МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА «Высшая математика»

Ш.Наримов , М.Сангинов.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М А Т Р И Ч Н А Я А Л Г Е Б Р А

(Учебное пособие)

Ташкент-2010

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

КАФЕДРА «Высшая математика»

Ш.Наримов , М.Сангинов

В Ы С Ш А Я М А Т Е М А Т И К А

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА
(Учебное пособие)

Ташкент-2010

Данное учебное пособие «Матричная алгебра» входит в состав комплекса учебных пособий по курсу «Высшая математика» и предназначен для студентов бакалавров Ташкентского химико-технологического института. Её цель - в ясной и удобной для восприятия форме дать студенту весь объём необходимых ему математических знаний в части матричной алгебры. При этом студент четко сориентирован для чего и когда ему будет полезно знания тех или иных разделов дисциплины, т.е. в будущем для решений каких своих профессиональных задачах нужен матричная алгебра.

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

§1. Матрицы.
1.1 Основные сведения о матрицах.

Определение. *Матрицей* размерности m×n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие таблицу, называются *элементами матрицы*. Для записи матрицы применяются либо сдвоенные вертикальные черточки, либо круглые скобки. Матрицы принято обозначать заглавными буквами, например, A, B, C,…, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией, как a_{ij}, где i-номер строки, j-номер столбца. Числа i и j определяют расположение элемента a_{ij} в матрице A и играют роль координат этого элемента в прямоугольной таблице чисел.

Например, матрица

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \text{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Имеет m строк и n столбцов.

Сокращенно матрица записывается в виде $\text{A} = (a_{ij})$ или $\text{A} = \|a_{ij}\|$, где i $(1 \le i \le m)$ указывает номер строки, а j $(1 \le j \le n)$ номер столбца. Если нужно указать размерности матрицы, то пишут $\text{A}_{m\times n}$.

Заметим, что матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента. Например, набор $(a_{11}, a_{12}, ...a_{1n})$

Две матрицы одинаковых размерностей называют *равными* и пишут A=B , если $a_{ij} = b_{ij}$, i=1,2,….,m, j=1,2,….,n.

1.2 Виды матриц.

Матрица, состоящая из одной строки $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, называется *матрицей – строкой,* а матрица, состоящая из одного столбца $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, называется *матрицей – столбцом.*

Если число столбцов матрицы равно числу строк, т.е. m=n, то матрица называется *квадратной.*

Элементы квадратной матрицы a_{ij}, у которых номер строки совпадает с номером столбца, называется *диагональными* и образуют *главную диагональ*.

Квадратная матрица, у которой все элементы выше (или ниже) главной диагонали равны нулю, называется *треугольной.*

Например,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, т.е матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *диагональной.*

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

есть диагональная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные равны нулю, т.е. матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

называется *единичной матрицей* и обозначается через **E**.

Матрица состоящая только из нулей, т.е.матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

называется нуль матрицей и обозначается через **O**.

Матрица -А = $\left(-a_{ij}\right)$ называется *противоположной* матрице А .

Если для элементов матрицы имеет место соотношение $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется *симметрической*.

Например, матрица $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 6 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ является симметрической матрицей.

Если для элементов матрицы имеет место соотношение a_{mn} =- a_{nm} , то матрица называется *кососимметрической*.

Например, матрица $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ является симметрической матрицей

Произвольная матрица вида $C = \left(A|B\right)$, составленная из двух матриц, разделенных вертикальной чертой, называется *расширенной*.

Например, матрица

$$c=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&9&0&0&1\end{array}\right)$$

является расширенной. Она составлена из квадратной матрицы третьего порядка и единичной матрицы третьего порядка.

Матрица может содержать своими элемента другие матрицы. Например, матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}...a_{1n}\\a_{21}a_{22}...a_{2n}\\..................\\a_{m1}a_{m2}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

может быть записана в виде $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\...\\a_n\end{pmatrix}$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ - матрицы – строки исходной матрицы.

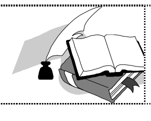
Матрица А называется матрицей *ступенчатого вида* или *ступенчатой* матрицей, если она имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1r}&...&a_{1n}\\0&a_{22}&...&a_{2r}&...&a_{2n}\\0&0&...&a_{3r}&...&a_{3n}\\...&...&...&...&...&...\\0&0&...&a_{rr}&...&a_{rn}\end{pmatrix}\quad \text{или} \quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1r}&...&a_{1n}\\0&a_{22}&...&a_{2r}&...&a_{2n}\\...&...&...&...&...&...\\0&0&...&a_{rr}&...&a_{rn}\\0&0&...&0&...&0\\...&...&...&...&...&...\\0&0&...&0&...&0\end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Определение матрицы и основные классификации матриц.
2. Что такое матрица строка(столбец) и квадратная матрица?
3. Определения симметричной и кососимметричной матрицы.
4. Диагональная и треугольная матрица.
5. Что такое противоположная, ступенчатая и расширенная матрица?
6. Что такое единичная матрица и нуль матрица?



Темы для рефератов

(Высшая математика.Матричная алгебра)

Матрицы классификация матриц.

§2. Операции над матрицами.

2.1 Умножение числа на матрицу.

Определение. Произведением матрицы А = $(a_{ij})_{mxn}$ на число λ назkвается матрица С = $(c_{ij})_{mxn}$, элементы которой определяются равенством: $c_{ij}= \lambda\, a_{ij}$, где i=1,2,….,m, j=1,2,….,n.. Иными словами операция *умножения (деления)* матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример.

$$4\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 \\ 4 & 20 & 24 \\ 4 & 24 & 16 \end{pmatrix}$$

Теорема 1.1. Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) ассоциативность: $\lambda(\mu A)= (\lambda \mu) A$
2) дистрибутивность относительно суммы матриц: $\lambda (A\pm B)= \lambda A\pm\lambda B$
3) дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\lambda\pm \mu)A=\lambda A\pm\mu A$

Здесь А и В матрицы одинаковой размерности , а λ и μ – произвольные числа.

2.2 Сложение(вычитание) матриц одинаковой размерности.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Определение. *Суммой (разностью)* матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц, т.е .$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
Эта операция коммутативно, т.е. С = А + В = В + А.

Теорема 1.2. Операция сложения(вычитания) матриц обладает следующими свойствами:

- коммутативность А+В=В+А;
- ассоциативность: (А+В)+С=А+(В+С)
- дистрибутивность относительно суммы матриц: $\lambda (A\pm B)= \lambda A\pm\lambda B$

Здесь А ,В и С матрицы одинаковой размерности , а λ – произвольное число.

Пример. Для данных матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2А + В.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.3Операция умножения матрицы на матрицу.

Определение. *Произведением* матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам: A·B = C, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \qquad (1)$$

Из формулы (1), приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.** Иначе говоря, элемент c_{ij} новой матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен сумме произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы. Заметим, что эта операция определена при условии, что число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ такая, что $C = A \cdot B$. Элементы матрицы C вычисляются по формуле

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Замечание1. Введем обозначение матрицы в виде $\underset{m\times n}{A}$, означающее, что матрица содержит m строк и n столбцов. Тогда произведение матриц можно записать следующим образом:

$$\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$$

*Замечание2.*Порядок матриц – сомножителей существен. Поэтому говорят об умножении матриц A на матрицу B справа или слева.

Если произведение матриц $A \cdot B$ существует, то произведение матриц $B \cdot A$ может не существовать.

Если существуют произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, они могут быть матрицами разных размеров.

Если матрицы A и B квадратные, то их произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют и имеют одинаковый порядок, но в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$

*Замечание4.*Умножение единичной матрицы E на квадратную матрицу A не изменяет последней: $E \cdot A = A \cdot E = A$

Замечать5. Произведение двух ненулевых матриц может дать нулевую матрицу O, например:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

2.4.Возведение матрицы в целую положительную степень

Возведение матрицы в целую положительную степень к сводиться к произведению к штук одинаковых матриц, т.е.:

$$A^K = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{K}.$$

Дополнительно определим $A^0 = E,\ A^1 = A$.

Замечание1. Возведение в степень матрицы может привести к нулевой матрице. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Замечание2.*Операция возведения в степень определена только для квадратных матриц.

Пример. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются *перестановочными.*

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера, поскольку $A \cdot E = E \cdot A = A$

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \;\; O \cdot A = O,$$

где О – нулевая матрица, т.е. матрица состоящая из нулей.

Теорема 1.3. Операция умножения матрицы на матрицу обладает следующими свойствами:

1) Операция умножения матриц *дистрибутивна* по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{и} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

2) Операция умножения матриц *ассоциативна,* т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

4) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Здесь знак T означает *транспонированную* матрицу. Понятие *транспонирование* будет рассмотрено ниже в п.2.5.

5) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже в **§3**..

2.5.Транспонирование матриц

(переход к матрице, у которой строки и столбцы меняются местами.)

