptyset$ бўлса $B_1, B_2, \dots, B_n$ ҳодисалар кетма-кетлиги **ҳодисалар тўла гуруҳини** ташкил этади дейилади.

Энди А.Н. Колмогоров таклиф этган эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани аксиоматик қурилиши баен этайлик.

Ω барча элементлар ҳодисалар тўплами бўлсин. $\mathcal{F}$ орқали Ω нинг барча тўплам остилари (қисм тўпламлари) тўпламини белгилаймиз. қўйидаги шартлар бажарилса, яъни

A1) $\Omega \in \mathcal{F}$ ва $\emptyset \in \mathcal{F}$ бўлса;

A2) $A \in \mathcal{F}$ эканидан $\bar{A} \in \mathcal{F}$ экани келиб чиқса ;

A3) $A \in \mathcal{F}$ ва $B \in \mathcal{F}$ эканидан $A \cup B \in \mathcal{F}$ келиб чиқса,

$\mathcal{F}$ тўплам **алгебра** ташкил этади дейилади,

Ушбу шартларга қўшимча яна

A4) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ эканидан $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ ва $\bigcap_i A_i \in \mathcal{F}$ келиб чиқса, $\mathcal{F}$

тўплам σ - алгебра ташкил этади дейилади.

Энди $(\Omega, \mathcal{F})$ фазосида аниқланадиган эҳтимоллик(P)нинг аксиомаларига ўтаимиз.

P1) $\forall A \in (\Omega, \mathcal{F})$ тасодифий ҳодиса учун $0 \leq P(A) \leq 1$

P2). $P(\Omega) = 1$ ва $P(\emptyset) = 0$

P3). Агар $A_1, A_2, \dots, A_n$ тасодифий ҳодисалар жуфт-жуфт биргаликда бўлмаса, у ҳолда қуйидаги муносабат ўринли

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

Эҳтимоликнинг ушбу аксиомаларидан қўйидаги элементлар хоссалари келиб чиқади.

1) $\forall A \in \mathcal{F}$ учун $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2) Агар $A \subset B$ бўлса $P(A) \leq P(B)$

$\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ учлик **эҳтимоллар фазоси** деб айтилади.

Эҳтимоллар назарияси ва математика статистика усуллари чўқурроқ урганишдан олдин. Келажакда анча фойдали бўлган комбинаторика элементлари билан танишиб ўтайлик.

1.3 КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Агар математик тадқиқотда объект сифатида қаралаётган тўпلام элементлари сони чекли ёки санокли (математик тилда айтганда **дискрет** тўпلام) бўлса **дискрет математика** объектлари деб аталади. Сабаби бунда фақатгина ушбу **дискрет** ҳолга таалукли бўлган услублар, тушунчалар ва аҳамиятли натижалар мавжуд.

Комбинаторика (комбинаторик таҳлил) – дискрет математиканинг дискрет тўпلام элементларини берилган қоидалар асосида танлаш ва жойлаштириш билан боғлиқ бўлган масалаларни ечиш усулларини ўрганувчи бўлимидир.

Қандайдир предметлардан (масалан, харфлар, шарлар, кубчалар, сонлар ва ҳ.к) ташкил топган гуруҳлар **бирикмалар** ёки **комбинациялар** деб аталади. Ана шу бирикмаларни ташкил этган предметлар эса **элементлар** дейилади.

Комбинаторикада уч хил бирикма фарқланади: **ўрин алмаштиришлар**, **ўринлаштиришлар** ва **мосликлар**.

Таъриф: n та элементли **ўрин алмаштиришлар** деб бир-биридан фақат элементларининг тартиби билан фарқ қиладиган n та элементли бирикмаларга айтилади.

n та элементли ўрин алмаштиришлар сони P_n билан белгиланади ва қуйидаги формула билан ҳисобланади: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots (n-1)n = n!$

Масалан, учта А, В, С элементдан олтига ўрин алмаштириш бажариш мумкин: АВС, АСВ, ВАС, СВА, ВСА, САВ.

Эслатма: 1 дан n гача бўлган натурал сонлар кўпайтмаси « **n факториал**» деб аталади ва қисқача $n!$ каби ёзилади, яъни: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. ($0! = 1$ деб қабул қилинган). n нинг катта қийматлари учун $n!$ ни ҳисоблашда Стирлинг формуласи деб аталадиган қуйидаги тақрибий ҳисоблаш ишлатилади:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Таъриф: n та элементдан m тадан ўринлаштиришлар деб ҳар бирида берилган n та элементдан m таси олинган шундай бирикмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бири ҳеч бўлмаганда битта элементи билан ёки фақат уларнинг жойлашиш тартиби билан фарқ қилади.

n та элементдан m тадан турли ўринлаштиришлар сони A_n^m билан белгиланади ва қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), \quad (0 \leq m \leq n)$$

$$A_n^1 = n \text{ ва } A_n^0 = 1.$$

Масалан, уч элемент А, В, С дан иккита элементдан олтига ўринлаштириш мавжуд: АВ, АС, ВС, ВА, СА, СВ.

1.1-мисол. Ташкилот раҳбарияти, бошқарма турли лавозимларга 10 та номзоддан 3 тасини танламоқда. Ҳар бир номзод бир хил имкониятга эга. 10 та номзоддан 3 кишидан иборат нечта гуруҳ тузиш мумкин?

Ечиш: Бу мисолда $n=10$ ва $m=3$. Ҳаммаси бўлиб $N = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ та гуруҳ тузиш мумкин.

Таъриф: n элемент орасидан m тадан тузилган мосликлар деб ҳар бирида берилган n та элементдан m таси олинган шундай бирикмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бири ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ

килади. Масалан, уч элемент А, В, С дан иккитадан олинганда учта мослик фарқланади: АВ, АС, ВС.

n элемент орасидан m тадан турли мосликлар сони C_n^m билан белгиланади ва у ушбу хоссаларга эга:

$$1. C_n^0 = C_0^0 = 1.$$

$$2. C_n^1 = n.$$

$$3. C_n^m = C_n^{n-m} \left(m > \frac{n}{2} \text{ ҳолда} \right).$$

$$4. C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$5. \text{Рекуррент формула } C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \text{ Бу ерда } 0 \leq m \leq n.$$

1.2-мисол. Тижорат банки бошқармаси б и р х и л лавозимларга 10 та номзоддан 3 тасини танламоқда. Ҳар бир номзод бир хил имкониятга эга. 10 та номзоддан 3 кишидан иборат нечта гуруҳ тузиш мумкин?

Ечиш: Бу мисолда $n=10$ ва $m=3$. Турли гуруҳлар таркиби, ҳеч бўлмаганда, битта номзодга фарқ қилиши керак, демак, бу бирикмалар мосликдан иборат. Ҳаммаси бўлиб

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

та гуруҳ тузиш мумкин.

Комбинаториканинг асосий қоидалари

Комбинаториканинг асосий қоидаларини келтирамиз.

• Қўшиш қоидаси (мантиқий қўшиш тамойили)

Агар **a** элементни m та усул билан, **b** элементни эса бошқа n та усул билан танлаш мумкин бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмасидан а ёки b ни $n+m$ усул билан танлаш мумкин.

• Кўпайтириш қоидаси (мантиқий кўпайтириш тамойили).

Агар **a** элементни m та усул билан танлаш мумкин бўлиб, ҳар бир шундай танлашдан сўнг **b** элементни n та усул билан танлаш мумкин бўлса, у ҳолда (a,b) жуфтликни кўрсатилган тартибда $m \cdot n$ усул билан танлаш мумкин.

Бу қоидалар ихтиёрий сондаги элементлар учун ҳам ўринли.

1.3-масала. Электр моллари магазинида сотувга уч хил телевизор ва икки хил видеомагнитофон чиқарилган. Харидор телевизор ёки видеомагнитофон сотиб олиш имкониятига эга.

а) у битта харидни неча усул билан амалга ошириши мумкин?

б) агар харидор телевизор ва видеомагнитофон сотиб олмоқчи бўлса, у ҳолда неча турли жуфтликлар бўлиши мумкин?

Ечиш: а) Битта телевизорни учта усул билан, видеомагнитофонни эса икки усул билан сотиб олиш мумкин. У ҳолда телевизор ёки видеомагнитофонни беш усул билан сотиб олиш мумкин, яъни

$$N = n + m = 3 + 2 = 5 .$$

б) а, b, c - телевизорлар маркаси; x, y - видеомагнитофонлар маркаси бўлсин. Агар a маркадаги телевизор танланган бўлса, у ҳолда (a;x) ва (a;y) комплектлари бўлиши мумкин. Агар b маркадаги телевизор танланган бўлса, (b;x) ва (b;y) комплектларни ҳосил қилиш мумкин. Ва ниҳоят, c маркадаги телевизор танланган бўлса, (c;x) ва (c;y) комплектларни ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, телевизор танланганидан сўнг икки усул билан видеомагнитофон танланиши мумкин. Демак, ҳаммаси бўлиб 6 та турли жуфтликлар танлаш мумкин яъни $N = n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$ экан.

2-маъруза

Мавзу: Эҳтимоллик таърифлари. Шартли эҳтимоллик.

Мақсад: Эҳтимолликнинг классик, геометрик ва статистик таърифларини ўрганиш ва уларни масала моҳияти бўйича қўллашни ўрганиш. Шартли

эҳтимолликларни ўзлаштириш. Тўла эҳтимоллик, Байес формулаларини билиш ва қўллай олиш

Ўқув режаси

2.1 Эҳтимоллик таърифлари.

2.2 Шартли эҳтимоллик.

Ўтган маърузада биз эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани предмети ва аксимоматик асослари билан танишиб чикдик. Ушбу маърузада эҳтимолликнинг таърифлари билан танишиб чиқайлик.

2.1. Эҳтимолликнинг классик таърифи.

Ω – орқали олдингидек маълум n та шарт-шароитлар комплексини белгилаймиз, яъни $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, S орқали Ω нинг барча тўплам остиларини белгилайлик. Бошқача айтганда $S = A, B, C, \dots$ ҳодисалар тизими. Ҳар бир S даги ҳодиса юз бериши учун Ω даги бирор ўзаро биргаликда бўлмаган, тенг имкониятли тасодифий факторлар (ω_i)лар мажмуаси юз беради. Мисол учун, шашқол ташлаш масаласида $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_6\}$ бўлиб бунда элементар ҳодиса $\omega_i = \{i\}$ бўлиб, i рақамли ёқнинг тушганлигини билдиради. S ҳодисалар тизими сифатида Ω нинг барча тўплам остиларини қараймиз, айтилик, A жуфт очко тушиш ҳодисаси бўлса, A ҳодисани юзага келтирувчи элементар факторлар: еки 2, еки 4, еки 6 рақамли ёқлар тушишини билдиради. Демак, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ -бўлиб, қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони 3 та эканини кўрамиз.

Ҳодисанинг **эҳтимоли** бу ҳодисанинг рўй бериши имконининг миқдорий кўрсаткичидир. Агар Ω n та ўзаро тенг кучли, яъни рўй бериши ёки бермаслигининг эҳтимоли бир хил бўлган ҳодисалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда **A ҳодисанинг $P(A)$ эҳтимоли** A ҳодиса рўй беришига қулайлик туғдирадиган элементар ҳодисалар сони m нинг барча элементар ҳодисалар сони n га нисбатига тенг, яъни (Ω, S) – ҳодисалар майдонига тегишли ихтиерий A ҳодиса эҳтимоллигини

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1)$$

каби аниқлаймиз. Юқорида кўрилган масалада $P(A) = \frac{3}{6}$ бўлади. Барча элементар ходисалар тенг имкониятли бўлган ҳол «классик» ҳол деб аталади. Шунинг учун $P(A) = \frac{m}{n}$ эҳтимолликнинг **классик** таърифи деб аталади. $P(A)$ нинг (1) муносабат билан аниқланган ифодаси эҳтимолликнинг барча (P1–P3) шартларини қаноатлантиришини осонлик билан текширилади: Ҳақиқатан,

$$1. P(A) \geq 0, \text{ чунки } m \geq 0, n > 0.$$

$$2. P(\Omega) = 1 \text{ чунки } \frac{n}{n} = 1. P(\emptyset) = 0; \text{ чунки } \frac{0}{n} = 0.$$

3..Агар A ҳодиса B ва C дан иборат ходисаларга ажралса

$$P(A) = P(B) + P(C) \quad (2)$$

Юқоридаги қаралган мисолда қуйидаги белгилашларни киритамиз: A_1 – 2 рақамли томон тушиш ҳодисаси, A_2 – 4 рақамли томон тушиш ҳодисаси ва A_3 – 6 рақамли томон тушиш ҳодисаси. У ҳолда, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ бўлади. Аниқки бу ходисалар биргаликда эмас, яъни бирининг юз бериши қолганларининг юз бермаганини таъкидлайди. Демак, (2) га асосан

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Умумий ҳолда ушбу хосса теорема шаклида қуйидагича талқин этилади.

Теорема 1 (Ҳодисаларни қўшиш) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ биргаликда бўлмаган ходисалар бўлса

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Ушбу теорема шартида жуфт жуфти билан биргаликда бўлмаслик шарти олиб ташланса теорема тасдиғи бошқача бўлади:

Теорема 2. Ихтиёрий $A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалар груҳи учун

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n P(A_k \cdot A_j) + \\ + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^n A_k\right).$$

Хусусан, ихтиёрий иккита A ва B ҳодисалар учун

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

ихтиёрий учта A, B, C ҳодисалар учун

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

ҳосил қиламиз.

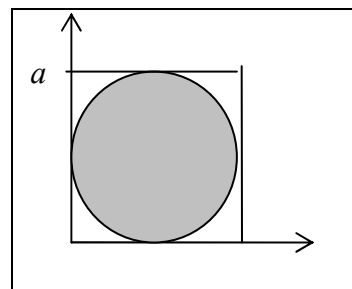
Эҳтимолликнинг ушбу классик таърифининг етарли эмаслиги фаннинг дастлабки ривожланиши босқичидаёқ аниқланган. Масалан, текисликда бирор G , улчамли соҳа бўлиб, унда g соҳа мавжуд. Масала шундан иборатки G соҳага ихтиёрий нўқта ташланганда унинг g соҳага тегишли бўлиш ҳодисасининг эҳтимоллиги қандай ҳисобланади? Ушбу масalani эҳтимолликнинг классик таърифидан келиб чиққан ҳолда ҳал этиб бўлмайди. Сабаби классик таърифда чекли сондаги тенг имкониятли ҳодисалар гуруҳи ҳақида сўз боради. Шу сабабли онгли равишда чексиз сондаги тенг имкониятли ҳодисалар гуруҳи бўлган ҳолда эҳтимоллик таърифи зарурлиги эътироф этилади. Кўрилаётган масалада G га ташланган ихтиёрий нўқтанинг g соҳага тегишли бўлиш ҳодисасининг эҳтимоллиги сифатида шу нўқтани ўз ичига олган соҳанинг ўлчами (узунлиги, юзаси) тушунилади. Бу ҳолда ЭҲТИМОЛЛИКНИ

$$P = \frac{mesg}{mesG} \quad (3)$$

каби аниқланади. Бунда mes шу соҳа ўлчами белгисидир.

(3) муносабат билан аниқланган эҳтимоллик **геометрик таъриф** асосида аниқланган эҳтимоллик дейилади

2.1-масала. Томони **a** га тенг бўлган квадратга айлана ички чизилган. Квадратга тасодифий равишда ташланган нукта айлана ичига тушиши(**A** ҳодиса) эҳтимолини топинг.



Ечиш: Масаланинг шартидан **G** – томони **a** га тенг бўлган квадрат, **g** эса **a/2** радиусли айлана эканлигини аниқладик. Бу ҳолда ўлчов сифатида юза олинади. Демак:

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{\pi \cdot (a/2)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Эҳтимолликнинг классик таърифининг яна бир “камчилиги” ҳақида гапириш лозим. Гап шундаки, содда масалалардан мураккабларга ўтиш ҳолатида, айниқса илмий ва техник масалаларда табиий ҳолда тенг имкониятли, биргаликда бўлмаган тасодифий факторлар гуруҳини аниқлаш масаласи анча муаммо туҳдирди. Масалан, маълум вақт оралиида радиактив модда атомининг парчаланиш ҳодисаси эҳтимоллиги, ёки туҳиладиган бола жинсини аниқлаш каби масалаларда тенг имкониятли факторларни аниқлаш ечиб бўлмас муаммодир. Ушбу ҳолатларда фақат узоқ муддатли кузатувлар ёки қайта-қайта такрорланувчан тажрибалар натижаси ердамида қаралаётган ҳодиса эҳтимоллиги баҳоланади.

Бу ҳолда қизиқтирилаётган **A** ҳодиса узоқ давр мобайнидаги кузатишлар ёки бир қанча марта бир хил шароитда ўтказилган тажрибалар асосида унинг юз бериш сони **m** ни тажрибалар сони **n** га нисбати сифатида **A** ҳодиса юз беришининг учровчанлик частотаси (**m /n**) ҳисобланади. Ҳар бир кузатувлар, тажрибалар схемасидаги учровчанлик частоталари деярли барча ҳолларда бирор ўзгармас **P** сон ($0 \leq P \leq 1$) атрофида бўлади. Шунинг учун ушбу ҳолларда эҳтимолликнинг қўйидаги **статистик баҳоси** қабул қилинади.

$$P(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k}{n_k}$$

Бунда k кузатувлар сони, m_k – k -чи кузатувдаги A ҳодиса учрашлари сони, n_k – k – кузатувдаги барча кузатиш (тажриба)лар сони. Эҳтимолликнинг **статистик баҳосига** мисол тариқасида Г.Крамернинг “Математические методъ статистики” китобида келтирилган, 1935 йилдаги шведларнинг 1 йил мобайнида туъилган чакалоқлар ҳақидаги ахборотни келтирдик.

Ойлар	1	2	3	4	5	6	7
Жами	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7285
ўиллар сони	3743	3550	4017	4173	4117	3344	3964
қизлар сони	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621
қиз частотаси	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462

8	9	10	11	12	Йил учун
7393	7203	6903	6552	7132	88273
3797	3712	3512	3392	3767	45682
3596	3491	3391	3160	3371	42591
0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,4825

Кўриниб турганидек бунда ҳар ойлик қиз туъилиш ҳодисасининг учровчанлик частотаси 0,4825 атрофида. Демак, $P(A) = 0,4825$ деб оламиз. Осонлик билан ушбу ҳолда ҳам аниқланган эҳтимолликлар эҳтимолликнинг барча хоссаларини қаноатлантиришини кўриш мумкин.

2.2 Шартли эҳтимоллик

Биз юқорида (i, S) – ҳодисалар майдонига тегишли бирор A ҳодиса эҳтимолини $P(A)$ i даги маълум шарт-шароитларнинг юзага келишини ҳисобга олган ҳолда аниқлаган эдик. Ушбу эҳтимолликни A ҳодисанинг **шартсиз эҳтимоли** деб атаймиз.

Иккита A ва B ҳодисалар **ўзаро боғлиқ эмас** дейилади, агар улардан ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоллиги иккинчисининг рўй бериш ёки бермаслигига боғлиқ бўлмаса. Акс ҳолда бу ҳодисалар **ўзаро боғлиқ** дейилади. Фараз қилайлик A ва B ўзаро боғлиқ ҳодисалар бўлсин. B ҳодиса рўй берганлиги аниқ бўлганида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли **шартли эҳтимоллик** деб $P_B(A)$ (ёки $P(A|B)$) белгиланади ва қуйидаги формула орқали топилади:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (4),$$

бунда $P(B) > 0$.

Агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $P(A/B) = P(A)$ ва $P(B/A) = P(B)$ тенгликлар бажарилади. +уйидаги масалани кўриб чиқайлик.

2.2-масала. Иккита шашқол тоши ташланмоқда. Агар ташланганда тушган очколар йи\индиси жуфт (B ҳодиса) экани маълум бўлса, тушган очколар йи\индиси 6 га тенг бўлиши (A ҳодиса) ҳодисасининг эҳтимоли қанча?

Маълумки бу ҳолда Ω – 36 та тенг имкониятли, ўзаро биргаликда бўлмаган тасодифий факторлардан иборат. Бу факторларни жадвал кўринишда етсак.

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Кўриш мумкинки A ҳодисага 5 та ҳол тўри келади(улар жадвалда қорайтириб кўрсатилган): (1;5); (2;4); (3;3); (4;2); (5;1)

$$\text{Демак, } P(A) = \frac{5}{36}.$$

Агар қўшимча равишда B ҳодиса (18 та ҳол) рўй берди деган шарт остида A ҳодиса эҳтимолини қарасак $P(A/B) = \frac{5}{18}$ эканини топамиз. Охириги муносабатни қуйидагича езамиз.

$$P(A/B) = \frac{5}{18} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Агар B ҳодиса – йиғинди тоқ сон бўлиши ҳодисаси бўлса, унда $P(A/B) = 0$.

Чунки B ходиса рўй берган ҳолда A ходисанинг рўй бериши мумкин бўлмаган ходисадир. (4) муносабатдан $P(A \cdot B) = P(A/B)P(B)$ ходисаларни кўпайтириш теоремасининг хусусий ҳолини оламиз.

A ва B ходиса **боғлиқ эмас** дейилади, агар $P(A) = P(A/B)$ бўлса, Шу ўринда (4) муносабатни инобатга олсак $P(A \cdot B) = P(A)P(B)$ ҳосил қиламиз. Энди ходисалар гуруҳи учун кўпайтириш теоремасини таърифлаймиз.

Теорема (ходисалар кўпайтмаси). $A_1, A_2, \dots, A_n$ ходисалар гуруҳи берилган бўлсин. Агар:

1. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ходисалар боғлиқ бўлмаса

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \text{ бўлади.}$$

2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ходисалар ўзаро боғлиқ бўлса

$$P(A_1, A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}).$$

Теорема $H_1, H_2, \dots, H_n$ ходисалар **ҳодисалар тўла гуруҳини** ташкил этисин, яъни $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ ва $H_i \cap H_j = \emptyset$.

