

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**Qo'lyozma huquqida
UDK: 519**

JO'RAQULOV MA'RUF SULTONOVICH

**KLEYN KO'PYOQLIKLARI VA TO'RTINCHI DARAJALI
CHIZIQLI FORMA MINIMUMLARINI HISOBLASH**

**5A130101 – Matematika (yo'nalishlar bo'yicha) mutaxassisligi
bo'yicha magistr akademik darajasini olish uchun**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**Ish ko'rib chiqildi va himoyaga
ruxsat berildi.
“Algebra va geometriya”
kafedrasi mudiri v.b.:
dots.G'A.Xasanov _____**

“ ____ ” _____ 2015 yil

**Ilmiy rahbar:
dotsent X.X.Ro'zimuradov _____**

Samarqand – 2015

MUNDARIJA

Kirish

I-bob. YOYILUVCHI FORMALAR.....	6
1.1-§ <i>To'liq modullar va ko'paytuvchilar halqasi</i>	6
1.2-§ <i>To'liq modul diskriminanti</i>	24
1.3-§ <i>Geometrik usul</i>	25
II-bob. MODULLAR VA PANJARALAR.....	31
2.1-§ <i>Panjaralar</i>	31
2.2-§ <i>Panjaralarning to'liqlik kriteriyasi</i>	35
2.3-§ <i>Sonlarni binar kvadratik formalarda tasvirlash</i>	45
III-bob. KOMPYUTER ALGEBRASI USULI BILAN YOYILUVCHAN FORMALARNING MINIMUMINI HISOBLASH VA SHU FORMALARGA MOS KLEYN KO'PYOQLIKLARINI QURISH.....	70
3.1-§ <i>Formalar va modullar</i>	70
3.2-§ <i>Kleyn ko'pyoqliklari</i>	73
3.3-§ <i>To'rtinchi darajali yoyiluvchi formaga mos panjarada Kleyn ko'pyog'ini qurish va uning minimumini hisoblash</i>	76
Xulosa.....	84
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	85

KIRISH

Mavzuning asoslanishi va uning dolzarbligi: Ma'lumki, hozirgi kunda matematika darslarida zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalanib mashg'ulotlar olib borish zamon talabi darajasiga ko'tarilgan. Shuning uchun matematika darslaridagi misol va masalalarni yechishda kompyuter algebrasi tizimidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Matematikaning asosiy masalalarini yechishning qulay usullari va berilgan hisob-kitoblarni oson va tez ishlab chiqib kerakli natijalarni olish zamon talabi bo'lib qolmoqda.

Ushbu magistrlik ishi kompyuter algebrasi usuli bilan yoyiluvchi formalarning minimumini hisoblash va shu formalarga mos Kleyn ko'pyoqliklarini qurishga bag'ishlangan.

Tadqiqot obekti va predmeti. Tadqiqotning ob'ekti to'rt o'lchovli algebraik panjaralar, shu panjaralarning bir jinslari minimumlari, yoyiladigan formalar va Kleyn ko'pyoqliklaridan iborat.

Tadqiqotning maqsad va vazifalari Dissertatsiya ishining maqsadi panjaraning bir jinsli minimumlarining baholarini aniqlashtirish uchun Kleyn ko'pyoqliklarini qurishdan iborat. Tadqiqotlarning asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

- To'la haqiqiy kvadratik maydonlar modullariga mos keluvchi panjaralarni o'rganish;
- Modullar va ularga mos panjaralarning bir jinsli minimumlarini tadqiq qilish;
- To'rtinchi darajali yoyiladigan formalarning minimumlarini ularga mos Kleyn ko'pyoqliklari orqali tadqiq qilish va kompyuter algebrasi tizimlari yordamida hisoblash.

Ilmiy yangiligi. Asosiy natijalar yangi, muhim va quyidagilardan iborat:

- Aniq ko'phad yordamida $Q(v)$ to'la haqiqiy maydon qurilgan. Bu maydoning modullari va shu modullarga mos keluvchi to'rt o'lchovli panjara va to'rtinchi darajali yoyiladigan forma qurilgan. Qurilgan panjara

Kleyn ko'pyoqligining uchlaridan (musbat koordinatali) iborat bo'lgan butun nuqtalar topilgan. To'rtinchi darajali yoyiladigan forma bu nuqtalarda o'z minimumiga erishishi ko'rsatilgan.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari: To'la haqiqiy kvadratik maydonlar modullariga mos keluvchi panjaralarning xossalari tahlil qilish; Modullar va ularga mos panjaralarning bir jinsli minimumlarining o'zaro aloqalarini o'rnatish; To'rtinchi darajali yoyiladigan formalarning minimumlarini hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish, Kleyn ko'pyoqliklarini tadqiq qilish va kompyuter algebrasi tizimlarini yuqoridagi masalalarga tatbiq etish.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi (tahlili): Uchta haqiqiy chiziqli formalarning ko'paytmalaridan iborat bo'lgan bir jinsli kubik $g(X)$ formani qaraymiz. Davenport va Svinnerton-Dayerlar eng kichik ekstremal qiymatlarga ega bo'ladigan dastlabki 19 formani sonli usullar bilan topishgan [6]. Bryuno va Parusnikovning ishlarida [8] Svinnerton-Dayerning dastlabki beshta formasi uchun ularning minimumlari va bu formalarga mos keladigan Kleyn ko'pyoqliklarining uchlari va avtomorfizmlari hisoblab topilgan [9].

X.X.Ro'zimuradov ishlarida [1,2] kompyuter algebrasi usullari yordamida to'rtinchi darajali yoyiladigan $F(X)$ forma bir jinsli minimumi $\mu(F)$ ning eng kichik qiymatlari va bu formaga mos keladigan Kleyn ko'pyoqliklarining uchlari va giperyoqlari topilgan.

Tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi: Kleyn ko'pyoqliklari, Sonlar geometriyasi, panjaralar, kompyuter algebrasi metodlari chiziqli algebra metodlari, SamDU algebra va geometriya kafedrasida ishlab chiqilgan kompyuter dasturlari qo'llanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: Ish fundamental va amaliy xarakterga ega bo'lib, undan sonlar geometriyasining to'rt o'lchovli panjaralarining xossalari bo'yicha hozirgi vaqtgacha erishgan natijalarni tahlil qilishga va bu sohaga kompyuter algebrasi tizimlarini qo'llashda foydalanish mumkin

Ish tuzilmasining tavsifi: Ish kirish qismi, uchta asosiy bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, 84 bet kompyuter matnidan iborat.

I-bobida: Yoyiluvchi formalar, to'liq modullar va ko'paytuvchilar halqasi, to'liq modul diskriminanti va geometrik usullaridan foydalanilib bir qancha misol va masalalar o'rganib chiqildi [5,6,7].

II-bobida: Modullar va panjaralar, sonlarni binar kvadratik formalarda tasvirlash, modullar va formalar orasidagi munosabatlar, modullarning sinflari, kvadratik maydonlar, kvadratik maydonlarning tartiblari va ularga misollar, mavhum kvadratik maydonda o'xshash modular kabi bo'limlardan tashkil topgan. Bu bo'limlarda bir qancha ta'riflar, teoremlar va ularning isbotlari haqida ma'lumotlar batafsil berilgan.

III-bobida: Kompyuter algebrasi tizimlaridan foydalanib haqiqiy to'la maydon uchun butun elementlarining bazisini qurish usuli keltirilgan, uning yaratuvchisi bo'lib to'rtinchi darajali ko'phad hisoblangan. Maydonning diskriminantini hisoblash formulasi keltirilgan. Kleyn haqiqiy maydonning moduli tuzish va to'rt o'lchamli fazoda uning panjarasini qurish keltirilgan. Bu maydonning moduli tuzilgan va to'rt o'lchamli panjara qurilgan va unga mos yoyiluvchan forma tuzilgan [10].

Bu III-bobning 3.3-§ da qandaydir butun sonli nuqtalar topilgan panjarada u Kleyn ko'pyog'ining uchlari, ushbu yoyilmaga mos keluvchi to'rtinchi darajali forma bu nuqtalarda minimumga erishishi qaralgan [11,12].

I-bob. YOYILUVCHI FORMALAR.

1.1-§ To'liq modullar va ko'paytuvchilar halqasi

Butun sonli ekvivalent formalar

Ta'rif: Bir xil n -darajali ratsional koeffitsiyentli ikkita $F(x_1, \dots, x_m)$ va $G(y_1, \dots, y_e)$ forma butun sonli ekvivalent deyiladi, agar ulardan har biri boshqasiga o'zgaruvchilarning butun ratsional koeffitsiyentli chiziqli almashtirish orqali o'tsa.

Masalan: $x^2 + 7y^2 + z^2 - 6xy - 2xz + 6yz$ va $2u^2 - v^2$ formalar ekvivalent chunki

$$\left. \begin{aligned} x &= 3v \\ y &= u + v \\ z &= -u + v \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} u &= -x + 2y + z \\ v &= x - y - z \end{aligned}$$

chiziqli ifodalanishlarda bir-biriga o'tadi. Bir xil sonli o'zgaruvchilarga bog'liq formalar uchun, ekvivalentlik sharti ochiq oydin unimodulyar matritsa orqali (yani butun sonli kvadrat matritsa, determinanti ± 1 ga teng) chiziqli o'zgaruvchilarning ifodalanishida bir-biriga o'tadi.

Agar F va G formalar ekvivalent bo'lsa, $F = a$ ning barcha butun sonli yechimlarini bilgan holda biz, $G = a$ ning barcha butun sonli yechimlarini yengil olamiz va aksincha. Shunday qilib, $F = a$ tenglamani butun sonli yechimini qarashdagi savollarga F formaning o'rniga unga ekvivalent ixtiyoriy forma olish mumkin.

Lemma-1: Har qanday n -darajali forma, unda qatnashayotgan n -darajali koeffitsiyenti noldan farqli o'zgaruvchi qatnashgan formaga ekvivalentdir.

Isbot: $F(x_1, \dots, x_m)$ forma n -darajali bo'lsin. $a_2, \dots, a_m$ butun ratsional sonlar mavjud ekanligini $F(1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$ da ko'rsatamiz. Buni m -induksiya orqali isbotlaymiz. $m = 1$ da F forma Ax_1^n ko'rinishga ega bo'lsin, bunda $A \neq 0$; shuning uchun $F(1) \neq 0$. Bu forma uchun $m - 1$ o'zgaruvchuda ifodalaymiz: ($m \geq 2$) lemma isbotlangan. Biz F formani quyidagicha ifodalaymiz:

$$F = G_0 x_m^n + G_1 x_m^{n-1} + \dots + G_n$$

bu erda $G_k(0 \leq k \leq n)$ nolga teng yoki $x_1, \dots, x_{m-1}$ o'zgaruvchilardan bog'liq k -darajali forma hisoblanadi (biz formani nolli darajasi deb – noldan farqli o'zgaruvchilarni hisoblaymiz).

Barcha G_k -lar nolga teng bo'lishi mumkin emas, chunki F n –darajali forma hisoblanadi, hech bo'lmaganda bitta noldan farqli koeffitsiyenti bor. Induksiyaga asosan $a_2, \dots, a_{m-1}$ ta butun sonlarni mavjud deb hisoblaymiz, bunda $G_k(1, a_2, \dots, a_{m-1}) \neq 0$ hech bo'lmaganda bitta k uchun bo'ladi. Chunki $F(1, a_2, \dots, a_{m-1}, x_m)$ ko'phad x_m o'zgaruvchiga nisbatan nolga teng emas, a_m o'rniga biror sonni olib, ildizga teng bo'lmagan, $G_k(1, a_2, \dots, a_m) \neq 0$ ga ega bo'lamiz. Endi quyidagi chiziqli ifodani bajaramiz

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = a_2 y_1 + y_2 \\ \dots \dots \dots \\ x_m = a_m y_1 + y_m \end{cases}$$

Bnda F forma quyidagi formaga o'tadi $G_1(y_1 \dots y_m) = F(y_1, a_2 y_1 + y_2, \dots, a_m y_1 + y_m)$ chunki bizning ifodamizning matritsasi butun sonli va uning determinanti 1 ga teng, bunda F va G formalar ekvivalentdir, y_1^n dagi koeffitsiyent $G(1, 0, \dots, 0) = F(1, a_2, \dots, a_m)$ ga teng va noldan farqli. 1-lemma isbotlandi.

Yoyiluvchi formalarni qurish.

Ta'rif: Koeffitsientlari R ratsional sonlar maydonidan olingan $F(x_1, \dots, x_m)$ forma yoyiluvchi deyiladi, agar u qandaydir Ω/R kengaytmada chiziqli ko'paytuvchilarga ajratilsa. Masalan, yoyiluvchi formalarga ushbu forma misol bo'la oladi:

$$F(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$$

ikkita o'zgaruvchiga ($a_0 \neq 0$) ga bog'liq. Haqiqatdan ham, agar Ω maydon $F(x, 1)$ ko'phadni yoyilishi va $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ning ildizlari bo'lsa, unda Ω dagi

$$F(x, y) = a_0 (x - \alpha_1 y) \dots (x - \alpha_n y)$$

yoyilmaga ega bo'lamiz.

Maxsus bo'lmagan kvadrat formalar orasida, yoyiluvchi formalar bo'lib bitta va ikkita o'zgaruvchili formalar hisoblanadi. Odatda F forma bilan biraglikda unga ekvivalent barcha formalar yoyiluvchi bo'lib hisoblanadi.

Yoyiluvchi forma ta'rifida Ω maydon haqida uning qanday bo'lishi to'g'risida chiziqli ko'paytuvchilarda gapirilmaydi. Endi biz Ω sifatida R ratsional maydonning qandaydir kengaytmasini olish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun algebraik apparatni asosiysi bo'lib, maydonlarning chekli kengayishlari nazariyasi hisoblanadi [3,4].

Ta'rif: Ratsional sonlar maydonini chekli kengaytmasi algebraik sonlar maydoni deb ataladi, uning elementlari esa algebraik sonlar deb aytiladi.

Teorema-1: Har qanday yoyiluvchi ratsional forma qandaydir algebraik sonlar maydonida chiziqli ko'paytuvchilarga yoyiladi.

Isbot: 1-lemmaga asosan, biz ushbu yoyiluvchi forma bilan chegaralanamiz:
 $F = (\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1m}x_m) \dots (\alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nm}x_m)$, $\alpha_{ij} \in \Omega$ ning x_1^n dagi koeffitsiyentlari noldan farqli. Chunki α_{i1} ($1 \leq i \leq n$) dagi koeffitsiyentlar noldan farqli, bunda formani quyidagicha yozish mumkin.

$$F = A(x_1 + \beta_{12}x_2 + \dots + \beta_{1m}x_m) \dots (x_1 + \beta_{n2}x_2 + \dots + \beta_{nm}x_m) \quad (1)$$

bu erda $A = \alpha_{11} \dots \alpha_{n1}$ va $\beta_{ij} = \alpha_{ij}\alpha_{i1}^{-1}$ ga teng. A son esa x_1^n ning ratsional koeffitsiyenti bo'lib hisoblanadi. Ajratilgan j ($2 \leq j \leq m$) uchun oxirgi yoyishda $x_j = 1$ deb hisoblaymiz, barcha o'zgaruvchilar uchun, x_1 dan boshqa, unga nol beramiz. Bunda ushbuni olamiz

$$F(x_1, 0, \dots, 1, \dots, 0) = A(x_1 + \beta_{1j}) \dots (x_1 + \beta_{nj})$$

chap tomonida n -darajali ko'phad turibdi, ratsional koeffitsiyentli, bundan β_{ij} –algebraik sonlar bo'ladi. L bilan Ω maydonning qism maydonini belgilaymiz, u R ga barcha β_{ij} larni qo'shishdan hosil qilinadi. L/R - ni kengaytmasi oydin, ya'ni L - algebraik sonlar maydoni hisoblanadi.

Keyinchalik keltirilmaydigan yoyilma formalar ratsional sonlarni qaraymiz, chunki ratsional sonlarning butun sonli ifodalanish savollari qiziqarlidir. Keltirilmaydigan yoyiluvchi formalar qurush usullarini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy K algebraik sonlar maydonini n -darajasini qaraymiz va qandaydir θ primitiv element K dan R da, $K = R(\theta)$ bo'lsin $\varphi(t)$ –minimal

ko'phad θ sonda R maydonda n darajaga ega bo'ladi. K da L kengaytmani quramiz, unda $\varphi(t)$ chiziqli ko'paytuvchilarga yoyiladi.

$$\varphi(t) = (t - \theta^{(1)}) \dots (t - \theta^{(n)}), \quad \theta^{(1)} = \theta$$

Har qanday $\alpha = f(\theta) \in K$ son uchun ($f(t)$ -ratsional koefitsiyentli ko'phad) deb olamiz.

$$\alpha^{(i)} = f(\theta^{(i)}) \in R(\theta^{(i)}) \subset L$$

bunda $N(\alpha) = N_{\frac{K}{R}}(\alpha)$ norma uchun ushbu formula o'rinli bo'ladi.

$$N(\alpha) = \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)}$$

Agar $\mu_1, \dots, \mu_n$ ixtiyoriy noldan farqli K maydondagi sistema bo'lsin. Bu sonlar ushbu formani ifodalasin.

$$F(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^n (x_1 \mu_1^{(i)} + \dots + x_m \mu_m^{(i)}) \quad (2)$$

chunki $\mu_k^{(i)} = f_k(\theta^{(i)})$ ($1 \leq k \leq m, f_k(t)$ ratsional sonli ko'phad), unda (2) forma koefitsiyentlari $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}$ dan simmetrik funksiya bo'lib hisoblanadi, bu esa ularni $\varphi(t)$ ko'phadning koefitsiyentlari orqali ratsional ifidalanishini anglatadi. Bu bilan (2) forma ratsional koefitsiyentlarga ega ekanligi isbotlandi.

Agar $x_1, \dots, x_m$ o'zgaruvchilar o'rniga, ixtiyoriy ratsional sonlarni qo'ysak

$$x_1 \mu_1^{(i)} + \dots + x_m \mu_m^{(i)} = (x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m)^{(i)}$$

da (2) ko'paytma $x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m$ formaga norma bo'lib hisoblanadi. Bunda (2) formani shartli ravishda quyidagicha yozamiz

$$F(x_1, \dots, x_m) = N(x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m) \quad (3)$$

(2)-forma har doim ham keltirilmaydigan emas. Masalan, agar $R(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ maydonda $\mu_1 = \sqrt{2}, \mu_2 = \sqrt{3}$ deb olsak, unga mos keluvchi forma $(2x_1^2 - 3x_2^2)^2$ bo'lib hisoblanadi. Bundan quyidagi o'rinli bo'ladi.

Teorema-2: Agar $\mu_2, \dots, \mu_m$ sonlar K maydonni tashkil etsa, ya'ni $K = R(\mu_2, \dots, \mu_m)$ bunda forma

$$F(x_1, \dots, x_m) = N(x_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_m \mu_m) \quad (4)$$

keltirilmaydigan bo'ladi. Aksincha barcha keltirilmaydigan yoyiluvchi formalalar (4) formaga o'zgaras ko'ffisiyentlarda ekvivalent bo'ladi.

Isbot: $F = GH$ deb olib G va H lar ratsional ko'ffisiyentlaridir, chunki m o'zgaruvchili ko'phadlar halqasida keltirilmaydigan ko'paytuvchilarga yoyilishi bir qiymatlidir unda har bir chiziqli forma

$$L_i = x_1 + x_2\mu_2^{(i)} + \dots + x_m\mu_m^{(i)}$$

bo'ladi, bo'luvchilari G yoki H bo'lishi kerak.

Agar $L_1 = x_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_m\mu_m$ bo'lib, G bo'luvchisi bo'lsa, ya'ni $G = L_1M_1$ bo'ladi. Oxirigi tenglikdagi barcha ko'ffisiyentlarni $\alpha \rightarrow \alpha^{(i)}$ izomorfizmga almashtirsak $K = R(\theta)$ maydonni $R(\theta^{(i)})$ maydonga chunki G formaning ko'ffisiyentlari ratsional, bunday almashtirishdan $G = L_iM_i$ ni olamiz, G ni L_i ga bo'linishini anglatadi, har qanday i uchun endi, $\alpha \rightarrow \alpha^{(i)}$ izomorfizm $\alpha \in R(\mu_2, \dots, \mu_m)$ ligini eslab, abzaslarni aniqlanganligini $\mu_2^{(i)}, \dots, \mu_m^{(i)}$ sonlarni $\mu_2, \dots, \mu_m$ da deb olamiz. Bundan $\mu_2^{(i)}, \dots, \mu_m^{(i)} (1 \leq i \leq n)$ sonlar juftma-juft har xildir, demak $L_1, \dots, L_n$ formalar ham juftma-juft har xildir. x_1 — ko'ffisiyent L_i barcha formalarda 1 ga teng, shuning uchun bu formalar juftma-juft proporsional emas. Yoyilishning bir qiymatliligidan foydalanib G ni $L_1, \dots, L_n$ ko'paytmaga bo'linadi ya'ni F ga ham bo'linadi deymiz. H ko'paytma o'zgaras bo'ladi, teoremaning 1-tasdig'i (qismi) isbotlandi, ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz.

Agar $F^*(x_1, \dots, x_m)$ - ixtiyoriy keltirilmaydigan n -darajali yoyiluvchi forma bo'lsin.

1-lemmadan, x_1^n ning ko'ffisiyentlari noldan farqli, bunda F^* ni (1) korinishdagi yoyilma kabi izlaymiz bu yerda β_{ij} -qandaydir algebraik son. $\beta_{1j} = \mu_j (2 \leq j \leq m)$ deb va $K = R(\mu_2, \dots, \mu_m)$ maydonda, r daraja deb olamiz.

$$F = N(x_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_m\mu_m)$$

isbotlangan formadan keltirilmaydigan bo'ladi, lekin uning bitta chiziqli ko'paytuvchisi $L_1 = x_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_m\mu_m F^*$ bu formaning bo'luvchisi hisoblanadi: $F^* = L_1M$ tenglikni barcha ko'ffisiyentlarini olib, $\alpha \rightarrow \alpha^{(i)}$

izomorfizm natijasida, biz $F^* = L_1 M$ yoyilmani olamiz $L_1, \dots, L_r$ formalar juftma-juft proporsional emas, shuning uchun $F^*, L_1, \dots, L_r$ larning ko'paytmasiga bo'linadi, va u F ga mos keladi. F^* keltirilmasligidan $F^* = AF$ bo'ladi bu erda A o'zgarmas, shunday qilib 2-teorema isbotlandi.

Modullar. Xullas (3) forma uchun $F(x_1, \dots, x_m) = a$ ning butun sonli yechimlari haqidagi savol K maydonni izlashga olib kelinadi ξ sonlar uchun uni quyidagicha ifodalaymiz.

$$\xi = x_1 \mu_1 + \dots + x_m \mu_m \quad (5)$$

butun ratsional $x_1, \dots, x_m$ va $N(\xi) = a$ uchun. Shuning uchun (5) ning sonlarining to'plamini o'rganishga olib keladi.