Определение**.** Матрицу обозначенную как A^T называют **транспонированной** матрицей А, а переход от А к A^T операцией **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Замечание. Из определения следует, что если матрица А имеет размерность $m \times n$, то транспонированная матрица A^T имеет размерность $n \times m$.

Операции транспонирования, а также операции сложения и умножения матриц обладают легко проверяемыми свойствами.

2.6.Свойства транспонирования матрицы

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(a \cdot A)^T = A^T + B^T$,
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T A^T$

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц АВС.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

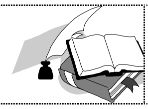
Пример. Найти произведение матриц А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Как определяется операция умножения(деления) матрицу на число?
2. Свойства операции, умножения(деления) матрицу на число.
3. Как определяется операция сложение(вычитание) матрицу на матрицу?
4. Свойства операции, сложение(вычитание) матрицу на матрицу.
5. Необходимое условие для выполнения операции сложение(вычитание) матрицу на матрицу.
6. Как определяется операция умножение матрицу на матрицу?
7. Свойства операции, умножение матрицу на матрицу.
8. Необходимое условие для выполнения операции умножение матрицу на матрицу.
9. Как определяется операция возведение матрицу на целую степень?
10. Свойства операции, возведение матрицу на целую степень.
11. Операция транспонирования и её свойства.



Темы для рефератов

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Арифметические действия над матрицами.

§3. Определители(детерминанты) квадратных матриц.

3.1. Введение определителя.

Свяжем с каждой квадратной матрицей А некоторое число, вводимое по определенному правилу. Назовем это число *определителем(детерминантом) матрицы* и обозначим его как $|A|$ или detA·

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ назовем число $|A| = (a_{11})$

Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ назовем число, равное $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12}$, где M_{1j} – определитель матрицы первого порядка, полученный вычеркиванием из матрицы А 1-й строки и j-го столбца(индекс j равен 1 или2).

Например, определитель M_{11} получен из матрицы А вычеркиванием 1-й строки и 1-го столбца. Следовательно, величина определителя M_{11} равна a_{22}:

$$M_{11} = a_{22}$$

Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определителем матрицы третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ назовем число, равное

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \quad (2)$$

где M_{1j} – определитель матрицы второго порядка, полученный вычеркиванием из матрицы А 1-й строки и j-го столбца(индекс j равен 1,2 или3). Например, определитель M_{11} получен из матрицы А вычеркиванием 1-й строки и 1-го столбца:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$$

Подставим полученные соотношения в (2). Тогда имеем:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)= \quad (3)$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Из структуры формулы видно, что в каждое слагаемое в правой части равенства входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы.

Например, величина определителя матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

равна $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot3+0\cdot0\cdot(-2)+2\cdot1\cdot(-1)-(-2)\cdot1\cdot(-1)-1\cdot1\cdot0-0\cdot2\cdot3=-1$

Определителем квадратной матрицы n – го порядка

$$\text{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *число*, $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} \qquad (4)$$

В краткой форме соотношение (4) записывается как :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} .$$

Здесь M_{1j} - определитель матрицы $(n-1)$ - го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца.

Введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минор M_{23} элемента a_{23} матрицы третьего порядка получается вычеркиванием из матрица 2-й строки и 3-го столбца:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется минором M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Используя понятия алгебраического дополнения, формулу (4) можно записать в виде

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (5)$$

Замечание 1. Рассмотренные нами выше определители $M_{11}, M_{12}, \dots$ есть миноры соответствующих элементов матрицы.

Замечание 2. Формула (5) допускает сокращенную запись:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

Иными словами, определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения.

Замечание 3. Формула (5) называется разложением определителя по 1-й строке.

Замечание 4. Величина алгебраического дополнения A_{ij} элемента a_{ij} зависит, только от положения (i, j) этого элемента в матрице A. При замене элемента a_{ij} матрицы на другое число величина алгебраического дополнения A_{ij} не изменяется.

Предыдущая формула (4) позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке. Заметим, что также справедлива формула вычисления определителя и по первому столбцу:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА (о величине определителя квадратной матрицы)

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или любого столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad i = 1,2,...,n,$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} M_{ij} \quad j = 1,2,...,n.$$

◄При доказательстве ограничимся для простоты рассмотрением матрицы третьего порядка. В (2) мы получили формулу разложения определителя по 1-й строке. Разложим теперь определитель, например, по 2-му столбцу:

$$|A|_{2столбец} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} \quad (6)$$

Каждый минор $M_{i2} (i = 1,2,3)$ является определителем второго порядка:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$$

Подставим эти выражения в формулу (6), раскроем скобки и соберем положительные слагаемые, затем отрицательные. Получим

$$\begin{aligned} |A|_{2столбец} &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая правые части соотношений (3) и (7), убеждаемся в том, что $|A| = |A|_{2столбец}$.

Подобным образом проверяются и другие равенства, получаемые разложением определителя по определенной строке или столбцу.►

Следующий пример иллюстрирует применение этой теоремы.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Разложим определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель по первому столбцу**.** Тогда имеем

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Далее продолжая эту процедуру каждый раз получим

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Мы убедились, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители, а определитель единичной матрицы равен 1.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

3.2 Свойство определителей

1)Определитель с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю.

Для доказательства этого свойства достаточно разложить определитель по нулевой строке или по нулевому столбцу.

2)Умножение определителя на число равносильно умножению какой – либо строки или столбца определителя на это число.

Умножим любую строку или столбец исходного определителя на число, разложим определитель по этой строке или столбцу, вынесем это число за скобки и свернем оставшиеся в скобках выражение в исходный определитель.

3) При транспонировании матрицы величина е определителя не изменяется т.е.

$$|A| = \left|A^T\right|.$$

Разложим определитель $|A|$ по 1-й строке, транспонируем его. Разложим полученный определитель $\left|A^T\right|$ по 1-му столбцу. Из доказанной выше теореме следует, что результат будет одинаков.

4)При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет знак.

В определителе

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Переставим, например, первую и вторую строки. Получим

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Разложим определитель $|A|_1$ по второй строке, а определитель $|A|_2$ - по первой. Получим

$$|A|_1 = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} + \dots + (-1)^{n+2} a_{2n}M_{2n}$$

$$|A|_2 = a_{21}M - a_{22}M_{22} + \dots + (-1)^{n+1} a_{2n}M_{2n}$$

откуда следует $|A|_1 = -|A|_2$.

Теперь переставим i-ю строку с $(i+k)$-й. Для этого сместим i-ю строку на k строк вниз. Определитель изменит знак k раз. Строка с номером $(i+k)$ окажется при этом на $(i+k-1)$-м месте. Переставим эту строку на место i-й строки, для чего поднимем ее на $k-1$ строк вверх. Определитель изменит знак $k-1$ раз. В результате процедуры определитель изменит знак нечетное число раз: $k+k-1=2k-1$, т.е. знак определителя при любой перестановке строк изменится.

5)Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. При перестановке двух строк определитель изменит знак. Переставим местами одинаковые строки. Определитель останется таким же.
Значит, $-|A| = |A|$. Отсюда следует, что $|A| = 0$

6)Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбцы), равен нулю.

Вынесем коэффициент пропорциональности за знак определителя. В нем образуются две одинаковые строки. Поэтому такой определитель равен нулю.

7)Определитель можно разложить на сумму определителей.

Представим элементы i-й строки определителя в виде суммы двух слагаемых. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha\beta_1 + \beta c_1 & \dots & \alpha\beta_n + \beta c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где α, β - некоторые коэффициенты, равные в частном случае единице. Разложим определитель $|A|$ по i-й строке, используя алгебраические дополнения, преобразуем полученную сумму.
Тогда

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha\beta_j+\beta c_j\right)A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\alpha\beta_i A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\beta c_j A_{ij}=\alpha\sum_{j=1}^{n}b_j A_{ij}+\beta\sum_{j=1}^{n}c_j A_{ij}=\alpha\cdot|A|_1+\beta\cdot|A|_2$$

где

$$|A|_1=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_1 & \dots & b_n\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & .. & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad |A|_2=\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ c_1 & \dots & c_n\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

8)Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Полученный определитель можно разложить на сумму двух определителей. Один из них является исходным. Другой содержит две пропорциональные строки, следовательно, равен нулю.

9)Сумма произведений произвольных чисел $b_1,b_2,...,b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на чисел $b_1,b_2,...,b_n$.

Свойство вытекает из замечания 4 к алгебраическим дополнениям и доказанной теоремы.

10) Сумма произведений элементов одной строки матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой строки этой матрицы равна нулю.

Умножим элементы i-й строки исходной матрицы на алгебраические дополнения к j-й строке и составим сумму:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+...+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}$$

Подобная сумма получается из матрицы, у которой не место j-й строки стоит i-я строка:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1B}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет две одинаковые строки, поэтому величина ее определителя равна нулю.

11) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, т.е.