A ходиса шу ходисаларнинг биттаси рўй бергандагина рўй берсин. У ҳолда

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i) \quad (5)$$

Ушбу формула **тўла эҳтимоллик** формуласи дейилади.

Одатда бирор A ходиса рўй беришини тажрибада аниқлаш лозим бўлганда маълум фаразлар ўртага ташланади. Ушбу фараз (тахмин)ларни **гипотеза** деб аталади. Ушбу гипотезалар остида A ходиса рўй бериш шартли эҳтимолликлари аниқ бўлади. Тажриба асосида A ходиса рўй бергач фаразлар остидаги A ходиса рўй бериши шартли эҳтимоллигини баҳолаш масаласи қўйилади, ушбу масала **Байес формуласи** орқали ҳал қилинади.

Фараз қилайлик, A ходиса $H_1, H_2, \dots, H_n$ тахмин (гипотеза)лардан бири натижасида амалга ошади. Баъзи сабабларга кўра биз бу гипотезалар эҳтимоллиги $P(H_i)$ ва гипотеза остидаги A нинг шартли эҳтимоллиги

$P(A / H_i)$ берилган деб ҳисоблаймиз. У ҳолда гипотезалар эҳтимоллигини A ҳодиса амалга ошган пайтда қайта баҳолаш формуласи қуйидаги теорема тасдиғи билан аниқланган муносабат амалга оширилади.

Теорема (Байес):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)} = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

Бу ерда

H_k ($k = 1, 2, \dots, n$) гипотезалар тўла гуруҳини ташкил этади.

$P(H_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) - эҳтимолликлар **априор (синовдан олдинги)**,

$P(H_k / A)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) - **апостериор (синовдан кейинги)** эҳтимолликлар дейилади.

Ушбу тушунчаларни амалий масалалардаги тадқиқига оид масалаларни кўриб чиқайлик.

2.3-масала. Йирик реклама фирмасида ишчиларнинг 21%и юқори маош олади. Фирма ишчиларининг 40% ини аёллар ташкил этади. Шу билан бирга 6,4% ишчилар- юқори маош оладиган аёллар. Фирмада аёллар меҳнатига ҳақ тўлашда дискриминация мавжуд дейиш мумкинми?

Ечиш: Эҳтимоллар назарияси тили билан саволни қўйидагича қўйиш мумкин: «Тасодифий равишда танлаб олинган ишчи юқори маош оладиган аёл бўлиш эҳтимоллиги қанча?» .Қўйидаги белгилашларни киритимиз:

- A - «тасодифий равишда танлаб олинган ишчи юқори маош олади» ҳодисаси;
- B - «тасодифий равишда танлаб олинган ишчи — аёл» ҳодисаси бўлсин.

У ҳолда:

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,064}{0,40} = 0,16 .$$

0,16 сони 0,21 сонидан кичик бўлгани учун реклама фирмасида юқори маош олиш имконияти аёлларда эркакларга нисбатан кам деб хулоса қилиш мумкин.

2.4-масала. Истеъмолчи маълум бир маҳсулот рекламасини телевидение орқали кўриш эҳтимоли 0,04га, худди ана шу маҳсулот рекламасини махсус реклама кўргазмасида кўриш эҳтимоли 0,06 га тенг. Агар бу икки ҳодиса ўзаро боғлиқ бўлмаса, истеъмолчининг иккала турдаги рекламани ҳам кўриш эҳтимоли нимага тенг?

Ечиш: А- истеъмолчи маҳсулот рекламасини телевидение орқали кўриш ҳодисаси, В- истеъмолчи маҳсулот рекламасини махсус реклама кўргазмасида кўриш ҳодисаси бўлсин. Бу ҳодисалар боғлиқ эмас. У ҳолда истеъмолчининг иккала рекламани ҳам кўриш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,04 \cdot 0,06 = 0,0024.$$

Энди қуйидаги масалага эътибор берайлик.

2.5-масала. Иқтисодчи келаси йилда мамлакат иқтисодиёти кўрсаткичлари юқори бўлса, маълум бир компания акциялари нархининг ошиш эҳтимоли 0,75га, иқтисодиёт кўрсаткичлари паст бўлса, акциялар нархининг ошиш эҳтимоли 0,30га тенг экан. Шу билан бирга, унинг фикрича келаси йил мамлакат иқтисодиёти кўрсаткичлари юқори бўлиш эҳтимоли 0,80га тенг экан. Иқтисодчининг тахлили тўғри бўлса, келаси йилда компания акциялари нархининг ошиш эҳтимолини топинг?

Ечиш: А ҳодиса - «келаси йилда компания акцияларининг нархи ошади». Гипотезаларни қуйидагича аниқлаймиз:

H_1 - «келаси йилда мамлакат иқтисодиёти кўрсаткичлари юқори бўлади»;

H_2 - «келаси йилда мамлакат иқтисодиёти кўрсаткичлари паст бўлади».

Масала шартидан $P(H_1) = 0,80$ ва $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0,80 = 0,20$ эканини аниқлаймиз. Иқтисодчининг тахлилига кўра $P(A/H_1) = 0,75$ ва $P(A/H_2) = 0,30$. Тўла эҳтимоллик формуласидан фойдаланиб

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,80 \cdot 0,75 + 0,20 \cdot 0,30 = 0,66$$

эканлигини топамиз.

2.6-масала. Иқтисодчининг фикрига қараганда, юқори иқтисодий ўсиш даврида Америка доллари курсининг ўсиш эҳтимоли 0,7, ўртача ўсиш даврида 0,4, паст кўрсаткичли ўсиш даврида эса 0,2 га тенг экан. Иқтисодий ўсиш даври кўрсаткичлари юқори, уртача ва паст бўлиши эҳтимолликлари мос равишда 0,3, 0,5 ва 0,2 га тенг. Айтайлик, ҳозир долларнинг нархи ўсмоқда. У ҳолда ҳозирги давр юқори кўрсаткичли иқтисодий ўсиш даври бўлиши эҳтимоли қанча?

Ечиш: А-«долларнинг нархи ошмоқда» ҳодисаси бўлсин. Гипотеза (тахмин) ларни эса қуйидагича аниқлаймиз:

H_1 – «юқори кўрсаткичли иқтисодий ўсиш»;

H_2 – «ўртача кўрсаткичли иқтисодий ўсиш»;

H_3 – «паст кўрсаткичли иқтисодий ўсиш».

Масала шартига кўра: $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,5$, $P(H_3) = 0,2$. Шунингдек, маълумки, $P(A/H_1) = 0,7$, $P(A/H_2) = 0,5$, $P(A/H_3) = 0,2$.

Демак, Байес формуласига асосан

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2} = 0,467.$$

3- маъруза

Мавзу: Ўзаро боғлиқсиз тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли схемаси.

Мақсад: Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикада мўҳим ўрин тутган ўзаро боғлиқсиз тажрибалар кетма-кетлигини аҳамиятини англаш ва уни ўрганувчи Бернулли схемаси тушуниш ва унинг назарий апаратини амалий масалаларда қўллаш олиш. Муавр-Лаплас лимит теоремаларини ҳамда Пуассон теоремасини тасдиқларини билиш ва уларнинг қўллаш соҳаларини аниқ ажрата олишни ўзлаштириш.

Ўқув режаси

3.1 Бошланғич тушунчалар. Бернулли формуласи.

3.2. Муавр Лаплас локал лимит ва интеграл лимит теоремалари.

3.1 Бошланғич тушунчалар. Бернулли формуласи

Жамиятнинг ва ундаги техник жараёнларнинг тараққиёти фаннинг соҳалардаги ютуқларига асосланган. Чунки фан ривожланишнинг илмий асосдаги қатъий, исботланган усулларини, услубларини ва фактларни таклиф этади.

Бирор фактни илмий асосда исботлаш учун эса аксарият ҳолларда кўп сонли кузатув ва тажрибалар ўтказиш талаб этилади. Масалан, янги серҳосил, касаллик ва минтақа об-ҳавосига чидамли бўлдой нави давомли йиллар мобайнида ўтказилган тажрибалар асосида, етиштирилган ҳосилни эскиси билан таққослаш орқали етиштирилиши ҳаммага маълум. Айтилганлардан хулоса шундайки, ҳамма янгиликлар амалиётда тадбиқ қилинишдан олдин тажриба ва кузатувларда синчиклаб текширилади. Шуниси аҳамиятлики тажрибалар бир бирига боғлиқсиз равишда ўтказилади. Илмий ва амалий фаолиятда мунтазам равишда тажрибаларни иложи борида бир хил муҳит ва шароитда кўп марта қайталаб ўтказишга тўғри келади. Одатда бунда бир тажрибанинг натижаси олдингиларига ва кейингиларига таъсир қилмаслигига эътибор берилади. Шу нуқтаи назардан ҳар бирида ўзаро боғлиқсиз равишда, доимо бир хил узгармас P эҳимоллик билан юз берадиган A ҳодиса устидаги тажрибалар тури муҳим ўрин тутди.

Ушбу турдаги тажрибалар биринчи марта швейцариялик олим Яков Бернулли (1654 – 1705) томондан ўрганилган шунинг учун **Бернулли схемаси** деб номланади. Бернулли схемаси иккита миқдор(параметр), n ва p билан характерланади. Бунда n – тажрибалар сони ва p - ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли. Бернулли схемасини ўрганиш эҳтимоллар назарияси фани ривожига катта ҳисса қўшган. Энди Бернулли схемаси билан бевосита танишайлик. Хуш, бу схемада элементар фазо нимадан иборат ? Саволга жавоб беришдан олдин дастлаб қўйидагича шартлашиб олсак, яъни агар A ҳодиса юз берган ҳолни 1 рақами, юз бермаган ҳолни эса 0 рақами билан белгиласак. У ҳолда n та тажриба ўтказсак n та 0 ёки 1 дан иборат кетма-кетлик ҳосил қиламиз ва ушбу кетма-кетликлар элементар фазони ташкил этади. Масалан, $n=3$ бўлган ҳолда $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ дан иборат 8 та элементар факторлардан иборат тўплам. Умумий ҳолда $\Omega = 2^n$ та тенг имкониятли n тадан 0 ёки 1 лардан иборат тўплам.

Энди ушбу схемада эҳтимолликни аниқлайлик. Келишганимиздай ҳар бир тажрибада ҳодиса руй бериши эҳтимоли p га, руй бермаслик эҳтимоли эса $1-p$ тенг. Ҳар бир тажрибада A ҳодиса рўй бериши еки рўй бермаслиги ўзаро богликсиз. Демак, кўпайтириш теоремасига кўра n та тажрибада m марта A ҳодиса юз бериши $p^m(1-p)^{n-m}$ га тенг. Бу эҳтимоллик элементар фазодаги 1 ларнинг кетма-кетликлардаги қандай жойлашишига боғлиқ эмас.

Бернулли схемасига таалуқли оддий масала n та тажрибада A ҳодисанинг m марта юзага келиш эҳтимоли $P_n(m), (0 \leq m \leq n)$ ни аниқлаш. +ўшиш теоремасидан

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad (1)$$

($m=0;1;2;\dots;n$) эканини аниқлаймиз

(1) формула **Бернулли формуласи** дейилади.

3.1-масала. Маълум бир корхона маҳсулотларининг 5 % сифатсиз. Тасодифан олинган 5 та маҳсулот ичида иккитасининг сифатсиз бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш: Тасодифан олинган маҳсулотнинг сифатсиз бўлиш эҳтимоллиги $p=0,05$. У ҳолда Бернулли формуласига асосан

$$P_5(2) = C_5^2 (0,05)^2 (0,95)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} (0,05)^2 (0,95)^3 = 0,02.$$

3.2-масала. Иккита тенг кучли рақиб шахмат ўйнамоқда. Шахматчи тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоллиги каттами ёки беш партиядан камида учтасини ютиш эҳтимоллигими?

Ечиш: Рақиблар тенг кучли бўлгани учун ютиш эҳтимоллиги $p=0,5$ деб қараймиз. $P_n(m)$ орқали n та партиядан m тасини ютиш ҳодисасининг эҳтимолини белгиласак. Тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоллиги қўйидагича топилади:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 - C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}.$$

Беш партиядан камида учтасини ютиш эҳтимоллиги

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8}{16}.$$

Кўриниб тўрибдики, $11/16 > 8/16$. Демак, тўрт партиядан камида иккитасини ютиш эҳтимоли каттароқ экан.

Бернулли схемаси билан боғлиқ масалаларда учраб турадиган баъзи муаммоларнинг ечимларига тўхталиб ўтсак.

I. Берилган P эҳтимолликдан кичик бўлмаган эҳтимоллик билан ҳодиса ҳеч бўлмаганда бир марта рўй бериши учун ўтказиш керак бўлган тажрибалар сони n :

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}.$$

тенгсизликдан аниқланади Бунда p А ҳодисанинг тажрибада юз бериш эҳтимоллиги

II. Бернулли схемасида ҳодисанинг рўй беришлар сони m нинг энг эҳтимоллироқ қиймати μ ни аниқлаш масаласи қуйидагича ҳал қилинади:

1. Агар $(n+1)p$ кўпайтманинг қиймати каср бўлса, μ касрнинг бутун қисмига тенг: $\mu = [(n+1)p]$.

2. Агар $(n+1)p$ кўпайтманинг қиймати бутун бўлса, рўй беришлар сони μ нинг энг эҳтимоллироқ қиймати иккита бўлади:

$$\mu_1 = (n+1)p - 1 \quad \text{ва} \quad \mu_2 = (n+1)p.$$

Энди қуйидаги масалани кўриб ўтайлик.

3.3-масала. Корхона маҳсулоти яроқсиз бўлиши эҳтимоллиги $p=0,005$.

Тасодифий олинган 5000 та маҳсулот ичида яроқсиз маҳсулотнинг сони :

а) роса 40 та

б) 40 тагача бўлиш эҳтимоллари қандай?

Ечиш. Бизнинг ҳолда $n=5000$ ва $p=0,005$

$$\text{Демак, } P_{5000}(40) = C_{5000}^{40} p^{40} (1-p)^{5000-40} = C_{5000}^{40} p^{40} (1-p)^{4960}$$

Энди яроқсиз махсулотнинг сони 40 тагача бўлиш эҳтимоллигини аниқлайлик. Бу ҳолда, яроқсиз махсулотлар сони 0;1;2,,,,,40 бўлган ҳодисалар эҳтимоллари йи\индисини ташкил этади, яъни

$$P(\mu \leq 40) = \sum_{m=0}^{40} P_{5000}(m) = \sum_{m=0}^{40} C_{5000}^m p^m (1-p)^{5000-m}$$

Ушбу мисоллар ечимида $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ эканини эслатган ҳолда

$$C_{5000}^{40} = \frac{5000!}{40!4960!}$$
 эканига эътибор қаратамиз. Буни ҳисоблаш хатто ҳозирги XXI

аср компьютерлари учун ҳам осон вазифа эмас.

Хуш, энди уша давр, XVIII асрни кўз олдимизга келтирайлик. Ҳисоблаш техникаси умуман бўлмаган ўша маҳалда бу масала ҳал қилиниши ўта мураккаб бўлган муаммолар сафига киритилган. Шу сабабли ўша даврда катта қийматли n ва m лар учун $P_n(m)$ эҳтимолликлари учун асимптотик (яъни имкон даражада ҳақиқийга яқинлашган тақрибий) қийматни аниқлаш муаммоси қўйилган.

Ушбу масала француз математики Абрахм Де Муавр (1667-1754) томонидан мувофақиятли ҳал этилган.

3.2.Муавр Лаплас локал лимит ва интеграл лимит теоремалари

Теорема (локал лимит). Агар n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлигида бирор ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги ўзгармас p ($0 < p < 1$) сонига тенг бўлса, бу тажрибаларда ҳодисанинг айнан m марта содир бўлиш эҳтимоли $P_n(m)$ учун қуйидаги муносабат ўринли

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

бу ерда $q \equiv 1 - p$, $\varphi(x)$ - функция **Лаплас** функцияси деб аталади ва қуйидагича аниқланади: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Ушбу функция ҳақида қуйидаги қўшимча маълумотларни билиш фойдадан холи эмас.

- $\varphi(x)$ - функциясининг қийматлари жадваллаштирилган;

- $\varphi(x)$ жуфт функция, яъни $\varphi(-x) = \varphi(x)$ бўлгани учун x нинг манфий қийматлари учун ҳам ана шу жадвалдан фойдаланилади;
- $x \geq 4$ қийматларида $\varphi(x) = 0$ деб ҳисоблаш мумкин.

Теорема(интеграл лимит теоремаси.) Агар n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар кетма-кетлигида бирор ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги ўзгармас p ($0 < p < 1$) сонига тенг бўлса, бу тажрибаларда ҳодисанинг рўй беришлар сони m нинг m_1 ва m_2 қийматларнинг орасида бўлиш эҳтимоли қуйидагича топилади:

$$P_n(m_1; m_2) = P\{m_1 \leq m \leq m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

Бунда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ - **Лапласнинг интеграл функцияси** деб

аталади. Лаплас функциясининг қуйидаги хоссаларини эслатиб ўтамиз :

- $\Phi(x)$ функция қийматлари жадваллаштирилган;
- $\Phi(x)$ тоқ функция, яъни $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ бўлгани учун x нинг манфий қийматлари учун ҳам ана шу жадвалдан фойдаланилади ;
- барча $x > 5$ қийматларида $\Phi(x) = 1/2$ деб ҳисоблаш мумкин.

Э с л а т м а: Айрим адабиетларда $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ функция

ўрнига $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ функция ишлатилади. Бу икки функция

ўзаро $\Phi_0(x) = 0,5 + \Phi(x)$ тенглик билан боғланган. Муавр Лапласнинг интеграл теоремасини $\Phi_0(x)$ функция орқали ҳам ифодалаш мумкин:

$$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Бевосита, Муавр Лаплас теоремаси тасдиқини қўлланишига доир айрим масалаларни кўриб чиқайлик.

I. μ_n билан A ҳодисанинг n та боғлиқсиз тажрибаларда юз бериши сонини белгилаймиз. $\forall \varepsilon > 0$ учун $\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши ҳодисаси эҳтимолини кўриб чиқайлик. Бу ерда p илгариги маъно ишлатилмоқда.

У ҳолда Муавр-Лаплас интеграл лимит теоремасига асосан

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Ушбу тасдиқ эҳтимоллар назариясида муҳим ўрин тутди ва **катта сонлар қонуни** деб аталади.

II. Ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибаларда нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишини баҳолаш.

Агар n та ўзаро боғлиқ бўлмаган синовларнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ($0 < p < 1$) бўлса, яъни Бернулли схемасида ҳодисанинг рўй беришлар сони m нинг нисбий частотаси m/n нинг ўзгармас эҳтимоллик p дан оғишининг бирор мусбат ε дан катта бўлмаслик эҳтимоллиги қуйидагига тенг:

$$P\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right).$$

Агар $\Phi(x) = \Phi_0(x) - 0,5$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$P\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) - 1$$

формулани ҳосил қиламиз.

3.6-масала. Ўзаро боғлиқ бўлмаган 625 синовнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,8га тенг. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг унинг эҳтимолидан оғиши абсолют қиймати бўйича 0,04дан катта бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

Ечиш: Масаланинг шартига асосан $n \leq 625$; $p \leq 0,8$; $q \leq 0,2$; $\varepsilon \leq 0,04$.

$P \approx P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\}$ эҳтимолликни топиш керак. Юқорида келтирилган

муносабатга кўра $P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} = 2 \cdot \Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5).$

Лаплас интеграл функциясининг қийматлари жадвалидан $\Phi(2,5) \approx 0,4938$ эканлигини топамиз. Демак,

$$P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} \approx 2 \cdot 0,4938 \approx 0,9876.$$

3.7-масала. Агар А ҳодисанинг битта синовда рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, синов 400 марта ўтказилганида унинг айнан 80 маротаба рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Шартга кўра $n \approx 400$; $m \approx 80$; $p \approx 0,2$; $q \approx 0,8$. Муавр-Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi\left(\frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \frac{1}{8} \varphi(0).$$

Лаплас функциясининг қийматлари жадвалидан $\varphi(x)$ нинг 0 га мос қийматини топамиз: $\varphi(0) \approx 0,3989$. У ҳолда $P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986$ бўлади.

3.8-масала. 0,2 эҳтимоллик билан ишдан чиқувчи ускуна устида 100 та синов ўтказилди. Ҳақиқатдаги аниқланг:

а) камида 75 та ускунанинг; б) кўпи билан 74 та ускунанинг; в) 75 тадан 90 тагача ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимолларини топинг?

Ечиш: Шартга кўра $n \approx 100$; $p \approx 0,8$; $q \approx 0,2$;

а) камида 75 та ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли:

$$P\{75 \leq m\} = P\{75 \leq m \leq 100\} \approx \Phi\left(\frac{100 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi(5) - \Phi(-1,25);$$

Лаплас интеграл функциясининг қийматлари жадвалидан $\Phi(x)$ функциянинг $\Phi(-1,25) \approx 0,044$ ва $\Phi(5) \approx 0,5$ га мос қийматларини топамиз: $\Phi(-1,25) \approx 0,044$; $\Phi(5) \approx 0,5$. У ҳолда

$$P\{75 \leq m\} \approx \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944 \text{ бўлади.}$$

б) Кўпи билан 74 та ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли: «Камида 75 та ускунанинг ишдан чиқиши» ва «кўпи билан 74 та ускунанинг ишдан чиқиши» ҳодисалари ўзаро тескари ҳодисалардир, шунинг учун улар эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг. У ҳолда:

$$P\{m \leq 74\} = 1 - P\{75 \leq m\} = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

в) 75 тадан 90 тагача ускунанинг ишдан чиқиш эҳтимоли:

$$\begin{aligned} P\{75 \leq m \leq 90\} &\approx \Phi\left(\frac{90 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \\ &= \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25). \end{aligned}$$

Лаплас интеграл функциясининг қийматлари жадвалидан $\Phi(x)$ нинг ҳк1,25 ва ҳк2,5 га мос қийматларини топамиз: $\Phi(1,25) = 0,3944$, $\Phi(2,5) = 0,4938$.