Ta'rif: K algebraik sonlar maydoni va $\mu_1, \dots, \mu_m$ ixtiyoriy chekli sistema K ning sonlarida bo'lsin. M barcha chiziqli kombinatsiyalarini to'plami

$$c_1 \mu_1 + \dots + c_m \mu_m$$

c_i butun ratsional ko'effitsiyentlari bilan K maydonda modul deb ataladi. $\mu_1, \dots, \mu_m$ sonlar esa M modulni yaratuvchilari deyiladi. Albatta, bitta M modul har xil yaratuvchilarda beriladi. Agar $\mu_1, \dots, \mu_m$ M modulning yaratuvchi sistemasi bo'lsa, uni $M = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deb yozamiz. Engi (3) formaning qanday o'zgarishini $\mu_1, \dots, \mu_m$ larning o'rniga $\rho_1, \dots, \rho_l$ ni olganda ko'ramiz.

$$\rho_j = \sum_{k=1}^m c_{jk} \mu_k \quad (1 \leq j \leq l)$$

ni olamiz, c_{jk} butun sonli ratsional ko'effitsiyentlari bilan. Agar

$$G(y_1, \dots, y_l) = N(y_1 \rho_1 + \dots + y_l \rho_l)$$

bo'ladi chunki

$$\sum_{j=1}^l y_j \rho_j = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^l c_{jk} y_j \right) \mu_k$$

bo'ladi, chiziqli ifodalashlarda

$$x_k = \sum_{j=1}^l c_{jk} y_j \quad (1 \leq k \leq m)$$

F forma G ga o'tadi. Xullas μ_m va ρ_j tashkil etuvchilar M modul uchun simmetrik rol o'ynaydi, shunga o'xshash G ni F ga o'tkazuvchi butun sonli chiziqli bog'lanishlar mavjud bo'ladi. Shu bilan M modulni har xil ifodolovchilariga ekvivalent formalr mos keladi, ya'ni har bir M modulga K maydonda bir-xilda qandaydir ekvivalent forma yoyilmalari sinfi mos keladi.

Har qanday $M = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ modul uchun va $\alpha \in K$ chislo uchun αM bilan barcha ko'paytmalar $\alpha\xi$ to'plamini belgilaymiz, ξ elementlari M -maydonda αM to'plami $\alpha\mu_1, \dots, \alpha\mu_m$ chiziqli kombinatsiya bilan mos keladi ya'ni $\alpha M = \{\alpha\mu_1, \dots, \alpha\mu_m\}$ bo'ladi.

Ta'rif: M va M_1 ikkita modullar, K algebraik maydonda o'xshash deb aytiladi, agar $\alpha \neq 0$ dagi K da $M_1 = \alpha M$ bo'lsa.

M va αM o'xshash modullar formasi bog'langan bo'lib ular koeffitsiyenti $N(\alpha)$ ga teng. Shuning uchun doimiy ko'paytmali formalar qaraladi, biz M ning o'rniga unga o'xshash modulni olamiz, $\mu_1 = 1$ deb qaraymiz.

Yo'qorida aytilganlardan yoyiladigan formalar ushbu ifodalashni beramiz. Agar F -quyidagicha

$$F(x_1, \dots, x_m) = AN(x_1\mu_1 + \dots + x_m\mu_m)$$

ifodalangan bo'lsa unda $F(x_1, \dots, x_m)$ tenglamaning yehimini topish $M = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ modulni barcha α butun sonlar uchun topishga teng kuchlidir $N(\alpha)$ norma $\frac{a}{A}$ ratsional songa tengdir.

Shundan kelib chiqib, endi berilgan moduldagi songa berilgan normasi bilan birgalikda topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Oxirigi masala μM modulni $N(\mu)\frac{a}{A}$ normasi bilan topishga teng kuchlidir. Bundan berilgan modulni o'rniga har qanday unga o'xshash modulni olsak bo'ladi.

Agar K algebraik sonlar maydoni darajasi n ga teng bo'lsa, unda har qanday M modul uchun K maydonda n dan ko'p bo'lmagan chiziqli bog'lanmagan sonlar mavjud.

Ta'rif: Agar M modul algebraik sonlar maydoni K da n -darajali, n ta chiziqli bog'lanmagan sonlardan iborat bo'lsa, u to'liq deyiladi, aksincha holda

to'liqmas deyiladi. M maydon bilan bog'langan formalar ham mos holda to'liq va to'liqmas deyildi.

Masalan: d butun ratsional son kub bo'lib hisoblanmasa, unda $1, \sqrt[3]{d}, \sqrt[3]{d^2}$ sonlar $R(\sqrt[3]{d})$ ba'zisini tashkil etadi R da shundan

$$N(x + y\sqrt[3]{d} + z\sqrt[3]{d^2}) = x^3 + dy^3 + d^2z^3 - 3dxyz$$

to'liq bo'ladi.

$N(x + y\sqrt[3]{d}) = x^3 + dy^3$ to'liq bo'lmagan formaga misol.

Agar $\{1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ to'liq modul K maydonda bo'lsa, unda $K = (\mu_2, \dots, \mu_m)$ bo'ladi. Birinchi teoremaga asosan har qanday to'liq forma hamisha keltirilmaydigan bo'ladi.

To'liqsiz keltirilmaydigan forma sonlarini tasvirlash savoli juda murakkab va hozirda aniq nazariya mavjud emas. Toliq formali ratsional sonlarni tasvirlash masalalari ancha soddaroqdir va ular oxirigacha yechilgan. Bu masala aniq to'la modulni K algebraik sonlar maydonida berilgan barcha sonlarning formalari bilan topishga tengdir [4].

Modul bazisi

Ta'rif: $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sistema M modulni yaratuvchisi uning bazisi deb aytiladi. Agar ular butun sonlar halqasida chiziqli bog'lanmagan bo'lsa ya'ni

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m = 0, \quad a_i \in Z,$$

da a_i koeffitsiyentlarda o'rinli bo'ladi.

Haqiqatda $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ M modul bazisi, bunda $\alpha \in M$ bo'lgan har qanday son faqat bitta yoyilmaga ega bo'ladi.

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m = 0, \quad c_i \in Z. \quad (1)$$

Endi har qanday modul bazisga ega ekanligini isbotlaymiz. Isbotlashda modul qandaydir algebraik maydon sonlaridan iboratligi inobatga olinmaydi. Asosiysi bo'lib qo'shishga nisbatan modul algebra guruhini tashkil etadi. Unda chekli tartibli elementning yo'qligi unda barcha elementlar chiziqli, butun koeffitsiyentli qandaydir elementlar sistemasida bog'lanadi. Shuning uchun biz kerakli natijani isbotlaymiz. Xuddi Abel guruhi teoremasi kabi. Bunda quyidagi

terminlardan foydalaniladi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ elementlar sistemasi M Abel guruhida tashkil qiluvchi sistema deb ataymiz, agar $\alpha \in M$ elementni (1) ko'rinishda bo'ladi. Biz bunda $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ deb yozamiz. Agar $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sistema yo'qoridagi ta'rifni qanoatlantirsa, uni M dagi guruh bazisi deb ataymiz.

Teorema-1 Agar Abel guruhi chekli tartibli elementsiz bo'lib, chekli tashkil etuvchi sistemaga ega bo'lsa, unda u ham bazisga ega bo'ladi.

Isbot: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ bilan M guruhidagi ixtiyoriy tashkil etuvchi sistemani belgilaymiz. Agar biz bitta tashkil etuvchiga ikkinchisini qo'shsak, ixtiyoriy songa ko'paytirilgan holda, bunda yangi sistema ham yaratuvchi sistema bo'ladi.

Masalan: $\alpha'_1 = \alpha_1 + k\alpha_2$ bo'lsa har qanday (yasovchi) $\alpha \in M$ dan olamiz.

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s = c_1\alpha'_1 + (c_2 - kc_1)\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s$$

buning barcha ko'effitsiyentlari butundir, demak $M = \{\alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ elementlar chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, ular M da bazisni tashkil etadi. Ularni chiziqli bog'langan desak, ya'ni qandaydir $c_i \neq 0$ da

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s = 0 \quad (2)$$

bo'ladi. Ulardan eng kichigini c_i -miqdor bo'yicha noldan farqlilarini tanlab olamiz. Agar u c_1 bo'lsa hamma c_i ko'effitsiyentlar c_1 ga bo'linmasa, aytaylik $c_2 = c_1q + c'$, bu erda $0 < c' < |c_1|$ bo'ladi. Biz yangi sistemani yasovchilariga o'tsak

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + q\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_s$$

unda (2) quyidagicha bo'ladi

$$c_1\alpha'_1 + c'\alpha_2 + \dots + c_s\alpha_s = 0$$

Bunda c' ga ega bo'lamiz bu $|c_1|$ dan kichik. Xullas, agar $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ yasovchilar uchun biz trivial bo'lmagan (2) ifodaga ega bo'lamiz va ko'effitsiyentlari noldan farqlisi qolgan ko'effitsiyentlari bo'luvchisi bo'lib hisoblanmaydi, bunda biz boshqa yasovchi sistemasini quramiz, bular uchun ham trivial bo'lmagan butun ko'effitsiyentli bog'lanish bo'ladi, uning eng kichik absalyut qiymati va nolga teng bo'lmagan ko'effitsiyentli, birinchi bog'lanishdagi ko'effitsiyentdan kichik bo'ladi.

Natijada, chekli shunday ifodalashlardan biz yangi $\beta_1, \dots, \beta_s$ sistemaga ega bo'lamiz, bu uchun

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0 \quad (3)$$

bo'lanish bo'ladi k_i butun sonli koeffitsiyentlarda birorta k_1 koeffitsiyenti qolganlarining

$$\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_s\beta_s = 0 \quad (4)$$

olamiz $l_2, \dots, l_s$ butunlar bilan. (1.2.4) dan β_1 ni yo'qotish mumkin, ya'ni $M = \{\beta_2, \dots, \beta_s\}$ bo'ladi.

Biz, qandaydir yasovchi sistemani yasash mumkin, uning elementlari soni 1-taga kam. Buni takrorlab oxirida chiziqli bog'lanmagan sistemaga ega bo'lamiz, bu o'z navbatida M ga bazis bo'lishini isbotladik.

Xossa: Har qanday modul uchun K maydonning algebraik sonlarida bazis mavjud.

M modulning bazisiga kiruvchi m ta elementlar soni, M da eng ko'p sonli chiziqli bog'lanmaydiganlar soniga teng. Shundan, barcha bazislar uchun m -soni bir xil bo'ladi. U M ning rangi deb ataladi. Bitta nollardan iborat modulning rangi ham nolga teng.

Agar $\omega_1, \dots, \omega_m$ va $\omega'_1, \dots, \omega'_1$ ikkita bazis M modulda rangi m ga teng bo'lsin. Uning o'tish matritsasi C birdan ikkiga bazisi butun sonlardir. O'tish matritsasining simmetriyaligidan ikkidan birga ya'ni C^{-1} matritsa ham butun sonlidir. Bundan $\det C = \pm 1$ bo'ladi. Shunday qilib, o'tish matritsalarini modul rangi K ga teng bo'lsa, boshqa bazis unimodulyar matritsa bo'ladi. K tartibli R dagi K maydonning darajasi n bo'lsa unda har qanday K modul rangi n dan oshmaydi. Xullas modul rangi n bo'lsa, qachonki u to'liq bo'lsa, to'liq modullar bundan kelib chiqib ularning rangi n dan kichik bo'ladi [7].

Har qanday m rangli modul sistemasi m dan kam bo'lmagan elementlardan iborat bo'ladi. Bundan formulalar orasida m ta o'zgaruvchili formulalar mavjud va n dan kam formalar mavjud emas. To'liq formaning n darajasini aniqlash uchun xuddi yoyilmaydigan formalar ekvivalent emas.

element bo'lsin. Uni (5) day ifodalasak, unda $c_1 = c_{11}q_1$ bo'ladi, q_1 butun, shundan

$$\alpha - q_1\eta_1 = c'_2\omega_2 + \dots + c'_m\omega_m$$

$M_0 \cap N$ ga tegishlidir. Induksiyaadan

$$\alpha - q_1\eta_1 = q_2\eta_2 + \dots + q_k\eta_k$$

deb olamiz, q_i butun bundan $\alpha = q_1\eta_1 + \dots + q_k\eta_k$ bo'ladi. Bu bilan $N = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ –isbotlandi.

Yasavchilari $\eta_1, \dots, \eta_k$ ni chiziqli bog'lanmaganligini ko'rish oson Z da, bu esa N da bazis ekanligini anglatadi.

2-teoremaning keltirilgan isbotini, Gaus usuli bilan keltirish mumkin, chiziqli tenglamalar systemsidagi kabi. Farqi shundaki koeffitsiyentlar maydoga emas halqaga tegishliligidir.

Xossa: Har qanday M qism guruhi M modulda K algebraik sonlar maydonida ham modul bo'lib hisoblanadi (M modul osti kabi).

Ko'paytmalar halqasi:

Ta'rif: K algebraik sonlar maydonidagi α son, har qanday M modulning ko'paytmasi deb aytiladi. Agar K maydonda, $\alpha M \subset M$ bo'lsa, ya'ni har qanday $\xi \in M$ uchun $\alpha\xi$ ko'paytmasi ham M ga tegishli bo'ladi.

$\mathfrak{D}_M$ uyushma M modulning barcha ko'paytuvchilari uchun halqa hisoblanadi. Haqiqatdan ham α va β lar $\mathfrak{D}_M$ ga tegishli, bunda har bir $\xi \in M$ dan olamiz. $(\alpha - \beta)\xi = \alpha\xi - \beta\xi \in M$ va $(\alpha\beta)\xi = \alpha(\beta\xi) \in M$, $\alpha - \beta \in \mathfrak{D}_M$, $\alpha\beta \in \mathfrak{D}_M$. $\mathfrak{D}_M$ halqa to'liq M modulning ko'paytuvchilarining halqasi deb atgaladi. Chunki $1 \in \mathfrak{D}_M$, da $\mathfrak{D}_M - 1$ ga ega halqa. $\alpha \in K$ sonni $\mathfrak{D}_M$ halqaga tegishliligini tasdiqlash uchun, hamma $\xi \in M$ uchun tekshirish zaruriyati kerak emas $\alpha\xi$ ni M ga tegishliligi zarur. Qandaydir $\mu_1, \dots, \mu_k$ bazis uchun M daligini tekshirish etarli. Odatda $\alpha\mu_i \in M$ ni barcha $i = 1, \dots, n$ va har qanday $\xi = c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n \in M$ da

$$\alpha\xi = c_1(\alpha\mu_1) + \dots + c_n(\alpha\mu_n) \in M$$

bo'ladi. $\mathfrak{D}_M$ ko'paytuvchilar halqasini K modulda to'liq ekanligini isbotlaymiz. Agar γ ixtiyoruy son uchun nolda farqli M da $c\gamma \in M$ har qanday $\alpha \in \mathfrak{D}_M$ da, bunda, $\gamma\mathfrak{D}_M \subset M$ bo'ladi. $\gamma\mathfrak{D}_M$ sonlar to'plami, qo'shishga nisbatan guruh hisoblanadi, shuning uchun (2) teoremadan $\gamma\mathfrak{D}_M$ modul bo'ladi. Bunda $\mathfrak{D}_M = \gamma^{-1}(\gamma\mathfrak{D}_M)$ ham modul bo'ladi. Endi bu modulni to'liqligini isbotlash qoldi. K da nolda farqli α sonni olamiz va c bilan barcha ratsional sonlarning a_{ij} umumiy maxrajini belgilaymiz, yoyilmada ifodalangan

$$\alpha\mu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\mu_j \quad (1 \leq i \leq n). \quad (6)$$

ca_{ij} ko'paytma butun, unda $c\alpha\mu_i \in M$ demak $c\alpha \in \mathfrak{D}_M$ bo'ladi. Agar, biz ixtiyoriy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bazisni K maydondan olsak, hozir isbotlaganimizdan qandaydir ratsional $c_1, \dots, c_n$ uchun $c_1\alpha_1, \dots, c_n\alpha_n$ ko'paytma $\mathfrak{D}_M$ da tegishli bo'ladi. Shunday qilib, biz $\mathfrak{D}_M$ da n chiziqli bog'lanmagan sonlarni ko'ramiz, bu esa $\mathfrak{D}_M$ ni to'liq modulligini anglatadi.

Ta'rif: K algebraik sonlar maydonidagi to'liq modul 1-soniga ega bo'lsa va halqa bo'lsa, K maydon tartibli deb ataladi. Ushbu ta'rifni inobatga olib, biz olgan natijani quyidagicha ifodalaymiz

Teorema-3: Ixtiyoriy K algebraik sonlar maydoni moduli uchun ko'paytuvchilar halqasi, ushbu maydonni tartibi hisoblanadi.

Tesakri tasdiq ham o'rinli: K ning har qanday tartibi $\mathfrak{D}$ qandaydir maydonning ko'payuvchilari uchun halqa hisoblanadi, masalan o'z-o'ziga (chunki $1 \in \mathfrak{D}$, bunda $\alpha\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ teng kuchli $\alpha \in \mathfrak{D}$)

Ixtiyoriy $\gamma \neq 0$ son uchun K da $\alpha\xi \in M$ shart $\alpha(\gamma\xi) \in \gamma M$ shartiga teng kuchki (bu erda $\xi \in M$). Bundan M va γM o'xshash modullar bir xil ko'paytuvchili xalqalarga ega ya'ni

$$\mathfrak{D}_{\gamma M} = \mathfrak{D}_M$$

Agar $\mu_1 + \dots + \mu_n M$ modulning bazisi $\omega_1, \dots, \omega_n \mathfrak{D}_M$ ko'paytuvchilar halqasi bazisi. Buning uchun $i = 1, \dots, n$

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \omega_j$$

bo'ladi, bu erda b_{ij} -ratsional sonlar. Agar b -umumiy maxraj b_{ij} uchun bo'lsa unda $b\mu_i$ esa $\mathfrak{D}_M$ ning bazisi orqali ifodalanadi, butun koeffitsiyentlarda, ya'ni $\mathfrak{D}_M$ yotadi. bM modul uchu $bM \subset \mathfrak{D}_M$ bo'ladi (ichida).

Olingan natijalarni ifodalaymiz:

Lemma-1: O'xshash to'liq modullar ko'paytuvchilari, halqalari mos tushadi. Har qanday to'liq modul uchun o'zining ko'paytuvchilari halqasida unga o'xshash modul mavjud,.

Birliklar Endi butun sonli ifodalangan ratsional sonlar to'liq yiyilishi formasi masalasiga qaytamiz. Dastlab biz bu masalani M to'liq modulda μ son uchun

$$N(\mu) = a \tag{7}$$

$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_M$ ko'paytuvchilar halqasidagi har qanday ω uchub $\omega\mu$ ko'paytma M ga tegishli, bunda formaning normasini multipikasiyaligidan

$$N(\omega\mu) = N(\omega)a$$

olamiz. Agar $N(\omega) = 1$ bo'lsa, μ bilan birgalikda $\omega\mu$ ko'paytma ham (7) ni yechimi bo'ladi. Shunday qilib ω ko'paytmani normasi 1-ga teng, (7) dagi qiziqtirayotgan yechimni beradi u yangi yechim sinfini tashkil etadi. Bu holat (7) tenglamani yechimi usuli asosida yotadi, uni endi biz keltiramiz.

Ko'paytma $\omega \in \mathfrak{D}$ ni $N(\omega) = 1$ shart bilan bizga $\mathfrak{D}$ halqadagi sonlar orasidan izlashni isbotlaymiz, bunda $\mathcal{E}^{-1}$ ham $\mathfrak{D}$ ga tegishli bo'ladi. Ta'rifga asosan $\mathcal{E}$ birlik halqa deyiladi. $\mathfrak{D}$ da chunki $\mathcal{E}M \subset M$ va $\mathcal{E}^{-1}M \subset M$ lar teng kuchli $\mathcal{E}M = M$ ga birli halqa $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_M$ xuddi $\alpha \in K$ chislo kabi $\alpha M = M$ bo'lib ifodalanadi.

Lemma-2: Agar α son $\mathfrak{D}$ ning tarkibiga tegishli bo'lsa, bunda uning xarakteristik va eng kichik ko'p had butun koeffitsiyentlarga ega bo'ladi. Xususan $N(\alpha) = N_{\frac{K}{R}}(\alpha)$ normasi va $Sp(\alpha) = Sp_{\frac{K}{R}}(\alpha)$ izlari butun ratsional sonlar.

Isbot: $\mathfrak{D}$ halqa tartibli $M = \mu_1 + \dots + \mu_n$ modul uchun hisoblansin. Agar $\alpha \in \mathfrak{D}$ da (6) tenglik a_{ij} koeffitsiyentlari butun bo'lsa, bundan harakteristik ko'phad a uchun butun koeffitsiyentlarga ega bo'ladi.

Teorema-4: Agar $\mathfrak{D}$ ixtiyoriy K algebraik sonlar uchun maydon tartibi bo'lsin. $\varepsilon \in \mathfrak{D}$ son $\mathfrak{D}$ halqa birligi bo'lishi uchun $N(\varepsilon) = \pm 1$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot: Har qanday $\alpha \neq 0$ uchun $\mathfrak{D}$ dagi $N(\alpha)$ -norma $\mathfrak{D}$ halqada α ga bo'linadi. 2-lemmadan $\varphi(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n$ ning harakteristik ko'phadi α sonda butun koeffitsiyentlardan iborat bo'ladi. Chunki $\varphi(\alpha) = 0$ bo'lgani uchun

$$\frac{N(\alpha)}{\alpha} = \frac{(-1)^n c_n}{\alpha} = (-1)^{n-1} (\alpha^{n-1} + c_1 \alpha^{n-2} + \dots + c_{n-1})$$

bo'ladi $\frac{N(\alpha)}{\alpha}$ nisbat $\mathfrak{D}$ halqaga tegishli, demak $N(\alpha)$ esa α ga bo'linadi.

Agar $N(\alpha) = \pm 1$ bo'lsa u 1-ga bo'linadi, ya'ni $\mathfrak{D}$ halqaning biri bo'ladi. Aksincha, agar ε birlik halqa $\mathfrak{D}$ da $\varepsilon \varepsilon' = 1$ bo'ladi qandaydir $\varepsilon' \in \mathfrak{D}$ dan $N(\varepsilon)$ va $N(\varepsilon')$ lar butun bo'lgani uchun $N(\varepsilon)N(\varepsilon') = 1$ dan $N(\varepsilon) = \pm 1$ bo'ladi 4-teorema isbotlandi. $\omega \in \mathfrak{D}$ ko'paytuvchini topish uchun, $N(\omega) = 1$ da $\mathfrak{D}$ ni barcha birliklarini aniqlaydi, keyin ulardan normasi ± 1 tenglari ajratiladi.

μ_1 va μ_2 ikkita son M to'liq moduldan assosirovan deb ataymiz, agar $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \varepsilon$ bo'lsa u $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_M$ ni birlik ko'paytuvchisi bo'ladi. Odatda $M = \mathfrak{D}$ holida kiritilgan assosirovanlik oddiy assosirovanlik bilan mos keladi birlik kommutativ halqada. Xuddi shunday assosirovanlikni (7) tenglamaga qo'llash mumkin. Shuning uchun (7) tenglama assosirovan yechimda sinflarga bo'linadi. Agar μ_1 va μ_2 lar assosirovan yechimlar, ya'ni $\mu_1 = \mu_2 \varepsilon$, ε birlik $\mathfrak{D}$ halqada $N(\omega) = 1$ bo'ladi. Aksincha har qanday ε birlik uchun $\mathfrak{D}$ da normasi $+1$, μ yechimni $\mu \varepsilon$ ham assosirovan yechim bo'ladi. Shunday qilib, qandaydir assosirova sinf yechimlari normasi 1 ko'paytirishdan olinadi.