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

В силу громоздких преобразований ограничимся рассмотрением матриц второго порядка.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$$

Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем величины определителей трех матриц А, В, и АВ, а также посчитаем величину $|A| \cdot |B|$.

$$|A| = a_1a_4 - a_2a_3, \qquad |B| = b_1b_4 - b_2b_3,$$

$$|AB| = (a_1b_1 + a_2b_3)(a_3b_2 + a_4b_4) - (a_1b_2 + a_2b_4)(a_3b_1 + a_4b_3) = \underline{a_1a_3b_1b_2} + a_1a_4b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3 +$$
$$+ \underline{\underline{a_2a_4b_3b_4}} - \underline{a_1a_3b_1b_3} - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 - \underline{a_2a_4b_3b_4},$$

$$|A| \cdot |B| = (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) = a_1a_4b_1b_4 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3$$

После сокращения подобных (они подчеркнуты), получаем справа одинаковые выражения для $|AB|$ и $|A| \cdot |B|$. Следующий пример на практике иллюстрирует 11 свойство.

Пример:. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (АВ).

1-й способ: $|A|$ = 4 – 6 = -2; $|B|$ = 15 – 2 = 13; $|AB|$ = $|A| \cdot |B|$ = -26.

2- й способ: АВ = $\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $|AB|$ = 7·18 - 8·19 = 126 – 152 = -26.

3.3.Вычисление определителя

Существует несколько способов вычисления величины определителя. Один из таких методов вычисления определителя определяется формулой (4) Выбор способа диктуется видом и порядком определителя. Удачно выбранный способ позволяет существенно сократить вычисления. Рассмотрим их на примере определителя матрицы третьего порядка.

ПРИМЕР. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1-й способ. Использование теоремы о разложении определителя по любой строке или столбцу.

Разложим определитель, например, по 3-му столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-4-8) - (-4+4) + 2(-8-4) = -12$$

2-й способ. Использование правила треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot2 + 2\cdot1\cdot(-2) + 2\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot(-4)\cdot(-2) - 2\cdot2\cdot2 - (-2)\cdot1\cdot2 =$$
$$= -16 - 4 + 4 + 8 - 8 + 4 = -12$$

3-й способ. Использование свойств определителя для преобразования его к виду, когда он содержит строку или столбец с максимальным количеством нулей. Разложение определителя по этой строке (столбцу):

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ = {прибавим к 1-й строке 3-ю} = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ = {разложим определитель по 1-й строке} $= 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4-8=-12$

4-й способ. Использование свойств определителя для преобразования его к треугольному виду. Величина определителя вычисляется как произведение элементов, стоящих на главной диагонали:

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ = {1-ю строку умножим на -1 и сложим со 2-й строкой, переместив результат на месте 2-й строки}= $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ = {1-ю строку сложим с 3-й и поместим результат на месте 3-й строки}= $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = {перемножим элементы главной диагонали}=-12

<u>Пример.</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4)-1(9-1)+2(12-2) = -2-8+20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2)-1(0-6) = 2.$$

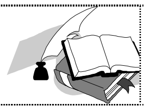
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4)-3(-6) = -8+18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Понятие определителя(детерминанта) матрицы. Для каких матриц имеет место понятие определителя?
2. Определители квадратных матриц первого, второго порядков и третьего порядков.
3. Определение определителя квадратной матрицы n -ого порядка.
4. Свойства определителей.
5. Понятия минора и алгебраического дополнения.



Темы для рефератов

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Определители и правила их вычислений.

§4.Обратная матрица.

4.1. Теорема о существовании обратной матрицы.

Определим операцию деления двух матриц как операцию, обратную умножению.

Матрица А называется *невырожденной,* если ее определитель отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$. В противном случае она называется *вырожденно.*

Определение.Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице А, если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \qquad (8)$$

Следующая теорема устанавливает условия существования обратной матрицы.

ТЕОРЕМА (о существовании обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица невырождена.

◄*Необходимость*. Пусть матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда . Используя свойство 11 определителя, получаем , откуда вытекает $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$. Следовательно, $|A| \neq 0$. Матрица А является невырожденной. ►

◄*Достаточность*. Пусть матрица А является невырожденной: $|A| \neq 0$. Матрицу А транспонируем и на основе транспонированной матрицы A^T построим новую матрицу A^P, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A^T. Назовем матрицу A^P *присоединенной.* Итак,

$$A^P = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}$$

Запишем новую матрицу В как произведение матриц A^P и А:
$B = A^P \cdot A$. Она имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & ... & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & ... & A_{2n}^T \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & ... & A_{nn}^T \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы B вычислим по отдельности и воспользуемся равенством $A_{ij}^T = A_{ij}$, которое легко проверяется.

$$b_{11} = A_{11}^T \cdot a_{11} + A_{12}^T \cdot a_{21} + ... + A_{1n}^T \cdot a_{n1} = \sum_{j=1}^{4} A_{1j}^T \cdot a_{j1} = \sum_{j=1}^{n} A_{j1} \cdot a_{j1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{j1} = |A|$$

$$b_{21} = A_{21}^T \cdot a_{11} + A_{22}^T \cdot a_{21} + ... + A_{2n}^T \cdot a_{n1} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}^T \cdot a_{j1} = \sum_{j=1}^{n} A_{j2} \cdot a_{j1} = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \cdot A_{j2} = 0$$

……………………

Продолжая вычисления, обратим внимание на то, что отличными от нуля окажутся только диагональные элементы матрицы B:

$$b_{ij} = A_{i1}^T \cdot a_{1j} + A_{i2}^T \cdot a_{2j} + ... + A_{in}^T \cdot a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^T \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \cdot a_{kj} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Поэтому матрица B имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} |A| & 0 & ... & 0 \\ 0 & |A| & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E$$

Следовательно,

$$A^P \cdot A = |A| \cdot E$$

Аналогично можно доказать, что

$$A \cdot A^P = |A| \cdot E$$

Рассмотрим соотношение

$$A^P \cdot A = A \cdot A^P = |A| \cdot E$$

Разделив его на $|A| \neq 0$, получим

$$\frac{A^P}{|A|} \cdot A = A \cdot \frac{A^P}{|A|} = E$$

Поскольку для матрицы $\dfrac{A^P}{|A|}$ выполнено равенство (8), эта матрица является обратной по определению:

$$\frac{A^P}{|A|} \equiv A^{-1}. ►$$

◄ *Единственность* обратной матрицы. Пусть, кроме обратной матрицы A^{-1} к матрице A, существует еще одна обратная матрица $X \neq A^{-1}$. Тогда выполняется равенство $X \cdot A = E$. Умножим это равенство справа на A^{-1}. Получим $X \cdot A \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1}$, откуда $X \cdot E = E \cdot A^{-1}$ или $X = A^{-1}$. Таким образом, не существует обратной матрицы X, отличной от A^{-1}. Аналогично доказывается, что равенство $A \cdot Y = E$ выполняется в том единственном случае, когда $Y = A^{-1}$. ►

4.2.Свойства обратных матриц.

В данном разделе докажем теорему, которая включает в себе свойства обратных матриц.
Теорема. Если существует обратная матрица , то имеет место следующие соотношения:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

3) $(A^{-1})^{m} = (A^{m})^{-1}$

4) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

◀ Умножим обе части равенства слева на A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1} = A^{-1}\cdot A$$

Слева стоит произведение матрицы A^{-1} на обратную ей $(A^{-1})^{-1}$, которое равно единичной матрице, справа – произведение обратной матрицы на исходную, также равное единичной матрице. Следовательно, равенство равно. ▶

2) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

◀Умножим обе части равенства слева на A^{T}:

$$A^{T}\cdot(A^{-1}T) = A^{T}\cdot(A^{T})^{-1}$$

Далее воспользуемся свойством 4 транспонирования матрицы и перепишем левую часть соотношения так: $(A^{-1}\cdot A)^{T}$. Правая часть равенства есть произведение матрицы A^{T} на обратную ей. Получаем $E^{T} = E$. Откуда следует тождество $E = E$.▶

3) $(A^{-1})^{m} = (A^{m})^{-1}$

◀Умножим равенство слева на A^{m}:

$$A^{m}\cdot(A^{-1})^{m} = A^{m}\cdot(A^{m})^{-1}$$

Левую часть равенства представим в виде произведения 2m сомножителей:

$$A\cdot A....\underbrace{A\,A^{-1}}_{E}\cdot A^{-1}...A^{-1} = A^{m}\cdot(A^{m})^{-1}$$

Левая часть равенства свертывается до матрицы E, правая часть равенства есть произведение матрицы A^{m} на обратную ей. Следовательно, равенство обращается в тождество E=E. ▶

4) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

◀ Для равенства $A^{-1}\cdot A = E$ воспользуемся свойством 11 определителей. Получим $\left|A^{-1}\cdot A\right| = |E|$, откуда следует $\left|A^{-1}\right|\cdot|A| = |E| = 1$.