Демак, $P\{75 \leq \mu \leq 90\} \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$ экан.

3.9-масала. Ҳодисанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган синовларнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоли 0,8га тенг. Ҳодисанинг камида 75 марта рўй беришини 0,9 эҳтимоллик билан кутиш мумкин бўлиши учун нечта синов ўтказиш керак бўлади?

Ечиш: Масала шартига кўра p қ 0,8; q қ 0,2; $P_n(75; n) = 0,9$. Муавр-Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз.

$$P_n(75; n) = P\{75 \leq \mu \leq n\} \approx \Phi\left(\frac{n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0,9.$$

$$0,9 = \Phi\left(\frac{n - 0,8n}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2 \cdot n}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2 \cdot n}}\right)$$

ёки

$$0,9 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right).$$

Албатта синовлар сони $n > 75$, шунинг учун $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx 4,33$. Лаплас интеграл функцияси учун $\Phi(4) \approx 0,5$ бўлгани сабабли $\Phi(\sqrt{n}/2) \approx 0,5$ деб ҳисоблаш мумкин.

Демак, $0,9 = 0,5 - \Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right)$. Бундан $\Phi\left(\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = -0,4$. $\Phi(x)$ – тоқ

функция бўлгани учун $\Phi\left(-\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,4$. Лаплас интеграл функциясининг

қийматлари жадвалидан $\Phi(x) \approx 0,4$ тенгликни қаноатлантирувчи аргументнинг қийматини топамиз: $\Phi(1,28) \approx 0,4$.

Натижада $-\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} = 1,28$ ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан n ни топсак $\sqrt{n} \approx 10$

ёки тажрибалар сони $n \approx 100$ экан.

Биз $P_n(m)$ эҳтимолликни баҳолашда $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциядан фойдаландик.

Аммо бу усул p ёки $q \approx 1-p$ лардан бирининг қиймати 0 га яқин бўлмаганда яхши натижа беради. Акс ҳолда Ушбу формуланинг қўлланилиши ката хатоликларга олиб келади. Шу сабабли Бернулли схемасида n нинг қиймати етарлича катта, p нинг қиймати эса кичкина бўлган ҳолларда (одатда $p < 0,1$; $npq \leq 9$) ҳодисанинг m марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m)$ ни ҳисоблашда Бернулли формуласи ўрнига **Пуассон формуласи** дан фойдаланилади:

Теорема (Пуассон) Агар етарлича катта n ва кичик p да $np = \lambda$ бўлса

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

Пуассон формуласига асосан n та тажриба ўтказилганида ҳодисанинг рўй беришлар сони m нинг қийматлари m_1 ва m_2 ($m_1 < m_2$) орасида бўлиш эҳтимоли қуйидагича ҳисобланади:

$$P_n(m_1; m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ функциясининг қийматлари ҳам жадваллаштирилган.

Э с л а т м а. Шундай қилиб, Бернулли схемасида $p < 0.1$ ва $np(1-p) \leq 9$, бўлган ҳолларда Пуассон теоремаси тасдиғидан фойдаланиш, $p > 0.1$ ва $np(1-p) \geq 9$ бўлган ҳолларда эса Муавр-Лаплас теоремаларини ишлатиш тавсия этилади.

4-мавзу

Мавзу: Тасодифий миқдорлар ва тақсимот функциялари.

Мақсад: Талабаларда тасодифий миқдор ва тақсимот функцияси тушунчаларини шакллантириш. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг табиатан ўзаро фарқини ажрата билиш. Тасодифий миқдор тақсимои хоссаларини билиш ва сонли характеристикаларини ҳисоблай олиш. Баъзи узлуксиз тақсимот қонунларини ва уларнинг мўҳим хоссаларини билиш.

Ўқув саволлари:

4.1. Тасодифий миқдор ва тақсимот функцияси.

4.2. Дискрет тасодифий миқдорлар.

4.3. Узлуксиз тасодифий миқдорлар.

4.4. Тасодифий миқдор сонли характеристикалари.

4.5. Баъзи узлуксиз тақсимот қонунлари

4.1. Тасодифий миқдор ва миқдор тақсимои.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири тасодифий миқдор (т.м.) тушунчасидир. Олдин айтиб ўтганимиздай эҳтимоллар назарияси тасодифий ҳодисалар қонуниятини ўрганади. Тасодифий ҳодисалар тасодифий факторларга бўлиқ. Энди тасодифий ҳодисага бирор миқдорни бўласак, яъни шундай миқдорларни қарайликки улар тасодифий факторлар натижаларига бўлиқ равишда қиймат қабул қилсин.

Тасодифий ҳодисанинг натижасини олдиндан айтиб бўлмайди. Равшанки биз унга бўлаб қараетган миқдорнинг қандай қиймат қабул қилишини олдиндан башорат қилиб бўлмайди. Ушбу миқдорларни **тасодифий миқдорлар** деб атаб о (кси), з (этта), ж (дзетта) каби юнон алифбоси ҳарфлари билан белгилаймиз.

Масалан:

1. Танга ташлаш масаласида $\xi(\omega)$ миқдорни қуйидагича аниқлайлик: $\xi(\omega) = 1$ деймиз, агар герб томон тушса ва $\xi(\omega) = 0$ - агар танга рақамли томони билан тушса.

2. Телефон станциясига маълум вақт оралиғида келган сигналлар сонини $\zeta(\omega)$ миқдор билан белгиласак, $\zeta(\omega)$ нинг қиймати юз берган тасодифий ҳодиса натижаси бўйича аниқланади.

Ушбу мисоллардан ҳам кўриниб турибдики, тасодифий миқдор ўрганилаётган ҳодисанинг характеристикасини миқдорий акс эттиради.

Айтиб ўтганимиздек, тасодифий о миқдорнинг қандай қиймат қабул қилишини олдиндан айтиб бўлмайди. Тасодифий миқдорни билиш учун унинг қабул қилиши лозим бўлган қийматлари тўпламини билишимиз керак. Аммо бунинг ўзи кифоя қилмайди. Бизни қизиқтирган тасодифий ҳодисага боғланган тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини билиш билан бир қаторда ушбу қийматларни қанчалик миқдорда қабул қилишини, яъни қийматларни қабул қилиш эҳтимолини ҳам билиш зарурдир. Ушбу икки факторни аниқлашни тасодифий миқдорнинг (тасодифий ҳодисанинг) **таксимот қонунини** аниқлаш деб атаймиз.

Демак, тасодифий миқдор таксимот қонунини аниқлаш деганда:

- тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлар тўпламини аниқлаш;

- ушбу қийматларни қабул қилиш эҳтимолликларини топишни тушунамиз.

+абул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари тўплами тузилишига кўра тасодифий миқдорлар **узлукли(дискрет)** ва **узлуксиз** бўлади.

Ушбу миқдорларни хоссаларини алоҳида кўриб чиқишдан олдин таксимот қонунини аниқлайдиган таксимот функциясини умумий хоссаларини кўриб чиқайлик.

ω – орқали тасодифий миқдорни, x орқали эса унинг қийматини белгилаймиз.

$A_x = \{\omega : o(\omega) < x\}$ - ҳодисани қарасак. A_x тасодифий ҳодиса бўлиб, унинг “ҳажми”, яъни унга таъсир кўрсатувчи тасодифий факторлар мажмуаси “миқдори” x ўзгарувчи қийматига боʻлиқ.

Масалан: Шашқол ташлаш масаласида Π қ $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ эди. Тасодифий миқдорни $o(\omega_i) = i$ каби аниқласак, ω нинг мумкин бўлган қийматлари тўплами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлиб уларни қайси тартибда қабул қилиши тасодифий ҳодисанинг натижасига боʻлиқ.

Шу масалада $A_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ ҳодисанини қарайлик. Хеч қийинчиликсиз A_1 қ $\emptyset$ (чунки 1 дан кичик очко йўқ), $A_2 = \{\omega : o(\omega) < 2\} = \{\omega_1\}$,

$A_3 = \{\omega : o(\omega) < 3\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ ва х.к. $A_6 = \{10 : \xi < 6\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ва барча $x > 6$ ҳолда A_x қ Π эканини аниқлаймиз. Демак, A_x x миқдорга боʻлиқ тасодифий ҳодиса экан. У ҳолда $P(A_x) = P\{\omega : o(\omega) < x\}$ миқдор x – ўзгарувчининг функцияси бўлади. Ушбу функцияни $F(x) = P\{\omega : \xi < x\}$ орқали белгилаб ω – тасодифий миқдорнинг **таксимот функцияси** деб атаيمиз.

Энди ушбу функция хоссаларига тўхталиб ўтсак.

$$1^\circ. \quad F(-\infty) = 0 \quad \text{чунки} \quad A_{-\infty} = \emptyset$$

$$F(+\infty) = 1 \quad \text{чунки} \quad A_{+\infty} = \Omega.$$

$$2^\circ. \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Ҳақиқатан, ҳар қандай x ларда A_x тасодифий ҳодиса учун

$$\emptyset \subset A_x \subset \Pi \quad \text{эканидан} \quad P(\emptyset) \leq P(A_x) \leq P(\Omega) \quad \text{демак,} \quad 0 \leq F(x) \leq 1.$$

$$3^\circ. \quad P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$A = \{\omega : \omega < x_2\}; B = \{\omega : \omega < x\}; C = \{x_1 \leq \omega < x_2\} \quad \text{белгилашлар}$$

киритсак.

$A \not\subset B + C$ ва $B \cap C \not\subset A$ эканидан

$$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$$

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

Ушбу хоссада $0 \leq P(x_1 \leq \xi < x_2) \leq 1$ эканидан $F(x_2) > F(x_1)$ ни ҳосил қиламиз. Демак, тақсимот функцияси камаймайдиган функция экан.

4°. Тақсимот функцияси чапдан узлуксиз функция.

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ўсувчи ва x га интилувчи кетма-кетликни танлаймиз.

$A_n = \{x_n \leq \xi < x\}$ белгилаш киритсак. Барча $i > j$ бўлган ҳолларда

$A_i \subset A_j$ ва $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n$ ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(x) - F(x_n)\} = F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x) - F(x-0) = 0.$$

хосса исботланди.

Шундай қилиб, о тасодифий миқдор тақсимот функцияси $F(x) = P\{\xi < x\}$ қуйидаги хоссаларга эга.

$$F1. \quad F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1.$$

$$F2. \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

F3. тақсимот функцияси чапдан узлуксиз.

$$F4. \quad P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Энди юқорида айтиб ўтганимиздек тасодифий миқдорнинг турлари билан танишиб чиқамиз.

4.2 Дискрет (узлукли) тасодифий миқдорлар.

Таъриф: Агар тасодифий миқдорнинг қабул қилиш мумкин бўлган қийматлари чекли еки санокли тўпламни ташкил этса уни **дискрет** тасодифий миқдор деб атаймиз. Дискрет тасодифий миқдор тақсимот функциясини

$$F(x) = \sum_{k: \xi < x} P_k$$

каби аниқланади.

Мисоллар:

1. Бернулли схемасини қарамиз. о тасодифий миқдорни n та ўзаро боғлиқсиз тажрибаларнинг ҳар бирида P эҳтимол билан рўй берадиган А ҳодиса юзага келишлари сони каби аниқласак. Бернулли схемасида кўриб ўтганимиздай

$$P\{\xi = m\} = P_n(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

эди. У ҳолда о тасодифий миқдор тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum_{k < x} P_n(k) & 0 < x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

кўринишни олади. Ушу тақсимони **биномиал** тақсимот дейилади.

2. о тасодифий миқдор 0; 1; 2; ... қийматларни

$$P_n = P\{o = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},$$

эҳтимолликлар билан қабул қилса унинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \sum_{n: \{n < x\}} P_n$$

каби аниқланади.

Бу тақсимот қонуни **Пуассон** тақсимот қонуни деб аталади.

Ҳар қандай дискрет (узлукли) миқдорнинг тақсимот функцияси узлукли, понасимон функция. бўлиб поналар катталиги P_n га тенг. Поналараро сакрашлар о миқдор қабул қилиши мумкин бўлган қийматларга мол келади.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни **жадвал, формула ёки график** кўринишида берилиши мумкин.

1) Миқдор тақсимотининг **жадвал** кўриниши:

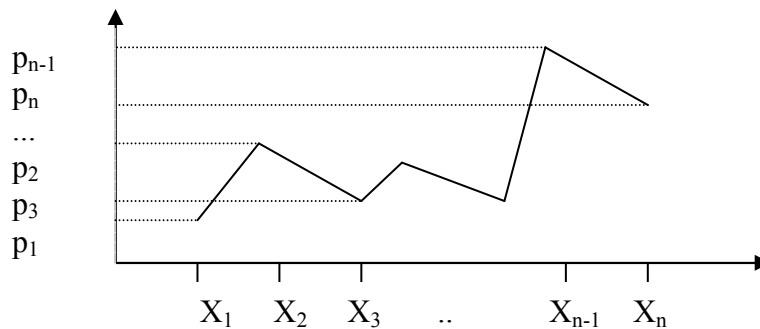
x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

2) Миқдор тақсимотининг **формула** кўриниши:

$$p_{mK} P\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m};$$

Тақсимот қаторининг $M_i(x_i, p_i)$ нукталарни туташтирувчи синик чизикдан иборат графиги **тақсимот полигони** дейилади.

3) Микдор тақсимотининг **график** кўриниши: **тақсимот полигони**.



Дискрет тасодифий микдор(ξ)нинг қийматлари $[a;b]$ ораликда бўлиши ҳодисаси эҳтимоли $P(a \leq \xi \leq b)$ қуйидагича ҳисобланади:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i.$$

Масала. 10 та деталнинг ичида 8 та ностандарти бор. Тасодифий равишда 2 та детал олинди. Танлаб олинган деталлар орасидаги стандарт деталлар сони(ξ)нинг тақсимот қонунини тузинг. Тақсимот полигонини ясанг.

Ечиш: ξ тасодифий микдор – танланган 2 та детал орасидаги стандартлари сони. У қуйидаги қийматларни қабул қилиши мумкин: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. ξ нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз. Бунда

$$P\{\xi = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_n^m},$$

формуладан фойдаланамиз. Бу ерда $N=10$ – деталларнинг умумий сони, $n=8$ – стандарт деталлар сони, $m=2$ – танланган деталлар сони, $k=0,1,2$ – танланган деталлар ичидаги бўлиши мумкин бўлган стандартлари сони.

$$P\{\xi = 0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}; \quad P\{\xi = 1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}; \quad P\{\xi = 2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

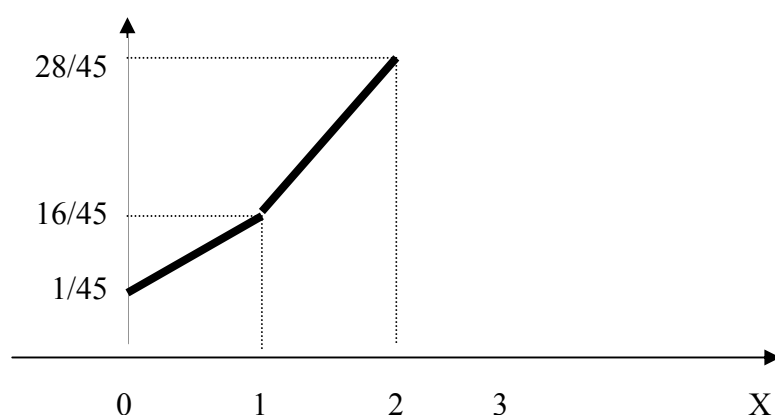
Қидирилаётган тақсимот қонунини топамиз:

$$\xi: \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$P: \quad 1/45 \quad 16/45 \quad 28/45$$

$$\text{Текшириб кўрамиз: } \sum_{k=1}^3 P\{\xi = k\} = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$$

Тақсимот полигонини ясаймиз. Бунинг учун абсцисса ўқига x_i ларни, яъни ξ нинг мумкин бўлган қийматларини ва ординаталар ўқига эса уларга мос эҳтимолликлар p_i -ларни жойлаштирамиз ҳамда мос равишда $M_1(0; 1/45)$, $M_2(1; 16/45)$, $M_3(2; 28/45)$ нуқталарни топамиз. Бу нуқталарни тўғри чизиклар билан туташтирсак, тақсимот полигони ҳосил бўлади



4.3 Узлуксиз тасодифий микдорлар.

Таъриф. Агар о тасодифий микдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари тўплами бирор-бир сонли ораликни тўлалигича қопласа, о тасодифий микдорни **узлуксиз тасодифий микдор** деб атаймиз.

Узлуксиз тасодифий микдор тақсимот функциясидан олинган ҳосила тасодифий микдорнинг **зичлик** функцияси $p(x)$ дейилади:

$$p(x) = F'(x).$$

Зичлик функциясининг ҳоссалари:

1. $F(x)$ – камаймайдиган функция бўлгани учун $p(x) \geq 0$.
2. Зичлик функцияси орқали тақсимот функцияси қуйидаги тенглик орқали

$$\text{аниқлинади: } F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt;$$

3. о тасодифий миқдорнинг $(a;b)$ ораликдан қиймат қабул қилиш эҳтимоли:

$$P\{a < \xi < b\} = \int_a^b p(x)dx;$$

4. Зичлик функциясидан $(-\infty;+\infty)$ оралик бўйича олинган интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1;$$

Шундай қилиб, тасодифий миқдор ўзининг тақсимот функцияси $F(x)$ ёки зичлик функцияси $p(x)$ билан бир қийматли аниқланади.

Мисоллар:

1. о тасодифий миқдор $[a, b]$ ораликда **текис тақсимланган қонунга** буйсунади дейилади, агар унинг зичлик функцияси $x \in [a, b]$ учун

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \text{ ва } x \notin [a, b] \text{ } p(x) = 0 \text{ бўлса,}$$

2. о тасодифий миқдор **a ва σ параметрли кўрсаткичли тақсимотга** эга дейилади, агар унинг зичлик функцияси

$$e_{a,\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{агар } x < a \\ \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-a}{\sigma}} & , \text{агар } x > a \end{cases} \text{ бўлса.}$$

3. о тасодифий миқдор **a ва σ параметрли нормал тақсимотга** эга дейилади, агар унинг зичлик функцияси

$$\phi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ бўлса.}$$

4.4 Тасодифий миқдор сонли характеристикалари.

Тақсимот қонуни тасодифий миқдорни тўлиқ тавсифлайди(характерлайди). Аммо кўпинча тақсимот қонуни номаълум бўлиши ёки кам маълумотлар билан чекланишга мажбур бўладиган ҳоллар учраши мумкин. Шундай ҳолларда тасодифий миқдорни йиғма тавсифлайдиган сонлардан фойдаланишга тўғри келади. Ушбу сонларни тасодифий миқдорнинг **сонли характеристикалари** деб атаймиз. Шундай

муҳим сонли характеристикалардан бири **математик кутилмадир**. Баъзи масалаларда, айниқса тасодифий миқдорларни қабул қиладиган қийматлари бўйича таққосланиши лозим бўлган масалаларда математик кутилма («ўртача»)ни билиш кифоя қилади.

Дискрет ва узлуксиз миқдорларнинг математик тушунчасини алоҳида-алоҳида кўриб ўтаемиз.

Таъриф. ξ тасодифий миқдор $\{x_k\}$ қийматларни $\{p_k\}$ эҳтимолликлар билан қабул қилсин. ξ тасодифий миқдор математик

кутилмаси $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ каби аниқланади.

1-мисол. Биномиал тақсимот қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини ҳисобланг.

Ечиш: ξ орқали A ҳодисанинг n та ўзаро боғлиқсиз тажрибаларда руй беришлари сонини белгиласак. Бернулли формуласига кўра

$$P\{\xi = m\} = P_n(\xi = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

бу ерда p A ҳодисанинг ҳар бир тажрибада юз бериш эҳтимоллиги. Математик кутилма таърифига кўра

$$M\xi = \sum_{k=1}^n k P_n\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$np \sum_{k=1}^n k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

2-мисол. λ параметрли Пуассон тақсимот қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

Ечиш: Ушбу ҳолда, Пуассон теоремасига кўра

$$P_n = P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n=1,2,3,\dots; \quad \lambda > 0.$$

Математик кутилма таърифига кўра

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{\xi = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Таъриф. Узлуксиз ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $p(x)$ бўлса, ξ тасодифий миқдор математик кутилмаси деб

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

каби аниқланган интегралга айтилади.

3-мисол. (a, σ^2) параметрли нормал қонун билан тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини топинг.

$$\begin{aligned}
M \xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \phi_{a, \sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{a}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + a = a
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, (a, σ^2) параметрли нормал қонун билан тақсимланган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси a параметрга тенг экан.

Таъриф. Тақсимот функцияси $F(x)$, бўлган ξ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

каби аниқланади.

Умумий ҳолда $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ эҳтимоллар фазосида берилган ξ тасодифий миқдор математик кутилмаси деб

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

интегралнинг сон қийматига (агар бу интеграл мавжуд бўлса) айтилади.

Математик кутилма қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Ўзгармас соннинг математик кутилмаси шу соннинг ўзига тенг.

Исботи. Ўзгармас сон c ни фақат битта c қийматни 1 эҳтимоллик билан қабул қилувчи тасодифий миқдор деб қарасак бўлади. У ҳолда унинг математик кутилмаси учун қуйидаги муносабат ўринли

$$M c = c \cdot 1 = c.$$

2-хосса. Математик кутилма учун $|M\xi| \leq M|\xi|$ муносабат ўринли.