Teorema-5: $\mathfrak{D}$ dagi tartibli sonlar orasida berilgan normalarda o'zaro juft assosirlanmagan chekli sonlar mavjud.

Isbot: Agar $\omega_1 + \dots + \omega_n \mathfrak{D}$ tartibdagi bazis bilan va $c > 1$ ixtiyoriy natural son bo'lsin. Umumiy tartibga asosan ikkita α va β sonlar $\mathfrak{D}$ dan o'zaro c moduli bo'yicha taqqoslanadi, agar ularning $\alpha - \beta$ ayirma $\mathfrak{D}$ halqada c ga bo'linsa. Har qanday $\alpha \in \mathfrak{D}$ c modul bo'yicha taqqoslanadi faqat bitta uchbu son bilan

$$x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n, \quad 0 \leq x_i < c \quad (1 \leq i \leq n).$$

$\mathfrak{D}$ dagi sonlar bo'linadi, c^n sinf sonlariga, ozaro c modul bo'yicha taqqoslanib. α va β ikkita son, bitta sinfga tegishli bo'lib, $|N(\alpha)| = |N(\beta)| = c$ bo'ladi. $\gamma \in \mathfrak{D}$, $\alpha - \beta = c\gamma$ dan $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm \frac{N(\beta)}{\beta}\gamma \in \mathfrak{D}$ bo'ladi.

Shunday qilib, α va β lar bir-biriga bo'linadi, demak ular $\mathfrak{D}$ halqada o'zaro assosirovan. Shu bilan $\mathfrak{D}$ da chekli o'zaro assosirovanlanmagan juftlar mavjud, normasi absalyut jihatdan c songa teng.

Xossa: K maydondagi M to'liq moduldagi sonlar orasida berilgan normada faqat chekli sonlar assosirlanmaganlar mavjud. Haqiqatda $\mathfrak{D}$ halqa M modulda qandaydir natural b da bM modul $\mathfrak{D}$ ga tegishli bo'ladi. Agar $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ o'zaro juftli assosirovanlanmagan sonlar M da c normali bo'lsa, bunda $b\gamma_1, \dots, b\gamma_k$, $\mathfrak{D}$ da b^nc – normaga ega bo'ladi va $\mathfrak{D}$ da juftli assosirovanlanmagan. k san juda katta bo'lishi mumkin emas.

Zamechaniya: 5-teorema isboti $\mathfrak{D}$ halqada, c normali chekli sonlar to'plami mavjud, $\mathfrak{D}$ dagi barcha xususiyatlarga ega bo'lgan usha normada. Lekin bu isbot uncha effektiv emas. Bizning asosiy masalamiz (7) ning barcha ychimlarini topishdir, shundan keyin 2 ta masalaga ega bo'lamiz:

- 1) $\mathfrak{D}_M$ kopaytuvchilar halqasida, barcha $\mathcal{E}$ -birliklarni $N(\mathcal{E}) = 1$ norma bilan topish.
- 2) M modul $\mu_1, \dots, \mu_k$ sonlarni a normada topish kerak, ular juftma-juft assosirlanmagan bo'lsin, shu bilan birga har qanday $\mu \in M$ da a normali ularning bittasi bilan assosirlangan ya'ni $\mu = \mu_i \mathcal{E}$, bu erda $1 \leq i \leq k$ va $\mathcal{E}$ birlik $\mathfrak{D}_M$ ko'paytuvchilarining halqasi.

Agar bu ikkkita masala yechilsa, shu bilan birga butun sonli ratsional sonlardagi yoyiluvchi formalar ko'phadi masalasi ham yechiladi.

Eng kata tartib. Biz tartib tushunchasi bilan tanishmiz, bundan har xil tartiblar orasidagi munosabatlar savolini qarash K algebraik sonlar maydonida paydo bo'ladi.

Endi K maydon har xil tartiblaridan eng kattasini ko'rsatamiz, o'zida barcha tartiblarni akslantirgan.

2-lemmada eng kichik ko'p had har qanday sonlarda qandaydir tartibda butun koefitsiyentlarga ega bo'ladi. Biz K dagi barcha eng katta tartiblarning $\mathfrak{D}$ bilan mos tushishini ko'rsatamiz. Dastlab ushbu lemmani isbotlaymiz.

Lemma-3: Agar $\alpha \in \mathfrak{D}$ bo'lsa, ya'ni $t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m$ eng kichik ko'phad α songa butun sonli koefitsiyentga ega bo'ladi, $M = \{1, \alpha, \dots, \alpha^{m-1}\}$ modul halqa bo'lib hisoblanadi.

Isbot: Har qanday α^k daraja ($k \geq 0$) α songa M tegishli bo'ladi. Shuni ko'rsatish etarli $k \leq m - 1$ da bu o'rinli qoidaga asosan.

Keyin $\alpha^m = -c_1 \alpha^{m-1} - \dots - c_m c_i$ butun bilan birga, $\alpha^m \in M$ bo'ladi. Keyin $k > m$ bo'lsa, $\alpha^{k-1} \in M$ isbotlangan, ya'ni $\alpha^{k-1} = a_1 \alpha^{m-1} + \dots + a_m a_i$ butin bilan birgalikda. Bunda

$$\alpha^k = \alpha \alpha^{k-1} = a_1 \alpha^m + a_2 \alpha^{m-1} + \dots + a_m \alpha$$

bo'ladi chunki, o'ng tomondagi barcha hadlar M ga tegishli va α^k M ga tegishli. 3-lemma isbotlandi.

Lemma-4: Agar $\mathfrak{D}$ ixtiyoriy K maydondagi tartibda va $\alpha \in \mathfrak{D}$ bunda $\mathfrak{D}[\alpha]$ halqa bo'ladi, α dan iborat barcha ko'phadlarda $\mathfrak{D}$ dagi koefitsiyentlarda, bular K maydon tartibli bo'lib hisoblanadi.

Isbot: $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}[\alpha]$ dan, $\mathfrak{D}[\alpha]$ halqada $n = (K:R)$ ga ega bo'lamiz R da chiziqli bog'lanmagan sonlarda. Biz $\mathfrak{D}[\alpha]$ modulligini isbotlashimiz kerak.

$\omega_1, \dots, \omega_n$ bazis $\mathfrak{D}$ tartibli bo'lsin. 3-lemmaga asosan α^k quyidagicha ifodalanadi $a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{m-1} \alpha^{m-1}$, a_i -butun sonli ratsionallarda, bu erda m eng kichik α dagi ko'p had darajasi. Bundan, $\mathfrak{D}[\alpha]$ dagi har bir sonlarni $\omega_i \alpha^j$ kabi chiziqli

kombinatsiyalarda ifodalash mumkin, bu $\mathfrak{D}[\alpha]$ ni modul ekanligini anglatadi. 4-lemmani takroriy qo'llash bizga ushuni beradi.

Xossa: Agar $\mathfrak{D}$ tartib va $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sonlar $\mathfrak{D}$ dan, bunda $\mathfrak{D}[\alpha_1, \dots, \alpha_p]$ halqa bo'ladi, barcha $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ lardagi ko'phadlarda $\mathfrak{D}$ dagi koeffitsiyentlarda ham tartib bo'ladi.

Isbot: K maydonning qandaydir tartibi $\mathfrak{D}$ bo'lsin, $\mathfrak{D}$ dan α va β lar ixtiyoriy son. 4-lemma xossasidan $\mathfrak{D}[\alpha, \beta]$ tartib bo'lib hisoblanadi, demak u $\mathfrak{D}$ ga tegishli. Bunda $\alpha - \beta$ va $\alpha\beta$ lar ham $\mathfrak{D}$ ga tegishli bo'ladi. Bu bilan $\mathfrak{D}$ ham halqaligi isbotlandi. Chunki $\mathfrak{D} \subset \tilde{\mathfrak{D}}$ da $\tilde{\mathfrak{D}}$ da n chiziqli bog'lanmagan sonlar mavjud. $\tilde{\mathfrak{D}}$ modul ekanini tekshirish qoldi.

$\mathfrak{D}$ tartibda qandaydir $\omega_1, \dots, \omega_n$ bazisni tanlaymiz va unga K maydonda qaraymiz $\omega_1^*, \dots, \omega_n^*$ bazisni. $\tilde{\mathfrak{D}}$ halqani $\mathfrak{D}^* = \{\omega_1^*, \dots, \omega_n^*\}$ modulda joylashganligini ko'rsatamiz. Agar ixtiyoriy α – son uchun $\tilde{\mathfrak{D}}$ halqadan, uni

$$\alpha = c_1\omega_1^* + \dots + c_n\omega_n^*$$

deb c_i - ratsional ko'rsatkichlarda ifodalaymiz. Uni ω_1 ga kopaytirib va iziga o'tib

$$c_i = \text{Sp}\alpha\omega_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

ni olamiz. Bunda $\alpha\omega_i$ lar $\mathfrak{D}[\alpha]$ tartibda joylashgan. Shuning uchun 2-lemmadan barcha c_i lar butundir, demak $\alpha \in \mathfrak{D}^*$. Shunday qilib $\tilde{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}^*$ bo'ladi. Endi 2-teoremani xossasini qo'llab, $\tilde{\mathfrak{D}}$ ni modul deymiz, 6-teorema isbotlandi.

Biz keltirgan isbot, $\tilde{\mathfrak{D}}$ halqa umumiy xarakterga ega, ya'ni u o'z kuchini saqlaydi va umumiy kommutativ halqada nol bo'luvchisiz. Biz kiritgan terminlardan shunday deyish mumkin, K son algebraik moduli tartibi bu Z ratsional sonlardagi halqa butun ulanishi K da. Bunda, eng kata $\tilde{\mathfrak{D}}$ tartibdan uni K maydon butun son deb ataymiz. $\tilde{\mathfrak{D}}$ ning eng katta belgisi ham K algebraik sonlar maydoning birliklari deyiladi.

1.1-§ *To'liq modul diskriminanti.*

K algebraik sonlar maydonida $\mu_1, \dots, \mu_n$ va $\mu'_1, \dots, \mu'_n$ lar M to'liq modulning 2 ta bazisi bo'ladi. Biz bilamizki o'tish matrissasi birinchi bazisi ikkinchiga unimodulyar. Bundan $D(\mu_1, \dots, \mu_n)$ va $D(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ diskreminantlari teng. M ning umumy diskreminanti bo'lib hisoblanadi, va u M modulning diskreminanti deb ataladi.

Har qanday K maydon tartibi K da to'liq modul bo'lib hisoblanadi. Shuning uchun uning diskreminanti haqida gapirish mumkin. Har qanday sonning izi tartibdagi butun sonidir, unda diskreminant tartibi esa butun ratsional bo'lib hisoblanadi. Eng katta bazis tartibi $\tilde{D}$ son K algebraik sonlar maydonida, ko'pincha fundamental bazis deb aytiladi, uning diskreminanti K maydon diskreminanti deb ataladi. Algebraik sonlar maydoni diskreminanti eng asosiy bo'lib hisoblanadi uning arifmetik harakteristikasida va keyinchalik ko'plab savollarda muhim rol o'ynaydi.

1.1-§ Geometrik usul

Keltirilgan oxirgi 2-ta masalalarni yechish uchun yangi geometrik yondashishlardan xarakterlanadi. Ushbu yondashishlar asosida n o'lchamli fazoda algebraik sonlarni nuqtalarda tasvirlash usuli yotadi, xuddi Koshi tengsizligida kompleks sonlarni tasvirlash usuliga o'xshashdir.

Algebraik sonlarni geometrik tasvirlash. Agar K algebraik sonlar maydonida n -darjali R ratsional sonlar utida bo'lsa, unda C kompleks sonlar maydonida n izomorfizm bo'ladi.

Ta'rif: $\sigma: K \rightarrow C$ izomorfizm K ning obrazi haqiqiy sanlar maydonida bo'ladi, bu izomorfizm σ –haqiqiy deb ataladi, aksincha u kompleks deb ataladi.

Xullas $K = R(\theta)$ kubik maydonda, $\theta^3 = 2$ bo'lsa, $R(\theta) = R(\sqrt[3]{2})$ izomorfizm $\theta = \sqrt[3]{2}$ bo'ladi. Qolgan 2-ta izomorfizmlar $R(\theta) = R(\varepsilon \sqrt[3]{2})$ va $R(\theta) = R(\varepsilon^2 \sqrt[3]{2})$ larda $\varepsilon = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ kompleks bo'ladi. Agar d ratsional son bo'lsa, kvadrat bo'lmasa, bunda $R(\theta)$ maydon uchun $\theta^2 = d$ bo'ladi, ikkala izomorfizmlar ham $d > 0$ da haqiqiy bo'ladi va $d < 0$ da kompleks bo'ladi. Umuman ixtiyoriy K algebraik maydon bo'lsa, tanlangan primitiv θ element, $\varphi(t)$ ko'phadning ildizi bo'lib R dagi keltirilmaydigan holda bo'ladi. $\theta_1, \dots, \theta_n$ lar $\varphi(t)$ ni ildizlari bo'lsa, C maydonda unga izomorfizm

$$K = R(\theta) \rightarrow R(\theta_i) \subset C, \quad \theta \rightarrow \theta_i \quad (1)$$

haqiqiy bo'ladi. θ_i ildiz haqiqiy bo'lsa, aksincha kompleks bo'ladi.

Har qanday $\gamma = x + yi$ kompleks son uchun $\bar{\gamma}$ ni qo'shma $x - yi = \bar{\gamma}$ deb belgilaymiz. $\sigma: K \rightarrow C$ kompleks izomorfizmdan, $\bar{\sigma}: K \rightarrow C$ akslanishda

$$\bar{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)} \quad \alpha \in K$$

da ifodalanadi va u kompleks izomorfizm K ni C da bo'ladi. Bu $\bar{\sigma}$ izomorfizm σ ga qo'shma deyiladi. $\bar{\sigma} \neq \sigma$ va $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma$ larda barcha kompleks izomorfizmlar K ni C da juftlarga bo'linadi o'zaro qo'shma bo'lgan. (1) ko'rinishdagi ikkita izomorfizm o'zaro izomorfizm bo'ladi qachonki-qachon ularga θ_i va θ_j mos keluvchi ildizlari kompleks qo'shma bo'lsa.

$\mathcal{Q}^{s,t}$ da x nuqtani belgilaymiz. $x' \rightarrow xx'$ ($x' \in \mathcal{Q}^{s,t}$) da akslanish, ya'ni ixtiyoriy nuqtasi $\mathcal{Q}^{s,t} = R^n$ da chiziqli ifodalash bo'ladi. (3) bazisda matrissasi quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{bmatrix} x_1 \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_c \\ y_1 - z_1 \\ z_1 y_1 \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_t - z_t \\ z_t \quad y_t \end{bmatrix}$$

bu erda yozilmagan barcha elementlari nolga teng. Ushbu matritsa determinanti

$$x_1 \dots x_s (y_1^2 + z_1^2) \dots (y_t^2 + z_t^2) = x_1 \dots x_s |x_{s+1}|^2 \dots |x_{s+t}|^2$$

ga teng. Bu bizga quyidagi ta'rifni eslatadi. $N(x)$ norma ostida ixtiyoriy $x = (x_1, \dots, x_{s+t}) \in \mathcal{Q}_{s,t}$ nuqtada quyidagini tushunamiz:

$$N(x) = x_1 \dots x_s |x_{s+1}|^2 \dots |x_{s+t}|^2$$

Hozirgina qilingan amallarda, $N(x)$ norma x nuqtada ham xuddi $x' \rightarrow xx'$ cuizikli ifodalanish matrissasining determinanti kabi ifodalanadi.

Kiritilgan norma tushunchasi multiplikativlik xususiyati bilan ifodalanadi

$$N(xx') = N(x)N(x')$$

Endi K maydonning nuqtalarini tasvirlashga o'tamiz, $\mathcal{Q}^{s,t}$ fazoda K dagi har bir α nuqta uchun $\mathcal{Q}^{s,t}$ ga mos holda ushbu nuqtalarni olamiz

$$x(\alpha) = (\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_s(\alpha); \sigma_{s+1}(\alpha), \dots, \sigma_{s+t}(\alpha)) \quad (5)$$

bu nuqtalar esa α ni geometrik tasvirlanishi deyiladi. K dagi α va β har xil sonlar uchun, $k = 1, \dots, s + t$ ning har qanday qiymati $\sigma_k(\alpha)$ va $\sigma_k(\beta)$ sanlarda har xil bo'ladi, demak $x(\alpha) \neq x(\beta)$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\alpha \rightarrow x(\alpha), \quad \alpha \in K$$

tasvirlash o'zaro bir qiymatlidir.

Xullas $\sigma_k(\alpha + \beta) = \sigma_k(\alpha) + \sigma_k(\beta)$ va $\sigma_k(\alpha\beta) = \sigma_k(\alpha)\sigma_k(\beta)$,

$$x(\alpha + \beta) = x(\alpha) + x(\beta), \quad (6)$$

$$x(\alpha\beta) = x(\alpha)x(\beta), \quad (7)$$

bo'ladi, ya'ni K da sonarni qo'shish va ko'paytirishlarda ularga mos nuqtalar ham qo'shiladi va ko'paytiriladi.

Agar α ratsional son bo'lsa, $\sigma_k(a\alpha) = \sigma_k(\alpha)\sigma_k(\alpha) = a\sigma_k(\alpha)$ bo'ladi, bundan

$$x(a\alpha) = ax(\alpha) \quad (8)$$

bo'ladi.

Qo'shimcha hollarda

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= N_{\frac{K}{\bar{R}}}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \dots \sigma_s(\alpha) \sigma_{s+1}(\alpha) \bar{\sigma}_{s+1}(\alpha) \dots \sigma_{s+t}(\alpha) \bar{\sigma}_{s+t}(\alpha) = \\ &= \sigma_1(\alpha) \dots \sigma_s(\alpha) |\sigma_{s+1}(\alpha)|^2 \dots |\sigma_{s+t}(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

ni olamiz, bunda $N(x(\alpha))$ normasi $x(\alpha)$ nuqtada $N(\alpha)$ normasi α nuqtada bir xil bo'ladi (teng):

$$N(x(\alpha)) = N(\alpha), \quad \alpha \in K$$

Ikkita oddiy misolni qaraymiz. Agar d kvadrat bo'lmagan musbat ratsional son bo'lsa, unda haqiqiy kvadrat $R(\theta)$ maydon uchun $\theta^2 = d$ bo'ladi, $\alpha = a + b\theta$ sonni geometrik tasvirlanishida $x(\alpha) = (a + b\sqrt{d}, a - b\sqrt{d})$ nuqta bo'ladi. Eng kichik kvadrat $R(\eta)$ maydon uchun $\eta^2 = -d$ bo'lsa, tasvirlovchi (akslantiruvchi) $\beta = a + b\eta$ nuqta kompleks tekislikda $(a, b\sqrt{d})$ koordinatalari bilan (3) bazisda bo'ladi.

Ixtiyoriy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bazis uchun K maydonda R da, unga mos keluvchi vektor $x(\alpha_1), \dots, x(\alpha_n)$, $\mathfrak{Q}^{s,t} = \mathfrak{R}^n$ da chiziqli bog'lanmagan bo'ladi (haqiqiy ma'noda).

Buning uchun

$$\begin{aligned} \sigma_k(a_l) &= x_k^{(l)}, \quad 1 \leq k \leq s \\ \sigma_{s+j}(a_l) &= y_j^{(l)} + iz_j^{(l)}, \quad 1 \leq j \leq t \end{aligned}$$

deb olamiz chunki

$$x(a_l) = (x_1^{(l)}, \dots, x_s^{(l)}; y_1^{(l)} + iz_1^{(l)}, \dots, y_t^{(l)} + iz_t^{(l)})$$

vektor (3) bazisda

$$(x_1^{(l)}, \dots, x_s^{(l)}, y_1^{(l)}, z_1^{(l)}, \dots, y_t^{(l)}, z_t^{(l)})$$

koordinataga ega bo'ladi, bunda tasdiqimizni isbotlash uchun,

$$d = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_s^{(1)} & y_1^{(1)} & z_1^{(1)} & \dots & y_t^{(1)} & z_t^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_s^{(n)} & y_1^{(n)} & z_1^{(n)} & \dots & y_t^{(n)} & z_t^{(n)} \end{vmatrix}$$

determinantni faqat noldan farqliligini tekshirish kerak, d ning o'rniga boshqasini qaraymiz.

$$d^* = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_s^{(1)} & y_1^{(1)} + iz_1^{(1)} & y_1^{(1)} - iz_1^{(1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_s^{(n)} & y_1^{(n)} + iz_1^{(n)} & y_1^{(n)} - iz_1^{(n)} & \dots \end{vmatrix}$$

uni

$$d^* = \begin{vmatrix} \sigma_1(\alpha_1) & \dots & \sigma_s(\alpha_1) & \sigma_{s+1}(\alpha_1) & \bar{\sigma}_{s+1}(\alpha_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1(\alpha_n) & \dots & \sigma_s(\alpha_n) & \sigma_{s+1}(\alpha_n) & \bar{\sigma}_{s+1}(\alpha_n) & \dots \end{vmatrix}$$

deb yozib olsak bo'ladi. d^* determinantda $s + 1$ nomerli ustunga keying ustunni qo'shamiz va α ni determinantdan tashqariga chiqaramiz. Bu yangi ustunni keyingisidan ayiramiz, keyin olingan ustundan $s + 2$ nomerli $-i$ ni chiqaramiz. Xuddi shunday amallarni bajarib, har bir juft ustunlardan biz ushbuni olamiz:

$$d^* = (-2i)^t d \quad (9)$$

qo'shimcha tasdiq isbotlandi, ya'ni

$$d^{*2} = D \quad (10)$$

bu erda $D = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ esa $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bazisning diskriminanti. Chunki $D \neq 0$ dan (9) va (10) lardan, d ham nolga teng emas.

Endi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ larni K maydondagi M to'liq modulning bazisi deb hisoblaymiz. (6) va (8) lardan har qanday $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ lar $\mathfrak{R}^n$ da geometrik tasvirlanishi $x(\alpha) = a_1x(\alpha_1) + \dots + a_nx(\alpha_n)$ vektor bo'ladi.

Biz endi quyidagi natijani olami:

Teorema-1: K maydonning $n = s + 2t$ darajasini geometrik tasvirlashda $\mathfrak{R}^n$ fazoning nuqtalaridagi barcha vektorlar to'plami, $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ to'liq modulni tasvirlash sonlarida n ta chiziqli bog'lanmagan barcha butun sonli tasvirlashlar to'plami bilan $x(\alpha_1) + \dots + x(\alpha_n)$ vektorlarda mos tushadi.

II-bob. MODULLAR VA PANJARALAR

2.1-§ Panjaralar

To'la modullarni geometrik o'rganish, ularning xususiyatlariga birinchi teoremda asoslangan. Shuning uchun $\mathfrak{R}^n$ dagi vektorlar majmui qandaydir modulning obrazi bo'lib hisoblanadimi yoki yo'qligini qaraymiz.

Ta'rif. Mayli $e_1, \dots, e_m$, $m \leq n$ chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasi $\mathfrak{Q}^n$ fazoda bo'lsin. $a_1e_1 + \dots + a_me_m$ ko'rinishidagi barcha vektorlar majmui, a_i bir-biriga bog'lanmagan barcha butun sonlar m o'lchamli panjara deyiladi, $\mathfrak{R}^n$ da $e_1, \dots, e_m$ vektorlari esa ushbu panjarani bazisi deyiladi. Agar $m = n$ bo'lsa, panjara to'liq deyiladi, aksincha to'liqmas deyiladi.