Поэтому $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$. ▶

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

◀Умножим равенство слева на матрицу B:

$$B\cdot(AB)^{-1} = B\cdot B^{-1}A^{-1}$$

Правая часть соотношения примет вид $E\cdot A^{-1}$ или A^{-1}. Итак,

$$B\cdot(AB)^{-1} = A^{-1}.$$

Умножим последнее равенство слева на А. Получим

$$A\cdot B\cdot(AB)^{-1} = A\cdot A^{-1}$$

Слева стоит произведение матрицы AB на обратную ей $(AB)^{-1}$, справа – произведение матрицы A на обратную ей A^{-1}. Следовательно, $E = E$. Свойство 5 доказано. ►

Доказанная теорема дает способ вычисления обратной матрицы.

Пример. Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение***.** Обратную матрицу будем искать, делая последовательно следующие шаги:

1) Находим определитель матрицы А. Его величина $|A| = -1$

Следовательно, обратная матрица существует.

2) Находим транспонированную к А матрицу A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Находим алгебраические дополнения к элементам матрицы A^T:

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ldots, A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

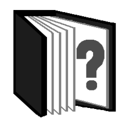
Записываем присоединенную матрицу:

$$A^P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

4) Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^P = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

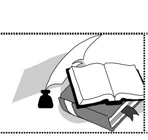
Другой способ вычисления обратной матрицы дает метод Жордана. Но вначале познакомимся с матрицами элементарных преобразований, на использовании которых основан этот метод.



Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Невырожденная матрица.
2. Определение обратной матрицы.
3. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
4. Свойства обратной матрицы
5.



Темы для рефератов

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Обратная матрица и её свойства.

§5. Матрицы элементарных преобразований

5.1.Типы матриц элементарных преобразований

Матрицами элементарных преобразований называются матрицы следующих трех типов.

1-й тип. Матрицей элементарных преобразований 1- го типа называется любая матрица, полученная из единичной матрицы перестановкой каких – либо двух строк или столбцов. Например, если в единичной матрице пятого порядка

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Переставить местами вторую и третью строки, получается матрица элементарных преобразований 1-го типа:

$$I_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В матрице I_{23} все элементы вне главной диагонали равны нулю, за исключением тех, которые стоят в позициях (2,3) и (3,2).

2-й тип. Матрицей элементарных преобразований 2-го типа называется любая матрица, полученная из единичной заменой диагонального элемента на любое действительное число, не равное нулю. Например, матрицей элементарных преобразований 2-го типа является матрица

$$II_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У которой в позиции (4,4) находится число $a \neq 0$.

3-й тип. Матрицей элементарных преобразований 3-го типа называется любая матрица, отличающаяся от единичной наличием одного внедиагонального элемент, не равного нулю. Например,

$$III_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является матрицей элементарных преобразований 3-го типа. У нее в позиции (2,4) стоит не равное нулю число b.

5.2.Элементарные преобразования матрицы

Назовем *элементарными преобразованиями* матрицы А такие изменения в ее строках и столбцах, которые возникают при умножении матрицы А на матрицы элементарных преобразований слева или справа.

1. Умножение матрицы А на матрицу I_{ij} слева переставляет строки с номерами i и j. Например,

$$I_{23}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}$$

переставляет 2-ю и 3-ю строки местами.

2. Умножение матрицы А на матрицу II_{ij} слева равносильно умножению i-й строки матрицы А на число а.

Например,

$$II_{44}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&a&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a\cdot a_{41}&a\cdot a_{42}&a\cdot a_{43}&a\cdot a_{44}&a\cdot a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}$$

умножает 4-ю строку на число а.

3.Умножение матрицы а на матрицу III_{ij} слева равносильно прибавлению к i-й строке матрицы А ее j-й строки, предварительно умноженной на b. Например,

$$III_{24}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&b&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}+b\cdot a_{41}&a_{22}+b\cdot a_{42}&a_{23}+b\cdot a_{43}&a_{24}+b\cdot a_{44}&a_{25}+b\cdot a_{54}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55}\end{pmatrix}$$

Прибавляет ко 2-й строке матрицы А ее 4-ю строку с коэффициентом b.

Легко проверяются преобразования со столбцами матрица А.

4. Умножение матрицы А на матрицу I_{ij} справа переставляет столбцы с номерами i и j.

5. Умножение матрицы А на матрицу II_{ij} справа равносильно умножению i-го столбца матрица А на число a.

6. Умножение матрицы А на матрицу III_{ij} справа равносильно прибавлению к i-му столбцу матрицы А ее j-го столбца.

Замечание 1. Элементарные матрицы всех трех типов являются невырожденными. Элементарные матрицы второго и третьего типов не вырождены, поскольку они имеют треугольный вид. Элементарная матрица первого типа не вырождена, так как при разложении определителя элементарной матрицы первого типа по любой строке (столбцу) образуется определитель единичной матрицы с нулевым коэффициентом. Разложим, например, определитель матрицы I_{23} по 1-й строке:

$$\left|I_{23}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Замечание 2. Ни одно из элементарных преобразований не может превратить невырожденную матрицу в вырожденную. Следовательно, умножение исходной матрицы на матрицу элементарных преобразований, меняя в большинстве случаев величину определителя матрицы, не приводит к его обнулению.

ТЕОРЕМА(об умножении матрицы на матрицы элементарных преобразований)

Любая невырожденная матрица А путем умножения на матрицы элементарных преобразований $E_1, E_2, ..., E_K$ может быть сведена к единичной, т.е. найдутся такие матрицы элементарных преобразований $E_1, E_2, ..., E_K$, последовательное умножение которых на матрицу А слева преобразует исходную матрицу А в единичную:

$$E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E .$$

◄ Пусть матрица А невырожденная. Сведем матрицу А с помощью элементарных преобразований к матрице треугольного вида. Поскольку матрица А невырожденная, она ненулевая. Найдем в 1-м столбце ненулевой элемент и, меняя строки местами, поставим этот элемент. Итак, $a \neq 0$. Прибавим ко 2-й строке матрицы 1-ю строку, предварительно умноженную на $\frac{-a_{21}}{a_{11}}$. В позиции (2,1) появляется нуль. Прибавим к 3-й строке матрицы 1-ю строку, предварительно умноженную на $\frac{-a_{31}}{a_{11}}$. Тогда в позиции (3,1) также появится нуль. Продолжив эти элементарные преобразования $(n-1)$ раз, получим матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В дальнейших преобразованиях 1-я строка не участвует. Найдем во 2-м столбце ненулевой элемент и, меняя строки местами, поставим этот элемент в позицию (2,2), если ранее там стоял нулевой элемент. Имеем a'_{22}. Прибавим к 3-й строке матрицы 2-ю строку, предварительно умноженную на $\frac{-a_{32}}{a_{22}}$. В позиции (3,2) появляется нуль. Продолжив эти элементарные преобразования $(n-1)$ раз, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

Теперь в дальнейших преобразованиях уже не участвуют 1-я и 2-я строки. Продолжив этот процесс (совершив t раз элементарные преобразования), придем к треугольной матрице

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'''_{nn} \end{pmatrix}$$

На главной диагонали стоят элементы, отличные от нуля. Приведение матрицы к треугольному виду с ненулевыми элементами на главной диагонали всегда возможно, так как в противном случае (если бы не нашлось ни одного не равного нулю элемента в каждом столбце) определитель матрицы оказался бы равным нулю.

Элементарные преобразования строк матрицы равносильны умножению этой матрицы слева на соответствующие матрицы элементарных преобразований. Поэтому процесс преобразования матрицы к треугольному виду можно представить в виде последовательного умножения t раз слева исходной матрицы на матрицы элементарных преобразований

$$E_t \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = A_t$$

Продолжим элементарные преобразования матрицы A_t. Умножив 1-ю строку матрицы A_t на число $\frac{1}{a_{11}}$, получим в позиции (1,1) единицу. Аналогичными элементарными преобразованиями (преобразования 2-го типа) получим единицы во всех позициях главной диагонали. Матрица A_t приводится к следующему виду:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} & \dots & \dot{a}_{1,n-1} & \dot{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dot{a}_{23} & \dots & \dot{a}_{2,n-1} & \dot{a}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dot{a}_{3,n-1} & \dot{a}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следующий, последний шаг – получит нули во всех позициях выше главной диагонали. Опираемся на последнюю строку. Последовательно прибавляя к первым $n-1$ строкам последнюю, умноженную соответственно на $-\dot{a}_{1n}$, $-\dot{a}_{2n}$, ..., $-\dot{a}_{n-1,n}$, приходим к матрице, у которой первые $n-1$ элементов последнего столбца равны нулю. Действуя аналогичным образом, опираясь на последнюю строку, получаем во первых позициях предпоследнего столбца нули. Продолжая совершать подобные элементарные преобразования, окончательно получаем

$$A_K \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, совершив к элементарных преобразований а матрице А, мы привели ее к единичной. Используя матрицы элементарных преобразований, запишем результат в матричной форме:

$$E_K ... E_{L+1} \cdot E_L ... E_{t+1} \cdot E_t ... E_1 \cdot A = E$$

или

$$E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E \qquad (9)$$

Теорема доказана. ►

5.3.Способ построение обратной матрицы

Умножим обе части равенства (9) на матрицу A^{-1} с права. Тогда

$$E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1}$$

После преобразований получим

$$E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 = A^{-1} \qquad (10)$$

Это равенство лежит в основе способа построения обратной матрицы. Пусть А – невырожденная матрица n-го порядка. Составим новую матрицу, которую назовем расширенной: $(A|E)$.