Исботи. Лебег интеграл хоссасидан

$$|M\xi| = \left| \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) \right| \leq \int_{\Omega} |\xi(\omega)| P(d\omega) \leq M|\xi|$$

3-хосса. $M\eta$, $M\xi$ ва $M(\xi + \eta)$ ларнинг ихтиёрий икkitаси мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу муносабат ўринли

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

Исботи. Исботни дискрет ҳол учун келтирамиз. Фараз қиламиз ξ тасодифий миқдор $x_1, x_2, \dots$ қийматларни $p_1, p_2, \dots$ эҳтимолликлар билан, η тасодифий миқдор эса $y_1, y_2, \dots$ қийматларни $q_1, q_2, \dots$ эҳтимолликлар билан қабул қилсин. У ҳолда $\zeta = \xi + \eta$ тасодифий миқдор $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

қийматларни $p_{\kappa,m}$ эҳтимолликлар билан қабул қилади. Математик кўтилма таърифига кўра

$$M\zeta = \sum_{\kappa,m=1}^{\infty} (x_{\kappa} + y_m) p_{\kappa,m} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} x_{\kappa} \left(\sum_{m=1}^{\infty} p_{\kappa,m} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} p_{\kappa,m} \right) = \\ \sum_{\kappa=1}^{\infty} x_{\kappa} p_{\kappa} + \sum_{m=1}^{\infty} y_m q_m = M\xi + M\eta.$$

4-хосса. Ўзгармас сон c ни математик кутилма ишорасидан ташқарига чиқариб ёзиш мумкин.

$$Mc\xi = cM\xi$$

Исботи.

Таърифга кўра $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ эҳтимоллар фазосида

$$M(c\xi) = \int_{\Omega} c\xi(\omega) P(d\omega) = c \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = cM\xi$$

Кейинги икки хоссани исботсиз келтирамиз.

5-хосса. Агар $\alpha \leq \xi \leq \beta$ бўлса, $\alpha \leq M\xi \leq \beta$ бўлади.

6-хосса. . Агар $\xi \geq 0$ ва $M\xi = 0$ бўлса, у ҳолда $\xi \equiv 0$ муносабат 1 эҳтимоллик билан бажарилади.

7-хосса Ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорлар бўлса

$$M\xi\eta = M\xi M\eta$$

Исботи. Хоссанинг исботини о ва Ю миқдорлар узлуксиз тақсимотга эга бўлгандаги ҳол учун келтирамиз. $f_o(u)$ ва $f_{ю}(u)$ орқали мос равишда о ва Ю миқдорларнинг, $f_{\zeta}(u)$ орқали $\zeta = \xi\eta$ тасодифий миқдорнинг тақсимот зичликларини белгилаймиз. Таърифга асосан,

$$M\zeta = \int_{\Omega} \xi(\omega)\eta(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\zeta}(x, y) dx dy.$$

о ва Ю миқдорлар ўзаро боғлиқсиз бўлганидан $f_{\zeta}(u)$ қ $f_o(u)$ $f_{ю}(u)$ га эга бўламиз. У ҳолда охирги муносабат кўйидаги кўринишни олади.

$$M\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\zeta}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\xi}(x) f_{\eta}(y) dx dy = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\eta}(y) dy = M\xi M\eta.$$

хосса исбот бўлди.

Шундай қилиб, математик кутилма тасодифий миқдор қабул қила оладиган қийматларнинг ”ўртачаси” сифатида майдонга чиқди. Агар тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари мана шу ”ўртача”га етарлича яқин атрофида сочилган бўлса математик кутилма

тасодифий миқдор қабул қила оладиган қийматларни ялпи кўринишда изоҳлайди дейиш мумкин. Эндиги муаммо қанчалик “етарлича яқин атрофда” сочилган эканликни аниқлашдан иборат. Ушбуни баҳолаш **дисперсия** ва **ўртача квадратик четланиш** деб аталган сонли характеристикалар орқали амалга оширилади.

Таъриф 4. Таксимот функцияси $F(x)$ бўлган ξ тасодифий миқдорнинг **дисперсияси**

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 dF(x)$$

каби аниқланади.

Умумий ҳолда $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ эҳтимоллар фазосида берилган ξ тасодифий миқдор математик кутилмаси деб

$$D\xi = \int_{\Omega} (\xi(\omega) - M\xi(\omega))^2 P(d\omega)$$

интегралнинг сон қийматига (агар бу интеграл мавжуд бўлса) айтилади. Юқоридаги муносабатни

$$D\xi = M(\xi(\omega) - M\xi(\omega))^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

каби аниқлаймиз.

Тасодифий миқдор дисперсияси хоссалари.

Д1-хосса. Ўзгармас тасодифий миқдор дисперсияси нолга тенг: $Dc = 0$

Исботи: $Dc = M(c - Mc)^2 = M(c^2 - 2cMc + (Mc)^2) = c^2 - 2cMc + (Mc)^2 = c^2 - 2c^2 + c^2 = 0$

Ушбу исботда математик кутилма биринчи хоссасидан фойдаландик.

Д2-хосса. Ўзгармас сон c ни дисперсия ишорасидан ташқарига квадратга кўтарилган ҳолда чиқариб ёзиш мумкин.

$$Dc\xi = c^2 D\xi$$

Исботи.

Таърифга кўра $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ эҳтимоллар фазосида

$$D(c\xi) = \int_{\Omega} (c\xi(\omega) - Mc\xi(\omega))^2 P(d\omega) =$$

$$c^2 \int_{\Omega} (\xi(\omega) - M\xi(\omega))^2 P(d\omega) = c^2 D\xi$$

Хосса исбот бўлди.

Д3-хосса. Ўзаро боғлиқ бўлмаган ξ ва η тасодифий миқдорлар учун

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

Хосса исботи.

$$\begin{aligned}
D(\xi + \eta) &= M((\xi + \eta) - M(\xi + \eta))^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 - \\
&- 2((M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2) + (M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2 = \\
&= M\xi^2 + M\eta^2 - (M\xi)^2 - (M\eta)^2 = D\xi + D\eta
\end{aligned}$$

Ушбу исботда математик кутилманинг 7-хоссаси ишлатилди.

ξ тасодифий миқдорнинг **ўртача квадратик четлашиши**

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$$

каби аниқланади.

Таъриф 5. Тақсимот функцияси $F(x)$ бўлган ξ тасодифий миқдор учун x_0 нўқта тақсимотнинг **модаси** дейилади, агар $F(x_0)$ қ $\max F(x)$ бўлса.

Таъриф 6. Тақсимот функцияси $F(x)$ бўлган ξ тасодифий миқдор учун тақсимотнинг **медианаси** деб $F(x_0)$ қ 0.5 тенгламанинг ечими бўладиган x_0 нўқтага айтилади.

4.5. Баъзи узлуксиз тақсимот қонунлари

Текис тақсимот қонуни - $R(a;b)$.

$(a;b)$ чекли оралиқда қиймат қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлиб, унинг:

- Зичлик функцияси: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a;b); \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a;b). \end{cases}$
- Тақсимот функцияси: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & x < a \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$
- Математик кутилмаси: $MX = \frac{b+a}{2}$.
- Дисперсияси: $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Ўртача квадратик четлашиши: $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Кўрсаткичли тақсимот қонуни - $P(\lambda)$ ($\lambda > 0$).

Мусбат қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлиб, унинг:

- Зичлик функцияси: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$
- Тақсимот функцияси: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$
- Математик кутилмаси: $MX = \frac{1}{\lambda}$.
- Дисперсияси: $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.
- Ўртача квадратик четлашиши: $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Стандарт нормал тақсимот қонуни - $N(0;1)$.

$(-\infty; +\infty)$ оралиқда қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлиб, унинг:

- Зичлик функцияси: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.
- Тақсимот функцияси: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$
- Математик кутилмаси: $MX = 0$.
- Дисперсияси ва ўртача квадратик четлашиши: $DX = \sigma(X) = 1$.

$\varphi(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг қийматлари жадваллаштирилган.

Нормал тақсимот қонуни - $N(a; \sigma^2)$.

$(-\infty; +\infty)$ оралиқда қийматлар қабул қилувчи тасодифий миқдор бўлиб, унинг:

- Зичлик функцияси: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$.
- Тақсимот функцияси: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$

- Стандарт нормал тақсимот билан $F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ муносабат билан боғланган.
- Математик кутилмаси: $MX = a$.
- Дисперсияси: $DX = \sigma^2$
- Ўртача квадратик четлашиши: $\sigma(X) = \sigma$.
- Тасодифий миқдорнинг $(\alpha; \beta)$ ораликқа тушиш эҳтимоллиги:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Хусусан, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$

5-Мавзу

Кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар

Мавзу мақсади : Тингловчиларда кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар ҳақида, тасодифий вектор компоненталари дискрет ва узлуксиз миқдорлар бўлган ҳолда унинг тақсимооти ҳақида, тасодифий вектор компоненталари маргинал тақсимот қонунларини аниқлаш усуллари ҳақида назарий қуникмалар ҳосил қилиш. Икки ўлчовли тасодифий миқдор сонли характеристикалари ҳисоблашни ўрганиш. Ковариация ва корреляция коэффициентлари аҳамиятини билиш. Чизикли регрессия тенгламаларини аниқлай олиш ва маъносини англаш.

Ўқув саволлари

5.1.Кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар тақсимооти.Дискрет ва узлуксиз миқдорлар. Маргинал тақсимот қонунлари.

5.2.Икки ўлчовли тасодифий миқдор сонли характеристикалари.

5.3Ковариация ва корреляция коэффициентлари.Чизикли регрессия тенгламаси.

Ўтган мавзуларимизда мумкин бўлган қийматлари битта сон билан аниқланадиган тасодифий миқдорлар қаралган эди. Амалий масалаларда мумкин бўлган қийматлари иккита, учта ва х.к. n та сон билан аниқланадиган тасодифий миқдорлар билан иш куришга тўғри келади. Бундай миқдорларни **кўп ўлчовли миқдорлар** деб аталади.

Фараз қилайлик, бирор $\{\Omega, F, P\}$ эҳтимолик фазосида $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ миқдорлар берилган бўлсин ва $o(\omega)(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$ **n ўлчовли тасодифий векторни қарайлик.** $o(\omega)$ тасодифий векторнинг тақсимот функцияси

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P(\omega_1 < x_1, \omega_2 < x_2, \dots, \omega_n < x_n) \quad (1) \quad \text{каби аниқлаймиз.}$$

(1) муносабат билан аниқланган функция тақсимот функцияси бўлиши учун қўйидаги **мувофиқлик хоссаларига** бўйсунити лозим, яъни

$$F0. \quad 0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$$

$$F1. \quad \lim_{x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, +\infty) = 0,$$

$$F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$$

Ушбу хоссада лимит x_n ҳол учун олинган, лекин F1 хосса ихтиёрий аргумент бўйича лимит олинган ҳолида ўринли бўлиши керак.

F2. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ҳар бир аргументи бўйича камаймайдиган функция, яъни $\forall i$ учун. $x_i^1 \geq x_i^2$ эканидан

$$F(x_1, x_2, \dots, x_i^1, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

F3. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция ҳар бир аргументи бўйича чапдан узлуксиз функция.

$$P(\alpha_1 \leq \xi_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \xi_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \xi_n \leq \beta_n) = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) -$$

$$F4. \quad - \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i \leq j} p_{i,j} - \dots (-1)^n F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$p_{i,j,\dots,k}$ орқали $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ тақсимот функциясининг аргументларидан $u_i \leq b_i, u_j \leq b_j, \dots, u_k \leq b_k$ бўлган, қолган барча u_s ($s \neq i, j, \dots, k$) аргументлари b_s га тенг бўлгандаги қийматлари белгиланган. Масалан,

$$p_1KF(\bar{b}_1, b_2, b_3, \dots, b_n), p_2KF(b_1, \bar{b}_2, b_3, \dots, b_n)$$

$$p_{12}KF(\bar{b}_1, \bar{b}_2, b_3, \dots, b_n), p_{23}KF(b_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, b_4, \dots, b_n)$$

Агар $\xi(w)$ тасодифий вектор компоненталари o_i лар узлуксиз миқдорлар бўлса, у ҳолда зичлик функция деб аталаган ва қуйидаги хоссаларга эга функция мавжуд бўлади :

1. $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$;
2. $\int_{R^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$

Таксимот функцияси ва зичлик функцияси қуйидаги муносабатлар билан боғланади.

1. $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial F(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}$
2. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$

Кўп ўлчовли тасодифий миқдор хоссаларини хусусий ҳол - икки ўлчовли тасодифий миқдорлар мисолида кўриб чиқайлик. Ушбу хоссаларни ихтиёрий n ўлчовли тасодифий миқдорларга қўллаш китобхонга ҳавола. Шундай қилиб икки ўлчовли $o(\omega)(o_1, o_2)$ тасодифий векторни қарайлик.

Икки ўлчовли тасодифий векторларнинг тақсимот функциясини

$$F(x_1, x_2) \in P(o_1 < x_1, o_2 < x_2) \quad (2)$$

каби аниқлаймиз.

Тақсимот функциясининг хоссалари:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

$F(x, y)$ иккала аргументи бўйича камаймайдиган функция:

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ агар } x_2 > x_1 \text{ булса;}$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ агар } y_2 > y_1 \text{ булса}$$

$$F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(\infty, \infty) = 1.$$

$$F(x, \infty) = F_X(x), \quad F(\infty, y) = F_Y(y),$$

$F_{\xi_1}(x), F_{\xi_2}(y)$ -мос равишда o_1 ва o_2 ташкил этувчиларнинг тақсимот функцияси.

(X, Y) тасодифий нуқтанинг учлари $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ да бўлган D тўртбурчакка тушиш эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$P\{(X, Y) \in D\} = P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = \\ = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

Бу ерда, табиийки, $(x_1 < x_2, y_1 < y_2)$.

Ташкил этувчилари дискрет (узлуксиз) бўлган $o(\omega)$ (o_1, o_2) тасодифий вектор **икки ўлчовли дискрет (узлуксиз) тасодифий вектор** деб айтилади.

$o(\omega)$ тасодифий вектор дискрет бўлган ҳолда, унинг тақсимот қонуни деб $o(\omega)$ тасодифий векторнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари жуфтлиги (x_i, y_j) ва уларга мос равишдаги P_{ij} эҳтимолликларга айтилади. Ушбу ҳолда тасодифий векторнинг тақсимои жадвал кўришниши қуйидагича ёзилади :

$\omega_2 \backslash \xi_1$	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1i}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2i}	...	p_{2n}
·	·	·	·	·	·	·	·
..	..	..	..	..	..	..	·
y_j	p_{j1}	p_{j2}	p_{j3}		p_{ji}		p_{jn}
·	·	·	·	·	·	·	·
..	..	..	..	..	..	..	·
y_m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}		p_{mi}		p_{mn}

Бу ерда $p_{ij} = p(x_i; y_j)$ $KP(X = x_i, Y = y_j), (i \in 1, 2, \dots, n; j \in 1, 2, \dots, m)$.

Масалан,

$\omega_2 \backslash \xi_1$	7	9	11
-----------------------------	---	---	----

σ_1			
0	0,1	0,3	0,2
1	0,06	0,18	0,16

Бу ерда a_1, a_2 - ҳақиқий сонлар, σ_1 ва σ_2 мусбатлар сонлар, $|\rho| \leq 1$

Агар (2) муносабатда компонентлардан бири $+\infty$ бўлса тасодифий микдорнинг **маргинал тақсимомига** эга бўламиз, яъни

$$F_{\xi_1}(x) = F(x, +\infty) \text{ ва } F_{\xi_2}(y) = F(+\infty, y)$$

Икки ўлчовли дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда ҳар бир ташкил этувчисининг маргинал тақсимот қонунини топиш мумкин:

$$P\{\xi_1 = x_i\} = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \quad (i=1,2,K,n) \quad P\{\xi_2 = y_j\} = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \quad (j=1,2,K,m)$$

Масалан, дискрет $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ тасодифий вектор тақсимот қонуни қуйидаги жадвалда берилган бўлсин.

$\zeta_2 \backslash \zeta_1$	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}

У ҳолда $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ тасодифий векторнинг ζ_1 компонентасининг маргинал тақсимоми қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &: x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ P &: P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \end{aligned}$$

Бу ерда

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_{11} + P_{21} + P_{31} \\
P_2 &= P_{12} + P_{22} + P_{32} \\
P_3 &= P_{13} + P_{23} + P_{33} \\
P_4 &= P_{14} + P_{24} + P_{34}
\end{aligned}$$

$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ тасодифий векторнинг ζ_2 компонентасининг маргинал тақсимооти қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &: y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \\
q &: q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \\
q_1 &= P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} \\
q_2 &= P_{21} + P_{22} + P_{23} + P_{24} \\
q_3 &= P_{31} + P_{32} + P_{33} + P_{34}
\end{aligned}$$

Узлуксиз тасодифий векторларни $F(x, y)$ тақсимоот функцияси ёки $f(x, y)$ зичлик функцияси орқали аниқлаш мумкин.

$O(\Pi) \times O_1 \times O_2$ икки ўлчовли узлуксиз тасодифий векторнинг $f(x, y)$ зичлик функцияси деб унинг тақсимоот функциясидан олинган иккинчи тартибли аралаш ҳосила натижасига айтилади:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y) .$$

Тасодифий вектор зичлик функциясининг ҳоссалари:

$$f(x, y) > 0 .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv ; \quad \text{бу ерда } F(x, y) \text{ } O(\Pi) \times O_1 \times O_2 \text{ тасодифий}$$

векторнинг тақсимоот функцияси.

(O_1, O_2) тасодифий нуқтанинг учлари (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) , (x_2, y_2) $(x_1 < x_2, y_1 < y_2)$ нуқталарда бўлган D тўртбурчакка тушиш эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$P\{(\xi_1, \xi_2) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Компоненталарнинг маргинал зичлик функциялари қуйидаги формулалардан топилади:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Таъриф: $o(\text{ш})к(o_1, o_2)$ вектор тақсимои учун

$$F(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y) \quad \text{ёки} \quad f(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y).$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда o_1 ва o_2 тасодифий миқдорлар **ўзаро боғлиқ эмас** дейилади.

Теорема. Иккита o_1 ва o_2 тасодифий миқдор боғлиқсиз бўлиши учун $o(\text{ш})к(o_1, o_2)$ тасодифий векторнинг тақсимои учун қуйидаги

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \text{ёки} \quad f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарли

5.2. Икки ўлчовли тасодифий миқдор сонли характеристикалари.

Икки ўлчовли тасодифий миқдор сонли характеристикалари одатдаги математик кутилма ва дисперсиядан ташқари ковариация ва корреляция коэффициентлари ҳам киради.

$o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ тасодифий вектор ковариацияси

$$\text{cov}(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))к M[(\xi_1 - M_{\xi_1})(\xi_2 - M_{\xi_2})]$$

тушунилади. Умуман олганда кўп ўлчовли тасодифий миқдор сонли характеристикалари **ковариацион матрица** орқали берилади.

$$\text{cov}(\xi) = \begin{vmatrix} M(\xi_1 - M_{\xi_1})^2 & M(\xi_1 - M_{\xi_1})(\xi_2 - M_{\xi_2}) \\ M(\xi_2 - M_{\xi_2})(\xi_1 - M_{\xi_1}) & M(\xi_2 - M_{\xi_2})^2 \end{vmatrix}$$

$o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ компоненталарнинг математик кутилма ва дисперсиялари ҳамда $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ тасодифий нўқтанинг ихтиёрий **D** соҳага тушиш эҳтимоллигини топиш формулалари қуйидаги жадвалда келтирилган:

о ₁ (ш) ва о ₂ (ш) дискрет тасодифий микдорлар	о ₁ (ш) ва о ₂ (ш) узлуксиз тасодифий микдорлар
$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$	$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$
$MX = \sum_i \sum_j x_i \cdot p_{ij}$ $MY = \sum_i \sum_j y_j \cdot p_{ij}$	$MX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy$ $MY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy$
$DX = \sum_i \sum_j (x_i - MX)^2 \cdot p_{ij}$ $DY = \sum_i \sum_j (y_j - MY)^2 \cdot p_{ij}$	$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x, y) dx dy$ $DY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - MY)^2 \cdot f(x, y) dx dy$
$P\{(X, Y) \in D\} = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$	$P\{(X, Y) \in D\} = \int_D f(x, y) dx dy$

Компоненталарнинг дисперсияларини хисоблаганда $DX \text{ қ } MX^2 - (MX)^2$ фойдаланиш қулайроқ, яъни:

$$D\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x, y) dx dy - (M\xi_1)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx - (M\xi_1)^2.$$

$$D\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(x, y) dx dy - (M\xi_2)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y) dy - (M\xi_2)^2.$$

Қуйидаги катталикларга $\sigma(\xi_1) = \sqrt{D\xi_1}, \sigma(\xi_2) = \sqrt{D\xi_2}$ - о₁(ш) ва о₂(ш) тасодифий микдорларнинг **ўртача квадратик четланишлари** дейилади.

($M\xi_1, M\xi_2$) нўқта (о₁(ш), о₂(ш)) икки ўлчовли тасодифий микдор қийматларининг **сочилиш маркази** дейилади.

Икки ўлчовли тасодифий вектор учун ковариация коэффициентлари 0 га тенг бўлса, унинг компонентлари корреляцияланмаган, акс ҳолда корреляцияланган дейилади.