1-teorema ma'nosi esa to'liq modul sonlarini geometrik vektorlarni tasvirlash qandaydir to'liq panjarada bo'ladi. Endi ikkita $e_1, \dots, e_m$ va $f_1, \dots, f_m$ vektorlar sistemasi bittadan va bitta panjarani aniqlaydi, qachon ular o'zaro unimodulyar bog'langan bo'lsa, ya'ni

$$f_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}e_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

bo'ladi, bu erda (c_{ij}) butun sonli matritsa determinanti bilan ± 1 ga teng. Panjaralarni to'liq o'rganish uchun $\mathfrak{R}^n$ fazoda metrik xususiyatlariga asoslanadi. $\mathfrak{Q}^{s,t} = \mathfrak{R}^n$ da skolyar ko'paytmani kiritamiz, (3) vektorlar ortonomerlangan bazisni ifodalaydi. Agar x va x' vektorlar (3) bazisda $(x_1, \dots, x_n)$ va $(x'_1, \dots, x'_n)$ lardan iborat koordinatalarga ega bo'lsin, bunda (x, x') skolyar ko'paytma quyidagicha bo'ladi:

$$x, x' = xx' + \dots + x_nx'_n$$

Vektorning uzunligini $\|x\|$ bilan belgilanadi r -haqiqiy musbat son bo'lsin. Barcha x nuqtaning $(x_1, \dots, x_n)$ koordinatalari bilan (3)-bazis quyidagicha bo'ladi,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} < r$$

$U(r)$ bilan belgilaymiz. Bu $U(r)$ to'plam shar deb aytiladi, r radiusli va markazi koordinatalar sistemasi boshida $\mathfrak{R}^n$ dagi barcha nuqtalar chegaralangan deyiladi,

agar u qandaydir $U(r)$ sharda joylashgan bo'lsa. $\mathfrak{R}^n$ dagi nuqtalar to'plami diskret deyiladi, agar har qanday $r > 0$ barcha chekli nuqtalar $U(r)$ shar ichida yotgan bo'lsa.

Lemma-1: $\mathfrak{R}^n$ dagi ixtiyoriy $\mathfrak{M}$ panjara nuqtalari diskretdir.

Isbot: Har qanday to'liqsiz panjaralar to'liq panjaralar ichida bo'ladi, demak $\mathfrak{M}$ to'liq panjarada isbotlash etarli bo'ladi. $\mathfrak{M}$ da $e_1, \dots, e_n$ qandaydir bazisni olamiz.

$$(x, e_2) = 0, \dots, (x, e_n) = 0$$

sharti $n - 1$ sistema uchun bizga n ta bir jinsli tenglamalar sistemasini beradi. Chunki bu sistemada noldan farqli yechim mavjud bo'ladi, demak noldan farqli x vektor ham mavjud u $e_2, \dots, e_n$ larda ortogonaldir. Agar biz $(x, e_1) = 0$ ga ega bo'lsak bunda x vektor barcha vektorlarga ortogonal bo'ladi, $\mathfrak{R}^n$ fazoda bu esa mumkin emas. Shundan $(x, e_1) \neq 0$ bo'ladi. $f_1 = \frac{1}{(x, e_1)}x$ vektor ham $e_2, \dots, e_n$ vektorlarga ortogonaldir va $(f_1, e_1) = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, har qanday i uchun, biz f_i vektorlarni topishimiz mumkin va bundan:

$$(f_i, e_j) = \begin{cases} 1, & j = i \text{ da} \\ 0, & j \neq i \text{ da} \end{cases}$$

$z = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ vektor $\mathfrak{M}$ da $U(r)$ sharda yotadi ya'ni $\|z\| < r$. Chunki $a_k(z, f_k)$ bo'lsa, Koshi Bunyokovskiy tengsizligidan olamiz.

$$|a_k| = |(z, f_k)| \leq \|z\| \cdot \|f_k\| < r \|f_k\|$$

bu erda $r \|f_k\|$ esa z ga bog'liq emas. Shundan barcha a_k butun sonlar uchun, $z = \mathfrak{M}$ da $\|z\| < r$ ga ega bo'lamiz. Bu esa 1-lemma isbotidir.

Agar X qandaydir nuqtalar to'plami $\mathfrak{R}^n$ da bo'lsa, barcha $x + z$ nuqtalar to'plami x da to'la joylashadi (bo'ladi) va u ko'chish deb aytiladi. X da z vektorga $X+z$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar $e_1, \dots, e_m$ qandaydir panjara bazisi $\mathfrak{M}$ da bo'lsa T to'plam

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$$

ko'rinishdagi nuqtalarda $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bir biriga bog'lanmagan halqa haqiqiy sonlar bo'ladi va $0 \leq \alpha_i < 1$ sharda parallelepiped $\mathfrak{M}$ da panjara asosi deb aytiladi.

Asosiy parallelepiped aniqlandi, shundan ular uzining panjarasida bir qiymatli emas, u bazisni tanlashga bog'liq.

Lemma-2: Agar T asosiy parallelepiped $\mathfrak{W}$ panjarada bo'lsa, unda

$$T_z = T + z$$

to'plamda z barcha $\mathfrak{W}$ nuqtalarga o'tadi, juftlikda kesishmaydi, $\mathfrak{R}^n$ fazoni to'liq bildiradi.

Isbot: Agar $e_1, \dots, e_n \rightarrow \mathfrak{W}$ da basis panjarasi bo'lsin $\mathfrak{W}$ unda T parallelepiped qurilgan. Biz $x = x_1 e_1, \dots, x_n e_n$ har anday nuqta uchun $\mathfrak{R}^n$ da faqat va faqat bitta T_z to'plamga tegishli ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Har qanday i uchun x_i haqiqiy sonni keltiramiz $x_i = k_i + \alpha_i$ ko'rinishda, bunda k_i butun ratsional son, α_i esa $0 \leq \alpha_i < 1$ shartni qanoatlantiradi.

$z = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$ deb va $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ deb

$$x = u + z \quad (u \in T, z \in \mathfrak{W})$$

ga ega bo'lamiz, bu esa $x \in T_z$ degani. Agar $x \in T_z$ da ya'ni $x = u' + z'$ bo'lsa, $u + z = u' + z'$ taqqoslab e_i dagi koeffitsiyentlarni $z = z'$ ni olamiz 2-lemma isbotlandi.

Lemma-3: $r > 0$ har qanday haqiqiy son uchun T_z chekli sonli to'plamar mavjudki $U(r)$ shar bilan kesishuvchi.

Isbot: $e_1, \dots, e_n$ basis panjarasi $\mathfrak{W}$ da bo'lsin, unga T parallelepiped qurilgan. Agar biz $d = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$ deb olsak, unda har qanday $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in T$ da

$$\|u\| \leq \|\alpha_1 e_1\| + \dots + \|\alpha_n e_n\| = \alpha_1 \|e_1\| + \dots + \alpha_n \|e_n\| < d$$

bo'ladi.

T_z ($z \in \mathfrak{W}$) to'plam $U(r)$ shar bilan kesishsin. Bu qandaydir $x = u + z$ vektor uchun $u \in T, z \in \mathfrak{W}$ da $\|x\| < r$ bo'ladi. Chunki $z = x - u$ bundan

$$\|z\| \leq \|x\| + \|-u\| < r + d$$

bo'ladi 1-lemmadan $z \in \mathfrak{W}$ da faqat chekli sonlar mavjud bo'ladi. 3-lemma isbotlandi.

Ko'rinib turibdiki panjara vektorlarini qo'shish amaliga ko'ra guruh hisoblanadi. Boshqacha aytganda har bir panjara $\mathfrak{R}^n$ additiv guruhning qism guruhi bo'lib hisoblanadi. 1-lemma ko'rsatadiki, buning qism guruhi ancha ixtiyoriy emas. Biz panjara xususiyatini barcha qism guruhlarida $\mathfrak{R}^n$ da panjara bo'lib ifodalanadi.

Lemma-4: Qism guruh: $\mathfrak{M}$ guruh $\mathfrak{R}^n$ dagi uning nuqtalar to'plami diskret bo'lganda panjara bo'lib hisoblanadi.

Isbot: $\mathfrak{S}$ bilan eng kichik chiziqli fazoni $\mathfrak{R}^n$ bilan belgilaymiz, $\mathfrak{M}$ to'plamni o'zida saqllovchi, m bilan $\mathfrak{S}$ ning o'lchamini belgilaymiz. Biz endi $\mathfrak{M}$ da m ta $e_1, \dots, e_m$ vektorlarni tanlab olamiz $\mathfrak{S}$ da basis tashkil etadi. Xullas, $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ ko'rinib turadi. $(\mathfrak{M}:\mathfrak{M}_0)$ chekli indeks ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatda ixtiyoriy x vektorni $\mathfrak{M}$ da qaraymiz

$$x = u + z \quad (11)$$

ko'rinishda, (11) bu erda $z \in \mathfrak{M}_0$, u esa parallelepipedga tegishli qurilgan $e_1, \dots, e_m$ bazisda. $z \in \mathfrak{M}$ va $z \in \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ satrlardan, chunki $\mathfrak{M}$ guruh hisoblanadi, unda $u \in \mathfrak{M}$ bo'ladi. T chekli to'plam bo'lgani uchun $\mathfrak{M}$ ning diskretligidan unda faqat chekli vektorlar soni $\mathfrak{M}$ dan bo'lad. Bu u vektorni (11) kabi olishda har qanday $x \in \mathfrak{M}$ da, u esa $(\mathfrak{M}:\mathfrak{M}_0)$ ning indekslarini chekli ekanligini anglatadi. $(\mathfrak{M}:\mathfrak{M}_0) = j$ deb, chunki har bir $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0$ faktor guruhining elementi uchun j buluvchi hisoblanadi, unda $jx \in \mathfrak{M}_0$ da har qanday $x \in \mathfrak{M}$ bo'ladi, bu esa x ni $\frac{1}{j}e_1, \dots, \frac{1}{j}e_m$ orqali chiziqli bog'lanishini butun koeffitsiyentlarda ifodalaydi. Guruh $\frac{1}{j}e_1, \dots, \frac{1}{j}e_m$ bazis bilan $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*$ panjarada yotadi. Ikkinchi teoremani qo'llab, $\mathfrak{M}$ qism guruhi $\mathfrak{M}^*$ esa $l \leq m$ da $f_1, \dots, f_l$ bazis bo'lishi kerak. $\mathfrak{M}$ panjara bo'lishda biz $f_1, \dots, f_l$ ni chiziqli bog'lanmagan ekanligini butun sonlar ustida ko'rsatamiz. Bu esa m ta chiziqli bog'lanmagan $\mathfrak{R}^n$ dagi $e_1, \dots, e_m$ vektorlar orqali chiziqli bog'langanligi kelib chiqadi. 4-lemma isbotlandi.

2.2-§ Panjaralarning to'liqlik kriteriyasi

Ushbu mavzuda biz birlar guruhini qurishning tadqiqotini algebraik sonlar maydoni tartibida oxirigacha yetkazamiz. Asosiy masala bo'lib, biz yechishimiz uchun oldin muhokama qilganidik. U quyidagicha, ya'ni $\mathfrak{E}$ panjaraning vektorlari birlik tartibli $\mathfrak{D}$ ni tasvirlaydi. Logarifmik tasvirlashda $s + t - 1$ o'lchamga ega bo'ladi. $\mathfrak{E}$ panjara $\mathfrak{R}^{s+t}$ fazoda joylashadi va $\mathfrak{L}$ ning chiziqli fazosida joylashadi, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{s+t})$ nuqtalardan iborat bo'lib, ular uchun $\lambda_1, \dots, \lambda_{s+t} = 0$ bo'ladi. Chunki $\mathfrak{L}$ ning ulchami $s + t - 1$ ga teng, bunda bizning masalamiz $\mathfrak{E}$ ni $\mathfrak{L}$ fazoda to'la panjara bo'lishini isbotlaymiz. Biz buni isbotlashda quyidagi panjarani to'liqlik kriteriyasidan foydalanamiz.

1-teorema: $\mathfrak{M}$ panjara $\mathfrak{L}$ fazoda to'la bo'ladi qachonki-qachon, $\mathfrak{L}$ fazoda U cheklangan to'plam mavjud bo'lsa, bunda siljishlar $\mathfrak{M}$ dagi barcha vektorlar $\mathfrak{L}$ fazoni to'laligicha to'ldiradi.

Isbot: $\mathfrak{M}$ panjara to'liq bo'lsa, unda U ning o'rniga uning qandaydir parallelopipedini olish mumkin: ikkinchi lemmaga asosan asosiy parallelopipedning barcha siljishlari to'la panjara vektorlariga o'tishda fazoni butunlay to'ldiradi. Agar endi $\mathfrak{M}$ panjara to'liq bo'lmasa va U ixtiyoriy cheklangan qism soha fazosi $\mathfrak{L}$ da bo'lsin. Endi U to'plam soha siljishi vektorlariga $\mathfrak{M}$ dan $\mathfrak{L}$ fazoni to'ldira olmasligi mumkin. U ning cheklanganligidan shunday $r > 0$ son mavjudki bunda $\|u\| < r$ bo'ladi, barcha $u \in U$ dan. $\mathfrak{L}'$ orqali, $\mathfrak{M}$ ni yaratuvchi vektorlar panjarasida belgilaymiz. Chunki $\mathfrak{M}$ panjara to'liq emas, bunda $\mathfrak{L}'$ xos qism fazosi bo'ladi, shuning uchun $\mathfrak{L}$ da y vektor mavjud, bo'lib $u \in \mathfrak{L}'$ fazoda ortogonal bo'ladi. Barcha y vektorlar, $\|y\| \geq r$ bo'lganda, U siljishni qoplamasi $\mathfrak{M}$ dagi vektorlarga mumkin bo'lmaydi. Haqiqatdan ham, agar y vektor qandaydir siljishda yotadi, bu esa $y = u + z$ ni anglatad, bu er da $u \in U$, $z \in \mathfrak{M}$. Bunda Koshi Bunyakovskiy tengsizligiga asosan

$$\|y\|^2 = (y, y) = (y, u) \leq \|y\| \|u\| < r \|y\|$$

bo'ladi, bundan $\|y\| < r$ olinadi. Shunday qilib 1-teorema isbotlandi. (Buning geometrik ma'nosi shundan iboratki, U to'plamning barcha siljishlari to'liqsiz panjara vektorlariga qatlamda $\mathfrak{L}'$ fazogacha bo'lgan masofalar r dan oshmaydi).

Eslatma: $\mathfrak{M}$ ning to'liqligi topologik terminlarda $\mathfrak{L}$ fazoda teng kuchlidir, bu $\mathfrak{L}/\mathfrak{B}$ faktor guruhlarining kompakt zichligidan ko'rinadi.

Minkovskiyy lemmasi: $s + t - 1$ ning mavjudligi isboti to'liq bo'lmagan birliklarda, oddiy bitta geometrik tasdiqdan asoslanadi. Bu o'z navbatida ko'plab sonlar nazariyasida ilovalarga ega bo'ladi. Ushbu tasdiqning sharti va isbotida hajm tushunchasidan n o'lchamli fazoda va uning ayrim xususiyatlarida foydalaniladi.

$v(X)$ hajm X to'plam uchun n -o'lchamli fazoda $\mathfrak{R}^n$ xuddi karrali integral kabi topiladi.

$$v(X) = \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

(X)

ushbu X to'plamda taqsimlangan holda. Biz hajmning mavjudligi bilan shug'ullanmaymiz. Bizni qiziqtirgan holda X to'plam bir necha tengsizliklar bilan beriladi, ancha odiy holda unda hajmning mavjudligi oson yechiladi. Endi bir necha hajmning xususiyatlariga, integrallarning xossalaridan kelib chiquvchilariga to'xtalamiz.

- 1) Agar $X \subset X'$ ichida bo'lsa, $v(X) \leq v(X')$ bo'ladi.
- 2) Agar X, X' kesishmasa $v(X \cup X') = v(X) + v(X')$ bo'ladi.
- 3) To'plam siljishida uning hajmi saqlanadi ya'ni $v(X + z) = v(X)$
- 4) α musbat haqiqiy sonly bo'lsin. αX orqali barcha αx nuqtalarning to'plamini belgilaymiz, bu erda x barcha X dagi nuqtalarni bosib o'tadi. Bundan

$$v(\alpha X) = \alpha^n v(X).$$

T asosiy parallelopipedning hajmini hisoblaymiz. $\mathfrak{M}$ panjarada $\mathfrak{M}^n$ dazoda $e_1, \dots, e_n$ bazis vektorlariga qurilgan. Agar

$$e_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}), \quad (1 \leq j \leq n)$$

bo'lsa

$$v(T) = |\det(a_{ij})| \quad (1)$$

ekanligini ko'rsatamiz

$$v(T) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n \quad (T)$$

integralda

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

kabi almashtirilsin. Ushbu ifodalanishning yakobyani $\det(a_{ij})$ determinantiga teng, u holdan farqli, chunki $e_1, \dots, e_n$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan. Chunki bizning ifodalanishimizda T to'plam T_0 to'plamga o'tadi, $(x'_1, \dots, x'_n)$ nuqtalardan iborat va $0 \leq x'_i < 1$ da

$$v(T) = \int \dots \int |\det(a_{ij})| dx'_1 \dots dx'_n = |\det(a_{ij})| \int_0^1 \dots \int_0^1 dx'_1 \dots dx'_n = |\det(a_{ij})| \quad (T_0)$$

1-formula isbotlandi.

$\mathfrak{R}^n$ fazoni qandaydir $x \rightarrow x'$ da ifodalaymiz. $\mathfrak{M}$ panjara esa qandaydir $\mathfrak{M}'$ panjaraga o'tadi, uning asosi T parallelepiped esa $\mathfrak{M}'$ panjaradagi asosiy T' parallelepipedga o'tadi. T' parallelepipedga $e_1, \dots, e_n$ dan $e'_1, \dots, e'_n$ vektorlarga qurilgan. Agar $e'_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ ($1 \leq j \leq n$) bunda $v(T') = |\det(b_{ij})|$ ga teng bo'ladi. $C = (c_{ij})$ bilan $x \rightarrow x'$ chiziqli ifodalashda $e_1, \dots, e_n$ uchun

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}e_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

bo'ladi.

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}c_{sj}$$

ni (b_{ij}) va (a_{ij}) matritsalarining ko'paytmasi ekanligi ko'rinadi, bu esa

$$v(T') = v(T) \cdot |\det C| \quad (2)$$

ni beradi.

Endi $e_1, \dots, e_n$ va $e'_1, \dots, e'_n$ ikkita bazis va usha $\mathfrak{M}$ panjarada berilgan deb hisoblaymiz. Chunki bu bazislar o'zaro unimodulyar holda bo'lgan (determinant $C = \pm 1$ ga) (2) dan $v(T') = v(T)$ ni olamiz. Bu bilan asosiy parallelepiped hajmi faqat panjaraga bog'liq va bunda bazisning tanlanishiga bog'liq emas.

(1) formulani (9) (10) tengliklar bilan bizni quyidagi teoremaga olib keladi.

Teorema-2: K maydonni geometrik tasvirlashda $n = s + 2t$ darajali $\mathfrak{Q}^{s,t} = \mathfrak{R}^n$ fazo nuqtalarida M to'liq modulni ushbu sonlar bilan D diskreminantida tasvirlaydi, to'liq panjarani ifodalaydi, parallelopipedning to'liq hajmi $2^{-t}\sqrt{|D|}$ ga teng.

Asosiy tasdiqni ifodalash uchun bizga yana ikkita geometrik tushuncha kerak.

To'plam $X \subset \mathfrak{R}^n$ markaziy simmetriya deyiladi, agar har qanday x nuqta uchun unga x ga asosan simmetrik nuqta mavjud.

X to'plam qavariq deyiladi, agar har qanday ikkita nuqta uchun $x \in X$ va $x' \in X$ da, $\alpha x + (1 - \alpha)x'$ nuqtalar ham ushbu to'plamda yotsa, α $0 \leq \alpha \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy son. Boshqacha aytganda, X to'plamni qavariq deb, har qanday kesma uning ikkita nuqtani birlashtiruvchi unda to'liq yotsa.

Teorema-3: (Minkovskiyning qavariq jism haqidagi lemmasi) Agar n -o'lchamli haqiqiy fazoda $\mathfrak{R}^n$ to'liq panjara $\mathfrak{M}$ yotsa-berilsa, asosiy parallelopipedning hajmi Δ ga teng va markaziy simmetrik qavariq X to'plam bilan chegaralangan $v(X)$ hajmli. Agar $v(X) > 2^n \Delta$ bo'lsa, unda X to'plam hech bo'lmaganda bitta $\mathfrak{B}$ panjaraga egadir.

Isbot: Biz ushbu oddiy tasdiqqa asoslanamiz: agar cheklangan $Y \subset \mathfrak{R}^n$ to'plamda $Y_z = Y + z$ bo'lsa, $z \in \mathfrak{M}$ dagi vektorda o'zaro kesishmasa, unda $v(Y) \leq \Delta$ bo'ladi. Isbotlash uchun asosiy parallelopipeddagi $\mathfrak{M}$ panjarani olib va $Y \cap T_{-z}$ kesishmani qaraymiz $T_{-z} = T - z$ siljishda T parallelopipedda.

Bundan

$$v(Y) = \sum_{z \in \mathfrak{M}} v(Y \cap T_{-z})$$

olinadi (Ushbu cheksiz yig'indini chekli hadlari 1 dan farqli, chunki Y to'plam T_{-z} parallelopipedning chekli nuqtalarda kesishadi). $Y \cap T_{-z}$ siljish z vektorida $Y_z \cap T$ oddidir, chunki $v(Y \cap T_{-z}) = v(Y_z \cap T)$ bu esa

$$v(Y) = \sum_{z \in \mathfrak{M}} v(Y_z \cap T)$$

ga teng.

Agar Y_z siljishlari o'zaro kesishmasa, unda barcha nuqtalar T da yotadi, oxirgi tenglik o'ng tomon yig'indisi $v(T)$ katta bo'lmaydi. Bundan $v(Y) \leq v(T)$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Endi $\frac{1}{2}X$ to'plamni qaraymiz. Teorema shartidan $v\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2^n}v(X) > \Delta$ bo'ladi. Agar $\frac{1}{2}X + z$ siljish $z \in \mathfrak{M}$ vektorga o'tganda kesishmasa, unda isbotlangandan biz $v\left(\frac{1}{2}X\right) \leq \Delta$ ni olamiz, bu esa o'z navbatida bunday emas. Shundan har hil z_1 va z_2 vektorlar uchun $\mathfrak{M}$ dan $\frac{1}{2}X + z_1$ va $\frac{1}{2}X + z_2$ lar teskari nuqtaga ega bo'ladi.

$$\frac{1}{2}x' + z_1 = \frac{1}{2}x'' + z_2 \quad (x', x'' \in X)$$

oxirgi tenglikni qayta yozamiz:

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{2}x'' - \frac{1}{2}x'$$

chunki X to'plam markaziy simmetrikdir, demak $-x' \in X$ va uning qavariqligidan olamiz.

$$\frac{1}{2}x'' - \frac{1}{2}x' = \frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}(-x') \in X$$

Shunday qilib, $z_1 = z_2$ nuqtadan farqli nuqta $\mathfrak{M}$ da X to'plamga qarashli, bu esa talab qilingan isbotdir. 3-teoremani isbotini 1-chi qismidan ushbu soda tasdiq kelib chiqadi.