Пусть единичная матрица Е имеет также порядок n. Будем последовательно совершать с расширенной матрицей такие элементарные преобразования, которые равносильны умножению этой матрицы слева на матрицы элементарных преобразований $E_1, E_2, ..., E_n$. Получим

$$\left(E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \middle| E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot E\right)$$

Подставив (9) и (10) в полученную расширенную матрицу, будем иметь

$$\left(E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \middle| E_K \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot E\right) = \left(E \middle| A^{-1}\right)$$

Таким образом, если путем элементарных преобразований с расширенной матрицей слева от черты получить единичную матрицу, то справа от черты образуется обратная матрица.

Замечание. Применяя элементарные преобразования к расширенной матрице $(A|B)$, можно получить матрицу $(E|A^{-1} \cdot B)$. Матрица $A^{-1} \cdot B$ широко используется при решении систем линейных уравнений. Для получения этой матрицы следует проводить элементарные преобразования только со *строками* расширенной матрицы, так как эти действия равносильны умножению матриц элементарных преобразований *слева* на расширенную матрицу.

Пример**.** Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Решение**.** Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Прибавим ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Умножим 3-ю строку на -2 и сложим со 2-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)$$

Ниже главной диагонали получили треугольник нулей. Образуем теперь нули выше главной диагонали, для чего ко 2-й строке прибавим 3-ю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)$$

Умножим 1-ю строку на 2 и сложим со 2-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)$$

Умножим 1-ю и 2-ю строки на 0,5, 3-ю строку – на 1-:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2\end{array}\right)$$

Слева от черты получена единичная матрица, значит, справа – обратная матрица A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Типы матриц элементарных преобразований.
2. Каким элементарным операциям над строками(столбцами) матрицы равносильно умножение матрицу на матрицу элементарных преобразований первого типа?
3. Что получим после умножения данной матрицы на матрицу элементарных преобразований второго типа?
4. Каким элементарным операциям над строками(столбцами) матрицы равносильно умножение матрицу на матрицу элементарных преобразований третьего типа?
5. Определение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Темы для рефератов

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Обратная матрица. Способы определения обратных матриц.
2. Матрицы элементарных преобразований и их применения

§6. Ранг матрицы.

6.1.Определение ранга матрицы

Понятие ранга матрицы – одно из фундаментальных в линейной алгебре. В матрице А размером $m \times n$ вычеркиванием каких – либо $m-k$ строк или $n-k$ столбцов можно образовать квадратную матрицу k-го порядка $(k \times k)$. Как было сказано выше, определитель M_k такой матрицы называется *минором k-го порядка*. У матрицы размера $m \times n$ есть миноры первого порядка, второго порядка и так далее до k-го порядка, где $k = \min(m,n)$. Например, у матрицы $\underset{5\times 3}{A}$ имеются миноры первого, второго и третьего порядков.

Определение.*Рангом* матрицы $\underset{m\times n}{A}$ называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначение: rang A, или r(A).

Свойства ранга:

1) Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.
2) $r(A) \le \min(m,n)$.
3) $r(A) = n$ у матрицы n-го порядка тогда и только тогда, когда $|A| \ne 0$, т.е. она невырождена.

Пример**.** Вычислить ранг матрицы

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Для матрицы $\underset{3\times 4}{A}$ ранг $r(A) \le \min(3,4) = 3$. Чтобы проверить, может ли ранг быть равным 3, вычислим все миноры 3-го порядка, которые можно образовать из матрицы вычеркиванием одного столбца:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг не может быть более 2. Легко найти минор 2-го порядка, отличный от нуля. Например, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Но тогда $r(A) = 2$.

Поиск ранга матрицы большого порядка перебором миноров является трудоемкой задачей. А сегодня развиты более эффективные методы разделения ранга матрицы.

К введенным ранее трем типам элементарных преобразований матрицы добавим еще два: отбрасывание нулей строки или столбца и транспонирование матрицы.

Таким образом, имеем 5 типов элементарных преобразований матрицы

1. Умножение матрицы А на матрицу I_{ij} слева(справа) переставляет строки(столбцы) с номерами i и j.

2. Умножение матрицы А на матрицу II_{ij} слева(справа) равносильно умножению i-й строки(столбцы) матрицы А на число a.

3.Умножение матрицы а на матрицу III_{ij} слева(справа) равносильно прибавлению к i-й строке(столбце) матрицы А ее j-й строки(столбец), предварительно умноженной на b.

4-й тип. Отбрасывание нулей строки или столбца.

5-й тип. Транспонирование матрицы.

6.2. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях

ТЕОРЕМА(о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)

Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

◄ Рассмотрим последовательно все типы элементарных преобразований матрицы.

Элементарные преобразования 1-го типа меняют строки или столбцы в матрице. В этом случае определитель матрицы меняет знак, но не может обратиться в нуль.

Элементарные преобразования 2-го типа умножают строку или столбец на не равное нулю число. Но тогда определитель матрицы умножиться на это число, что не может привести к его обнулению.

Элементарные преобразования 3-го типа приводят к прибавлению к i-й строке матрицы А ее j-й строки, что не меняет величины определителя.

Элементарные преобразования 4-го типа позволяют отбросить все миноры k-го порядка, равные нулю, и перейти к рассмотрению миноров к-1 порядка. На величине ранга это, очевидно, не отразиться.

Элементарные преобразования 5-го типа транспонируют матрицу, отчего величина ее определителя, как известно (свойство 3 определителей), не изменяется.

Мы установили, что при элементарных преобразованиях матриц их определители либо сохраняются, либо изменяют свою величину, не обращаясь при этом в нуль. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.н. ее ранг не изменяется.►

Теорема дает возможность посредством элементарных преобразований привести матрицу к определенному виду, когда ее ранг вычисляется без труда.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются *эквивалентными.*

Надо отметить, что *равенство* матриц и *эквивалентность* матриц - понятия совершенно различны. Следовательно, при проведении элементарных преобразований с матрицей знак равенства ставиться не может (матрицы не равны), ставится обычно знак тильды “~”.

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример1. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{RgA} = 2.$$

Пример2. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \mathrm{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном последнем примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Рассмотрим задачу эффективного вычисления ранга по подробнее.

Рассмотрим *ступенчатую м*атрицу А, которая имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,...,r; r \leq k = \min(m,n)$. Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как существует минор порядка r, отличный от нуля:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{rr} \neq 0$$

Таким образом, произвольную матрицу $\underset{m\times n}{A}$ следует привести к ступенчатому виду. Число ненулевых строк матриц будет равно ее рангу. Если квадратная матрица $\underset{n\times n}{A}$ примет треугольный вид, ее ранг будет равен n.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, предварительно умноженную на -2, к 3-й строке прибавим 1-ю, предварительно умноженную на -1. Получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

К 3-й строке прибавим 2-ю, предварительно умноженную на -2. Получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Число ненулевых строк равно 2. Тогда $r(A) = 2$. При ином обосновании выведем из матрицы минор максимального порядка, не равный нулю. Это, например, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$. Тогда $r(A) = 2$.

6.3.Линейные комбинации строк или столбцов

Познакомимся с понятием линейной зависимости строк или столбцов. В матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

введем обозначения строк:

$$e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{pmatrix}$$
....
$$e_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Эти строки $e_1, e_2, ..., e_m$ являются n-мерными и представляют собой матрицы размерностью $1 \times n$. В новых обозначениях исходная матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_m \end{pmatrix}$$

Строка $e = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$, определяемая равенством

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m, \qquad (11)$$

называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \dots, e_m$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - любые действительные числа.

В развернутом матричном виде последнее равенство выглядит так:

$$(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) = \lambda_1 \cdot (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) + \lambda_2 (a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}) + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \lambda_m \cdot (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn})$$

Для элементов строки e имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1}, \\ b_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \end{cases} \qquad (12)$$

Строки $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно зависимыми,* если существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих строк равна нулевой строке, т.е.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0$$

Строки $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно независимыми*, если линейная комбинация этих строк равна нулевой строке только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_m = 0$.

ТЕОРЕМА(о линейной комбинации строк матрицы**)**

Если строки матрицы линейно зависимы, то одна их них является линейной комбинацией остальных.

◄ Пусть строки $e_1, e_2, \dots, e_m$ линейно зависимы. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю одновременно и такие, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0$$

Пусть например, $\lambda_m \neq 0$. Перенесем первые m-1 слагаемых направо и разделим равенство на $\lambda_m \neq 0$.

$$e_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} e_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} e_{m-1}$$

или

$$e_m = \lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2 + \dots + \lambda_{m-1}' e_{m-1},$$

где $\lambda_i' = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$. ►

Замечание1. Верно и обратное утверждение: если одно из строк является линейной комбинацией остальных, то эти строки линейно зависимы.

Замечание2. Аналогичными свойствами обладает множество m-мерных столбцов.