Икки ўлчовли таксимот қонунлирига мисоллар

1. Икки ўлчовли $a_1 \leq o_1 \leq b_1, a_2 \leq o_2 \leq b_2$ тўғри тўртбурчакда теқис таксимланган $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ тасодифий вектор таксимот функцияси

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{агар } \xi_1 \geq a_1 \text{ ёки } \xi_2 \geq a_2 \\ \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & \text{агар } a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2 \\ 1 & \text{агар } \xi_1 \geq b_1 \text{ ёки } \xi_2 \geq b_2 \end{cases}.$$

2. Зичлик функцияси

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$

муносабат билан аниқланган $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ вектор нормал қонун бўйича таксимланган тасодифий вектор дейилади.

Бу ерда $a_1 \in (-\infty, +\infty), a_2 \in (-\infty, +\infty), \sigma_1 \in (0, +\infty), \sigma_2 \in (0, +\infty)$ ва $\rho \in [-1, 1]$

5.3 Ковариация ва корреляция коэффициентлари.

Чизикли регрессия тенгламаси.

Агар $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ – икки ўлчовли дискрет тасодифий вектор бўлса, ковариация коэффициент қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j p_{ij} (x_i - M\xi_1) \cdot (y_j - M\xi_2) = \sum_i \sum_j p_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - M\xi_1 \cdot M\xi_2.$$

Агар $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ – икки ўлчовли узлуксиз тасодифий вектор бўлса, ковариация коэффициент қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi_1)(y - M\xi_2) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M\xi_1 \cdot M\xi_2.$$

Бу ерда $f(x, y)$ - $o(\text{ш})к(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ – икки ўлчовли узлуксиз тасодифий микдорнинг зичлик функцияси.

$$\rho = \rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}} \quad \text{муносабат билан}$$

аниқланган катталикни $o_1(\text{ш})$ тасодифий вектор $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ компоненталари ўртасидаги **корреляция коэффиценти** дейилади. Ҳар қандай иккита $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ тасодифий миқдорлар учун $-1 \leq \rho(\xi_1, \xi_2) \leq 1$.

Корреляция коэффиценти $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ миқдорлар ўртасидаги боғлиқлик даражасини аниқлайди.

Агар $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаса корреляция коэффиценти $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$ ва бу ҳолда тасодифий миқдорлар **корреляцияланмаган** дейилади. Иккита ўзаро корреляцияланган тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлади, бироқ аксинчаси ўринли бўлмаслиги мумкин (яъни тасодифий миқдорларнинг ўзаро боғлиқмаслигидан корреляция коэффиценти нолга тенглиги келиб чиқади; корреляция коэффиценти нолга тенглигидан уларнинг боғлиқ эмаслиги келиб чиқмайди; корреляция коэффиценти нолдан фарқлигидан уларнинг боғлиқ эканлиги келиб чиқади).

$(o_1(\text{ш}), o_2(\text{ш}))$ икки ўлчовли тасодифий вектор бўлиб, унинг ташкил этувчилари $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ ўзаро боғлиқ бўлган тасодифий миқдорлар бўлсин. Улардан биттасини иккинчисининг чизикли функцияси сифатида тасвирлаймиз: $\xi_2 \cong g(\xi_1) = a\xi_1 + b$.

$o_2(\text{ш})$ тасодифий миқдорнинг $o_1(\text{ш})$ тасодифий миқдорга **чизикли ўрта квадратик регрессияси** (ёки оддий чизикли регрессияси) қуйидаги кўринишга эга:

$$g(x) = M\xi_2 + \rho \frac{\sigma_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_1}} (x - M\xi_1),$$

бу ерда $M o_1, M o_2$ - математик кутилмалар, $\sigma_{\xi_1} = \sqrt{D\xi_1}, \sigma_{\xi_2} = \sqrt{D\xi_2}$ - ўрта квадратик четлашишлар ва $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2)$ - $o_1(\text{ш})$ ва $o_2(\text{ш})$ тасодифий

миқдорларнинг корреляция коэффиценти. Қуйидаги $b = \rho \frac{\sigma_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_2}} = \text{cov}(\xi_1, \xi_2) / D\xi_1$

коэффициентни $\sigma_2(\text{ш})$ тасодифий микдорнинг $\sigma_1(\text{ш})$ тасодифий микдорга бўлган **регрессиясининг коэффициенти** дейилади. $y - M\xi_2 = \rho \frac{\sigma_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_1}} (x - M\xi_1)$

тўғри чизик **регрессия тўғри чизиғи** дейилади. $\sigma_{\xi_2}^2 (1 - \rho^2)$ катталик $\sigma_2(\text{ш})$ тасодифий микдорнинг $\sigma_1(\text{ш})$ тасодифий микдорга нисбатан **қолдиқ** (остаточная) **дисперсияси** дейилади. Бу катталик $\sigma_2(\text{ш})$ ни $g(x) = aX + b$ чизикли функция билан алмаштирилганда йўл қўйилган хатоликнинг микдорини билдиради. Корреляция коэффициенти $\rho = \pm 1$ бўлганида қолдиқ дисперсия нолга тенг ва $\sigma_1(\text{ш})$ ва $\sigma_2(\text{ш})$ тасодифий микдорлар орасида эса ўзаро чизикли функционал боғлиқлик бор бўлади.

$\sigma_1(\text{ш})$ тасодифий микдорнинг $\sigma_2(\text{ш})$ тасодифий микдорга бўлган тескари регрессияси тенгламасини бериш мумкин:

$$x - M\xi_1 = \rho \frac{\sigma_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_2}} (y - M\xi_2),$$

бу ерда $\rho \frac{\sigma_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_2}}$ - $\sigma_1(\text{ш})$ микдорнинг $\sigma_2(\text{ш})$ микдорга бўлган регрессия коэффициенти ва мос равишда $\sigma_{\xi_1}^2 (1 - \rho^2)$ катталик $\sigma_1(\text{ш})$ микдорнинг $\sigma_2(\text{ш})$ микдорга нисбатан қолдиқ дисперсияси.

Агар $\rho = \pm 1$ бўлса, у ҳолда иккала $y - M\xi_2 = \rho \frac{\sigma_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_1}} (x - M\xi_1)$ ва

$x - M\xi_1 = \rho \frac{\sigma_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_2}} (y - M\xi_2)$ регрессия чизиклари устма - уст тушади.

Тенгламалардан кўриниб турибдики, иккала регрессия чизиғи ҳам $(M\sigma_1, M\sigma_2)$ нуқта, яъни (σ_1, σ_2) икки ўлчовли тасодифий микдорнинг сочилиш марказидан ўтади.

1-масала. (X, Y) икки ўлчовли тасодифий микдор қуйидаги

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi} & , \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ эллипс ичида} \\ 0 & , \quad \text{эллипсдан ташқарида} \end{cases}$$

зичлик функцияси билан берилган. X, Y - ўзаро боғлиқ бўлган ва корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар эканини исботланг.

Ечиш: X, Y ташкил этувчиларнинг илгари топилган зичлик функцияларидан фойдаланамиз (7- масала, 2.7-§):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2} & , \quad |x| < 3; \\ 0 & , \quad |x| \geq 3. \end{cases} \quad \text{ва} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2} & , \quad |y| < 2; \\ 0 & , \quad |y| \geq 2. \end{cases}$$

Қуйидаги $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун X ва Y ўзаро боғлиқ бўлган тасодифий миқдорлар. X билан Y корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар эканини исботлаш учун $cov(X,Y) = 0$ эканини кўрсатиш кифоя.

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)(y - MY) f(x,y) dx dy$$

$f_X(x)$ зичлик функцияси ОҲ ўқиға нисбатан симметрик бўлгани учун $MX=0$. Худди шунингдек $MY=0$. Демак,

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy.$$

$f(x,y)$ ўзгармасға тенг бўлгани учун уни интеграл белгиси ташқарисига чиқариб ёзиш мумкин:

$$cov(X,Y) = f(x,y) \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dx \right) dy.$$

Ички интеграл нолға тенг, чунки интеграл остидаги функция ток, интеграллаш чегараси координатлар бошиға нисбатан симметрик. Демак, $cov(X,Y) = 0$, яъни X, Y тасодифий миқдорлар корреляцияланмаган.

2-масала. 2.7-§ даги 8-масаладаги (X,Y) икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг ковариация ва корреляция коэффициентларини топинг.

(X,Y) икки ўлчовли тасодифий миқдор зичлик функцияси орақали берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 \cdot x \cdot y \cdot \exp(-x^2 - y^2), & x > 0, \quad y > 0; \\ 0, & \text{ёки} \quad x < 0 \quad \text{ёки} \quad y < 0. \end{cases}$$

Ечиш: Аввалроқ ташкил этувчиларнинг зичлик функциялари

$$f_X(x) = 2x \cdot \exp(-x^2) \quad (x > 0), \quad f_Y(y) = 2y \cdot \exp(-y^2) \quad (y > 0)$$

ва микдорий характеристикалари топилган эди:

$$MX = MY = \sqrt{\pi} / 2; \quad DX = DY = 1 - \pi / 4; \quad \sigma(X) = \sigma(Y) = \sqrt{1 - \pi / 4}.$$

Буларни билган холда ковариация ва корреляция коэффициентларини топамиз:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - MX \cdot MY = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2) dx dy - \frac{\pi}{4} = \\ &= 4 \left(\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy \right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Бўлаклаб интеграллаб, ҳамда $\int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Пуассон интегралли)

эканлигидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$cov(X, Y) = 4 \left(\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} y^2 \exp(-y^2) dy \right) - \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$\text{Демак, } \rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = 0.$$

$$\text{Жавоб: } cov(X, Y) = 0, \quad \rho(X, Y) = 0.$$

3-масала. 2.7-§ даги 1-масаладаги (X,Y) икки ўлчовли тасодифий микдор учун Y нинг X га регрессия чизиғини топинг. (X,Y) икки ўлчовли тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича:

X \ Y	x ₁ к2	x ₂ к5	x ₃ к10
y ₁ к1	0,30	0,10	0,10
y ₂ к4	0,15	0,25	0,10

Ечиш. X ва Y ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунлари аввалроқ топилган эди:

$$\begin{array}{lll} X: & x_1 \text{к} 2 & x_2 \text{к} 5 & x_3 \text{к} 10 \\ P: & 0,45 & 0,35 & 0,20 \end{array} \quad \begin{array}{ll} Y: & y_1 \text{к} 1 & y_2 \text{к} 4 \\ P: & 0,50 & 0,50 \end{array}$$

X ва Y ташкил этувчиларнинг сонли характеристикалари, яъни математик кутилма, дисперсия ва ўртача квадратик четлашишлари қуйидагича эди:

$$MX = 4.65, \quad DX = 8.9275, \quad \sigma(X) = 2.988$$

$$MY = 2.5; \quad DY = 2.25; \quad \sigma(Y) = 1.5$$

Ковариация ва корреляция коэффицентларини топамиз:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j p_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - MX \cdot MY = 12,3 - 4,65 \cdot 2,5 = 0,675.$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{0,675}{\sqrt{8,927 \cdot 2,25}} = 0,1506.$$

Y нинг X га регрессия коэффиценти қуйидагига тенг:

$$b = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \text{cov}(X, Y) / DX = 0,675 / 8,9275 = 0,0756.$$

Демак, $y - MY = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - MX)$ регрессия чизиғи қуйидаги кўринишда бўлади:

$y - 2,5 = 0,0756 \cdot (x - 4,65)$ ёки $y = 0,0756 \cdot x + 2,148$. Y тасодифий миқдорнинг X га

нисбатан қолдиқ дисперсияси қуйидагига тенг:

$$\sigma_Y^2 (1 - \rho^2) = 2,25 \cdot (1 - 0,1506^2) = 2,199.$$

$$\text{Жавоб: } y = 0,0756 \cdot x + 2,148; \quad \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) = 2,199.$$

4-масала. (X, Y) икки ўлчовли тасодифий миқдор

$0 \leq x \leq \pi/2$; $0 \leq y \leq \pi/2$ квадрат ичида $f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x + y)$ зичлик функцияси

билан берилган. Квадратдан ташқарида $f(x, y) = 0$. Тўғри ва тескари регрессия тенгламасини топинг.

Ечиш: X ташкил этувчининг математик кутилма ва дисперсиясини топамиз:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(x + y) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x, y) dx dy - (MX)^2 = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x + y) dx dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Икки маротаба бўлаклаб интегралласак, $DX = (\pi^2 + 8\pi - 32) / 16$.

Худди шунингдек, Y учун: $MY = \pi / 4$; $DY = (\pi^2 + 8\pi - 32) / 16$.

Ковариация коэффициентини топамиз:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x, y) dx dy - MX \cdot MY = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \cdot y \cdot \sin(x+y) dx dy - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx -0,04605. \end{aligned}$$

Демак, корреляция коэффициенти қуйидагига тенг:

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}} = -\frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32} = -0,245.$$

Y нинг X га тўғри регрессия чизиғининг коэффициентини топамиз:

$$b = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = cov(X, Y) / DX = -0,2454. \quad Y \text{ ҳолда } y - MY = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - MX) \text{ регрессия}$$

$$\text{чизиғи қуйидагига тенг бўлади:} \quad y - \frac{\pi}{4} = -0,2454 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ёки}$$

$$y = -0,2454 \cdot x + 0,9781. \quad Y \text{ тасодифий миқдорнинг } X \text{ тасодифий миқдорга нисбатан қолдиқ дисперсияси } \sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0,17635.$$

X нинг Y ка тескари регрессия тенгламасини ҳам худди шу каби топамиз. X нинг Y ка регрессия коэффициентини топамиз:

$$b_I = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = cov(X, Y) / DY = -0,2454. \quad \text{Тескари регрессия тенгламаси}$$

$$x - MX = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - MY) \quad \text{формуладан} \quad x = -0,2454 \cdot y + 0,9781. \quad X \text{ тасодифий}$$

$$\text{миқдорнинг } Y \text{ тасодифий миқдорга нисбатан дисперсияси } \sigma_X^2(1 - \rho^2) = 0,17635.$$

Жавоб: Тўғри регрессия тенгламаси: $y = -0,2454 \cdot x + 0,9781$

Тескари регрессия тенгламаси: $x = -0,2454 \cdot y + 0,9781$

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

6.1 Математик статистика предмети

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани тасодифий ходисалар қонуниятини ўрганиши ҳақида юқорида айтиб ўтилган эди.

Ушбу масала доирасида бир хил усул ва услубларни ишлатилгани билан эҳтимоллар назарияси ва математик статистика маълум маънода иккита мустақил соҳа ҳисобланади. Гап шундаки, эҳтимоллар назарияси тасодифий ходисаларни аниқ ва маълум бўлган бирор математик модел доирасида ўрганади. Бошқача айтганда, тасодифий ходиса учун тегишли математика модел доирасида, оддий эҳтимолликлар орқали биз дастлабки тасодифий микдорга боғлиқ бўлган бошқа мураккаб ходисалар эҳтимолини аниқлаш устида иш олиб борамиз.

Математик статистика эса, маълум маънода, эҳтимоллар назарияси масаласига тескари масала билан шуғулланади. Бизни қизиқтираётган тасодифий ходисалар табиатини аниқлаш мақсадида ўтказилган тажрибалар асосида математик статистика шу тасодифий ходиса табиатини характерлайдиган назарий эҳтимоллик моделини қўради. Бошқача сўз билан айтганда, математик статистика тасодифий ходиса учун математик моделни тажриба асосида олинган унинг қийматлари асосида аниқлаб беради. Дастлаб қараганда содда қўрингани билан бу анча катта ва муаммоли масаладир. Бу масала натижасини олдиндан башорат қилиб бўлмас ходисалар билан боғлиқ бўлгани учун ҳам унинг турли қўринишлари, ҳолатлари, демакки, ҳал этиш нинг турли услублари мавжуд.

Биз Ушбу қўлланма доирасида бизни амалий жиҳатдан қизиқтирадиган ва ўрганадиган математик статистика туркум масалалари доираси билан танишиб чиқамиз.

1. Тажриба натижалари асосида тасодифий микдор (тасодифий ходиса) нинг номаълум таксимот қонунини такисмот функцияни белгилаш.

Бунда масала куйидагича кйилади. Утказилган узаро богликсиз n та тажрибалар натижасида ξ тасордифий микдорнинг $x_1, x_2, \dots, x_n$ кийматлари олинган. Ушбу кийматлар асосида ξ микдорнинг номаълум $F_\xi(x)$ таксимот функциясини баҳолаш.

2. Таксимотнинг номаълум параметрларини баҳолаш.

Масала куйилиши ξ тасодифий микдор бирор аник курунишдаги таксимот функциясига эга. Аммо бу таксимот функцияси номаълум параметрларга боглик. ξ тасодифий микдorni тажрибавий $x_1, x_2, \dots, x_n$ кийматлари асосидифий микдорини тажрибавий таксимот функциясини номаълум параметрларини баҳолаш талаб килинади.

3. Статистик гипотеза (тахминларни) текшириш.

Бундай масалаларда ξ та содифий микдор номаълум таксимот функцияси хакида тахмин илгари сурилади. ξ микдор тажриба кийматлари $x_1, x_2, \dots, x_n$ асосида тахмин текширилади. Бунинг натижасида олинган ξ тажрибавий кийматлари гипотеза тахмининига мувофик келиши аникланади.

Хар қандай фан соҳасидаги каби математик статистика асосида ҳам бошлангич тушунчалар булиб, улар билан танишмай тажрибавий натижаларни замонавий урганиш усулларини узлаштириб булмайди. Шу сабабли ушбу тушунчаларни танишишга тухталамиз.

3.1. Танланма. Эмпирик тақсимот функцияси.

Полигон. Гистограмма.

Бирор сифат еки микдорий аломатга кўра объектлар тўплами тахлил килинаётган бўлсин. Фараз килайлик кўп сондаги бир турдаги предметлар ёки бирор бир жараёнга тегишли ходисани қандайдир сифати ёки ҳолати бизни кизиктирмокда (масалан, деталнинг улчамлари, микдори, махсалот оғирлиги ёки ишлаб чиқариш жараёни технологияси) сифати.

Танланма (танланма тўплам) деб тахлил учун тасодикий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади. Танланма олинган умумий тўпламга **бош тўплам** деб аталади. **Танланма** еки **бош тўплам хажми** деб тўламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, агар 1000 та деталдан сифатини текшириш учун 100 детал танлаб олинган бўлса, бош тўплам хажми $N \approx 1000$ ва танланманинг хажми $n \approx 100$ га тенг бўлади.

Танланманинг ҳар бир элементи **варианта** деб аталади. Тартибланган танланма **вариацион қатор** деб аталади.

Бош тўпладан танланма олинган ва унда x_1 қиймат n_1 марта, $x_2 - n_2$ марта ва а.х. x_k қиймат n_k марта кузатилган бўлсин. У ҳолда танланманинг

ҳажми $n = \sum_{i=1}^k n_i$ га тенг. n_i катталиқ - x_i вариантанинг **частотаси**, $w_i = \frac{n_i}{n}$

катталиқ эса **нисбий частотаси** деб аталади. Нисбий частоталар учун

қуйидаги тенглик ўринли: $\sum_{i=1}^k w_i = 1$.

Танланманинг **статистик тақсимои** еки **статистик қатори** деб варианталар ва уларга мос келган частоталар (нисбий частоталар)дан иборат ушбу жадвалга айтилади:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_k \end{pmatrix} \text{ еки } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_k \end{pmatrix}.$$

Танланманинг **эмпирик тақсимот функцияси** деб x нинг ҳар бир қиймати учун қуйидагича аниқланган $F^*(x)$ функцияга айтилади:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

бунда n_x - x қийматдан кичик бўлган варианталар сони; n – танланма хажми. Танланманинг эмпирик функциясидан фарқли бош тўплам учун аниқланган ушбу функция назарий тақсимот функцияси $F(x)$ деб аталади. Эмпирик тақсимот функцияси назарий тақсимот функцияни баҳолаш учун ишлатилади.

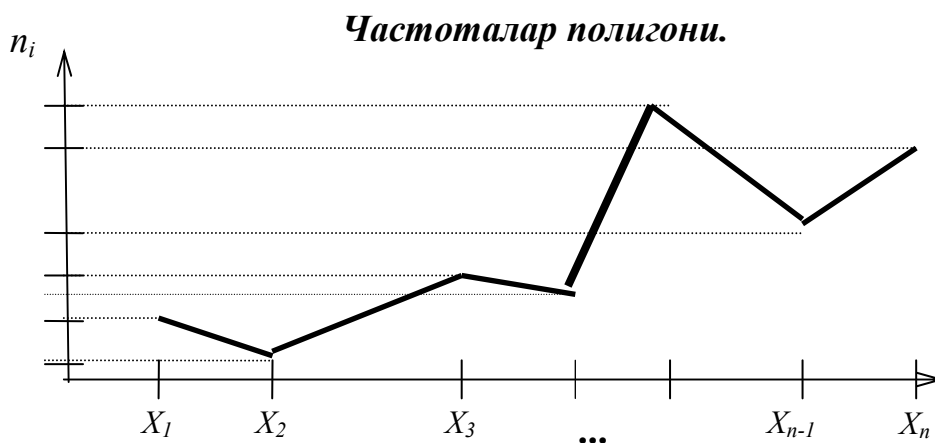
Эмпирик тақсимот функциясининг хоссалари:

1. Эмпирик тақсимот функциясининг қийматлари $[0;1]$ кесмада етади..
2. $F^*(x)$ - камаймайдиган функция.
3. Агар x_1 – энг кичик варианта бўлса, у холда $x \leq x_1$ лар учун $F^*(x) = 0$; ва x_k – энг катта варианта бўлса, $x > x_k$ лар учун $F^*(x) = 1$.

Танланмани график усулида тасвирлаш учун полигон ва гистограммалардан фойдаланилади.

Частоталар полигони деб $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Частоталар полигонини қуриш учун абсциссалар ўқида x_i вариантлар қийматлари ва ординаталар ўқида уларга мос келган частоталар n_i қийматлари белгиланади. Координаталари $(x_i; n_i)$ жуфтликлардан иборат нуқталар кесмалар билан туташтирилади.