Lemma-1: Agar Y to'planning barcha siljishlari $\mathfrak{M}$ ning panjara vektorlarida $\mathfrak{R}^n$ fazoni to'liq qoplaydi, bunda $v(Y) \geq \Delta$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham bu holda $Y_z \cap T$ bilan kesishmasi asosiy T parallelopipedni to'liq qoplaydi, shuning uchun

$$v(Y) = \sum_{z \in \mathfrak{M}} v(Y_z \cap T) \geq v(T) = \Delta$$

bo'ladi.

Mikovskiyning lemmasiga asosan birlik guruhni kuzatishda, biz $\mathfrak{Q}^{s,t}$ fazo panjarasini olib va X jismga nisbatan, x nuqtalardan iborat holda ushbuga ega bo'lamiz:

$$|x_1| < c_1, \dots, |x_s| < c_s; |x_{s+1}|^2 < c_{s+1}, \dots, |x_{s+t}|^2 < c_{s+t}$$

bu erda $c_1, \dots, c_{s+t}$ haqiqiy musbat sonlar. X ning qavariqligi va markaziy simmetrikligi ko'rinib turadi. Uning hajmini hisoblaymiz. Buning uchun x nuqtada

$$v(X) = \int_{-c_1}^{c_1} dx_1 \dots \int_{-c_s}^{c_s} dx_s \iint_{y_1^2 + z_1^2 < c_{s+1}} dy_1 dz_1 \dots \iint_{y_t^2 + z_t^2 < c_{s+t}} dy_t dz_t = 2^s \pi^t \prod_{i=1}^{s+t} c_i$$

olamiz. Qaraliyotgan jism X uchun Minkovskiy tengsizligini qo'llash bizga qo'yidagi natijani beradi.

Teorema-4: Agar asosiy parallelopipedning hajmi $\mathfrak{M}$ to'liq panjarada $\mathfrak{Q}^{s,t}$ fazoda Δ ga teng va $c_1, \dots, c_{s+t}$ haqiqiy musbat sonlar uchun

$$\prod_{i=1}^{s+t} c_i > \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \Delta$$

bo'lsa, $\mathfrak{M}$ panjara nolsiz vektorlarga ega bo'ladi $x = (x_1, \dots, x_{s+t})$ buning uchun quyidagi tengsizlik o'rinalidir:

$$|x_1| < c_1, \dots, |x_s| < c_s; |x_{s+1}|^2 < c_{s+1}, \dots, |x_{s+t}|^2 < c_{s+t} \quad (3)$$

Birlik guruhlarining tuzilishi. Endi biz birlik guruhlarini qurishni ixtiyoriy tartibda oxirigacha yetkazamiz.

Teorema-5: Ixtiyoriy K algebraik sonlar maydonining $\mathfrak{O}$ tartibi uchun $n = s + 2t$ darajali shunday birlar mavjudki $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_r$ bunda $r = s + t - 1$ bo'ladi, har bir birlik $\mathcal{E} \in \mathfrak{O}$ da bir xilda quyidagicha ifodalanadi:

$$\mathcal{E} = \zeta \mathcal{E}_1^{a_1} \dots \mathcal{E}_r^{a_r}$$

bu erda $a_1, \dots, a_r$ butun ratsional sonlar ζ esa qandaydir ildiz $\mathfrak{O}$ dan 1 ga teng.

Isbot: Biz oldin aytganimizdek, bizga faqat $\mathfrak{E}$ panjaraning to'liqligini tiklash lozim, $\mathfrak{O}$ tartibli birlarni ifodalovchi, $\mathfrak{L}$ fazoda bunda $s + t - 1$ uning ulchami 1-teoremadan $\mathfrak{L}$ da shunday qism to'plam U mavjudki, uning siljishi $\mathfrak{E}$ dagi barcha vektorlar uchun $\mathfrak{L}$ fazoning to'ldiradi. Oxirgi gapni $\mathfrak{L}^{s,t}$ fazo terminida yozamiz. Odatda har qanday nuqta $\lambda_1, \dots, \lambda_{s+t}$, $\mathfrak{L}$ dan qandaydir $x \in \mathfrak{L}^{s,t}$ dagi nuqtaning abrazi bo'ladi, bunda $x \rightarrow l(x)$ akslantirishdir. Keyinchalik (15) formuladan, har qanday $x \in \mathfrak{L}^{s,t}$ dagi nuqta uchun uning obrazi $l(x)$ logarifmik fazoda $\mathfrak{L}^{s+t}$ qism fazosi $\mathfrak{L}$ ga tegishli qachonki-qachon $|N(x)| = 1$ bo'lsa.

$x \in \mathfrak{L}^{s,t}$ dagi barcha nuqtalar to'plami uchun, $|N(x)| = 1$ bo'lganda uni S bilan belgilaymiz. Agar X_0 ixtiyoriy chegaralangan S qism to'plam bo'lsin, uning obrazi $l(x_0)$ esa $\mathfrak{L}$ fazoda chegaralangan bo'ladi. Haqiqatda ham $x = (x_1, \dots, x_{s+t})$ nuqta uchun ± 1 normada ushbuni olamiz:

$$|x_k| < C \quad (1 \leq k \leq s), \quad |x_{s+j}|^2 < C \quad (1 \leq j \leq t)$$

bunda $l_k(x) < \ln C$ har qanday $k = 1, \dots, s + t$ uchun, bundan tashqari:

$$l_k(x) = - \sum_{i \neq k} l_i(x) > -(s + t - 1)C$$

bo'ladi, bu esa $l(x_0)$ ni cheklanganligini ko'rsatadi. Normaning multiplikasiyasidan $x \in S$ nuqtada va $X_0 \subset S$ qism to'plamida $X_0 x$ ko'paytma ham S da yotadi, xususan har qanday ε birlik $\mathfrak{O}$ tartiblida $X_0 x(\varepsilon) \subset S$ ni olamiz. Agar $X_0 x(\varepsilon)$ ko'paytma har qanday ε birlik uchun S ni to'liq qoplaydi, bunda $l(X_0) + l(\varepsilon)$ esa $\mathfrak{L}$ fazoni to'liq qoplaydi. Shunday qilib, 5-teoremani isbotini S da X_0 cheklangan to'plamni topish yetarli $X_0 x(\varepsilon)$ multiplikasiya siljishi $x(\varepsilon)$ nuqta yordamida S ni qoplaydi.

Agar y ixtiyoriy nuqta S da, $\mathfrak{M}$ panjara $\mathfrak{Q}^{s,t}$ fazoda, $\mathfrak{D}$ tartibli sonni ifodalovchi soni. $\mathfrak{Q}^{s,t}$ fazoni chiziqli $x \rightarrow yx$, ($x \in \mathfrak{Q}^{s,t}$) ifodalashga o'tkazamiz. Biz bilamizki ushbu ifodalash $N(y)$ ga teng ya'ni ± 1 ga teng, demak (2)-formuladan asosiy parallelopipedni hajmi $\mathfrak{M}$ panjara va $y\mathfrak{M}$ lar bir xildir. Uni Δ bilan belgilaymiz. Endi haqiqiy musbat sonni tanlaymiz: $c_1, \dots, c_{s+t}$ shunday qilib

$$Q = c_1, \dots, c_{s+t} > \left(\frac{4}{\pi}\right)^t \Delta$$

va X bilan $x \in \mathfrak{Q}^{s,t}$ dagi nuqtalar to'plamini belgilaymiz, buning uchun (3)-o'rindir. 4-teoremadan $y\mathfrak{M}$ uchun $x = yx(\alpha)$, ($\alpha \in \mathfrak{D}, \alpha \neq 0$) nuqta mavjud X da yotadigan. Demak, $N(x) = N(y)N(\alpha) = \pm N(\alpha)$ va $|N(x)| < c_1, \dots, c_{s+t} = Q$, bunda $|N(\alpha)| < Q$ bo'ladi. 5-teoremadan $\mathfrak{D}$ tartibda o'zaro juft asosirlanmagan sonlar mavjud ularning normalari Q dan kichik. Endi $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sistema sonlarini olamiz $\mathfrak{D}$ da, ular nolga teng bo'lmagan c dagi sonlarning normali Q dan kichik, ularning bittasi bilan asosirlangan. Bundan qandaydir i , ($1 \leq i \leq N$) uchun $\alpha\varepsilon = \alpha_i$ bo'ladi, bu erda ε birlik $\mathfrak{D}$ da. i nuqta quyidagicha bo'ladi:

$$y = xx(\alpha_i^{-1})x(\varepsilon) \quad (4)$$

$$X_0 = S \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^N Xx(\alpha_i^{-1}) \right) \quad (5)$$

deb olsak X ning cheklanganligidan, $Xx(\alpha_i^{-1})$ barcha to'plam cheklangan shu bilan birga X_0 ham cheklangan. Keyinchalik $c_1, \dots, c_{s+t}$ sonlarni tanlash X to'plamda hamda $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ lar y nuqtadan bog'liq emas, shuning uchun (5)-to'plam $\mathfrak{D}$ tartib bilan aniqlanadi. Xullas, y va $x(\varepsilon)$ esa S ga tegishli, (4)-ning kuchidan $xx(\alpha_i^{-1})$ nuqta ham S ga tegishli, bu esa uni X_0 ga ham tegishliligini bildiradi. (4)-tenglik esa y nuqta S ga tegishli va $X_0x(\varepsilon)$ to'plamga tegishlidir. Shunday qilib, barcha bu to'plamlar S ni qoplaydi, bu esa 5-teoremaning isbotidir.

Oldindan aytilgan Direxle teoremasidan har qanday tartibli $\mathfrak{D}$ birlik guruhlar algebraik sonlar maydonida $n = s + 2t$ darajali ko'rinishda $s + t - 1$ cheksizlik guruh kabi ifodalanadi. Agar $s + t = 1$ bo'lsa, $r = 0$ bo'ladi. Bu holda

$\mathfrak{E}$ panjara nolli vektorlardan tashkil topgan, $\mathfrak{D}$ guruh birligi esa ildizi 1 ga teng chekli guruhdan iborat bo'ladi.

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ birlarning mavjudligi Direxle teoremasidan kelib chiqadi, ular asosiy birlar deb $\mathfrak{D}$ tartibda deyiladi. Oldingi baxslarda $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ asosiy bo'lib hisoblanadi, qachonki-qachon $l(\varepsilon_1), \dots, l(\varepsilon_r)$ vektorlar $\mathfrak{E}$ panjarada bazisni tashkil etsa. Bundan

$$\varepsilon'_i = \zeta_i \varepsilon_1^{a_{i1}} \dots \varepsilon_r^{a_{ir}} \quad (1 \leq i \leq r)$$

oson olinadi, bu erda ζ_i ixtiyoriy ildiz 1 ham asosiy bo'ladi qachonki-qachon agar (a_{ij}) butun sonli unimodulyarlidir.

Izoh: Direxle teoremasining isboti, ancha foydali emas, qachon $\mathfrak{D}$ tartibli asosiy sistemani topishni algaritmini bermasa. Bu esa to'liq $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ assosirlangan sistemani qatnashganligidadir. Ularning normalari Q dan oshmaydi. Bunday sistemaning mavjudligi uncha afzal emas. Afzalligiga biz keyinchalik qaytamiz. Direxle teoremasi eng kata $\tilde{\mathfrak{D}}$ tartibli K maydon uchun o'rinli. Eng kata $\tilde{\mathfrak{D}}$ taribli asosiy birlarni K algebraik maydonning asosiy birliklari ham deb atashadi.

Regulyator boshqaruvi. Kelishganimizdek $\mathfrak{D}$ maydonning har bir tartibi K algebraik sonlar maydonida $n = s + 2t$ tartibli $\mathfrak{E}$ panjara $r = s + t - 1$ o'lchamli $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}^{s+t}$ fazoda panjara deb hisoblanadi. Asosiy parallelopipedning hajmi bu panjarada unda bazisni tanlashga bog'liq bo'lmaydi, bu esa u $\mathfrak{D}$ ning tartibi bilan ifodalangan deyiladi. Bu hajmni ifodalaymiz. Agar T_0 asosiy parallelepiped $\mathfrak{D}$ ga tartibli bo'lsin, $l(\varepsilon_1), \dots, l(\varepsilon_r)$ bazisga qurilgan.

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{s+t}} \times (1, \dots, 1) \in \mathfrak{R}^{s+t}$$

ga tegishli, bu esa ko'rinib turadi, $\mathfrak{Q}$ qism bazisiga ortogonaldir va birlik uzunlikga ega. Tushunarliki, r o'lchamli hajm $v = v(T_0)$, $(s+t)$ o'lchamli T parallelepiped hajmiga teng, $l_0, l(\varepsilon_1), \dots, l(\varepsilon_r)$ vektorlarga qurilgan. Shuning uchun (1)-formuladan v hajm determinant qiymati moduliga teng. Uning qatori ushbu vektorlarning komponentlaridan iborat. Agar biz oxirigi determinantdagi

barcha ustunlarni i nomerli qatorga qo'shsak va keyin (18) dan foydalansak ushbu ustun bo'yicha yoyib ushbuni olamiz

$$v = \sqrt{s+t} R$$

bu erda R bitta minorning moduli r tartibli matritsa uchun

$$\begin{pmatrix} l_1(\varepsilon_1) & \dots & l_{s+t}(\varepsilon_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_1(\varepsilon_r) & \dots & l_{s+t}(\varepsilon_r) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Bizning mulohazalarimizdan, xususan r tartibli minorning moduli bo'yicha teng va $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ sistemalarga bog'liq emas. R esa faqat $\mathfrak{D}$ ga bog'liq. U esa $\mathfrak{D}$ tartibli regulyator deyiladi. $\tilde{\mathfrak{D}}$ tartibli eng kata regulyator yana K algebraik sonlar maydoni regulyatori ham deyiladi.

2.3-§ Sonlarni binar kvadratik formalarda tasvirlash.

Bunda biz binar kvadratik formalar uchun asosiy savollarni ancha chuqur o'rganamiz. Chunki har qanday ratsional keltirilmaydigan $ax^2 + bxy + cy^2$ forma chiziqli ko'paytuvchilarga yoyiladi, qandaydir kvadratik maydonda, bunda bizning masalamiz modullarini to'liqligini va ularning kvadratik maydon halqa ko'paytuvchilarining masalalariga bog'lanadi.

Kvadratik maydonlar. Kvadratik maydon deb, har qanday kengaytirilgan R dagi ratsional sonlar maydonining ikkinchi tartibga aytiladi. Endi ushbu oddiy algebraik sonlar maydoni sinfini o'rganamiz.

Agar $d \neq 1$ kvadratdan holi bo'lgan ratsional son bo'lsa. Chunki $t^2 - d$ ko'phad haqiqiy ratsional sonlar maydonida keltirilmaydi, bunda $R(\theta)$ maydon R ga θ ni qo'shish bilan olingan, R da 2 darajaga ega, ya'ni kvadratik maydon bo'lib, hisoblanadi. Biz uni $R\sqrt{d}$ deb belgilaymiz.

Ko'rinib turibdiki aksinchasi ham K dagi har bir kvadrat maydon faqat ko'rsatilgan ko'rinishda bo'ladi. Buni isbotlaymiz. Agar α esa K ga tegishli bo'lsa va iratsionalmas bo'lsa, unda $K = R(\alpha)$ bo'ladi. α uchun R dagi eng kichik ko'p had 2-darajali bo'ladi, shuning uchun qandaydir p va q ratsional sonlarda $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ bo'ladi. $\beta = \alpha + \frac{p}{2}$ deb unda $\beta^2 = \frac{p^2}{4} - q$ bo'ladi. $\frac{p^2}{4} - q$ ratsional sonni c^2d ko'rinishda ifodalash mumkin, bu erda d butun va kvadratdan holi son. $d \neq 1$ esa tushunarli, aksincha β va α ham ratsional bo'lar edi. Agar $\theta = \frac{\beta}{c}$ bo'lsa, unda $\theta^2 = d$ va $K = R(\theta)$ ya'ni $K = R(\sqrt{d})$ bo'ladi. d ratsional har-xil son uchun $(\sqrt{d})$ maydonni har xilligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham agar $R(\sqrt{d'}) = R(\sqrt{d})$ bo'lsa, unda

$$\sqrt{d'} = x + y\sqrt{d}$$

bo'ladi,

qandaydir x va y ratsional sonlardan

$$d' = x^2 + dy^2 + 2xy\sqrt{d}$$

ni olamiz bundan esa,

$$d' = x^2 + dy^2, \quad 2xy = 0$$

ni olamiz.

Agar $y = 0$ bo'lsa, $d' = x^2$ bo'ladi bu esa mumkin emas. Agar $x = 0$ bo'lsa, $d' = dy^2$ bo'ladi bu esa $d' = d$ ni beradi. Biz shunday qilib, barcha kvadratik formalarni har xil maydonlarda o'zining $d \neq 1$ ga mos holda kvadratdan holi usulda o'zaro mosligini isbotladik.

Kvadratik maydonlarning tartiblari: Maydonning $R(\sqrt{d})$ soni

$$\alpha = x + y\sqrt{d}$$

ko'rinishga ega, bu erda x va y lar ratsionaldir. Chunki α uchun xarakteristik ko'phadi

$$t^2 - 2xt + x^2 - dy^2$$

ga teng, unda α esa $\mathfrak{O}$ ning eng katta tartibiga tegishli $R(\sqrt{d})$ maydonda qachonki-qachon, agar $2x = Sp(\alpha)$ va $x^2 - dy^2 = N(\alpha)$ butun ratsional son bo'lsa.

$2x = m$ deb chunki $\frac{m^2}{4} - dy^2$ esa butun bo'lishi kerak, d esa kvadratdan holi, unda y ning maxraji faqat 2 bo'ladi, ya'ni $y = \frac{n}{2}$, n butun bilan.

$N(\alpha) = \frac{m^2}{4} - d\frac{n^2}{4}$ ligi tushunarli u faqat

$$m^2 - dn^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

dagi shart bilan butun bo'ladi. Bu taqqoslashning yechimi d ga bog'liq ya'ni d ning 4-modulida. Chunki d kvadratdan holi, $d \not\equiv 0 \pmod{4}$ va biz uchta holga ega bo'lamiz:

$$d \equiv 1 \pmod{4}; \quad d \equiv 2 \pmod{4}; \quad d \equiv 3 \pmod{4}.$$

Agar $d \equiv 1$ bo'lsa unda (1) esa $m^2 \equiv n^2 \pmod{4}$ ko'rinishga o'tadi, bu esa $m \equiv n \pmod{2}$ ga teng kuchli ya'ni $m = n + 2t$ va biz

$$\alpha = \frac{m}{2} + \frac{n}{2}\sqrt{d} = l + n\frac{1+\sqrt{d}}{2}$$

ni olamiz butun l va n bilan. Shunday qilib $\mathfrak{O}$ ning eng katta bazisi qilib 1 va

$\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ sonlarni olish mumkin.

Endi $d \equiv 2$ yoki 3 bo'lsin. Agar (1) taqqoslashdan n -toqda yechimi bo'lsa, unda $d \equiv m^2 \pmod{4}$ bo'ladi va $d \equiv o \pmod{4}$ m juftda va $d \equiv 1 \pmod{4}$ esa m toqda. Bu esa bizning tasdig'imizga zid. Agar n -juft bo'lsa $m^2 \equiv o \pmod{4}$ dan m -juftni olamiz. Shunday qilib, biz qaralayotgan $x = y\sqrt{d}$ holda son $\tilde{\mathfrak{D}}$ ning eng katta tartibiga tegishli $R(\sqrt{d})$ maydonda faqat $x = \frac{m}{2}$ va $y = \frac{n}{2}$ larda. $\tilde{\mathfrak{D}}$ ning bazisi sifatida son 1 va $\omega = \sqrt{d}$ larni olish mumkin.

Keyinchalik bazisning eng katta tartibida $R(\sqrt{d})$ maydonda. Chunki $\mathfrak{D}$ esa $\tilde{\mathfrak{D}}$ ning eng kattasiga tegishli bo'ladi, bunda $\mathfrak{D}$ esa $x + y\omega$ ko'rinishga butun x va y ratsionallari bilan. Ulardan y ning musbat eng kichik koeffisientini tanlab olamiz. Agar u $a + f\omega$ ga tegishli bo'lsa, chunki a ratsional son $\mathfrak{D}$ ga tegishli, demak $f\omega \in \mathfrak{D}$ ham. Endi har qanday $x + y\omega$ uchun $\mathfrak{D}$ da y esa f ga bo'linadi, bu esa $\mathfrak{D} = \{1, f\omega\}$ degani. Aksincha 3-lemmadan har qanday f modul uchun $\{1, f\omega\}$ halqa bo'ladi, demak ularni har xil va quyidagi fakti olamiz: Kvadratik maydondagi barcha tartiblar o'zaro bir qiymatli barcha natural sonlar bilan.

Keyinchalik $\{1, f\omega\}$ tariblarini $\mathfrak{D}$ bilan belgilaymiz f sonlar esa $\mathfrak{D}f$ ning indekslariga teng $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}_1 = \{1, \omega\}$ ning maksimum tartibida. Shunday qilib kvadratik maydonning har bir tartibi, o'zining maksimum tartibi indeksi bilan aniqlanadi.

Endi $\mathfrak{D}_f$ diskreminantni hisoblash bilan shug'ullanamiz $\mathfrak{D}_f$ tartibda. Dastlab $d \equiv 1 \pmod{4}$ deb olib, chunki $Sp\sqrt{d} = 0$ bundan

$$Sp\omega = Sp\left(\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right) = 1$$

ni olamiz va undan

$$Sp\omega^2 = Sp\left(\frac{d + 1}{4} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) = \frac{d + 1}{2}$$

ni olamiz.

Agar $d \equiv 2$ yoli $3 \pmod{4}$ bo'lsa, unda

$$\mathfrak{D}_f = \begin{vmatrix} Sp1 & Spf\omega \\ Spf\omega & Spf^2\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & f \\ f & f^2 \frac{d+1}{2} \end{vmatrix} = f^2 d$$

bo'ladi. Olingan $\mathfrak{D}_f$ uchun formulalar bizga, har bir tartibni kvadratik maydonda o'zining diskreminanti bilan bir xil ifodalanadi. Ushbu bandda natijalarini teorema kabi ifodalaymiz.

Teorema-1: Agar $d \neq 1$ kvadratdan xolis musbat ratsional son bo'lsa, $\tilde{\mathfrak{D}}$ tartibning bazisi sifatida $R(\sqrt{d})$ kvadratik maydonda 1 va ω sonlarni olish mumkin, bu yerda $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ bo'ladi $d \equiv 1 \pmod{4}$ da va $\omega = \sqrt{d}$ bo'ladi, $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ larda. D_1 diskreminant $\tilde{\mathfrak{D}}$ tartibli birinchi holda d ga teng, ikkinchi holda $4d$ ga teng. $\mathfrak{D}$ ning ixtiyoriy tartibi $R(\sqrt{d})$ maydonda $\mathfrak{D}_f = \{1, f\omega\}$ ko'rinishga ega, bu erda f esa $(\tilde{\mathfrak{D}}:\mathfrak{D})$ ning indeksi $\mathfrak{D}_f$ tartibli diskreminanti $D_1 f^2$ ga teng.