6.4.Связь ранга с числом независимых строк (столбцов)

ТЕОРЕМА(о связи ранга с числом независимых строк)

Ранг матрицы равен числу ее независимых строк (столбцов).

◄Пусть матрица $\underset{m\times n}{A}$ имеет ранг r. По определению ранга матрицы, существует минор порядка r, отличный от нуля. Пусть для определенности это минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда строки $e_1, e_2, ..., e_r$ линейно независимы. Предположим противное. Например, строка с номером rесть линейная комбинация остальных строк. В этом случае

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}$$

Проведем элементарные преобразования. Не изменяющие величину определителя. Прибавим к этой строке 1-ю строку, предварительно

умноженную на $-\lambda_1$, 2-ю строку, умноженную на $-\lambda_2$, и т.д., наконец, $(r-1)$ строку, умноженную на $-\lambda_{r-1}$. Получим на месте строки с номером r последовательно строку

$$e_r - \lambda_{1e}$$
$$e_r - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_r - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \ldots - \lambda_{r-1} e_{r-1}$$

Последняя строка теперь будет состоять из одних нулей. Но тогда $M_r = 0$, что невозможно. Наше предположение о том, что строки $e_1, e_2, ..., e_r$ линейно зависимы, неверно. ►

6.5.Строка матрицы как линейная комбинация независимых строк матрицы

ТЕОРЕМА(о представлении строки в виде линейной комбинации независимых строк**)**

Каждая строка матрицы А может быть представлена в виде линейной комбинации независимых строк матрицы.

◄ Пусть матрица $\underset{m\times n}{A}$ имеет ранг r. По определению ранга матрицы, существует минор порядка r, отличный от нуля. Пусть для определенности это минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка матрицы А, который можно получить, добавив к минору M_r i-ю строку и j-й столбец матрицы $(r < i \le m, r < j \le n)$:

$$M_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Этот минор M_{r+1} равен нулю, как минор более высокого порядка, чем r. Разложим его по столбцу:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}(-1)^{i+j}M_r = 0 \qquad (13)$$

Разделим равенство на $M_r \neq 0$ и введем обозначения:

$$-\frac{A_{kj}}{(-1)^{i+j}M_r} = \lambda_k,$$

где $k = 1,2,....,r$.

Перепишем равенство в следующем виде:

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj},$$

где $j = r+1,...,m$.

Это равенство верно также и для $j = 1,2,...,r$. Действительно, если добавить к минору M_r j-й столбец матрицы с одним из номеров $j = 1,2,...,r$, новый минор M_{r+1} будет содержать два одинаковых столбца. Следовательно, его величина также равна нулю, и равенство (13) будет иметь место. Перепишем соотношение (14) в виде столбца равенств для всех $j = 1,2,...,n$::

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_r a_{r1}, \\ a_{i2} &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_r a_{r2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{in} &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_r a_{rn} \end{aligned}$$

Мы получили систему уравнений для нахождения элементов i-й строки, подобную (12). Запишем систему а матричном виде (см. (12) →(11))

$$e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_r e_r \qquad (15)$$

Равенство (15) дает представление i-й строки как линейной комбинации независимых строк $e_1, e_2, ..., e_r$. Поскольку i-я строка выбрана произвольно, заключаем, что каждая строка матрицы может быть представлена в виде линейной комбинации независимых строк матрицы. ►

Замечание 1. Все рассуждения в отношении строк справедливы также и для столбцов

Замечание 2. Задача определения числа независимых строк или столбцов матрицы сводится к нахождению ее ранга.

Контрольные вопросы

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Определение и свойства ранга матрицы.
2. Меняется-ли ранг матрицы при элементарных преобразованиях.
3. Понятие линейной комбинации строк(столбцов) матрицы.
4. Строка матрицы как линейная комбинация независимых строк матрицы.
5. Взаимосвязь ранга матрицы с числом независимых строк(столбцов) матрицы.

Темы для рефератов

(Высшая математика. Матричная алгебра)

Взаимосвязь ранга матрицы с линейной комбинацией строк или столбцов матрицы.

§7. Модели реальных ситуаций.

В этом параграфе рассмотрим применение методов матричной алгебры для реальных прикладных задач. Рассмотрим задачи экономического и химических характера описывающие реальные ситуации.

7.1. Задачи производственно экономического характера

Задача 1. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины M_1, M_2 и M_3, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2 - 70, а в M_3 - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, а через В - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix},\ B = (50, 70, 130).$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$AB^T = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cdot 50 + 35\cdot 70 + 10\cdot 130 \\ 15\cdot 50 + 27\cdot 70 + \ 8\cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}.$$

Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.

Задача 2. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется вектором **X** = (10, 15, 23). Используются ткани четырех типов T_1, T_2, T_3, T_4. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Вектор **C** = (40, 35, 24, 16) задает стоимость метра ткани каждого типа, а вектор **P** = (5, 3, 2, 2) - стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана ?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.
3. Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.
4. Подсчитать стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, т. е.,

$$A=\begin{pmatrix}5&1&0&3\\3&2&0&2\\0&0&4&3\end{pmatrix},$$

тогда для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно вектор **X** умножить на матрицу А:

$$\mathbf{X}\ A=(10,15,\ 23)\begin{pmatrix}5&1&0&3\\3&2&0&2\\0&0&4&3\end{pmatrix}=\left(10\cdot5+15\cdot3,\ 10\cdot1+15\cdot2,\ 23\cdot4,\ 10\cdot3+15\cdot2+23\cdot3\right)=$$

= (95, 40, 92, 129).

Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу А и вектор $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$:

$$A\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5&1&0&3\\3&2&0&2\\0&0&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}40\\35\\24\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot40+1\cdot35+0\cdot24+3\cdot16\\3\cdot40+2\cdot35+0\cdot24+2\cdot16\\0\cdot40+0\cdot35+4\cdot24+3\cdot16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}283\\222\\144\end{pmatrix}.$$

Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, определится по формуле:

$$\mathbf{X}\,A\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=(10,15,23)\begin{pmatrix}283\\222\\144\end{pmatrix}=10\cdot283+15\cdot222+23\cdot144=9472.$$

Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани, т. е. 9472 ден. ед., плюс величина

$$\mathbf{X}\,A\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=(95,\ 40,\ 92,\ 129)\begin{pmatrix}5\\3\\2\\2\end{pmatrix}=95\cdot5+40\cdot3+92\cdot2+129\cdot2=1037.$$

Итак, $\mathbf{X}\,A\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}+\mathbf{X}\,A\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=9472+1037=10509$ (ден. ед).

7.2.Определение кратности массообмена в ректификационных аппаратах

Задача состоит в определении кратности массообмена в ректификационных аппаратах. Сформулируем с начало подобную задачу и составим математическую модель задачи, затем применим эту модель в реальной ситуации. Итак, рассмотрим бинарную смесь, например, бензола(А) и толуола(В). Смесь бензола и толуола подчиняется закону Рауля, согласно которому парциальное любого компонента в парах над смесью жидкостей равно давлению насыщенного пара этого компонента(при данной температуре), умноженному на его мольную долю в жидкости, т. е.

$$p_A=x_AP_A$$

где x_A — мольная доля чистого компонента A в жидкости;

p_A — парциальное давление этого компонента в парах;

P_A — давление пара этого компонента.

Далее, обозначим через y_A содержание компоненты А в парах. Тогда зная общее давление над смесью и парциальное давление легколетучего компонента А, мы можем определить содержание его в парах, выраженное в мольных долях:

$$y_A=\frac{p_A}{P}$$

где P — общее давление.

Обозначим дополнительно к предыдущему:

P_B — давление пара чистого менее летучего компонента B;

p_B — парциальное давление пара менее летучего компонента B.

По закону Рауля при принятых обозначениях имеют место равенства:

$$p_A = P_A x_A: \quad p_B = P_B(1 - x_A)$$

С другой стороны, по закону Дальтона общее давление P паров смеси равно сумме парциальных давлений компонентов, т. е.

$$P = p_A + p_B = P_A x_A + P_B(1 - x_A)$$

Следовательно

$$y_A = \frac{p_A}{P} = \frac{x_A P_A}{P_A x_A + P_B(1 - x_A)}$$

Обозначая отношение давлений чистых веществ $\frac{P_A}{P_B} = \alpha$ найдем:

$$y_A = \frac{\alpha\, x_A}{\alpha\, x_A + (1 - x_A)} = \frac{\alpha\, x_A}{1 + (\alpha - 1) x_A}$$

Последнее уравнение выражает аналитическую связь y_A и x_A, необходимую для построения кривой равновесия. Отношение давлений α называется относительной летучестью. Значение α в данном случае можно принять равным 2,48.