Нисбий частоталар полигони координаталари $(x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_k; w_k)$ булган нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади



Танланмани график усулда тасвирлашда танланманинг хажми кам булганда полигондан, агар хажми катта бўлса еки кузатилаётган катталиқ узлуксиз характерга эга бўлса гистограммадан фойдаланилади.

Частоталар гистограммаси (еки нисбий частоталар гистограммаси)

деб тўғритўртбурчаклардан иборат шундай зинапоясимон фигурага айтиладики, i - тўғритўртбурчак асоси h узунликдаги $[x_{i-1}; x_i]$ қисм интервалдан иборат бўлиб, баландлиги эса n_i/h нисбатга (еки w_i/h нисбатга) тенг. Гистограмма қуриш учун танланманинг барча вариантлари етган интервал h қадам билан $[x_{i-1}; x_i]$ (яъни $x_i = x_{i-1} + h$) қисм интервалларга бўлинади ва ҳар бир интервал учун унга тушган вариантлар частоталарининг йиғиндиси n_i топилади. Сўнг қисм интервалларни асос қилиб $\frac{n_i}{h}$ (нисбий частоталар гистограммаси учун $\frac{n_i}{n \cdot h} = \frac{w_i}{h}$) баландликдаги тўғри тўртбурчаклар қурилади. i тўғритўртбурчак юзаси $\frac{n_i}{h} \cdot h = n_i$ га, яъни i - қисм интервалга тушган вариантлар частотасига тенг (нисбий частоталар учун эса $\frac{w_i}{h} \cdot h = w_i = \frac{n_i}{n}$ га, яъни i - қисм интервалга тушган вариантлар нисбий частотасига тенг) Демак, частоталар гистограммаси юзаси барча частоталар йиғиндиси, яъни танланманинг ҳажмига тенг. Нисбий частоталар гистограммаси юзаси эса барча нисбий частоталар йиғиндиси, яъни бирга тенг.

Намунавий мисоллар ечиш.

Мисол 1. *Ҳажми $n=20$ га тенг бўлган танланма частоталар тақсимооти қуйидагича:*

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 & 5 & 7 & 8 \\ n_i & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нисбий частоталар тақсимоотини топинг.

Ечиш: *Нисбий частоталарни топиш учун частоталарни танланма ҳажмига бўламиз:*

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{20} = 0.2; \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{7}{20} = 0.35; \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{20} = 0.3; \quad w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

Танланманинг нисбий частоталар тақсимооти қуйидагича кўринишга эга:

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 & 5 & 7 & 8 \\ w_i & 0,2 & 0,35 & 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$$

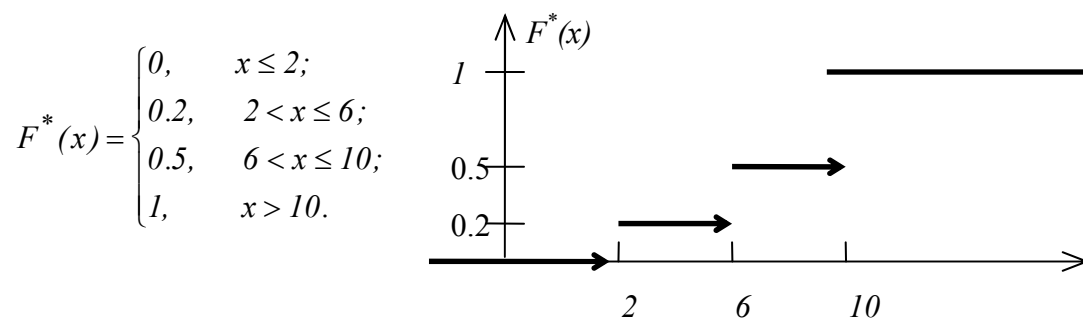
Хисоблашларни текшираимиз: $\sum_{i=1}^4 w_i = 0,2 + 0,35 + 0,3 + 0,15 = 1$.

Мисол 2. Қуйидаги статистик қатор орқали берилган танланма учун эмпирик тақсимот функциясини қуринг:

$$\begin{pmatrix} x_i & 2 & 6 & 10 \\ n_i & 12 & 18 & 30 \end{pmatrix}.$$

Ечиш: Танланманинг ҳажми n ни топамиз: n қ $12+18+30$ қ 60 . Энг кичик варианта x_1 қ 2 , демак, $x \leq 2$ лар учун $F^*(x) = 0$. $x < 6$ тенгсизликни қаноатлантирувчи вариантлар биргина x_1 қ 2 ва у варианта 12 марта кузатилган, демак $2 < x \leq 6$ лар учун $F^*(x) = 12 / 60 = 0,2$. $x < 10$ тенгсизликни қаноатлантирувчи вариантлар иккита $x_1 = 2$ ва $x_2 = 6$; улар $12+18$ марта кузатилган, демак, $6 < x \leq 10$ лар учун $F^*(x) = 30 / 60 = 0,5$. x_3 қ 10 энг катта варианта бўлгани учун $x \leq 10$ ларда $F^*(x) = 1$.

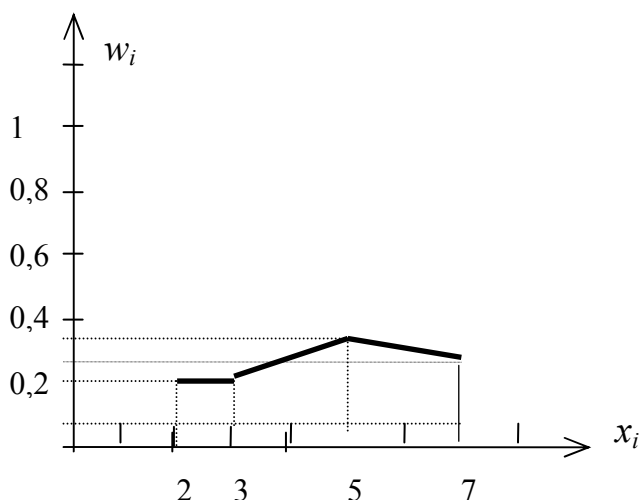
Демак, изланаётган эмпирик тақсимот функцияси ва унинг графиги қуйидаги кўринишга эга:



Мисол 3. Қуйидаги статистик тақсимот учун нисбий частоталар полигонини қуринг:

$$\begin{pmatrix} x_i & 2 & 3 & 5 & 7 \\ w_i & 0,2 & 0,2 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Ечиш: *ХОУ координаталар текислигида координатлари $(x_i; w_i)$ бўлган M_i нуқталарни белгилаймиз ва уларни кесмалар билар туташтирамиз. Нисбий частоталар полигони ушбу йўл билан ҳосил бўлган синиқ чизиқдан иборат.*



Бу ҳолда ушбу сифат ёки ҳолатни характерлайдиган барча кийматлар тупламини **бош туплам** деб аталади.

Бош туплам элементларидан тасодифий равишда ажратиб олинган қисми **танлама туплам** дейилади. Бош тўплам ёки танлама тупламдаги элементлар сонини бош туплам ёки танланма туплам **ҳажми** дейилади.

Энди математика статистиканинг биз урганадиган 1 туркум масалаларни куриб чиқамиз.

6.2. Статистик қатор. Тақсимот функцияси.

Фараз қилайлик тақсимот қонуни номаълум бўлган бирор тасодифий микдорни урганмоқдамиз. Шу мақсадда тасодифий микдор устида тажриба (кузатувлар) утказиб унинг бир қатор кийматлари олинган. Олинган кийматларни икки сатрли жадвал қуринишида жойлаштирамиз.

Биринчи сатрда тажриба (кузатув рақамини унинг остига шу тажрибадаги тасодифий микдор кийматини жойлаштирамиз.

I	1	2	3	4		n-2	n-1	n
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4		x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

Ушбу жадвал тасодифий микдор кийматлари статистик катори дейилади.

Статистик катор тасодифий микдор кийматлари бош тупламидан олинган танланма булиб, у микдор кийматлари дастлабки шакли хисобланади. Ушбу кийматлар турига усуллар ёрдамида кайта ишланади. Шу усуллардан бири улар ёрдамида тасодифий микдор статистик тахсимот функциясини куриш.

Статистик тахсимот функцияси деб $\{\xi < x\}$.

Бу ерда $F^*(x)$ фугкция эхтимоллар назариясидаги диферет микдор тахсимот функциясидай курилади. Бундан хулоса килиб айтишим из мумкинки, хар кандай (дискрет, узлукли) тасодифий микдорнинг статистик тахсимот функцияси узлукли, погонасимон функция, погоналар орасидаги сакрашлар тахсодифий микдор кабул килган кийматлар, статистик катордаги нукталарда булади. Сакрашлар катталиги шу нукта нисбий частотасига тенг.

Айтиб утиш жоизки бернолли теоремасига биноан танланма хажми P катталашган сари $F_n(x)$ хакикий $F(x)$ га интилади. Яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x) = F(x)$ мисол узокликни улчаш асбобида тажрибалар утказилади. Хатоликлик статистик куринишда ёзилган.

i	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19	20.
x_i	5	-	10	15	3	-	-15	2	1	1	-4	-2	2	1	-8	-	16	10	-	18
v	8					6		0	2	5			0	4		12			5	

Ушбу статистик сектор асосида тахсимот функциясини тузинг.

Ушбу танланма учун электрик тахсимот конунининг тузамиз. Бунинг учун тасодифий микдорнинг тажриба асосида олинган кийматларини усиш тартибида жойлаштириб вариацион катор хосил киламиз.

$X_{(1)}$ қ 15 $X_{(2)}$ қ-12 $X_{(3)}$ қ-8 $X_{(4)}$ қ-6 $X_{(5)}$ қ-5 $X_{(1)}$ қ -4

$X_{(7)}$ қ-2 $X_{(8)}$ қ-3 $X_{(9)}$ қ5 $X_{(10)}$ қ10 $X_{(11)}$ қ12 $X_{(12)}$ қ170
 $X_{(13)}$ қ15 $X_{(14)}$ қ16 $X_{(15)}$ қ18 $X_{(16)}$ қ20

Вариацион катор $x_{(1)}$	- 15	- 12	-8	-6	-5	-4	-2	3	5	10	12	14	15	16	18	20
Учраганлик n_i	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	1	2
Учраганлик частотаси $\frac{n_i}{i}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Энди вариацион катордаги кийматларни x укига жойлаштирамиз.

$$F \cdot (-15) = P(\zeta < -15) = 0$$

хқ-15 киймат учровчанлик частотаси $\frac{1}{20}$, демак бу нуктада $\frac{1}{20}$ катталиктаги сакраш мумкин.

х-15 ва-12 ораликдаги функция киймати $\frac{1}{20}$, -12 даги яна $\frac{1}{20}$ га тенг

булган сакрашга эгамиз. $\Phi + F(x)$ функциянинг $\{-12; -8\}$ ораликдаги киймат

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20}$$

-8 нуктада эса $\frac{2}{20}$ га тенг сакраш амалга ошади. Демак $\{-8; -6\}$ оралик

функция киймати

$$\frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{4}{20}$$

Эски кийматга сакраш катталиги кушилди. Ушбу жараённи охирига етказиб

F(X) ПОГОНАСИМОН ЧАПДАН УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯ

Беренули схемасига кура (n танлаанма хажми) катта булганда эмперик таксимот функцияси интилади.

Таъкидлаш лозимки, аксарият холларда n нинг катта кийматларида $F(x)$ функция куриш куп меҳнат талаб киладиган иш. Шу сабабли таксимот функциясини эмас, зичлик функциясини куриш етарли булади. Зичлик функцияси учун курилган бундай функциялар полигон ва гистограммалар дейилади.

ГИСТОГРАММА

Тажриба (кузатув) лар сони куп булганда олинган кийматларни статистик катор куринишида тасвирлаш кийинрок булади ва унинг ёрдамида хулоса юритиш ҳам осон эмас. Бундай холларда таксимот гистограммаси курилади. Куйида шу гистограмма таркибини куришни куриб чиқамиз.

Фараз килайлик таксимот функциясини номаълум булган ζ тасодикий миқдорни кузатиш натижасида унинг $x_1, x_2, \dots, x_n$ кийматлари олинади. Гистограмма куриш учун куйидаги ишларни амалга оширамиз.

1. $x_{\max} - x_{\min}$ ларни аниқлаймиз. ҳисоблаймиз. Ушбу катталиқ ζ нинг кийматлари ётган оралиқ катталигини билдиради.
2. $x_{\max} - x_{\min}$ ҳисоблаймиз. Ушбу катталиқ ζ нинг кийматлари ётган оралиқ катталигини билдиради.
3. $x_{\max} - x_{\min}$ оралиқни K та тенг булакка буламиз. Бу ерда K нинг киймати қандай олиш масала меҳнатига ва танланма ҳажмига боғлиқ. демак.

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \text{ ни ҳисоблаймиз.}$$

4. Энди куйидагиларни ҳисоблаймиз.

$$y_0 \text{ K } x_{\min}$$

$$x_1 \text{ K } x_0 + h$$

$$y_2 \text{ K } y_1 + h$$

$$y_k \text{ K } y_4 + h$$

ушбу жараёни $y_k \geq x_{\max}$ га эришмагунча дввом этирамиз.

5. $\{y_{i-1}, y_i\}$ ораликлар учун ζ миқдор учраган кийм атлар сонини аниқлаб, учраганлик частотасини хисоблаймиз.
6. Координата текислигидаги $\{y_{i-1}, y_i\}$ ораликда баландлиги P_i булган тугри туртбурчак чизамиз, хосил булган фигура юзаси 1 га тенг ва у ζ тасодикий миқдор таксимоти гистограмма деб аталади.

Юкорида куриб чиқилган масалаларни статистик катор ёрдамида гистограммага карайлик.

1. $x_{\min}$ қ -15, $x_{\max}$ қ 20
2. $x_{\max} - x_{\min}$ қ 20-(-15) қ 35
3. танланма хажми 20 к нинг кийматиним 4 ёки 5 га тенг деб олсак булади. К қ 4 булсин.

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{35}{4} = 8.75 < 8.8$$

h ни 8,8 олганимиз яхши.

7- МАВЗУ

ПАРАМЕТРЛАРНИ БАҲОЛАШ

Айтайлик бош тўпламнинг бирор миқдорий кўрсаткичини баҳолаш талаб қилинсин, яъни. о тасодикий миқдорнинг таксимоти маълум бир кўринишдаги, параметрларга боғлиқ функция бўлсин. Табиий равишда бу ҳолда таксимотни аниқлайдиган параметрларни баҳолаш масаласи келиб чиқади. Номаълум параметр қиймати сифатида ишлатиладиган ҳар қандай миқдор **баҳо** дейилади. Номаълум параметр қиймати сифатида ишлатиладиган миқдорнинг урганилаётган объектга боғлиқлилик даражаси унинг қийматини аниқлайди. Номаълум параметрни баҳолаш жараёнида баҳо сифатида олинган миқдор бирор-бир жиҳатдан номаълум параметрнинг ҳақиқий қийматига яқин бўлишлиги талаб қилинади. Шу сабабли номаълум параметрнинг баҳоси сифатида **статистик ёки эмпирик баҳони** яъни тасодикий миқдорнинг кузатилган қийматлари(танланма)нинг бирор кўринишдаги функциясини ишлатамиз.

Танланма $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ асосида қурилган θ номаълум параметрнинг ҳар қандай $\theta(x)$ баҳоси **статистика** деб аталади.

θ номаълум параметрнинг статистик баҳоси $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **силжимаган баҳо** дейилади, агар $M\theta_n^* = \theta$ бўлса. Бошқача айтганда ихтиёрий ҳажмидаги танланма учун математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлган статистик баҳо **силжимаган баҳо** дейилади.

Математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган баҳо **силжиган баҳо** дейилади.

Агар $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ силжиган баҳо учун $\lim_{n \rightarrow \infty} M\theta_n^* = \theta$ бўлса $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **асимптотик силжимаган баҳо** дейилади.

Фараз қилайлик, номаълум θ параметр учун $\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $\theta_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ силжимаган статистикалар тузилди. Хўш, булардан қайси бирини танлашимиз керак?

Интуитив равишда доим θ га “яқинроғини” танлаш талаб қилинади.

Шу нуқтаи назардан қараганда асосли бўлган баҳони аниқлаймиз.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ учун $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta| < \varepsilon) = 1$ бўлса, $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ θ учун **асосли баҳо** дейилади.

Демак, $\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ баҳо асосли баҳо бўлиши учун $M\theta_n^* = \theta$ ва $\forall \varepsilon > 0$ учун $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta| < \varepsilon) = 1$ муносабатлар бажарилиши керак.

Ушбу муносабатлар $M\theta_n^* = \theta$ ва $\lim_{n \rightarrow \infty} D\theta_n^* = 0$ каби тенг кучли муносабатларга алмаштирилиши мумкин.

Асосли баҳо етарлича катта n ларда ихтиёрий олдиндан берилган ε кичик сон учун етарлича катта эҳтимоллик билан $|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon$ муносабатни таъминлайди.

Равшанки ушбу хоссага амалий жиҳатдан ишлатиладиган барча статистикалар эга бўлиши керак.

Чекли ҳажмдаги танланмалар асосида қурилган статистикалар силжимаганлик ва асослилик хоссаларига эга бўлиб, дисперсиялари ўзаро фарқли бўлади. Ушбу ҳолда дисперсияси кичик бўлган баҳони танлаш лозим. Чунки дисперсия кичиклиги хатолик (тарқоқлик) кичиклигини таъминлайди.

Энг кичик дисперсияга (берилган ҳажмдаги танланма учун) эга бўлган статистик баҳо **эффектив баҳо** дейилади. Шундай қилиб, параметрларни

баҳолашда силжимаганлик, асослилиқ хоссаларидан ташқари $D(\theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) = D_{\min}$ хоссасига эга **эффeктив** баҳони излаш мақсадга мувофиқ бўлар экан.

Битта сон билан аниқланадиган статистик баҳо **нуқтавий баҳо** дейилади.

Баҳоланаётган параметрни қоплайдиган интервалнинг чегараларини билдирувчи икки сон билан аниқланадиган статистик баҳо **интервал баҳо** дейилади.

Фараз қилайлик о тасодифий миқдор $F(x, \theta)$ тақсимот функциясига эга бўлсин. Бунда $F(\cdot)$ кўриниши аниқ бўлган, фақат θ номаълум параметрга боғлиқ функция.

Математик статистикада номаълум параметрнинг нуқтавий баҳоси сифатида ишлатиладиган статистикалар.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ о тасодифий миқдорнинг кузатилган қийматлари, яъни танланма қуйидаги статистик тақсимотга эга:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_k \end{pmatrix}.$$

Бу ерда n_i - x_i ($i = 1, k$) вариантанинг частотаси ва $\sum_{i=1}^k n_i = n$ - танланма ҳажми.

Танланманинг ўрта қиймати $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$ **бош тўпламнинг силжимаган баҳоси** бўлиб хизмат қилади.

Танланманинг дисперсияси $D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$ **бош тўплам дисперсиясининг силжиган баҳоси** бўлиб хизмат қилади.

$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_{BT}$ бўлгани учун бу баҳо силжигандир. Бунда D_{BT} – бош тўплам дисперсияси.

«Кузатилган» дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i$$

бош тўплам дисперсиясининг силжимаган баҳоси сифатида хизмат қилади.

$M(S^2) = D_{BT}$ бўлгани учун бу баҳо силжимаяндир.

Танланма дисперсияни ҳисоблаганда қуйидаги формуладан фойдаланиш қулай:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i - \bar{X}^2.$$

Танланма дисперсиядан олинган квадрат илдиз $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ **танланманинг ўртача квадратик четлашиши** деб аталади.

«Тузатилган» ўртача квадратик четлашиш худди шундай танланма

«тузатилган» дисперсиядан олинган квадрат илдиз билан аниқланади:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$$

Бош тўплам модасининг баҳоси сифатида танланмада энг кўп учрайдиган варианты билан аниқланувчи **танланма модаси** ишлатилади, яъни:

$$mod_T = \left\{ x_{i_0} : n_{i_0} = \max_i (n_i) \right\}.$$

Бош тўплам медианасининг баҳоси сифатида $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ вариацион қаторнинг ўртасига тўғри келадиган варианты ёки вариантлар билан аниқланувчи **танланма медианаси** ишлатилади:

$$med_T = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}), & \text{агар } n \text{ жуфт булса,} \\ x_{[n/2]+1}, & \text{агар } n \text{ тоқ булса.} \end{cases}$$

Энг катта ва энг кичик вариантлар орасидаги фарқ R – **вариантанинг кенглиги** дейилади: $R = x_{max} - x_{min}$.

M – бош тўпламнинг бизни қизиқтирган ҳоссага эга бўлган элементлари сонининг N – бош тўплам элементларининг умумий сонига нисбати **бош улуш** (генеральная доля) дейилади: $p = \frac{M}{N}$.

Бош улушнинг нуқтавий баҳоси сифатида **танланма улуши**, яъни танланмадаги бизни қизиқтирган ҳоссага эга бўлган элементлар сони m нинг

танланма элементларининг умумий сони n , яъни танланма ҳажмига нисбати

$$w = \frac{m}{n} \text{ хизмат қилади.}$$

Танланма ўрта қийматнинг тақсимооти. Катта сонлар қонуни ва марказий лимит теоремасидан агар бош тўплам нормал тақсимот қонунига бўйсунса, у ҳолда танланма ўрта қиймат $\bar{X}$ ҳам нормал тақсимот қонунига бўйсунishi келиб чиқади. Танланма ҳажми етарлича катта бўлганида бош тўплам қандай тақсимот қонунига эга бўлишидан қатъий назар танланма ўрта қиймат $\bar{X}$ барибир нормал тақсимот қонунига бўйсунар экан. Шундай қилиб, агар бош тўплам а математик кутилма ва σ^2 дисперсияга эга бўлса, у ҳолда танланманинг ўрта қиймати $\bar{X} \sim N\left(a; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ бўлар экан. Демак,

$$P\{\alpha < \bar{X} < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma / \sqrt{n}}\right);$$

$$P\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma / \sqrt{n}}\right).$$

1-масала. Танланма 5,4,4,2,5,5,4,2,4,6,5,2,4,2,6,5,2,4,5,5,4,4,5,2,2,5,5,4,2,6 элементлардан ташкил топган. Танланманинг статистик тақсимооти, ўрта қиймати, танланма дисперсияси ва «тузатилган» дисперсияларини, танланмани ўртача квадратик четлашишларини ва «тузатилган» ўртача квадратик четлашишларини, танланманинг модаси, медианаси ҳамда кенглигини топинг.