Birlar. Xullas barcha sonlar $\mathfrak{D}_f$ tartibli $x + yf\omega$ ko'rinishda ifodalanadi, x va y butun ratsionallar bilan 4-teoramadan $\mathfrak{D}_f$ barcha birlarni topamiz, agar

$$N(x + yf\omega) = \pm 1 \quad (2)$$

tenglamani yechsak, ya'ni

$$x^2 + fxy + f^2 \frac{1-d}{4} y^2 = \pm 1 \quad (3)$$

$d \equiv 1 \pmod{4}$ da

$$x^2 - df^2 y^2 = \pm 1 \quad (4)$$

Endi eng kichik kvadratik maydon uchun $s = 0$, $t = 1$, $r = s + t - 1 = 0$ bo'ladi, bu degani birlar guruhi ixtiyoriy tartibda chekli va 1 dan iborat ildizlar. Bu fakt esa (3) va (4) tenglamalarning $d < 0$ bilan moslashadi, faqat butun sonli yechimga ega bo'ladi. Agar $d = -1$, $f = 1$ larda (4)-tenglama: $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm 1$ yechimlarga ega bo'ladi, ular ± 1 , $\pm i$ larga mos keladi, 1 ning to'rtinchi darajasida. $d = -3$, $f = 1$ da (3)-tenglama oltita yechimga ega: $x = \pm 1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm 1$; $x = 1$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 1$ mos holda ± 1 , $\pm \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ lar 1 ning oltinchi darajasidan. Qolgan barcha tartiblar

uchun mavhum kvadratik maydonda (3) yoki (4) tenglamalar nol holda yechimlarga ega: $x = \pm 1$, $y = 0$ ya'ni ularning barcha birlari ± 1 sonlar bilan aniqlanadi.

Murakkab holi haqiqiy kvadratik maydonda $R(\sqrt{d})$, $d > 0$ da bo'ladi. Chunki, bunda $s = 2$, $t = 0$ va $r = 1$ bo'ladi, bundan barcha $\mathfrak{O}_f$ tartibi birlari $R(\sqrt{d})$ maydonda $\pm \varepsilon^n$ ko'rinishga ega bo'ladi, bu erda ε asosiy birlik $\mathfrak{O}_f$ da. Bu erda savol asosiy ε birni topishga olib keladi. ε bilan $\frac{1}{\varepsilon}$, $-\varepsilon$, $-\frac{1}{\varepsilon}$ lar ham asosiy birlar bo'lib hisoblanadi. Buning uchun $\varepsilon > 1$ deb hisoblash mumkin. Tushunarli $\varepsilon > 1$ da asosiy ε birlar birdan topiladi.

$\eta > 1$ birlar uchun $\mathfrak{O}_f$ da u $\eta = x + yf\omega$ kabi $1, f\omega$ bazis orqali x va y larning koeffisientlari musbat ($d = 5$, $f = 1$ da $x = 0$ bo'ladi). Har qanday $\alpha \in R(\sqrt{d})$ uchun α' orqali unga qo'shma sonni belgilaymiz, ya'ni α ni obrazi avtomorfizmda $\sqrt{d} \rightarrow -\sqrt{d}$ ga o'tadi $R(\sqrt{d})$ da $\omega - \omega' > 0$ ekanligi ko'rinib turibdi. Chunki $N(\eta) = \eta\eta' = \pm 1$ bunda η' birlik yoki $\frac{1}{\eta}$ yoki $-\frac{1}{\eta}$ ga teng va ikkala holda ham $\eta - \eta' > 0$ ya'ni $yf(\omega - \omega') > 0$ bu $y > 0$ ni bildiradi. Keyinchalik $|\eta'| = |x + yf\omega'| < 1$ va $f\omega' < -1$ bo'lgani uchun $d = 5$, $f = 1$ va $x > 0$ dan tashqari ($d = 5$, $f = 1$, $-1 < f\omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, $x \geq 0$) hollarda.

Agar $\varepsilon > 1$ asosiy birlik $\mathfrak{O}_f$ tartibda bo'lsin. $\varepsilon^n = x_1 + y_1f\omega$ birlar uchun n naturalda $x_1 > x$ va $y_1 > y$ bo'ladi. Shundan, asosiy $\varepsilon > 1$ birga biz (2) tenglamani butun yechimini eng kichik x va y lar qiymatlarida topishimiz kerak. Olingan natijalardan foydalanib, biz x va y lar qiymatlarini yuqoridan C -konstanta bilan baholaymiz, undan keyin bu tajriba chekli sinovlarga borib taqaladi. Endi biz, sinov sonlari asosiy birni hisoblashlardagi ancha qisqartirilgan bo'lishi mumkin, uzluksiz kasrlarning nazariyasidagi faktlardan. Bunda gap $\xi > 0$ to'g'risida ketadi va natural x va y larning o'zaro tengsizlikda ifodalanadi

$$\left| \frac{x}{y} - \xi \right| < \frac{1}{2y^2}$$

bunda $\frac{x}{y}$ esa ξ ni yoyilmasidagi mos kasrda bo'ladi. (2)-dan

$$\left| \frac{x}{y} + f\omega' \right| = \frac{1}{y(x + yf\omega)}$$

ni olamiz.

Agar $d \equiv 1 \pmod{4}$ da $d = 5$, $f = 1$ dan tashqari, ushbuni olamiz:

$$\left| \frac{x}{y} - f \frac{\sqrt{d}-1}{2} \right| = \frac{1}{y^2 \left(\frac{x}{y} + f \frac{\sqrt{d}+1}{2} \right)} < \frac{1}{2y^2}$$

(chunki $\frac{x}{y} > 0$ va $f \frac{\sqrt{d}+1}{2} > 2$). Agar $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ bo'lsa,

$x^2 = fdy^2 \pm 1 \geq dy^2 - 1 \geq y^2(d-1)$ va $d \geq 2$ dan olamiz:

$$\left| \frac{x}{y} - f\sqrt{d} \right| = \frac{1}{y(x + yf\sqrt{d})} \leq \frac{1}{y^2(\sqrt{d}-1 + \sqrt{d})} < \frac{1}{2y^2}$$

Eslatilgan teoremadan $\frac{x}{y}$ qisqarmaydigan kasr, maqul bo'lgan $-f\omega'$ ni uzluksiz kasrga yoyishda kasr hisoblanadi. (2)-teoremaning eng kichik musbat yechimini topish uchun, biz $-f\omega'$ uchun mos keluvchi surat va maxrajlarini sinashimiz kerak. Amalda esa quyidagicha. $-f\omega'$ son uchun ketma-ket q_k to'liqsiz bo'linmani topamiz ($k \geq 0$) va P_k suratni va Q_k maxrajni mos kasrlarda. Hisoblashni davom ettiramiz, hozircha qandaydir $N(P_k + \omega f Q_k)$ qadamda $+1$ yoki -1 ga teng bo'lishi mumkin. Bu albatta $P_k < C$ da paydo bo'ladi va asosiy birlar $\varepsilon = P_k + \omega f Q_k$ topiladi. Endi misollarda ko'rsatamiz

1-misol: $\{1, 3\sqrt{6}\}$ tartibli asosiy birlarni topish uchun $R\sqrt{6}$ maydonda, $-3\omega' = 3\sqrt{6}$ sonni uzluksiz kasrga yoyamiz:

$$\sqrt{54} = 7 + (\sqrt{54} - 7),$$

$$\frac{1}{\sqrt{54} - 7} = 2 + \frac{\sqrt{54} - 3}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{54} - 3} = 1 + \frac{\sqrt{54} - 6}{9}$$

$$\frac{9}{\sqrt{54} - 6} = 6 + \frac{\sqrt{54} - 6}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{54}-6} = 1 + \frac{\sqrt{54}-3}{9}$$

Bir vaqatda jadvalni to'ldiramiz:

k	0	1	2	3	4	5
q_k	7	2	1	6	1	2
P_k	7	15	22	147	169	485
Q_k	1	2	3	20	23	66
$P_k^2 - 54Q_k^2$	-5	9	-2	9	-5	1

$\{1, 3\sqrt{6}\}$ tartibli asosiy birlar, mos holda ushbularga teng:

$$485 + 66 \cdot 3\sqrt{6} = 485 + 198\sqrt{6}$$

2-misol: $R(\sqrt{41})$ maydonning asosiy birlarini hisoblaymiz :

$$\frac{\sqrt{41}-1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{41}-5}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{41}-5} = 1 + \frac{\sqrt{41}-3}{8}$$

$$\frac{8}{\sqrt{41}-3} = 2 + \frac{\sqrt{41}-5}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{41}-5} = 2 + \frac{\sqrt{41}-3}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{41}-3} = 1 + \frac{\sqrt{41}-5}{8}$$

k	0	1	2	3	4
q_k	2	1	2	2	1
P_k	2	3	8	19	27
Q_k	1	1	3	7	10
$P_k^2 - P_k Q_k - 10Q_k^2$	-4	2	-2	4	-1

asosiy birlarning eng kata tartibi $R(\sqrt{41})$ maydonda quyidagiga teng:

$$27 + 10 \frac{\sqrt{41} + 1}{2} = 32 + 5\sqrt{41}$$

Modullar: Kvadratik maydonlardagi to'la modullarning o'rganishga o'tamiz. Chunki har qanday $\{\alpha, \beta\}$ modul $\{1, \frac{\beta}{\alpha}\}$ modulga o'xshash, bunda biz $\{1, \gamma\}$ ko'rinishdagilar bilan chegaralanamiz.

Agar qanday ratsional bo'lmagan γ va $R(\sqrt{d})$ sonlar uchun qandaydir ko'phad $at^2 + bt + c$ butun ratsional koeffisientlarda. Agar biz a, b, c sonlarga $(a, b, c) = 1$ shartni va $a > 0$ ni yoysak, unda ushbu ko'phadga $at^2 + bt + c$, γ bir xilda topiladi. Keyinchalik uni $\varphi_\gamma(t)$ orqali belgilaymiz. Qo'shma γ' uchun $\varphi_{\gamma'}(t) = \varphi_\gamma(t)$ ni olamiz, bundan tashqari $\varphi_{\gamma_1}(t) = \varphi_\gamma(t)$ ham o'rinalidir, γ_1 agar γ ga yoki γ' ga teng bo'lsa.

Lemma-1: Agar γ ratsionalmas songa $R(\sqrt{d})$ maydondan $\varphi_\gamma(t)$ ko'phad $at^2 + bt + c$ ga teng bo'lsa, $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilari $M = \{1, \gamma\}$ modulda $\{1, a\gamma\}$ tartib bilan $D = b^2 - 4ac$ diskreminantni bo'ladi.

Isbot: x va y ratsionallarda $\alpha = x + y\gamma$ sonni qaraymiz. Chunki $\alpha M \subset M$ teng kuchli $\alpha \cdot 1 = x + y\gamma \in M$ va

$$\alpha \cdot \gamma = -\frac{cy}{a} + \left(x - \frac{by}{a}\right)\gamma \in M$$

ga, bunda α esa $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilariga tegishli qachonki-qachon ratsional sonlar

$$x, y, \frac{cy}{a}, \frac{by}{a}$$

larning hammasi butun bo'lsa, ya'ni x va y lar butun bo'lganda, bundan tashqari y esa a ga bo'linadi (oxiridagidan $(a, b, c) = 1$). Bu esa $\mathfrak{O} = \{1, a\gamma\}$ ni isboti bo'ladi. Isbotni tugatish ushun $\mathfrak{O}$ diskreminantni topish qoldi.

$$D = \begin{vmatrix} Sp^1 & Spa\gamma \\ Spa\gamma & Spa^2\gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ -b & b^2 - 2ac \end{vmatrix} = b^2 - 4ac$$

Izoh: O'sha belgilashlarda $\{1, \gamma\}$ modullarning normasi $\frac{1}{a}$ ga tengdir.

Haqiqatdan ham $1, \alpha\gamma$ bazisdan $1, \gamma$ bazisga o'tish matrissasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

ga teng.

Lemma-2: $\{1, \gamma_1\}$ va $\{1, \gamma\}$ modullar o'xshash bo'lishi uchun zarur va etarli γ_1 va γ sonlar ushbu munosabat bilan bog'lanishi:

$$\gamma_1 = \frac{k\gamma + l}{m\gamma + n} \quad (5)$$

bu erda k, l, m, n lar shundaki, bunda

$$\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = \pm 1 \quad (6)$$

bo'ladi.

Isbot: Bitta moduldagi ikkita har xil bazislar o'zaro unimodulyar ifodalarda bog'langan, bunda $\{\alpha, \alpha\gamma_1\} = \{1, \gamma\}$ bo'ladi va bundan

$$\alpha\gamma_1 = k\gamma + l$$

$$\alpha = m\gamma + n$$

bo'ladi, k, l, m, n butun ratsionaldir (6)-shartda. Birinchi tenglikni ikkinchisiga bo'lib, (5)-ni olamiz. Aksincha γ_1 va γ lar (5)-bilan bog'langan. Bundan

$$\{1, \gamma_1\} = \frac{1}{m\gamma + n} \{m\gamma + n, k\gamma + l\} = \frac{1}{m\gamma + n} \{1, \gamma\}$$

($\{m\gamma + n, k\gamma + l\} = \{1, \gamma\}$ dan (6) olinadi) 2-lemma isbotlandi.

$R(\sqrt{d})$ maydon modullarni qaraymiz, qandaydir $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli holda. 3-teoremadan bu modullar chekli sinflarga o'xshash modullarda bo'linadi. Biz sinflarni ko'paytirishni ko'rsatamiz, bunga nisbatan o'xshash modullar $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli bo'lib, guruhni tashkil etadi.

Agar $M = \{\alpha, \beta\}$ va $M_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ ikkita modullarning ko'paytmasini MM_1 modul deb $\{\alpha\alpha_1, \alpha\beta_1, \beta\alpha_1, \beta\beta_1\}$ bo'ladi. Oddiyki $\lambda \neq 0$ da $\mu \neq 0$

$$(\lambda M)(\mu M_1) = \lambda\mu(MM_1) \quad (7)$$

Har qanday modul M va $[M]$ uchun o'xshash modullarning sinfini belgilaymiz, M bilan birgalikda. (7)-tenglikdan $[MM_1]$ sinf faqat $[M]$ va $[M_1]$ ga bog'liq. $[MM_1]$ sinf ko'paytmasi $[M]$ va $[M_1]$ lar uchun. Ikkita sinfni ko'paytirish uchun, ularni tanlab ko'paytirish kerak. Ushbu ko'paytmalar sinflarning ko'paytmasi deyiladi.

Har bir modul uchun M va M' qo'shma modullarni α' va α bilan belgilaymiz. Chunki $\alpha + \alpha' = Sp\alpha$ ratsional, bunda $\alpha' \in R(\sqrt{d})$ bu esa M' va M bazisga $R(\sqrt{d})$ maydon to'la moduli hisoblanadi. Har qanday $\mathfrak{D}$ tartib uchun $\mathfrak{D}'$ qo'shma modul $\mathfrak{D}$ bilan mos keladi. Bundan qo'shma modullar bir xil halqa ko'paytuvchilarga ega.

$$MM' = N(M)\mathfrak{D} \quad (8)$$

ni isbotlaymiz, bunda $\mathfrak{D}$ halqa ko'paytuvchilari, $N(M)$ norma M modul.

Dastlab, $\mathfrak{D}$ modul $\{1, \gamma\}$ kabi bo'ladi. Bundan 1-lemmadan biz ushbuni olamiz:

$$\begin{aligned} MM' &= \{1, \gamma\}\{1, \gamma'\} = \{1, \gamma, \gamma', \gamma\gamma'\} = \left\{1, \gamma, -\gamma - \frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right\} = \\ &= \left\{1, \gamma, -\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right\} = \frac{1}{a}\{a, b, c, a\gamma\} \end{aligned}$$

Chunki a, b va c o'zaro tubdir, uning barcha butun sonli chiziqli kombinatsiyalari Z butun sonlar halqasi bilan mos keladi va bundan:

$$MM' = \frac{1}{a}\{1, a\gamma\} = \frac{1}{a}\mathfrak{D} = N(M)\mathfrak{D}$$

ni olamiz. Agar endi M ixtiyoriy modul bo'lsa, uni $M = \alpha M_1$ kabi ifodalash mumkin, bu erda M_1 esa $\{1, \gamma\}$ bo'ladi. 2-teoremadan quyidagini olamiz:

$$MM' = \alpha\alpha' M_1 M_1' = N(\alpha)N(M_1)\mathfrak{D} = |N(\alpha)|N(M_1)\mathfrak{D} = N(M)\mathfrak{D}$$

bo'ladi, (8)-formula isbotlandi umumiy holda.

Endi M va M_1 ikkita modullar, bitta $\mathfrak{D}$ tartibda. $\bar{\mathfrak{D}}$ halqa ko'phad ko'paytuvchilari MM_1 (8)-formuladan

$$MM_1(MM_1)' = N(M)N(M_1)\bar{\mathfrak{D}}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, M va M_1 modullar $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli, bunda ularning ko'paytmasi MM_1 ham $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli bo'ladi. Chunki, har qanday M modul uchun $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchisi bir vaqtda $M\mathfrak{O} = M$ va $M\left(\frac{1}{N(M)}M'\right) = \mathfrak{O}$ bo'ladi, keyin biz ushbu natijani olamiz.

Teorema-2: Kvadratik moydonning barcha modullari bitta tartibda, ko'paytirish amaliga nisbatatan kommutativ guruhni tashkil etadi.

Ushbu teorema 3-teoremadan kelib chiqadi.

Teorema-3: Kvadratik moydonning barcha o'xshash modullari ushbu $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchisi bilan chekli kommutativ guruhni tashkil etadi.

2 va 3-teoremlar kvadratik maydon modullar uchun o'rinli va aksincha o'rinli emas.

Modullar va formalar orasidagi mosluklar.

Dastlabki tasdiqlardan har bir α, β bazislar uchun $M \subset R(\sqrt{d})$ to'la modullar bir xilda binar kvadratik formaga mos keladi $N(\alpha x + \beta y)$ ratsional koeffisientlarda. Chunki har xil M dagi bazislar uchun ularga mos keluvchi formalar teng kuchlidir, bunda M modulga bir qator ekvivalent sinflar mos keladi. Keyinchalik, M ning o'rniga unga ekvivalent αM ni olsak, unda bizning barcha formalarimiz $N(\alpha)$ doimiy ko'paytuvchini talab qiladi. Bunda, formalarni ularni doimiy ko'paytuvchilari son qiymtlarni aniqlikda, har bir o'xshash sinflarga qandaydir o'xshash ekvivalent sinflar mos keladi deyiladi. Bu xoslik bir xilli bo'lmasligi mumkin. Haqiqatda o'zaro qo'shma $M = \{\alpha, \beta\}$ va $M' = \{\alpha', \beta'\}$ lar umuman olganda o'xshash emas, ularga mos keluvchi formalar mos keladi. Xuddi shuningdek har qanday darajali yoyiluvchi formalarda ham. Umumiy holda ushbu sinflar va modullar orasidagi farqlarni aniq usuli mavjud emas. Lekin kvadratik maydonlarda, bir xillik mavjud, agar ozgina ekvivalentlik ta'rifini o'zgartirsa va o'xshashlik modullarda.

Ta'rif: Binar kvadratik forma $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ butun ratsional koeffisientlarda primitiv deyiladi, agar eng kata umumiy bo'luvchi uning

koeffitsientlarida 1 ga teng bo'lsa. $B^2 - 4AC$ son diskreminant f primitiv forma uchun deyiladi.

Primitiv formalarning diskreminanti, uning determinantidan farq qiladi $AC - \frac{B^2}{4}$, doimiy -4 bilan.

Primitiv formalarga ekvivalentlilar ham primitiv forma bo'ladi. Chiziqli ifodalashda o'zgaruvchilar C matrisa kvadratik forma determinanti $(\det C)^2$ ga ega bo'ladi, bundan $\det C = \pm 1$. Bundan ular bir xil diskreminantga ega.

Ta'rif: Ikkita primitiv formalar xos ekvivalent ldir, agar bittasi ikkinchisini xosil qilsa doimiy chiziqli o'zgaruvchilarni ifodalashda $+1$ determinant bilan.

Barcha primitiv binar kvadratik formalar xos ekvivalent formalarga bo'linadi. Keyinchalik biz doimo xos ekvivalent haqida gapiramiz. Ko'pchilik hollarda ikkita forma, xosmas ekvivalentlar ham xuddi xos ekvivalentlar kabi bo'ladi deymiz.

Ta'rif: Ikkita to'liq M va M_1 modullar kvadratik maydonda o'xshash deyiladi, tor ma'noda, agar $M_1 = \alpha M$ qandaydir α musbat norma bilan.

Har qanday muhim kvadratik forma uchun maydon normasi $\alpha \neq 0$ da musbatdir, bu holat tor ma'nodagi o'xshashlik tushunchasi, oddiy o'xshashlikdan farq qilmaydi. Xuddi shunday haqiqiy kvadratik maydonda ham, agar $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilarida qaralayotgan modul ε birlikka ega bo'lsa, unda $N(\varepsilon) = -1$. Haqiqatdan ham $M_1 = \alpha M$ va $N(\alpha) < 0$ bundan $\varepsilon M = M$ demak $M_1 = (\alpha\varepsilon)M$, lekin $N(\alpha\varepsilon) > 0$ bo'ladi. Aksincha o'xshashlik tor ma'noda ya'ni $M_1 = \alpha M$, $N(\alpha) < 0$ dan β mavjud bo'ladi va $N(\beta) > 0$; $M_1 = \beta M$. $\varepsilon = \alpha\beta^{-1}$ deb $\varepsilon M = M$ bo'ladi, bu esa $\varepsilon \rightarrow \mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchisidir, $N(\varepsilon) = -1$ bo'ladi.

Shunday qilib, tor ma'nodagi tushuncha, o'xshash tushunchadan faqat shunday haqiqiy kvadratik maydonlar uchun, ularning halqa ko'paytuvchilarining barcha birliklari $+1$ normaga ega. Tushunarli, har bir sinf modullari keng o'xshashlik ma'nosida ikkita sinfga bo'linadi, xuddi tor o'xshashlikdagi kabi.

Endi modul sinflari bilan forma sinflari orasidagi moslikni keltiramiz.

Har bir M modul uchun $R(\sqrt{d})$ maydonda, biz faqat α, β bazislarni qaraymiz, ular uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \quad (9)$$

determinant ushbu shartni qanoatlantiradi

$$\left. \begin{array}{l} \Delta > 0, \quad d > 0 \text{ da} \\ \frac{1}{i}\Delta > 0, \quad d < 0 \text{ da} \end{array} \right\} \quad (10)$$

α va β bilan qo'shma bo'lgan hollarda. (M dagi bazislar (10)-xossa bilan ifodalanadi, agar birinchi bazis α_1 va α_2 unga mos bo'lmasa, unda α_1 ni α_2 bilan o'rin almashtiriladi. α' va β' lar $R(\sqrt{d})$ dagi sonlar, qo'shma α va β bilan).