При этих обстоятельствах содержание легколетучего компонента в парах будет

$$y = \frac{2{,}48x}{1 + 1{,}48x} \quad \text{или} \quad y = \frac{x}{0{,}4 + 0{,}6x}$$

или в общем виде для уравнений равновесной кривой имеем:

$$y = \frac{x}{k_1 + k_2 x} \qquad (1)$$

где $k_1 + k_2 = 1,\ k_1 k_2 > 0$

Уравнение рабочей линии имеет следующий вид:

$$y = mx + b \qquad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы найти число ступеней ректификации между двумя значениями x, одно из которых соответствует составу продукта, а другое дает точку пересечения равновесной кривой с рабочей линией для пространства колонны над местом ввода исходной жидкой смеси. Такого же рода расчет необходим и для нижней части ректификационной колонны.

Обозначим координату y точки *1* на диаграмме через d (рис. VII-1).

Тогда координатами точки *2* будут:

$$k_1 d + k_2 x d = x, \qquad x = \frac{k_1 d}{1 - k_2 d}, \quad d \quad (3)$$

Для точки 3 значение y мы получим из уравнения (2) путем подстановки величины x, найденной для точки *2*. Таким образом, для координат точки *3* имеем:

$$\frac{k_1 d}{1 - k_2 d}, \quad \frac{(k_1 m - k_2 b)d + b}{1 - k_2 d}$$

Повторяя эту операцию по ступеням, мы найдем координаты x и y для точки *4:*

$$\frac{(k_1^2 m - k_1 k_2 b)d + k_1 b}{(-k_2 - k_1 k_2 m + k_2^2 b)d + 1 - k_2 b} \qquad \frac{(k_1 m - k_2 b)d + b}{1 - k_2 d}$$

а также координаты x и y для точки 5:

$$\frac{(k_1^2 m - k_1 k_2 b)d + k_1 b}{(-k_2 - k_1 k_2 m + k_2^2 b)d + 1 - k_2 b}$$

$$\frac{(k_1^2 m^2 - 2k_1 k_2 m b - k_2 b + k_2^2 b^2)d + (k_1 k_2 m + k_2 b^2 + b)}{(-k_2 - k_1 k_2 m + k_2^2 b)d + 1 - k_2 d} \qquad (4)$$

Мы можем теперь найти координаты для любой конечной ступени ректификации путем повторения этого процесса; здесь имеется определенная схема, по которой они получаются. Но способ образования координат ступеней массообмена не является вполне очевидным и пока остается неизвестным. Поэтому рассмотрим координату y в конце первой полной ступени массообмена (точка *3):*

$$y = \frac{(k_1 m - k_2 b)d + b}{1 - k_2 d}$$

Образуем матрицу

$$M = \begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b) & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

опустив знак деления и d в числителе и знаменателе.

Пользуясь правилом (е) для матричного произведения, найдем:

$$M \cdot M = \begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b) & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b) & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (k_1^2 m^2 - 2k_1 k_2 mb + k_2^2 b^2 & k_1 mb - k_2 b^2 + b \\ -k_2 - k_1 k_2 m + k_2^2 b & 1 - k_2 b \end{Vmatrix}$$

Сопоставляя это равенство с выражением (4) для величины *y,* найдем, что после введения множителя d у элементов первого столбца эти выражения становятся идентичными. Если мы образуем

$$M \cdot M^2 = \begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b) & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix}^3,$$

то получим после подстановки знака деления и d координату y в конце третьей ступени массообмена.

Применяя математическую индукцию, можно показать, что

$$M^n = \begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b) & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix}^n$$

будет соответствовать координате y для конечной *n-ой* ступени после ввода знака деления и d.

Из правила *(i)* нам известно, что характеристическое уравнение квадратной матрицы имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} (k_1 m - k_2 b - \theta) & b \\ -k_2 & 1 - \theta \end{Vmatrix} = 0$$

Последнее выражение представляет собой квадратное уравнение:

$$\theta^2 + c_1 \theta + c_2 = 0, \qquad (5)$$

где $c_1 = -k_1 m + k_2 b - 1$; $c_2 = k_1 m$.

Из правила *(i)* мы также знаем, что М удовлетворяет характеристическому уравнению, следовательно

$$M^2 + c_1 M + c_2 = 0$$

Умножим обе части уравнения на M^{n-2}, получим;

$$M^n = -c_1 M^{n-1} - c_2 M^{n-2} \qquad (6)$$

Равенство (6) можно рассматривать как разностное уравнение относительно матрицы M. Прежде чем воспользоваться известным методом его решения, нам необходимо найти корни квадратного уравнения (5). Они будут:

$$\theta = \frac{1}{2}[k_1m - k_2b + 1 \pm \sqrt{(-k_1m + k_2b - 1)^2 - 4k_1m}]$$

Обозначив эти корни через r_1 и r_2, получим решение (6) в таком виде:

$$M^n = pr_1^n + qr_2^n \qquad (7)$$

Так как r_1 и r_2 являются числами, то *p* и *q* должны быть квадратными матрицами. Обозначим их следующим образом:

$$p = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}; \quad q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{Vmatrix}$$

Формула (7) справедлива для любых значений *n* и, в частности, для n=0 и n=1. Если n = 0, то

$$M^0 = 1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = p + q = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{Vmatrix}$$

а в случае n=1, имеем:

$$M^1 = \begin{Vmatrix} k_1m + k_2b & b \\ -k_2 & 1 \end{Vmatrix} = r_1\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} + r_2\begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{Vmatrix}$$

Пользуясь правилами сложения матриц, умножения матрицы на число и равенства матриц, получим следующие алгебраические уравнения для p_{ij} и q_{ij}:

$$1 = p_{11} + q_{11} \qquad 1 = p_{22} + q_{22}$$

$$k_1m - k_2b = r_1q_{11} + r_2q_{11} \quad 1 = r_1p_{22} + r_2q_{22}$$

$$0 = p_{12} + q_{12} \qquad 0 = p_{21} + q_{21}$$

$$b = r_1p_{12} + r_2q_{12} \quad -k_2 = r_1p_{21} + r_2q_{21}$$

Эти уравнения могут быть решены по-парно и мы получим:

$$p_{11} = \frac{-k_1m + k_2b + r_2}{r_2 - r_1} \quad q_{11} = \frac{k_1m + k_2b - r_1}{r_2 - r_1}$$

$$p_{11} = \frac{-b}{r_2 - r_1} \qquad q_{12} = \frac{b}{r_2 - r_1}$$

$$p_{22} = \frac{-1 + r_2}{r_2 - r_1} \quad q_{22} = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} \qquad (8)$$

$$p_{21} = \frac{k_2}{r_2 - r_1} \quad q_{21} = \frac{-k_2}{r_2 - r_1}$$

Общее решение (7) разностного уравнения (6) теперь может быть написано так:

$$M^n = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix} r_1^n + \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{Vmatrix} r_2^n$$

Применяя правила (а) и (Ь), найдем:

$$M^n = \begin{Vmatrix} (p_{11}r_1^n + q_{11}r_2^n) & (p_{12}r_1^n + q_{12}r_2^n) \\ (p_{21}r_1^n + q_{21}r_2^n) & (p_{22}r_1^n + q_{22}r_2^n) \end{Vmatrix}$$

Отсюда следует, что если обозначить через *e* значение *y* для полных ступеней, то

$$e = \frac{(p_{11}r_1^n + q_{11}r_2^n)d + (p_{12}r_1^n + q_{12}r_2^n)}{(p_{21}r_1^n + q_{21}r_2^n)d + (p_{22}r_1^n + q_{22}r_2^n)}$$

Решая относительно n, получим:

$$n = \frac{\lg \dfrac{e(dq_{21} + q_{22}) - (dq_{11} + q_{12})}{(dp_{11} + p_{12}) - e(dp_{21} + p_{22})}}{\lg \dfrac{r_1}{r_2}}$$

где n- число ступеней массообмена в ректификационном аппарате. Пользуясь формулами (8), это выражение можно привести к виду:

$$n = \frac{\lg \dfrac{p + r_1(d - e)}{p + r_2(d - e)}}{\lg \dfrac{r_1}{r_2}} \qquad (9)$$

где $p = (b - e)(d - k_1 d - 1) - k_1 m d$.

Обозначив через d_p состав продукта, а через e_f координату на оси x в точке пересечения линии q с рабочей линией для верхней части колонны, получим:

$$e = e_f m + b \quad \text{и} \quad d = d_p m + b$$

Подставляя эти значения в (9), найдем:

$$n = \frac{\lg \dfrac{e_f - (d_p m + b)(e_f k_2 + k_1) + r_1(d_p - e_f)}{e_f - (d_p m + b)(e_f k_2 + k_1) + r_2(d_p - e_f)}}{\lg \dfrac{r_1}{r_2}}$$

где r_1 и r_2 корни следующего уравнения:

$$\theta^2 + (-k_1 m + k_2 b - 1)\theta + k_1 m = 0$$

Формула (10) может быть использована для расчета числа ступеней массообмена при ректификационных процессах. Причем этот расчет должен быть выполнен отдельно для верхней и нижней частей аппарата.