Ечиш: Танланманинг статистик тақсимоотини топамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & K & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & K & n_k \end{pmatrix} \mathbf{K} \begin{pmatrix} x_i & 2 & 4 & 5 & 6 \\ n_i & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Танланма ҳажми: } n = \sum_{i=1}^4 n_i = 8 + 9 + 10 + 3 = 30.$$

$$\text{Танланма ўрта қиймати: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{1}{30} (2 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3) = \frac{120}{30} = 4.$$

Танланма дисперсия:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \cdot n_i =$$

$$= \frac{1}{30} \left((2-4)^2 \cdot 8 + (4-4)^2 \cdot 9 + (5-4)^2 \cdot 10 + (6-4)^2 \cdot 3 \right) = \frac{54}{30} = 1,8$$

У ҳолда «тузатилган» дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{30}{29} \cdot \frac{54}{30} = \frac{54}{29} = 1,862.$$

Танланмавий ва «тузатилган» ўртача квадратик четлашишларни топамиз:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{1,8} = 1,341 \quad \text{ва} \quad S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T} = \sqrt{1,862} = 1,364.$$

Танланмада $x_3 = 5$ варианта энг кўп учрайди ($n_3 = 10$), шунинг учун танланманинг модаси $mod_T = 5$. Танланма ҳажми $n=30$ – жуфт сон, шунинг учун танланманинг ўрта элементлари иккита: $X_{15} = X_{16} = 4$. Демак, танланманинг медиана қуйидагига тенг

$$med_T = \frac{X_{15} + X_{16}}{2} = 4.$$

Вариацион қатор кенглиги энг катта ва энг кичик вариантлар айирмасига тенг, яъни $R = x_{max} - x_{min} = 6 - 2 = 4$.

$$\text{Жавоб: } \bar{X} = 4; D_B = 1,8; S^2 = 1,862; \sigma_T = 1,341; S = 1,364;$$

$$mod_T = 5; med_T = 4; R = 4.$$

Кичик ҳажмдаги танланмаларда нуқтавий баҳо баҳоланаётган параметрдан сезиларли фарқ қилиши мумкин. Шу сабабли танланма ҳажми кичик бўлганида баҳонинг аниқлиги ва ишончлилигини яхшироқ таъминлайдиган баҳолардан фойдаланиш ўринлидир.

Танланма бўйича топилган θ^* статистик катталиқ θ номаълум параметрнинг баҳоси бўлсин. Албатта, $|\theta - \theta^*|$ айирма қанчалик кичкина бўлса, θ^* баҳо θ параметрни шунча аниқ баҳолайди. Шу мақсадда энди $|\theta - \theta^*|$ айирмани баҳолаш масаласига эътибор қаратайлик. $\forall \delta > 0$ кичик сон оламиз. Статистик баҳолар топиш усуллари θ^* баҳо $|\theta - \theta^*| < \delta$ муносабатни албатта қониқтиришга кафолат бермайди. Шу сабабли

$P(|\theta - \theta^*| < \delta)$ - ишонч эҳтимоли ҳақида сўз юритиш мақсадга мувофиқ, яъни қандай ишончлилиқ билан θ^* баҳони қабул қилиш керак.

Одатда баҳонинг ишончлилиғи (μ) олдиндан берилади ва μ , сифатида 1 га яқин қийматлар олинади, масалан, 0,95, 0,99, 0,999. Фараз қилайлик

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \mu, \quad 0 < \mu < 1$$

ишонч эҳтимоллиғи берилган бўлсин. Ушбу ифода

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \mu$$

га тенг кучли. Демак, $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ оралиқ берилган μ эҳтимоллиқ билан θ ни қийматини ўз ичига оладиган **ишонч интервали**.

Ишонч интерваллари топишнинг қулайлиғи шундаки θ^* статистика нуқтавий баҳо ҳисобланади ва биз уни қандай бўлса (ҳисоблашлар учун қулай ёки қулай эмаслигидан қатъий назар) шундайлиғига θ нинг баҳоси сифатида ишлатишимиз керак.

Агар бирор ишончлиқ бўйича θ параметр учун ишонч интервали топилган бўлса, шу интервалдаги ҳар қандай сон θ учун берилган ишончлиқдаги баҳо ҳисобланади. Демакки, биз берилган ишонч оралиғидан ҳисоблашлар учун қулайроқ қийматни танлаб олиб ишлатишимиз мумкин ва бу қиймат берилган ишончлилиқка жавоб беради..

8- мавзу

НОРМАЛ ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИ БАҲОЛАШ

Мавзу мақсади: Нормал тақсимот модели доирасида номаълум параметрларни баҳолаш услубларини урганиш ва узлаштириш

Уқув саволлари:

8.1. Масштаб параметри маълум бўлган ҳолда номаълум силжиш параметрини баҳолаш

8.2. Масштаб параметри номаълум бўлган ҳолда номаълум силжиш параметрини баҳолаш

8.3. Номаълум масштаб параметрини баҳолаш

8.4. Масштаб ва силжиш параметр параметрлари бирданига баҳолаш

Ушбу мавзуда нормал тақсимот модели параметрларни баҳолаш масалаларини кўриб ўтайлик. Фараз қилайлик о тасодикий микдор (a, σ) параметрли $\Phi_{a,\sigma}(x)$ тақсимот қонунига эга бўлсин. Маълумки, бу ҳолда о тасодикий микдор зичлик функцияси

$$\varphi(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

муносабат билан аниқланади. Нормал тақсимот моделида **а силжиш параметри**, σ эса **масштаб параметри** деб аталади.

8.1. Масштаб параметри маълум бўлган ҳолда номаълум силжиш параметрини баҳолаш

о тасодифий миқдор (a, σ) параметрли (σ -маълум) нормал тақсимотга эга бўлса, a нинг нуқтавий баҳоси сифатида танланма ўртача қиймати $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ оламиз. Ишонч интервалини аниқлаш учун эса қуйидаги хоссадан фойдаланамиз.

А хосса. о миқдор (a, σ) параметрли нормал тақсимот қонунига эга бўлса $\bar{x}$ статистика $\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ параметрли нормал тақсимот қонунига эга.

Ушбу хоссадан

$$P\left(|\bar{x} - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_o(t)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Энди берилган ишончлилик P га кўра $2\Phi_o(t) = P$ эканини эътиборга олган ҳолда, $\Phi_o(x)$ функция жадвалидан $\frac{P}{2}$ га мос u_p қийматни оламиз, демак биз излаган ишонч интервали

$$\left(\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ушбу амалий тадбиғида: $\bar{x}$ – танланма асосида ҳисобланади, σ – берилган, n – танланма ҳажми берилган, u_p ни берилган эҳтимоллик **P** нинг берилган қийматига асосан Лаплас функцияси Φ_o функция жадвалидан олинади.

1-масала. X бош тўпламда маълум $\sigma = 0,40$ параметр билан нормал тақсимланган. Агар $n = 20$, $\bar{X} = 6,34$ бўлса, танланма маълумотлари бўйича $\gamma = 0,99$ ишончлилик билан a параметр учун ишонч оралигини топинг.

Ечиш:

$$\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

ишонч оралигини топиш талаб қилинмоқда. Бу ердаги t дан бошқа ҳамма катталиклар маълум. t ни аниқлаймиз.

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,99}{2} = 0,495$$

учун Лапласнинг интеграл функциясининг қийматлари келтирилган Илованинг 4- жадвалидан $t = 2,58$ ни топамиз. Демак,

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,58 \cdot 0,40}{\sqrt{20}} \approx 0,23.$$

$\left(\bar{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ ишонч оралигинининг учларини аниқлаймиз:

$$6,34 - 0,23 \leq 6,11 \text{ ва } 6,34 + 0,23 \leq 6,57.$$

Шундай қилиб, $(6,11; 6,57)$ ишонч оралиги а параметрни 0,99 ишончлик билан қоплайди.

8.2. Масштаб параметри номаълум бўлган ҳолда номаълум силжиш параметрини баҳолаш

Бу ҳолда. нормал тақсимотнинг σ параметри номаълум бўлган ҳолда а параметрни баҳолаш масаласи туради. Бунда нормал тақсимотнинг куйидаги хоссасидан фойдаланамиз.

В хосса. Агар о тасодикий миқдор нормал тақсимотга эга бўлса $t_p = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - a}{S}$ статистика $n - 1$ даражали Стьюдент тақсимотиға

бўйсунди. Бунда $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ муносабатлар билан аниқланган статистикалар. Стьюдент тақсимоти қийматлари жадваллаштирилган. Шу сабабли берилса P ишончилилик бўйича

$$\int_{-tp}^{tp} S_{n-1}(t) dt = P$$

тенглик бажариладиган t_p ни жадвалдан топамиз.

У ҳолда бизни қизиқтираётган берилган P ишончилиликка мос a учун ишонч интервали

$$\left(\bar{x} - t_p \frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_p \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right)$$

Демак, ишонч интервали чегаралари куйидагича ҳисобланади, танланма ҳажми n ва танланма қийматлари асосида $\bar{x}$ ва S ҳисобланади, Стьюдент жадвалидан берилган P га асосан t_p олинади.

Масала. Жамғарма бозорининг аналитиги маълум бир акцияларнинг ўртача даромадлилигини ўрганмоқда. 15 кунлик тасодикий танланма ўртача квадратик оғиши $S = 3,5\%$ ўртача (йиллик) даромадлилик $\bar{x} = 10,37\%$ га тенг

эканини кўрсатди. Акцияларнинг даромадлилиги нормал тақсимот қонунига бўйсунди деб фараз қилайлик. Аналитик қизиқаётган акциялар тури учун 95% ли ишонч оралигини топинг.

Ечиш: Бош тўплам ўртача квадратик оғиши σ номаълум бўлгани учун

$$P\left(\bar{X} - t_p \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_p \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \mu$$

формуладан фойдаланамиз.

Стъудент жадвалидан берилган 0,95 га асосан $t_{0,95}$ олинади $t_{0,95} = t(P, n) = t(0,95; 15) = 2,15$ ни топамиз. Ундан фойдаланиб,

$\left(\bar{X} - t_p \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_p \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ишонч оралигини ясаймиз.

$$\bar{X} \pm t_p \frac{s}{\sqrt{n}} = 10,37 \pm 2,15 \frac{3,5}{\sqrt{15}} = 10,37 \pm 1,94 \Rightarrow (8,43; 12,31).$$

Демак, аналитик 95% ишонч билан уни қизиқтирган акцияларнинг ўртача йиллик даромадлилиги (8,43%; 12,31%) ораликда ётар экан.

8.3. Номаълум масштаб параметрини баҳолаш

Нормал тақсимотнинг номаълум бўлган σ параметрини баҳолаш масаласида нормал тақсимотнинг ушбу хоссасидан фойдаланамиз.

С хосса. Агар σ миқдор (μ, σ) параметрли нормал тақсимотга эга бўлса, у ҳолда $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ статистика $(n-1)$ озодлик даражасига эга бўлган χ^2 (**хи квадрат**) – тақсимот қонунига бўйсунди.

Ушбу ҳолда С хоссага асосан, берилган P ишончлилиқ бўйича

$$\int_0^{x^2} K_{n-1}(x) dx = \int_{x^2+}^{\infty} K_{n-1}(x) dx = \frac{1-P}{2}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.

χ^2 – тақсимот жадвалидан берилган P бўйича тенгламаларимизни қаноатлантирувчи $\chi_-(P)$ ва $\chi_+(P)$ ларни оламиз. Ишонч интервали

$$\left(\frac{S\sqrt{n}}{\chi_+(P)}; \frac{S\sqrt{n}}{\chi_-(P)}\right) \text{ бўлади.}$$

Бунда $S = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ каби ҳисобланади.

χ_+ ва χ_- жадвалдан олинади.

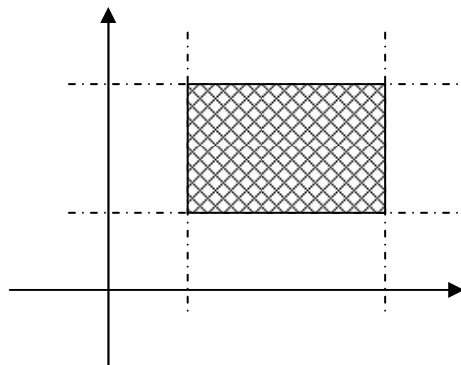
Изоҳлаш жоизки танланма ҳажми $n > 30$ бўлганда n озодлик даражали χ^2 тақсимот $(n; \sqrt{2n})$ нормал тақсимотдан деярли фарқ қилмайди. Демак, ушбу ҳолда $\chi_-^2 = n - u_p \sqrt{2n}$ $\chi_+^2 = n + u_p \sqrt{2n}$ дан фойдаланиш қулай. u_p P ишончга асосан топилган нормал тақсимот қиймати.

Ва ниҳоят у ҳолда (a, σ) ни биратўла баҳолашда координаталар текислигидаги

$$a_- = \bar{x} - t_p \frac{S}{\sqrt{n-1}}; a_+ = \bar{x} + t_p \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

$$\sigma_- = \frac{S\sqrt{n}}{\chi_+} M \quad \sigma_+ = \frac{S\sqrt{n}}{\chi_-}$$

лар асосида олинган тўғри тўртбурчак соҳани оламиз.



8.4. Масштаб ва силжиш параметр параметрлари бирданига баҳолаш

8- Маъруза

Мавзу: Статистик гипотезалар

о тасодифий миқдорнинг номаълум тақсимот қонунини аниқлаш масалалари статистик гипотезаларни текшириш орқали ҳал этилади.

Гипотеза – тахмин дегани. **Статистик гипотеза** деганда номаълум тақсимот ҳақида илгари сурилган тахмин тушунилади. Масалан:

1. о тасодифий миқдор тақсимои параметрлари $a \approx 0,5$ ва $u \approx 1,2$ бўлган нормал тақсимотдир.

2. о тасодифий миқдор тақсимои $a \approx 1,5$ бўлган кўрсаткичли тақсимот.

3. о тасодифий миқдор тақсимои $\theta \approx 0,3$ ва $n \approx 70$ бўлган биномиал тақсимои ва ҳ.к.

Статистик гипотеза битта тақсимот функцияси устида бўлса **оддий гипотеза** акс ҳолда **мураккаб гипотеза** дейилади. Юқорида келтирилган мисолларда биринчи ва учинчи мисоллардаги фаразлар оддий гипотеза, 2 мисолдаги фараз мураккаб гипотезадир.

Шундай қилиб, статистик гипотезаларни текширишда о тасодифий миқдорнинг номаълум тақсимои ҳақида фараз-гипотеза илгари сурилади ва

тахмин тажриба(кузатув) натижалари бўлган, маълум ҳажмдаги танланма кийматлари асосида гипотеза ёки қабул қилинади ёки рад этилади..

Статистик гипотеза номаълум тақсимот функцияси параметрлари хусусида ёки номаълум тақсимот функциясининг ўзи хусусида бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда **параметрик** гипотеза, иккинчи ҳолда нопараметрик гипотеза ҳақида сўз юритилади.

Дастлаб параметрик ҳолдаги статистик гипотезаларга тўхталиб ўтайлик. Ушбу ҳолда масала қуйидагича қўйилади.

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ танланма θ номаълум параметрли $p(x, \theta)$ зичлик функцияси бўлган $F(x, \theta)$ тақсимотдан олинди. θ параметрга нисбатан асосий, бошқача айтганда текширилувчи - H_0 гипотеза илгари сурилади, яъни $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

Энди кейинчалик кўп ишлатадиган, муҳим аҳамиятга эга атама ҳақида келишиб олайлик.

Қўйилган масалани ҳал қилувчи, ечадиган асосий қоида ва қонунлар мажмуасини **критерий** деб атаيمиз.

Ҳар бир критерий бирор бир критик тўплам деб аталган тўплам асосида шаклланади.

Номаълум тақсимот статистик гипотезаларни текшириш орқали аниқланаётганда асосий, текширилувчи гипотеза билан бир вақтда унга зид гипотеза олға сурилади. Агар текшириляётган гипотеза рад қилинса, у ҳолда унга зид гипотеза қабул қилинади. Шу сабабли бу гипотезаларни бир-биридан фарқлаш мақсадга мувофиқ.

Одатда текшириладиган, асосий гипотезани H_0 билан, унга рақобатланувчи, зид гипотеза H_1 билан белгиланади ва **конкурент (альтернатив) гипотеза** деб аталади.

Фараз қилайлик $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ о миқдор устидаги кузатиш (тажриба) натижалари бўлсин. Ушбу натижаларни R^n фазодаги нуқта координатлари деб қараймиз. R^n фазо кесишмайдиган иккита R_1^n ва R_2^n қисмларга ажратамиз, яъни R^n қ $R_1^n \cup R_2^n$, R^n қ $R_1^n \cap R_2^n$ қ Ё. Агар $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R_1^n$ бўлса, асосий гипотеза (H_0)ни қабул қиламиз, $(x_1, \dots, x_n) \in R_2^n$ бўлса H_0 рад этилади ва альтернатив H_1 гипотеза қабул қилинади.

R_2^n — тўплам **критик соҳа** деб аталади. R_1^n ва R_2^n тўпламларнинг ўзаро чегаравий нуқталари **критик нуқталар** деб аталади.

Илгари сурилган гипотеза тўғри ёки нотўғри бўлиши мумкин. Ушбу факт статистик текшириш асосида аён бўлади. Статистик текшириш жараёнида икки турдаги хатоликка йўл қўйилиши мумкин.

Биринчиси, гипотеза тўғри, аммо у рад этилади. **Иккинчиси**, нотўғри гипотеза қабул қилинади. Ушбу хатоликларни **биринчи** ва **иккинчи тур хатоликлари** деб аталади.

Қуйида иккита ўзаро рақобатлашувчи оддий гипотезаларни қарайлик:

1.Текшириладиган(асосий) гипотеза H_0 : *о тасодифий миқдор тақсимотининг номаълум параметри иқи_о*.

2.Альтернатив гипотеза H_1 : *о тасодифий миқдор тақсимотининг номаълум параметри иқи₁*

Эътибор берилган бўлса, ушбу гипотезаларда тақсимот функция кўриниши аниқ, фақат у номаълум **и** параметрга боғлиқ. Умумийликни чекламаган ҳолда тақсимотнинг зичлик функцияси $p(x, \mathbf{u})$ – мавжуд деб қараймиз. S – орқали критик соҳани белгилаймиз. S – соҳани аниқловчи миқдорни **S – критерий** деб атаймиз.

Ушбу ҳолда юқорида таъкидлаганимиздай ҳар бир S – критерий билан икки турдаги хатолик боғланган. Бирор бир B ҳодиса учун

$$P_i(B) = \int_B p(x, \theta_i) dx, \quad i = 0, 1$$

белгилаймиз. У ҳолда S критик соҳа учун

$$P_o(S) = \int_S p(x, \theta_o) dx$$

биринчи тур хатолик эҳтимоллигини

$$P_1(\bar{S}) = \int_{\bar{S}} p(x, \theta_1) dx = \beta \quad \text{иккинчи тур хатолик эҳтимоллигини}$$

билдиради, бунда $\bar{S} = R^n / S$.

S критерийни кўриш, бошқача айтганда критик S соҳани аниқлаш масаласи қуйидагича қўйилади. Биринчи тур хатолик эҳтимоллиги сифатида бирор L (одатда кичик сон) олинади ва уни қийматлилиқ сатҳи деб аталади. Демак,

$$P_o(S) = \int_S p(x, \theta_o) dx = \alpha \quad (1)$$

олиниб, барча α сатҳга жавоб берадиган S критерийлар синфи F_s аниқланади. Шундан сўнг F_s тўплаш элементлари учун

$$1 - \beta = P_1(S) \quad (2)$$

эҳтимолликлар максимал қийматга эришадиган S^* - критик соҳа аниқланади. Ушбу критик S^* соҳа учун

$$P_o(S^*) = \lambda \quad \text{ҳолида} \quad P_1(S^*) = \max_{S \in F_s} P_1(S)$$

аниқланади.

Хулоса қилиб айтганда, (1) орқали қийматлилиқ сатҳи α берилади. Ушбу қийматлилиқ сатҳи α га, бошқача айтганда α га тенг биринчи тур хатоликка жавоб берадиган S – критик соҳалар тўплами аниқланади.

Сўнгра иккинчи тур хатолик орқали аниқланган ва (2) да келтирилган критик соҳа қуввати топилади. α сатҳи жавоб берувчи критик соҳалардан қуввати энг каттаси S – критерий деб аталади.

Ушбу мавзуда айтилганларни умумлаштириб статистик гипотезаларни текшириш масаласида қўзладиган мақсадни қуйидагича ифодалаш мумкин.

Шундай S критик соҳа ва уни аниқлайдиган S -критерий топишимиз керакки, ушбу критерийга асосан гипотеза H_0 ҳақиқат бўлганда уни рад этиш эҳтимоллиги кичик, H_0 гипотеза хато бўлганда уни рад этиш эҳтимоллиги катта бўлсин. Бир хил қимматлилик сатҳига эга бўлган иккита критерийдан қуввати бўйича каттасини, яъни катта эҳтимоллик билан хато бўлган H_0 гипотезани рад этадиганини олиш керак.