M moduldag α, β bazislarga (10)-qanoatlantirilsa, uni quyidagi formada ifodalaymiz:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \frac{N(\alpha x + \beta y)}{N(M)} = \frac{(\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y)}{N(M)} \quad (11)$$

($N(M) - M$ modul normasi). Agar $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$ bo'lsa $\varphi_\gamma(t) = at^2 + bt + c$ bo'ladi, undan esa

$$N(\alpha x + \beta y) = \frac{N(\alpha)}{a} (ax^2 + bxy + cy^2)$$

olamiz.

Boshqa tomondan, 1-lemmadan va 2-teoremadan $M = \{1, \gamma\}$ normada $\frac{|N(\alpha)|}{a}$ ga teng. Bundan A, B, C koeffisientlar a, b, c larda faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu bilan (11)-forma pirimitivdir va diskreminanti $B^2 - 4AC$ diskreminant $b^2 - 4ac$ bilan teng bo'ladi, M modulning halqa ko'paytuvchilarida.

Shunday qilib

$$\{\alpha, \beta\} \rightarrow f(x, y) \quad (12)$$

akslanishga ega bo'lamiz, u α, β har bir bazis bilan $R(\sqrt{d})$ maydonda (10)-shartda $f(x, y)$ pirimitiv forma mos keladi. (haqiqiy maydonda A koeffisient manfiy bo'lishi mumkin).

Xullas bunda (11)-formaning eng kichik kvadratik maydoni doimo musbat aniqlangan, chunki manfiy aniqlangan formalar (12)-mos holda tashqarida qoladi.

Teorema-4: Agar $\mathfrak{M}$ bu barcha o'xshash sinflar to'plami tor ma'noda $R(\sqrt{d})$ kvadratik maydonlarning modullari va $\mathfrak{F}$ barcha $d > 0$ dagi to'plamlar va musbat aniqlanganlari $d < 0$ dagi sinflar xos ekvivalent pirimitiv binar kvadratik formalar, $R(\sqrt{d})$ ga yoyiluvchilari chiziqli ko'paytuvchilarga (12)-akslantirishda o'zaro bir xillik $\mathfrak{M}$ va $\mathfrak{F}$ lar orasida sodir bo'ladi, bunda agar qandaydir modullar sinfi D diskreminantli halqa ko'paytuvchilariga tegishli bo'lsa, unda ularga mos keluvchi forma ham D diskreminantga ega bo'ladi.

Agar α, β va α_1, β_1 ikkita maydon bazisi $R(\sqrt{d})$ da ular uchun (9)-ko'rinishdagi determinant (10)-shartni qanoatlantiradi va bu bazislar f va f_1 formalarga mos keladi. 4-teoremani isbot qilish uchun biz, f va f_1 formalarni mos ekvivalent qachonki-qachon $\{\alpha, \beta\}$ va $\{\alpha_1, \beta_1\}$ modullar tor ma'noda o'xshashdir. Keyinchalik biz, har qanday keltirilmaydigan $g(x, y)$ pirimitiv formalar uchun va musbat aniqlangan, agar $d < 0$ bo'lsa, α, β bazis mavjud bo'ladi (10)-shart bilan birgalikda, bunda (11)-forma $g(x, y)$ bilan mos keladi. Ushbu umumiy ko'rsatmalar bilan cheklanamiz.

Biz oldin o'xshash modullarning ko'paytmasini aniqlagan edik. Xuddi shunday qilib, modullarni sinfini ham ko'paytmasi, tor ma'noda aniqlash mumkin. $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{F}$ ga bir xil mosligidan sinflarning ko'paytmasi formalarning ko'paytmasiga o'tkazilishi mumkin. Xullas $\mathfrak{F}$ ga aniq ko'paytirish, formalarning kompazisiyasi nomini anglatadi. Chunki barcha modullar sinfi, aniq holda ko'paytmasiga tegishli bo'lsa, ular guruhni tashkil etadi, demak barcha pirimitiv formalar sinflari D diskreminantda ham guruhni tashkil etadi.

Sonlarni binar formalar va o'xshash modullar bilan tasvirlash

Bunda biz, sonlarni binar kvadratik formalar bilan ifodalashda ular kvadratik maydonda modullarning o'xshashligiga kelib qoladi.

Agar $f(x, y)$ pirimitiv binar kvadratik forma $D \neq 0$ diskreminanti, $R(\sqrt{d})$ maydonda chiziqli ko'paytuvchlarga yoyilsin va m natural son. $D < 0$ holda biz f formani musbat aniqlangan deb hisoblaymiz.

Endi biz

$$f(x, y) = m \quad (13)$$

aniqlanmagan tenglamaning barcha butun sonlar yechimini topish masalasi bilan shug'ullanamiz, (biz m ni musbat aniqlagan holi bilan cheklanamiz, chunki $m < 0$, $D > 0$ holda f ni o'rniga $-f$ formani qaraymiz).

(4)-teorema asosan f formani quyidagicha ifodalaymiz:

$$f(x, y) = \frac{N(\alpha x + \beta y)}{N(M)} \quad (14)$$

bu erda α, β bazislar M modul (10)-shartni qanoatlantiradi. $(x, y) \rightarrow \xi = \alpha x + \beta y$ akslantirishda o'zaro bir xillik moslik (13)-tenglama yechimi va $\xi \in M$ soni $N(\xi) = mN(M)$ norma bilan birga. Assosirlanmagan yechim tushunchasi (14)-tasvirlashni tanlashga bog'liq emas. $\mathfrak{D}$ ni M modulni halqa ko'paytuvchisi orqali ifodalaymiz va C modul sinfi tor ma'noda, M dagi tashkil etuvchilari sifatida. 4-teoremadan C sinf f forma bilan bir xil aniqlangan.

Biz $\xi \in M$ sonni $mN(M)$ normasi bilan deymiz. $A = \xi M^{-1}$ modulni qaraymiz. Chunki $AM = \xi M^{-1}M = \xi \mathfrak{D} \subset M$ bo'ladi, A modul esa $\mathfrak{D}$ ga tegishli. uning normasi $N(\xi)N(M)^{-1} = m$ bo'ladi. Yana A esa C^{-1} modulga teskari sinfiga tegishli. Aksincha, C^{-1} sinfda A modul mavjud deb hisoblaymiz, u $\mathfrak{D}$ halqada yotadi va m normaga ega deb. Bunda qandaydir ξ musbat normaga biz $A = \xi M^{-1}$ ga ega bo'lamiz, bunda $\xi \in MA \subset M$ va $N(\xi) = m$ bo'ladi. Agar A_1 boshqa C^{-1} sinfdagi modul bo'lsa, $\mathfrak{D}$ da yotadigan m norma bilan va $A_1 = \xi_1 M^{-1}$ bo'lsa demak A_1, A bilan mos tushadi qachonki-qachon ξ_1 esa ξ bilan assosirlangan bo'lsa. Shunday qilib, ushbu teoremani isbotladik.

Teorema-5: Agar $f(x, y)$ forma C modulning sinfiga mos kelsa (tor ma'noda) $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilari bilan. (13)-ning yechimini barcha assosirlangan sinflari o'zaro bir-biri bilan mosligi topiladi A ning barcha modullari bilan, ular C^{-1} teskari sinfga tegishlidir, $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilrida yotib, m normaga ega. x, y yachimlar A modulga mos bo'lib, ξ soni bilan aniqlanadi, bular uchun $A = \xi M^{-1}$, $N(\xi) > 0$ bo'ladi, bu erda M modul C sinfdan.

Har qanday m natural uchun biz barcha A dagi modullar $\mathfrak{O}$ halqa ko'paytuvchilari bilan, ular $\mathfrak{O}$ da yotadi va u m normaga ega. A shunday modul bo'lsinki, uning eng kichik k natural son bo'lsin A dagi. A modulni quyidagicha ifodalaymiz.

$$A = \{k, k\gamma\} = k\{1, \gamma\}$$

γ esa butun sonli hadlarning ishorasi bilan aniqlanadi. Biz endi γ ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$\begin{cases} l m \gamma > 0, & d < 0 \\ l r r > 0, & d > 0 \end{cases} \quad (15)$$

($l r r$ esa γ sonni irratsional qismini ifodalaydi), ikkinchida γ ni ratsional qismi $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ orqali yotadi. Agar γ son ichun 1-lemmadan va uni

$$\gamma = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad (16)$$

ko'rinishda yozamiz, bunda ikkinchi sharti quyidagicha bo'ladi

$$-a \leq b < a \quad (17)$$

$\mathfrak{O} = \{1, a\gamma\}$ tenglikdan va $A \subset \mathfrak{O}$ shratdan biz k ni a ga bo'lamiz, ya'ni $k = as$ butun S bilan. Chunki $m = N(A) = k^2 \frac{1}{a}$ dan

$$m = as^2 \quad (18)$$

A ni quyidagicha ifodalaymiz

$$A = as\{1, \gamma\} \quad (19)$$

bu erda a, s va γ lar (18), (15) va (17)-shartlarga mos. Haqiqatda agar $as\{1, \gamma\} = a_1 s_1\{1, \gamma_1\}$ bo'lsa, bu yerda a_1, s_1 va γ_1 o'sha talabga javob beradi, bunda $as = a_1 s_1$ va $\{1, \gamma\} = \{1, \gamma_1\}$ bo'ladi. 1-lemma izohidan $a = a_1$ ni olamiz va

$s = s_1$ bo'ladi. Bundan tashqari γ esa $\{1, \gamma\}$ modulda (15) va (17)-shartlarni qanoatlantiradi, bundan $\gamma = \gamma_1$ bo'ladi. Endi, aksincha holini qaraymiz, (18)-bajarilsin deb. Agar b va c quyidagi shartni qanoatlantirsa:

$$b^2 - 4ac = D, (a, b, c) = 1, -a \leq b < a \quad (20)$$

bunda γ son uchun (16) dan $A = as\{1, \gamma\}$ modul esa $\mathfrak{D} = \{1, a\gamma\}$ o'zining halqa ko'paytmasida yotadi va uning normasi $a^2 s^2 \frac{1}{a} = m$.

Shunday qilib, biz A modulning barcha bizga keraklarini olamiz, agar $s > 0, a > 0, b, c$ (18) va (20)-shartlarni qanoatlantiradi.

Agar biz algaritmga ega bo'lsak, uni yordamida $R(\sqrt{d})$ maydonning to'liq ikkita o'xshash va tor ma'noda masalasini yechish mumkin, $A \subset \mathfrak{D}$ dagi barcha modullarni yozib m -normsi bilan, ularda faqat M^{-1} modulga mosini tanlab olamiz. 5-teoremadan (13)-ning barcha yechimlarini olamiz. 5-teoremadan quyidagi tasdiqni olamiz.

Teorema-6: m natural son qandaydir primitiv kvadrat forma bilan D diskreminantda ifodalash uchun zarur va etarli sharti uchun $\mathfrak{D}$ tartib D diskreminantda A modul mavjud, ushbu tartibga tegishli va m normaga ega holda. Oxirgi hol $s > 0, a > 0, b, c$ sonlarni mavjudligiga teng kuchlidir quyidagi shartni qanoatlantirsa: $m = as^2, b^2 - 4ac = D, (a, b, c) = 1, -a \leq b < a$.

D diskreminant $\tilde{\mathfrak{D}}$ ning eng kata tartibga teng bo'lsa, ikkinchi tasdiq 6-teorema soddalashadi.

Teorema-7: D kvadratik maydonning diskreminanti bo'lsin. $m = as^2$ natural son bo'lishi uchun, a kvadrat holi bo'lib, qandaydir binar pirimitiv forma D diskreminant uchun, zarur va etarli sharti bo'lib ushbu tenglama yechilishi lozim

$$x^2 \equiv D \pmod{4a} \quad (21)$$

Mavhum kvadrarik maydonda o'xshash modullar

$R(\sqrt{d})$, $d < 0$ mavhum kvadratik maydon holida, modullarning o'xshashligi masalasini yechimi mavjud bo'ladi. $\alpha \in R(\sqrt{d})$ dagi sonning geometrik tasviri $\mathbb{R}^2$ fazoda oddiy kompleks sonlar bilan mos tushadi. $M \subset R(\sqrt{d})$ to'la modulning sonlari bunda nuqtalar bilan ifodalanadi, qandaydir $\mathbb{R}^2$ dagi to'la panjarada. Keyinchalik $\mathbb{R}^2$ dagi kompleks sonlarni tasvirlanishini farqlamaymiz. Shuning uchun M modulga mos $\mathbb{R}^2$ panjarani M bilan belgilaymiz. Chunki M panjaraning barcha nuqtalari $\xi \neq 0$ kompleks sonda M panjarani burishga olib keladi, agar ξ burchakka va $|\xi|$ ga cho'zishga, bunda M va ξM o'xshash modullarga mos keluvchi panjaralar o'xshashdir, geometrik ma'noda. Bu xususiyatga biz keyinchalik doimo tayanamiz.

Panjaralarning o'xshashligi savollari tekislikda maxsus bazisni qurishga bog'liq, keltiriladigan deb ataladi. Keltiriladigan α , c bazis qisqa nolli α vektordan iborat va nokolleniar qisqa β vektordan iboratdir. Har qanday M panjarada shunday α va β vektorlarni doimo bazis tashkil etishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, agar bu bunday bo'lmaganda edi M da $\xi = u\alpha + v\beta$ vektor mavjud bo'lar edi, unda u va v lar bir vaqtda butun bo'lmaydi. Bu vektorlarga α va β larning chiziqli kombinatsiyasini qo'shsak, unda $|u| \leq \frac{1}{2}$ va $|v| \leq \frac{1}{2}$ bo'ladi. Agar $v \neq 0$ bo'lsa, β ni tanlab, $|\xi| \geq |\beta|$ bo'ladi va u

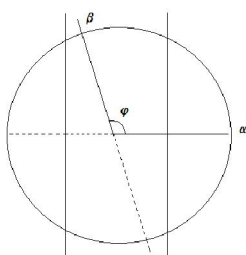
$$|\xi| < |u\alpha| + |v\beta| \leq \frac{1}{2}|\alpha| + \frac{1}{2}|\beta| \leq |\beta|$$

Agar $v = 0$ va $|\xi| = |u\alpha| \leq \frac{1}{2}|\alpha| < |\alpha|$ bo'lsa α ni tanlashdan bizning tasdig'imiz isbotlandi.

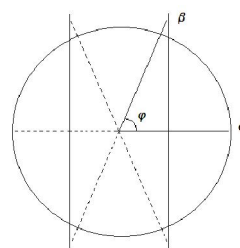
Agar α eng qisqa vektorlardan, β esa nokolleniar qisqa vektordir bo'lsin, unda β ning proeksiyasi α vektorga $\frac{1}{2}|\alpha|$ dan oshmaydi. Haqiqatda $\beta + n\alpha$ vektorlar orasida ($n \in \mathbb{Z}$), shunday vektor borki uning proyeksiyasi $\leq \frac{1}{2}|\alpha|$. Boshqa tomondan $\beta + n\alpha$ eng kichik uzunlikka ega kichik proeksiyasi bilan.

Endi ushbu M panjara uchun barcha noldan farqli eng qisqa vektorlarni qaraymiz va ularning sonini w bilan belgilaymiz. Chunki α vektor o'rniga $-\alpha$ vektorni olsak u ham eng qisqa bo'ladi, bundan w juft sonidir. Keyin α va α' vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{3}$ kichik bo'lishi mumkin emas, chunki aksincha $\alpha - \alpha'$ vektor panjarada eng qisqa uzunlikka ega bo'lardi. Bundan $w \leq 6$ bo'ladi, demak qisqa vektorlar uchun ushbu hollar bo'ladi: $w = 2$, $w = 4$, $w = 6$

M panjarada keltirilgan bazisni qurishga o'tamiz. Agar $w = 2$ bo'lsa, α sifatida ixtiyoriy ikkita qisqa vektorni olamiz. Vektorlar orasida α bilan nokolliniarlarida ikkita yoki to'rttasi eng qisqa bo'lishi mumkin. (1, 2-rasmlar). β sifatida ham o'sha vektorlarni olamiz α dan β ga φ burchakka burishda.

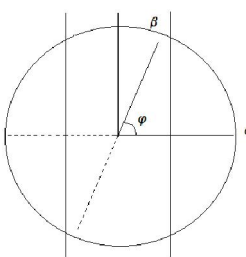


Rasm i-1

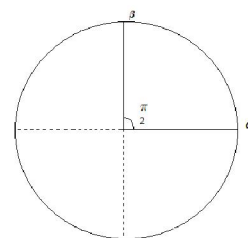


Rasm -2

Agar $w = 4$ yoki $w = 6$ bo'lsa, keltirilgan bazis sifatida α va β juft vektorlardan ikkitasini olamiz, φ burchak eng kichik bo'lsin.



Rasm -3

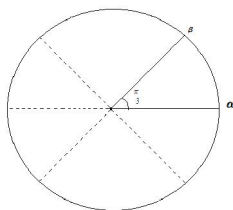


Rasm -4

Keltirilgan bazisni burilishlik aniqligida panjara bilan aniqlash mumkin,.

$w = 2$ yoki $w = 4$ bo'lgan hollarda $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ bo'ladi, (3-rasm), ikkita keltirilgan bazis bo'ladi, ular bir-biriga π ga karrali burchakka burishda o'tadi. $w = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ da (4-rasm) biz kvadrat panjaraga ega bo'lamiz, ular to'rtta

keltirilgan bazisga ega bo'ladi, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ burchakka burish $w = 6$ da oltita keltirilgan bazisga ega bo'lamiz, ular bir-biriga $\varphi = \frac{\pi}{3}$ burchakka burishda o'tadi. (5-rasm)



Rasm -5

Keltirilgan bazisni tushunchasidan, tekislikka panjaralarni o'xshashligi masalasini yechish mumkin.

Teorema-8: M va M_1 panjaralar $\mathfrak{R}^2$ da o'xshash qachonki-qachon, qachon ularning keltirilgan bazislari o'xshash bo'ladi.

Isbot: Agar α, β va α_1, β_1 keltirilgan bazislar M va M_1 panjaralarda. Agar $\xi M = M_1$ bo'lsa, $\xi\alpha, \xi\beta$ keltirilgan bazis bo'ladi M_1 da. Bu bazis buralganda α_1, β_1 bazisga o'tish kerak, shuning uchun η sonida, $\eta\xi\alpha = \alpha_1, \eta\xi\beta = \beta_1$ bo'ladi.

Shunday qilib α_1, β_1 bazis α, β bazisdan $\arg(\eta\xi)$ burchakka burishdan olamiz va cho'zilishi $|\eta\xi|$ marta bo'ladi, bu ularning o'xshashligidir. Teoremaning aksinchasi ham shunday oddiydir. Endi mavhum kvadratik maydon modullarining o'xshashligi sinflarini ifodalashga o'tamiz. Agar M ixtiyoriy $R(\sqrt{d})$ modul bo'lsa, $d < 0$ va α, β qandaydir M da. O'xshash modulga o'tamiz: $\frac{1}{\alpha}M = \{1, \gamma\}$, bu yerda $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. $1, \gamma$ bazis ham ham keltirilgan. Keltirilgan bazis ta'rifidan, γ soni quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

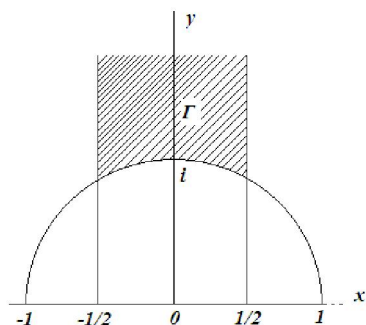
$$\text{Im}\gamma > 0, \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} < \text{Re}\gamma \leq \frac{1}{2}, \quad (23)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\gamma| > 1, \text{ agar } -\frac{1}{2} < \text{Re}\gamma < 0 \\ |\gamma| \geq 1, \text{ agar } 0 \leq \text{Re}\gamma \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (24)$$

Ta'rif: r soni keltirilgan mavhum kvadratik maydondan bo'lsin, agar u (22),(23), (24)-shartlarni qanoatlantirsa, γ bilan birga $\{1, \gamma\}$ maydon ham

keltirilgan deyiladi. γ ning geometrik keltirilganlik sharti, bu Γ sohada kompleks sonlarning tasvirlanishidir (6-rasm).



Rasm -6

Teorema-9: Mavhum kvadratik $R(\sqrt{d})$ maydonda har bir o'xshash sinflarga $d < 0$ da faqat va faqat bitta keltirilgan modul yotadi.

Isbot: Har bir sinfda keltirilgan modulning mavjudligi oldin isbotlangandi.

Endi har xil keltirilgan modullarning o'xshash emasligini isbotlash qoldi. Buning uchun, har qanday, $\gamma = x + zi$ keltirilgan son $1, \gamma$ keltirilgan bazisni $\{1, \gamma\}$ panjarada tashkil etadi. Buning uchun γ eng qisqa $\{1, \gamma\}$ panjaradagi vektorlar ya'ni $|k + l\gamma| \geq |\gamma|$ har qanday k da va $l \neq 0$. Chunki $|x| \leq \frac{1}{2}$ bo'lsa,

$$|k \pm \gamma|^2 = (k \pm x)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 = |\gamma|^2$$

bo'ladi.

Agar $|l| \geq 2$ bo'lsa,

$$|k + l\gamma|^2 \geq l^2 y^2 > 2y^2 > x^2 + y^2 = |\gamma|^2$$

bo'ladi, bu esa tasdiqning isboti. Agar γ va γ_1 ikkita keltirilgan son bo'lsin. Agar $\{1, \gamma\}$ va $\{1, \gamma_1\}$ modullar o'xshash bo'lsa, 8-teoremadan $1, \gamma$ va $1, \gamma_1$ bazislar o'xshashdir. Buni $\gamma = \gamma_1$ da osongina ko'rsatish mumkin, 9-teorema isbotlandi.

Savol va masalalarning to'liq yechimi uchun modullarning o'xshashligini mavhum kvadratik maydonda, bizga keltirilgan modulni topish algoritmi ham kerak. Bu oldin masalada keltirilgan. M va M_1 modullarni o'xshashligini bilish uchun biz ularga o'xshash modullarni topamiz, dastlabki M va M_1 modullar o'xshash qachonki-qachon, qachon ularning keltirilgan modullari mos tushadi.

Izoh: (zamechaniya) 9-teorema isbotida, biz modullarni mavhum kvadratik maydonlarda yotishini inobatga olmadik. Ushbu teoremani tasdig'i o'rinli,

ixtiyoriy teks panjaralar uchun: har qanday panjara kompleks tekislikda faqat va faqat bitta panjaraga $\{1, \gamma\}$ o'xshash, bu erda γ qandazdir son Γ sohadan (6-rasm). 2-lemmadan, ikkita panjara $\{1, \lambda\}$ va $\{1, \gamma\}$ o'xshash qachonki-qachon ular quyidagicha

$$\lambda = \frac{k\gamma + l}{m\gamma + n}, \quad kn - ml = \pm 1$$

bo'ladi, k, l, m, n butun ratsionallar bilan. Bunday juftlar kompleks sonlarda modulyar ekvivalent deb ataladi. Olingan natijalar, har bir kompleks son modulyar ekvivalent faqat va faqat bitta songa Γ sohada. Γ soha esa modulyar figura deyiladi. Yuqorida aytilganidek uning nuqtalari tekislikda o'xshash panjaralar sinfi mos keladi. Tekis panjaralarning o'xshashligi sinfi masalalari, elliptik funksiya nazariyasida ko'plab uchraydi. Elliptik funksiyaning har bir maydoni o'zining davriy panjarasi bilan beriladi, lekin elliptik funksiya maydoni izomorflidir qachonki-qachon ularga mos keluvchi panjara davrlari ham o'xshash bo'lsa. Shunday qilib Γ modulyar figura o'zaro bir xildir o'zini izomorf elliptik funksiyasi maydonida.