Пример. Проиллюстрируем использование формулы (10) на примере расчета процесса ректификации бинарной смеси бензола и толуола, поступающей в колонну при температуре кипения. Известно, что для этой смеси равновесная кривая имеет следующее уравнение (см. выше):

$$y = x/(0,41 + 0,59x)$$

Предположим, что поступающая смесь, дистиллят и кубовый остаток содержат, соответственно, 0,40, 0,995 и 0,005 мол. долей бензола. Если флегмовое число составляет 3, то уравнения рабочих линий над и под местом ввода исходной жидкой смеси, соответственно, будут:

$$y = 0,75x + 0,249$$

$$y = 1,3773x + 0,001886$$

Характеристические уравнения, соответственно, имеют следующий вид:

$$\theta^2 - 1,160590\,\theta + 0,30750 = 0$$

$$\theta^2 - 1,56580\,\theta + 0,56469 = 0$$

Корни этих уравнений составляют:

$$r_1 = 0,75132 \quad \text{и} \quad r_2 = 0,40927$$

$$r_1 = 1,0025 \quad \text{и} \quad r_2 = 0,5633$$

Подстановка этих значений в формулу (10) дает число ступеней ректификации 9,61 и 9,08 соответственно, для верхней и нижней части колонны. Эти данные совпадают с результатами получающимися при пользовании графическим методом расчета.

7.3 Расчет нитрующих смесей

При расчетах нитрующих смесей обычно бывают заданными следующие величины: общее количество смеси, которая должна быть приготовлена ее состав и состав всех исходных компонентов смеси; искомыми величинами являются количества исходных компонентов, входящих в состав смеси.

В наиболее общем случае нитрирующая смесь составляется из трех компонентов, в состав которых входят азотная и серная кислоты и вода.

Введем следующие обозначения:
G- количество приготовляемой нитрующей смеси(кг);
L-содержание азотной кислоты в приготовляемой смеси(%);
M-содержание серной кислоты в приготовляемой смеси(%);
N -содержание воды в приготовляемой смеси(%);
G_a-количество компонента a, идущего на приготовление смеси(кг);
L_a-содержание азотной кислоты в компоненте a, (%);
M_a- содержание серной кислоты в компоненте a, (%);
N_a- содержание воды компоненте a, (%);
G_b- количества компонента b, идущего на приготовление смеси(кг);
L_b- содержание азотной кислоты в компоненте b, (%);
M_b- содержание серной кислоты в компоненте b, (%);
N_b- содержание воды в компоненте b, (%);
G_c- количество компонента c, идущего на приготовление смеси(кг);
L_c- содержание азотной кислоты в компоненте c, (%);
M_c- содержание серной кислоты в компоненте c, (%);
N_c- содержание воды компоненте c, (%);

Сумма количеств всех компонентов должна равняться количеству приготовленной смеси, т.е.

$$G=G_a+G_b+G_c \qquad (1)$$

Количество азотной кислоты, которое будет находится в приготовленной смеси:

$$LG=L_aG_a+L_bG_b+L_cG_c \qquad (2)$$

Количество серной кислоты в смеси:

$$MG=M_aG_a+M_bG_b+M_cG_c \qquad (3)$$

Количество воды в смеси:

$$NG=N_aG_a+N_bG_b+N_cG_c \qquad (4)$$

Решим совместно уравнения (2),(3) и (4), т.е. систему уравнений

$$\begin{cases} G_a+G_b+G_c=G \\ L_aG_a+L_bG_b+L_cG_c=LG \\ M_aG_a+M_bG_b+M_cG_c=MG \end{cases}$$

методом определителей относительно неизвестных G_a,G_b и G_c. Таким образом, имеем:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}=(L_a-L_b)(M_a-M_c)-(L_a-L_c)(M_a-M_b)$$

$$G_a=\frac{\begin{vmatrix} G & 1 & 1 \\ GL & L_b & L_c \\ GM & M_b & M_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}}=\frac{G\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L & L_b & L_c \\ M & M_b & M_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}}=\frac{G(L_c-L)(M_c-M_b)-(L_c-L_b)(M_c-M)}{(L_a-L_b)(M_a-M_c)-(L_a-L_c)(M_a-M_b)}$$

$$G_b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & G & 1 \\ L_a & GL & L_c \\ M_a & GM & M_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}} = \frac{G\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L & L_c \\ M_a & M & M_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}} = \frac{G(L_a - L)(M_a - M_c) - (L_a - L_c)(M_a - M)}{(L_a - L_b)(M_a - M_c) - (L_a - L_c)(M_a - M_b)}$$

$$G_c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & G \\ L_a & L_b & GL \\ M_a & M_b & GM \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}} = \frac{G\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L \\ M_a & M_b & M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_a & L_b & L_c \\ M_a & M_b & M_c \end{vmatrix}} = \frac{G(L_a - L)(M_b - M_a) - (L_b - L_a)(M_a - M)}{(L_a - L_b)(M_a - M_c) - (L_a - L_c)(M_a - M_b)}$$

Пример. Нитрирующая смесь состава:
HNO_3(L) ……. 16%, H_2SO_4(M) …… 62% и H_2O(N) ..……. 22%
расходуется в количестве 4250 кг.
Для изготовления этой смеси используются растворы:

- меланжа: $HNO_3(L_a)$ 85%, $H_2SO_4(M_a)$ 10% и $H_2O(N_a)$ 5%,
- слеума(20% ный): $HNO_3(L_b)$ 0%, $H_2SO_4(M_b)$ 105% и $H_2O(N_b)$ 0%
- отработанной кислоты $HNO_3(L_c)$ 0%, $H_2SO_4(M_c)$ 70% и $H_2O(N_c)$ 30%

Требуется определить расход кислот, идущих на приготовление нитрирующей смеси данного состава.
Решение. Математически имеем систему:

$$\begin{cases} G_a + G_b + G_c = 4250 \\ 85G_a + 0G_b + 0G_c = 68000 \\ 10G_a + 105G_b + 70G_c = 263500 \end{cases}$$

Подставляя коэффициенты в формулы математической модели находим:

- расход меланжа

$$G_a == \frac{4250(0-16)(70-105) - (0-0)(70-62)}{(85-0)(10-70) - (85-0)(10-105)} = 800\,кг$$

- расход олеума

$$G_b == \frac{4250(0-16)(10-70) - (85-0)(70-62)}{(85-0)(10-70) - (85-0)(10-105)} = 400\,кг$$

- расход отработанной кислоты

$$G_c == \frac{4250(85-16)(105-10) - (0-85)(10-62)}{(85-0)(10-70) - (85-0)(10-105)} = 3050\,кг$$

Проверяя общее количество смеси, имеем

$$G_a + G_b + G_c = 800 + 400 + 3050 = 4250\,кг$$

что соответствует заданному количеству нитрирующей смеси**.**

Вопросы для самопроверки освоенных знаний.

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Привести определение матрицы. Перечислить виды матриц.
2. Сформулировать арифметические операции над матрицами.
3. Что означает транспонирование матрицы? Привести свойства транспонирования.
4. Сформулировать понятие определителя квадратной матрицы любого порядка.
5. Чем алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы отличается от минора того же элемента?
6. Как найти величину определителя первого и второго порядка.
7. Правила вычисления определителя третьего порядка.
8. Разложения определителя по строке(столбцу).
9. Перечислите свойства определителей.
10. Дать определение обратной матрицы. Привести ее свойства.
11. Что такое матрицы элементарных преобразований?
12. Что называют элементарными преобразованиями матрицы?
13. Объяснить способ построения обратной матрицы, основанный на использовании расширенной матрицы.
14. Сформулировать определение ранга матрицы.
15. Сформулировать теорему о базисном миноре. Объяснить смысл утверждения.
16. Меняется ли ранг при применении элементарных операций? Почему?
17. Какие строки матрицы называются линейно независимыми?
18. Какие столбцы матрицы называются линейно независимыми?
19. Взаимосвязь ранга матрицы с линейно независимостью строк(столбцов) матрицы

Задачи для самостоятельного решения.

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1.Определите размерности и виды следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1&5&2&1\\0&2&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&2&1\\4&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&2\\1&3\\4&-8\end{pmatrix}$. Определите матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$, $2A-3B^T$.

3. Найдите A^{-1}, если а) $A=\begin{pmatrix}4&6\\3&5\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}-1&0&3\\1&4&3\\3&7&1\end{pmatrix}$.

4. Решите матричные уравнения а) $\begin{pmatrix}2&5\\5&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7&14\\14&-7\end{pmatrix}$ б) $X\cdot\begin{pmatrix}2&5\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14\\14&-7\end{pmatrix}$.

5. Определите ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&1&2\\3&1&4\\4&0&4\end{pmatrix}$.

Литература

(Высшая математика. Матричная алгебра)

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов.- 2- е изд.,перераб.и доп.-М.: Наука,1997.-288с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х т. :Учеб. пособие для втузов. М: Интеграл-Пресс. Т.1.-2001.-416с.,1997,2002,2003
3. Геворкян П.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для техн.вузов.- М.:ФИЗМАТЛИТ.2007-208с.
4. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2006. – 224 с.(Высшая экономическое образование)
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука,1978. – 420 с.
6. Ильин В.А., Позднякк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1999. – 220 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