Танланманинг корреляция коэффиенти.

Чизикли регрессия.

Регрессияда иштирок этаётган факторлар сонига қараб оддий ёки кўп ўлчовли регрессиялар фарқланади.

Оддий регрессия икки ўзгарувчи x ва y лар орасидаги боғлиқлик яъни $y = f(x)$ кўринишидаги моделдан иборат. Бунда y – боғлиқ (натижавий) ўзгарувчи ва x – боғлиқ бўлмаган) ўзгарувчи.

Кўп ўлчовли регрессия деганда ўзгарувчи y ва икки еки ундан ортиқ x_i ўзгарувчилар орасидаги боғлиқлик тушунилади, яъни $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ кўринишидаги модель ўрганилади.

$y = f(x)$ функциянинг кўринишига қараб оддий **регрессия чизикли** ва **эгри чизикли (чизиксиз) регрессияга** фарқланади. Оддий регрессия тенгламаси икки ўзгарувчи орасидаги қонуниятни характерлаб, бу қонуният фақат ўзгарувчилар устидаги кузатишлар асосида аниқланиб ҳар бир кузатув натижасини эмас, балки кузатувлар учун умумий бўлган қонуниятни акс эттиради. Мисол учун, бирор маҳсулотга талаб y нинг шу маҳсулот нархи x га боғлиқлиги $y = 5000 - 2x$ тенглама билан берилса, буни маъноси маҳсулот нархи бир бирликка ошса ўрта хисобда талаб 2 бирликка камаяр экан.

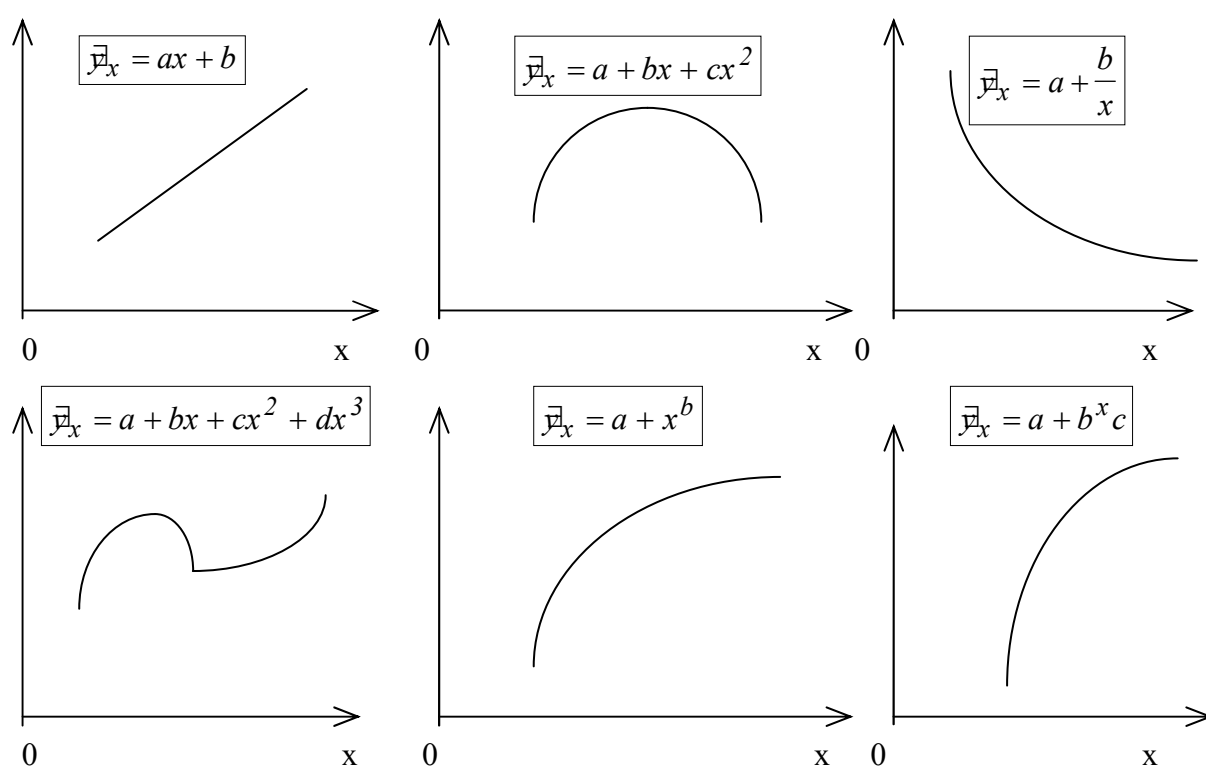
Амалда у катталик икки қўшилувчидан иборат:

$$y = \bar{y}_x + \varepsilon,$$

бунда y - натижани асл қиймати; $\bar{y}_x$ - регрессия тенгламасидан аниқланган натижанинг назарий қиймати; ε - хатолик деб аталувчи тасодифий микдор бўлиб, y натижанинг асл қийматининг назарий қийматидан четлашишига тенг.

Микдорлар системаси (X,Y) ўрганилатган бўлсин ва n та боғлиқсиз кузатишлар асосида n жуфт натижалар $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ олинди. Бу жуфтликларнинг тўғри чизиқли XOY координаталар системасидаги график тасвирига **корреллограмма (корреляция майдони)** дейилади. Корреллограммадан икки аломат орасидаги боғлиқликни ўрганиш ва регрессия тенгламаси кўринишини танлашда фойдананиш жуда қулай.

Бир ўлчовли регрессия тенгламасини тузишда ишлатиладиган эгри чизиқларнинг асосий турлари.



Чизиқли регрессия тенгламаси.

Микдорийлар системаси (X,Y) ўрганилган ва n та боғлиқсиз кузатишлар асосида n жуфт натижалар $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ олинган бўлсин.

(X,Y) ўзгарувчиларнинг танланма ковариация коэффицентиси $\text{cov}_T(X,Y)$ қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$\text{cov}_T(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y},$$

бунда $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ва $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ - X ва Y ўзгарувчиларнинг ўртачаси.

Танланма дисперсияси эса қуйидагича ҳисобланади:

$$D_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$D_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2.$$

Демак, назарий корреляция коэффиценти таърифини эсга олсак, танланма корреляция коэффиценти учун

$$\rho_T = \text{cor}_T(X, Y) = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{\sqrt{D_X} \cdot \sqrt{D_Y}}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Бизга маълум эдики **назарий корреляция коэффиценти** -1 ва $+1$ оралиқда қиймат қабул қилувчи катталиқ бўлиб, у икки миқдорий катталиқ орасидаги чизиқли боғлиқлик даражасини кўрсатади: корреляция коэффиценти $+1$ тенг бўлса, катталиқлар орасида аниқ мусбат чизиқли боғлиқлик борлигини; 0 га тенг бўлса, бу катталиқлар чизиқли боғлиқ эмаслигини ва корреляция коэффиценти -1 га тенглиги, катталиқлар орасида аниқ тесқари (манфий) чизиқли боғлиқлик борлигини билдирар эди. Бу қийматлар кундалиқ ҳаётда кам учрайди, лекин улардан фойдаланиб амалдаги маълумотлар ҳақида тегишли хулосалар чиқариш мумкин. Шунинг эсда тутиш керакки, корреляция коэффиценти ўзгарувчилар орасидаги умуман боғлиқликни эмас, балки фақат чизиқли боғлиқлик даражасини кўрсатади. Шу сабаб, корреляция коэффицентининг нолга тенглиги ўзгарувчилар орасида умуман боғлиқлик йўқ дегани эмас ва баъзан бундай ҳолларда яхши эгри чизиқли регрессия куриш мумкин.

Y натижа ва X бирламчи ўзгарувчи бўлган ҳолда:

l_0 - танланмавий регрессия коэффиценти ва чизиқли регрессия тенгламаси:

$$l_0 = \rho_T \frac{\sqrt{D_Y}}{\sqrt{D_X}} = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{D_X} \quad \text{ва} \quad \hat{y}_x - \bar{y} = l_0(x - \bar{x}).$$

X натижа ва Y бирламчи ўзгарувчи бўлган ҳолда:

l_1 - танланмавий регрессия коэффиценти ва чизиқли регрессия тенгламаси:

$$l_1 = \rho_T \frac{\sqrt{D_X}}{\sqrt{D_Y}} = \frac{\text{cov}_T(X, Y)}{D_Y} \quad \text{ва} \quad \hat{x}_y - \bar{x} = l_1(y - \bar{y}).$$

Шундай қилиб, чизиқли регрессия тенгламаси $\hat{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x$

X нинг берилган қийматларида натижа Y нинг назарий қийматини ҳисоблаш имкониятини беради. Олинган назарий қийматларнинг график тасвирига регрессия чизиғи деб аталади. Амалда чизиқли регрессия тенгламасини қуриш учун регрессион тенглама параметрлари β_0 ва β_1 ни баҳолаш керак. Биринчи параметр β_0 регрессия чизиғининг ОY ўқини кесиб ўтиш нуқтаси бўлиб, қиймати $X=0$ даги Y ўзгарувчининг қийматига тенг. Иккинчи параметр β_1 регрессия чизиғининг бурчак коэффициентига тенг бўлиб, X ўзгарувчи бир бирликка ўзгарганда Y ўзгарувчи неча бирликка ўзгаришини кўрсатади.

Демак, **танланманинг чизиқли регрессияси** танланма (X,Y) қийматларини энг яхши акслантиручи тўғри чизиқдир.

Танланма корреляция коэффиценти ва чизиқли регрессия тенгламаси коэффицентлари қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$\rho_e = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}},$$

$$\beta_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad \text{ва} \quad \beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

бунда (X,Y). ўзгарувчи кузатишлар сони n-га тенгдир.

Группаланган маълумотлар учун чизиqli регрессия тенглама параметрларини аниқлаш.

Кузатишлар сони катта бўлганда айнан бир x қиймат n_x маротаба ва айнан бир y қиймат n_y маротаба, айнан бир (x,y) жуфтлик n_{xy} маротаба учраши мумкин. Бундай ҳолларда кузатиш натижалари умумлаштириб гуруҳларга ажратилади, яъни n_x , n_y , n_{xy} частоталар ҳисобланиб жадвал кўринишида берилади. Бу жадвалга **корреляцион жадвал** дейилади. Жадвал кўринишида берилган кузатиш натижалари учун регрессия тенгламаси қуйидагича аниқланади.

Микдорий ўзгарувчилар системаси (X,Y) ўрганилаётган ва N та боғлиқсиз кузатишлар асосида $(x_i; y_j)$, $i = 1, k$; $j = 1, m$; жуфт натижалар олинган

бўлсин. Бунда (x_i, y_j) жуфтлик $n_{i,j}$ маротаба кузатилган. $N = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij}$.

Натижалар қуйидагича корреляцион жадвалда келтирилади:

X	x_1	x_2	...	x_k	n_y
---	-------	-------	-----	-------	-------

Y					
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{k1}	n_{o1}
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{k2}	n_{o2}
...	...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{km}	n_{om}
n_x	n_{1o}	n_{2o}	...	n_{ko}	

Бунда $n_{oj} = \sum_{i=1}^k n_{ij}$ ва $n_{io} = \sum_{j=1}^m n_{ij}$.

(X,Y) миқдорларнинг **танланма ковариацияси cov(X,Y)** қуйидаги формулага асосан ҳисобланади:

$$cov_e(X,Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - \bar{x} \cdot \bar{y},$$

бунда $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} \cdot x_i$ ва $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} \cdot y_j$. X ва Y ўзгарувчини ўртачаси.

Танланма дисперсиялар эса қуйидагича ҳисобланади:

$$D_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{io} \cdot x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$D_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} \cdot (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{oj} \cdot y_j^2 - (\bar{y})^2.$$

Ва нихоят, танланма корреляция коэффициенти

$$\rho_e = cor_e(X,Y) = \frac{cov_e(X,Y)}{\sqrt{D_X} \cdot \sqrt{D_Y}}$$

формула орқали ҳисобланади.

Группаланган маълумотлар асосида чизикли регрессия тенгламасини қуриш учун танланма корреляция коэффициенти ва чизикли регрессия тенгламаси коэффициентларини қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$\rho_e = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)}{\sqrt{N \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right)^2} \sqrt{N \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)^2}},$$

$$\beta_I = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)}{N \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right)^2},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j - \beta_I \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i.$$

Тузилган чизиқли регрессия тенгламасининг сифатини баҳолаш учун махсус **детерминация коэффиценти** деб аталадиган ва қиймати танланма корреляция коэффицентининг квадрати $(\rho_B)^2$ га тенг катталиқ ҳисобланади. Бу катталиқ натижа у дисперсиясининг регрессия тенгламаси ёрдамида тушунтириладиган улушини аниқлайди. Мос равишда $1 - (\rho_B)^2$ катталиқ натижа у дисперсиясининг регрессия тенгламасида ҳисобга олинмаган бошқа факторлар орқали тушунтириладиган улушини аниқлайди.

Намунавий масалалар ечиш.

Масала 1. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотлар асосида чизиқли регрессия тенгламаси $\hat{y}_x = \beta_0 + \beta_I x$ ни тузинг.

Корхона номери	Ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми,	Ишлаб чиқариш харажатлари
-------------------	-------------------------------------	------------------------------

	х, минг бирлик	у, млн. сўм
1	1	30
2	2	70
3	4	150
4	3	100
5	5	170
6	3	100
7	4	150

Ечиш: Қуйидаги жадвални тўлдирамиз:

№	х.	у	ху	x^2	y^2	$\square_x$
1	1	30	30	1	900	31.1
2	2	70	140	4	4900	67.9
3	4	150	600	16	22500	141.6
4	3	100	300	9	10000	104.7
5	5	170	850	25	28900	178.4
6	3	100	300	9	10000	104.7
7	4	150	600	16	22500	141.6
	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i \cdot y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	$\sum \sigma_i^2$
жами	22	770	2820	80	99700	770.0

Танланма корреляция коэффициени қийматини хисоблаймиз:

$$\rho_e = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2820 - 22 \cdot 770}{\sqrt{7 \cdot 80 - 22^2} \sqrt{7 \cdot 99700 - 770^2}} = 0,991$$

Бу катталиқ бир сонига анча яқин бўлиб, ишлаб чиқариш харажатлари ва ишлаб чиқариш хажми орасида кучли боғланиш борлигидан далолат беради.

Регрессион тенглама коэффициентларини ҳисоблаш формулаларига асосан:

$$\beta_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{7 \cdot 2820 - 22 \cdot 770}{7 \cdot 80 - 22^2} = \frac{2800}{76} = 36,84$$

$$\beta_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \beta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} \cdot 770 - 36,84 \cdot \frac{1}{7} \cdot 22 = -5,79.$$

Чизиқли регрессия тенгламаси қуйидагича $\hat{y}_x = -5.79 + 36.84x$ бўлади. Тенгламага x қийматларни қўйиб y нинг назарий қийматлари $\hat{y}_x$ ҳисоблаймиз ва жадвалнинг охириги устунини тўлдирамиз.

Бизнинг мисолимизда $(\rho_B)^2 \approx 0,982$, демак, регрессия тенгламаси ёрдамида натижа y нинг 98,2% тушунтирилар экан. Қолган - регрессия тенгламасида ҳисобга олинмаган фанторлар улуши эса 1,8% ташкил этар экан.

Жавоб: $\hat{y}_x = -5.79 + 36.84x$.

Масала 2. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотлар асосида Y нинг X га боғлиқлик чизикли регрессия тенгламасини тузинг.

X \ Y	5	15	25	35	45	55	65	n _y
4	2	-	2	-	-	-	-	4
8	-	1	4	-	-	-	-	5
12	-	4	3	10	-	-	-	17
16	-	2	-	2	3	6	-	13
20	-	-	-	-	5	4	-	9
24	-	-	-	-	-	1	1	2
n _x	2	7	9	12	8	11	1	N _K 50

Ечиш: Қуйидаги йиғиндиларни ҳисоблаймиз:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j, \quad \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i, \quad \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j, \quad \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2, \quad \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j^2 :$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j &= 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8 \cdot 15 + 4 \cdot 8 \cdot 25 + 4 \cdot 12 \cdot 15 + 3 \cdot 12 \cdot 25 + 10 \cdot 12 \cdot 35 + \\ &+ 2 \cdot 16 \cdot 15 + 2 \cdot 16 \cdot 35 + 3 \cdot 16 \cdot 45 + 6 \cdot 16 \cdot 55 + 5 \cdot 20 \cdot 45 + 4 \cdot 20 \cdot 55 + 1 \cdot 24 \cdot 55 + \\ &+ 1 \cdot 24 \cdot 65 = 27800 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i = 2 \cdot 5 + 7 \cdot 15 + 9 \cdot 25 + 12 \cdot 35 + 8 \cdot 45 + 11 \cdot 55 + 1 \cdot 65 = 1790$$

$$\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j = 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 17 \cdot 12 + 13 \cdot 16 + 9 \cdot 20 + 2 \cdot 24 = 696 .$$

$$\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2 = 2 \cdot 5^2 + 7 \cdot 15^2 + 9 \cdot 25^2 + 12 \cdot 35^2 + 8 \cdot 45^2 + 11 \cdot 55^2 + 1 \cdot 65^2 = 75650$$

$$\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j^2 = 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 8^2 + 17 \cdot 12^2 + 13 \cdot 16^2 + 9 \cdot 20^2 + 2 \cdot 24^2 = 10912 .$$

Танланма корреляция коэффицентини ҳисоблаймиз:

$$\rho_e = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)}{\sqrt{N \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right)^2} \sqrt{N \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)^2}} =$$

$$= \frac{50 \cdot 27800 - 1790 \cdot 696}{\sqrt{50 \cdot 75650 - 1790^2} \sqrt{50 \cdot 10912 - 696^2}} = \frac{144160}{\sqrt{578401} \sqrt{61184}} = 0,766323$$

Сўнгра регрессия тенгламаси коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$\beta_1 = \frac{N \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right) \left(\sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j \right)}{N \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i \right)^2} =$$

$$= \frac{50 \cdot 27800 - 1790 \cdot 696}{50 \cdot 75650 - 1790^2} = 0,249,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m n_{0j} \cdot y_j - \beta_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_{i0} \cdot x_i = \frac{1}{50} \cdot 696 - 0,249 \cdot \frac{1}{50} \cdot 1790 = 4,98.$$

Ва нихоят, регрессия тенгламасини ёзамиз: $\hat{y}_x = 0.249x + 4.98$.

Бу мисол учун детерминация коэффициенти $(\rho_e)^2$ 0,5867 га тенг, демак, регрессия тенгламаси орқали натижа у дисперсиясининг 58,67% тушунтирилар экан, бошқа факторларнинг у дисперсиясидаги улуши 41,33%ни ташкил этар экан.

Жавоб: $\hat{y}_x = 0.249x + 4.98$

Жадваллар.

Жадвал №1. e^{-x} функциясининг қийматлари.

x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$	x	$\exp(-x)$
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,0	0,0498
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,2	0,0408
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,4	0,0334
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,6	0,0273
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,8	0,0224
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,0	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,2	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,4	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,6	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,8	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,0	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,2	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,4	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,6	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,8	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,0	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,2	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,4	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,6	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,8	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,0	0,0009

Жадвал №2. $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ функция қийматлари.

m	$\lambda_{\kappa 0.1}$	$\lambda_{\kappa 0.2}$	$\lambda_{\kappa 0.3}$	$\lambda_{\kappa 0.4}$	$\lambda_{\kappa 0.5}$	$\lambda_{\kappa 0.6}$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1638	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198
4		0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030
5				0.0001	0.0002	0.0004

m	$\lambda_{\kappa 0.7}$	$\lambda_{\kappa 0.8}$	$\lambda_{\kappa 0.9}$	$\lambda_{\kappa 1.0}$	$\lambda_{\kappa 2.0}$	$\lambda_{\kappa 3.0}$
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1879	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1680
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7				0.0001	0.0034	0.0216
8					0.0009	0.0081
9					0.0002	0.0027
10						0.0008
11						0.0002
12						0.0001

m	$\lambda_{\kappa 4.0}$	$\lambda_{\kappa 5.0}$	$\lambda_{\kappa 6.0}$	$\lambda_{\kappa 7.0}$	$\lambda_{\kappa 8.0}$	$\lambda_{\kappa 9.0}$
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.13.96	0.1318
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15		0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16		0.0001	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109
17			0.0001	0.0006	0.0021	0.0058

Жадвал №3. Лаплас функциясининг қийматлари $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

<i>x</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

$\varphi(x) = \varphi(-x)$; $x \geq 4$ лар учун: $\varphi(x) = 0$.

Жадвал №4.

Лапласнинг интеграл функцияси қийматлари $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2704	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ лар учун: $\Phi(x)$ қ 0,5.

Давоми.

Лапласнинг интеграл функцияси қийматлари $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,25	0,499989
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	4,50	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938	4,75	0,499999
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941	5,00	0,500000

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ лар учун: $\Phi(x)$ қ 0,5.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

1. А. С. Расулов, Г. Раимова «Теория вероятностей и математическая статистика», Учебное пособие, Ташкент, Издательство УМЭД, 2002
2. В.Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика», Москва, «Вёсшая школа», 1977г.
3. В.Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике», Москва, «Вёсшая школа», 1970г.
4. Г.И. Агапов «Задачник по теории вероятностей», Москва, «Вёсшая школа», 1986г.
5. «Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике» под редакцией А.А. Свешникова, Москва, «Наука», 1977г.
6. «Теория статистики с основами теории вероятностей» под редакцией члена – корр. РАН И.И. Елисеевой, Москва, «ЮНИТИ», 2001г.
7. Н.Ш. Кремер. «Теория вероятностей и математическая статистика» Учебник для ВУЗов, Москва, «ЮНИТИ», 2001г.