Endu o'xshash modullar sinfini qaraymiz, qandaydir olingan $\mathfrak{D}$ tartibli $D < 0$ diskreminanti bilan. Agar $\{1, \gamma\}$ modul, $\gamma \in \Gamma$ da bo'lsa, u $\mathfrak{D}$ tartib tegishli bo'ladi. Agar yana γ son uchun biz 1-lemma belgilashlardan foydalanamiz va quyidagicha yozamiz:

$$\gamma = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a}$$

bunda (23) va (24)-shartlar ushbuni beradi

$$\left. \begin{array}{l} -a \leq b < a \\ c \geq 0, \quad b \leq 0 \\ c > a, \quad b > 0 \end{array} \right\} \quad (25)$$

Shunday qilib, mavhum kvadratik maydonning keltirilgan modulini to'la sistemasini olish uchun D tartibga tegishli biz barcha $a > 0$, b, c uchlik sonlarni topishimiz kerak (25) shartni qanoatlantiradigan

$$D = b^2 - 4ac, \quad (a, b, c) = 1 \quad (26)$$

3-teoremaga asosan bunday uchlik sonlar cheklidir, bular

$$|D| = 4ac - b^2 \geq 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$|b| \leq a < \sqrt{\frac{|D|}{3}}$$

larning kuchiga asosan D da berilgan a va b larda, demak c uchun ham biz chekli sonli imkoniyatlarni aniqlaymiz.

Misol-1: Modullar sinflarining sonini topamiz, $R(\sqrt{-47})$ maydon eng kata tartibiga tegishli, bunda $|b| \leq a < \sqrt{\frac{47}{3}}$ bo'ladi. D ning toqligini inobatga olib, b ham toq bo'ladi, bundan $b = \pm 1, b = \pm 3$ larni olamiz. Ikkinchi holda $b^2 - D = 56 = 4ac$, $ac = 14$, $3 \leq a \leq c$ bo'lishi mumkin emas. Agar $b = \pm 1$ bo'lsa, $b^2 - D = 48 = 4ac$ dan

$$a = 1, c = 12; a = 2, c = 6; a = 3, c = 4$$

larni olamiz. $b = 1 = a$ holi uchun $R(\sqrt{-47})$ max maydon tartibi uchun 5-ta o'xshash modullar sinfi mavjud bo'ladi. Bu sinflarning vakillari bo'lib, $\{1, \gamma\}$ keltirilgan modul hisoblanadi bu erda γ quyidagilarning biriga teng:

$$\frac{1 + i\sqrt{47}}{2}, \quad \frac{\pm 1 + i\sqrt{47}}{4}, \quad \frac{\pm 1 + i\sqrt{47}}{6}$$

Oldingi bandda kvadratik maydon uchun modullarning o'xshashligi masalasi (13)-tenglamani yechishni beradi.

Misol-2: $M = \{13, 1 + 5i\}$ modulda barcha sonlarni 650 normada topamiz. Bu erda halqa ko'paytuvchisi bo'lib, $\mathfrak{D} = \{1, 5i\}$ hisoblanadi $D = -100$ diskriminant bilan. Chunki $N(M) = 13$ bo'lib, u $\mathfrak{D}$ ga tegishli va $m = \frac{650}{13} = 50$ normaga ega. (18) va (20)-shartlar bizga quyidagilarni beradi:

- 1) $s = 5, a = 2, b = -2, c = 13$
- 2) $s = 1, a = 50, b = 10, c = 1$
- 3) $s = 1, a = 50, b = -10, c = 1$
- 4) $s = 1, a = 50, b = -50, c = 13$

Har bir ushbu 4 hol uchun (19)-dek A modulni va unga keltirilgan o'xshash modullarni topamz:

$$\begin{aligned} &10 \left\{ 1, \frac{1+5i}{2} \right\}, \\ &50 \left\{ 1, \frac{-1+i}{10} \right\} = (-5+5i) \{1, 5i\} \\ &50 \left\{ 1, \frac{1+i}{10} \right\} = (5+5i) \{1, 5i\} \\ &50 \left\{ 1, \frac{5+i}{10} \right\} = 10i \left\{ 1, \frac{1+5i}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ya'ni M^{-1} uchun ham keltirilgan modulni topamiz:

$$M^{-1} = \left\{ 1, \frac{1-5i}{13} \right\} = \frac{1-5i}{13} \left\{ 1, \frac{1+5i}{2} \right\}$$

2) va 3) hollarda A modul tashlanadi, chunki M^{-1} modulga o'xshash. Qolgan ikkita holda 1) va 4) $A = \xi M^{-1}$ tenglik $\xi = 5+25i$ va $\xi = -25+5i$ bo'ladi. chunki $\mathfrak{O}$ halqa ikkita birlarga ega ± 1 , xullas M modulda 4-son mavjud: $\pm(5+25i)$ va $\pm(-25+5i)$ lar 650 norma bilan.

Qaralgan misolda, biz $13x^2 + 2xy + 2y^2 = 50$ ga ega bo'ldik, to'rtta sonli yechimga ega:

$$\begin{aligned} x=0, \quad y=5; \quad x=0, \quad y=-5 \\ x=2, \quad y=-1; \quad x=-2, \quad y=1 \end{aligned}$$

Misol-3: Qanday natural sonlar $x^2 + y^2$ bilan ifodalanad. Formaning diskreminanti $D = -4$. Tartibi $\mathfrak{O} = \{1, i\}$ bo'lib, $R(\sqrt{-1})$ maydonda faqat bitta keltirilgan modulga ega, chunki (25) va (26)-shartlar $a = c = 1$, $b = 0$ da bajariladi. Bu esa barcha modullarni, $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli, o'zaro o'xshashdir va $x^2 + y^2$ barcha biror diskreminantlari -4 ga teng.

Lekin ekvivalent formlarni faqat bitta son ifodalaydi, shuning uchun 6-teoremadan $x^2 + y^2$ forma m sonni ifodalaydi qachonki-qachon, qachon $A \subset \mathfrak{O}$ modul mavjud bo'lsa, $\mathfrak{O}$ tartibga tegishli va m normali. Agar bunday modul mavjud bo'lsa, unda s , a , b , c lar uchun quyidagilar o'rinli:

$$m = as^2, \quad D = -4 = b^2 - 4ac, \quad (a, b, c) = 1$$

bu erda b soni juft bo'lishi zarur, $b = 2z$, lekin z esa

$$z^2 \equiv -1 \pmod{a} \quad (27)$$

sharti qanoatlantirishi zarur. Aksincha, oxirigi taqqoslash $a = \frac{m}{s^2}$ da yechiladigan bo'lsa, ya'ni $z^2 = -1 + ac$ bundan $(a, 2z, c) = 1$ ni olish mumkin, bu esa $A \subset \mathfrak{D}$ mavjudligini anglatadi va u $\mathfrak{D}$ tartibda yotadi m norma bilan, ya'ni m esa $x^2 + y^2$ forma bilan ifodalanadi.

(27)-asosan, qachonki-qachon u yechimlidir, qachon a esa 4 ga bo'linmasa va tub sonlarga yoyilmasa $4k + 3$ son kabi. Chunki a son m ga tegishli barcha tub sonlar toq darajada qatnashadi, undan m ning aniq $x^2 + y^2$ forma kabi ifodalanishini qachonki-qachon, $4k + 3$ soni nafaqat unga juft darajada qatnashadi.

III-bob. KOMPYUTER ALGEBRASI USULI BILAN YOYILUVCHAN FORMALARNING MINIMUMINI HISOBLASH VA SHU FORMALARGA MOS KLEYN KO'PYOQLIKLARINI QURISH

3.1-§ *Formalar va modullar*

Sonlar nazariyasidan ayrim ta'riflarni keltiramiz [3]. Agar $Z[x]$ -ko'phadlarning xalqasi x bo'yicha butun koeffitsiyentlari berilgan bo'lsin. $Z[x]$ ko'phadning ildizlari algebraik sonlar deb aytiladi va uning eng katta koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lsa, algebraik sonlar butun bo'ladi.

$Z[x]$ ko'phadning ustida $p(x)$ ga darajasi n bo'lsa, uning ildizi bo'lib qandaydir λ son hisoblanadi, λ sonning darajasi deb aytiladi, qolgan $n-1$ ta ildizlari $\lambda^{(j)}$ esa $p(x)$ ko'phadning algebraik sonlari deyiladi, $\lambda = \lambda^{(1)}$ ga qo'shma bo'ladi (Q ratsional sonlar maydonida).

$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \lambda_j, a_j \in Q$ dagi darajaning chiziqli kombinatsiyasi $Q(\lambda)$ kengaytmali maydonni tashkil etadi. Q maydon uchun n -esa $Q(\lambda^{(j)})$ maydon uchun daraja deb aytiladi, $Q(\lambda)$ ga qo'shma bo'lganda. $p(x)$ ko'phadning belgilangan ildiz nomerlari-raqamlari maydonning nomerlarini beradi. Maydonning elementlari to'plami, ratsional koeffitsiyentlari bilan ifodalangan maydonning barcha elementlarini ifodalaydi va u maydon bazisi deb ataladi. $1, \lambda^{(j)}, \dots, \lambda^{(j)n-1}$ bazisda berilgan $\lambda^{(1)k} \rightarrow \lambda^{(j)k}, k=0, \dots, n-1, j=1, \dots, n$, dagi akslantirish maydonning tabiiy izomorfizmini ifodalaydi, bunda $\alpha^{(1)}$ maydonning soniga $\alpha^{(k)}$ - mos keladi. U $Q(\lambda)$ maydonga qo'shma bo'ladi. $Norm(\alpha)$ normasi α algebraik sonning bu ratsional son bo'lib, barcha α - larning va uning qo'shmalari ko'paytmasidir:

$$Norm(\alpha) = \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(n)}.$$

Agar $p(x)$ ko'phadning barcha ildizlari, $Q(\lambda)$ maydonda to'liq bo'lsa haqiqiy deb aytiladi. α elementga mos keluvchi akslantirish n o'lchamli vektor maydoni $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) \in R^n$, $Q(\lambda)$ maydonning kanonik qo'shiluvchisi deb aytiladi.

Agar $v_1, \dots, v_m \in Q(\lambda)$ berilgan bo'lsa va xuddi shunday $V = (v_1, \dots, v_m) \in Q_m(\lambda)$ vektor ham berilgan bo'lsin. N -modul (aniqrog'i Z -modul) v_j ifodalovchisi bilan $Q(\lambda)$ ifoda ko'p sonli chiziqli kombinatsiya to'plami deb aytiladi.

$$N = \left\{ \sum_{j=1}^m y_j v_j, Y = (y_1, \dots, y_m) \in Z^m \right\}$$

Aytishadiki, modullari o'xshash deb, agar ularda proporsional tashkil etuvchi sistemasi mavjud bo'lsa. $V^{(j)} = (v_1^{(j)}, \dots, v_m^{(j)}) \in Q^m(\lambda^{(j)})$ - vektorlar qo'shma maydondagi komponentalari bilan modul tashkil etadi N ga qo'shmalikda. Modulning nuqtalari Y ning barcha butun sonli imkoniyatlarida (V, Y) chiziqli formaning qiymati kabi ifodalanadi. Modul to'liq bo'ladi, agar uning m eng ko'p chiziqli bog'lanmagan tashkil etuvchilarining soni n maydonning darajasiga teng bo'lsa.

Har bir N modulga, to'liq haqiqiy maydonda bir xilda ikkita obyekt to'g'ri keladi. Birinchi obyekt bu m o'lchamli to'la panjara. R^n da bu modul nuqtalarining proyeksiyalari to'plami kanonik qo'yilishda bo'ladi.

$$\left\{ \left(\sum_{j=1}^m y_j v_j^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^m y_j v_j^{(n)} \right) \in R^n, y_j \in Z \right\}.$$

Ikkinchi obyekt – bo'linuvchi forma bo'ladi. Bir jinsli funksiya (forma) $k \in N$ darajali n ta o'zgaruvchili – yoyiluvchi forma deb ataladi, agar u koeffitsiyentlari chiziqli formalarning ko'paytmasi kabi yoyilsa, algebraik sonlarga uning kengaytmalari $Q(\beta)$ dan olinib Q maydonda bo'ladi. Forma butun sonli deb aytiladi, agar uning qiymatlari Z^n to'plamda bo'lib, butun sonlardan iborat bo'lsa. N modulga n darajali yoyiladigan forma mos keladi:

$$g_N(Y) = \text{Norm} \left(\sum_{j=1}^m y_j v_j \right) = \text{Norm} (V, Y).$$

Agar ifodalovchi N -modul butun algebraik sonli bo'lsa, $g_N(Y)$ forma qiymati Z^n - butun sonli vektordan iborat bo'ladi. Aksinchasi ham o'rinli bo'ladi, har bir yoyiladigan formalar hadlari aniqligidagi ratsional son qandaydir modulning elementi normasi kabi ifodalanadi, ifodalovchi butun sonlardan Q

maydonning qandaydir kengaytmasidan. O'xshash modul mos panjaralariga javob beradi va formaning yoyilmasiga proporsional bo'ladi. $\mu(g)$ koeffitsiyentlarining qiymatlari o'xshash forma uchun bir xildir.

$Q(\beta)$ maydonda formalarning chiziqli ko'paytmalari kabi yoyilishini imkoniyati, bu algebraik sonlar maydonining eng kamligidir, xuddi maydonni yaratuvchisini o'zida mujassamlashtirgan kabi, xuddi shunday sonlarni ham ularga qo'shma.

3.2-§ Kleyn ko'pyoqliklari

Ikkita n -o'lchamli R^n va R^n_* haqiqiy fazoni qaraymiz, X va U koordinatalar bilan hamda skalyar ko'paytmalari bilan birgalikda $(U, X) = u_1x_1 + \dots + u_nx_n$, $U = (u_1, \dots, u_n) \in R^n_*$ va $X = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Agar R^n_* n -chiziqli bog'lanmagan $L_1, \dots, L_n$ vektorlar berilgan bo'lsin. Har bir 2^n naborlarga $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, bu yerda $\sigma = \pm 1$ R^n_* ga mos holda o'zining qavariq konusi mos keladi.

$$O_\Sigma^* = \{U : U = \alpha_1\sigma_1L_1 + \dots + \alpha_n\sigma_nL_n, \alpha_i \geq 0\} \quad (3.1)$$

σ_i ning aniq hollarda $+1$ va -1 sonlarning o'rniga $+$ va $-$ larni yozamiz. L_i vektorga javob beruvchi $L_i = \{X : (L_i, X) = 0\}$ tekislikda, fazoni 2 ta R^n va 2^n qavariq konuslar bo'ladi.

$$O_\Sigma = \{X : (\sigma_i L_i, X) \geq 0\}, i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$M_1, \dots, M_n$ vektorlar, $L_1, \dots, L_n$ vektorlarga ortogonal bo'lsa, unda ya'ni

$$(L_i, M_j) = \delta_{ij}\psi_i, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

bu yerda ψ_i - o'zgarmas nolga teng emas, δ_{ij} - Kroneker belgisi. Bunda O_Σ^* konus va O_Σ larni quyidagicha yozish mumkin:

$$O_\Sigma^* = \{U : (U, M_i \delta_i \psi_i) \geq 0, i = 1, \dots, n\} \quad (3.4)$$

$$O_\Sigma = \{X : X = \alpha_1\psi_1\sigma_1M_1 + \dots + \alpha_n\psi_n\sigma_nM_n, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \quad (3.5)$$

K_Σ - qavariq qobiqlarni O konusga tushuvchilarini butun sonli nuqtalarda $X \in Z^n, X \neq 0$ da qaraymiz. Kleyn ko'pyoqlisi deb $(n-1)$ - o'lchamli ko'p yoqli ∂K_Σ sirtini aytamiz. O_Σ^* ikkilik konusdagi butun sonli qavariq nuqtalardagi $U \in Z^n, U \neq 0$ qobiqni K_Σ bilan belgilaymiz. Bundan tashqari O_Σ^* va O_Σ larda ko'pyoqlarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \bar{K}_\Sigma^* &= \{U : U \in R^n, (U, X) \geq 1 \quad barcha \quad X \in K_\Sigma\}, \\ \bar{K}_\Sigma &= \{X : X \in R^n, (U, X) \geq 1 \quad barcha \quad U \in K_\Sigma^*\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ikkilik $\bar{K}_\Sigma$ va $\bar{K}_\Sigma^*$ ko'pyoqlarda ikkitalik oxirgisining uchi butun sonli bo'lmashligi mumkin. Chunki $(U, X) \geq 0$ $X \in O_\Sigma$ va $U \in O_\Sigma^*$ larda, $X \in Z^n, U \in Z_*^n$ larda (U, X) - butundir, bunda $\bar{K}_\Sigma^* \supset K_\Sigma^*$ va $\bar{K}_\Sigma \supset K_\Sigma$ bo'ladi.

∂K_Σ sirt $\Gamma_j^{(d)}$ har xil o'lchamli chegaralardan iborat, $d, 0 \leq d < n-1$: uchi ($d=0$), qirra ($d=1$), ..., giperchegara $d=(n-1)$.

Butun sonli nuqta nisbiy minimum deb aytiladi, agar ushbu oktantda butun sonli nuqtalar bo'lmasa, undanda yaqin joylashgan bir vaqtda oktantning L_i gipertekisliklar bilan chegaralangan hollarida.

$X_1, \dots, X_n$ butun sonli nuqtalar L gipertekislikda yotsin, $\Gamma_j^{(n-1)}$ yoqni davomi bo'lib xizmat qiluvchi, $X_i - X_1, i=2, \dots, n$, vektorlar bu gipertekislikda bazisini yaratadi, ya'ni $(n-1) \times n$ - matritsani qatorlari ushbu vektorlarning $(n-1)$ - o'lchamli minorlarning eng katta umumiy bo'luvchisi kabi birga teng. $\rho(\Gamma_j^{(n-1)}) = |\det(X_1 X_2 \dots X_n)|$ - kattalikda $\Gamma_j^{(n-1)}$ ning giperyoqlarning masofasi deb ataymiz. Ushbu har bir $\Gamma_j^{(n-1)}$ - ko'pyoqning yog'iga mos keluvchi ushbu moslikni ta'kidlaymiz: $\Gamma_j^{(n-d-1)}$ ko'pyoqning har bir yog'i $\bar{K}_\Sigma$ ga $\Gamma_j^{(d)}$ qandaydir K_Σ ko'pyoqning yog'i javob bo'ladi, bunda $(U, X) = 1$ bo'ladi har bir $U \in \Gamma_j^{(n-d-1)*}$ va $X \in \Gamma_k^{(d)}$ da har bir yoq uchining qavariq sirti ekanligini ta'kidlaymiz.

$\partial K_\Sigma \cap \partial \bar{K}_\Sigma$ va $\partial K_\Sigma \cap \partial \bar{K}_\Sigma^*$ kesishmalarda $p=1$ masofani barcha giperyoqlari joylashadi. Ushbu kesishmalarni hisoblash algoritmlari quyidagicha. Σ naborni belgilab, indeksni tashlab yuboramiz. $X_1 \in \partial K \cap \partial \bar{K}$ kesishmaga tegishli bo'lsin; butun sonli yechimlarini to'pamiz. $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m \in 0^* \cap Z_*^n$ da, $(U, X_1) = 1$ tenglamadan va (6) dagi n - ta tengsizliklardan, ularning qavariq qobig'i bo'lib $\Gamma_j^{(d)*}$ yoq ∂K^* sirtida hisoblanadi. $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m$ nuqtalar orasidagi $\Gamma_j^{(d)*}$ - yoqda barcha uchlarni $U_1, \dots, U_r$ ajratib olamiz. Ularning har biri uchun o'zlarining tenglamalarini tuzamiz:

$$(U_i, X) = 1 \quad (3.7)$$

uning barcha yechimlarini topamiz $X \in 0 \cap Z^n$, ya'ni (3.7) ning X butun sonli yechimidir. (3.4) dagi n ta tengsizlikni qanoatlantiruvchi bitta yoqda yotuvchi $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$, nuqtalarini olamiz. Ulardan $X_2, \dots, X_k$, uchlarini olamiz.

Ularning har biri uchun $U \in 0 \cap Z_*$ da yechimni izlaymiz, $(U, X_i) = 1$ tenglama uchun va hako'zalar. Ko'pchilik hollarda bunday ∂K Kleyn ko'pyoqlikning butun sonli nuqtalarida hisoblashlar olinadi,. ∂K - ko'pyoqning og'irligi uning xuddi qavariq qobiq kabi.

3.3-§ To'rtinchi darajali yoyiluvchi formaga mos panjarada Kleyn ko'pyog'ini qurish va uning minimumini hisoblash.

To'rtinchi darajali maydon moduli bazisini qurishning umumiy usulini keltiramiz. Agar $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ - barcha butun sonlarda 4-darajali maydonda bazisni tashkil etsa, unda ρ tenglamaning ildizini ifodalovchisi bo'ladi:

$$x^4 - sx^3 - qx + n = 0. \quad (3.8)$$

Ma'lumki, ω_0 o'rniga 1 sonini olish mumkin, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ larni

$$\frac{\rho + c_2}{\Delta_1}, \frac{\rho^2 + b_1\rho + c_2}{\Delta_2}, \frac{\rho^3 + a\rho^2 + b\rho + c}{\Delta_3}, \quad (3.9)$$

ko'rinishda izlash kerak, bu yerda $a, b, b_1, c, c_1, c_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - koefitsiyentlar va bazisning soni maxrajidir. Ushbu koefitsiyentlarni va maxrajini hisoblash uchun (3.8) tenglamani Chiringauzen bo'yicha qayta yoyamiz, bunda:

$$y = \frac{u\rho^3 + v\rho^2 + \omega\rho + t}{\Delta}$$

$$y^4 + F_1y^3 + F_2y^2 + F_3y + F_4 = 0,$$

bu yerda

$$\Delta^4 \cdot F_4 = t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D = \Phi(t),$$

$$\Delta^3 \cdot F_3 = \Phi'(t), \quad \Delta^2 \cdot F_2 = \frac{1}{2!}\Phi''(t), \quad \Delta \cdot F_1 = \frac{1}{3!}\Phi'''(t),$$

agar shunday qilib olsak:

$$A = \omega \cdot s + v \cdot (s^2 - 2p) + u \cdot (s^3 - 3sp + 3q);$$

$$B = \omega^2 \cdot p + v\omega \cdot (sp - 3q) + u\omega \cdot (s^2 - 2p^2 - sq + 4n) + v^2 \cdot (p^2 - 2sq + 2n) +$$

$$+ uv \cdot (sq^2 - 2s^2q - pq - 5sn) + u^2 \cdot (p^3 - 3spq + 3s^2n + 3q^2 - 3pn);$$

$$C = \omega^3 \cdot q + v\omega^2 \cdot (sp - 4q) + v^2\omega \cdot (pq - 3sn) + u\omega^2 \cdot (s^2q - 2pq - sn) +$$

$$+ v^3 \cdot (q^2 - 2pn) + uv\omega \cdot (spq - 3s^2n - 3q^2 + 4pn) + uv^2 \cdot (sq^2 - 2spn - qn) +$$

$$+ u^2\omega \cdot (p^2q - 2sq^2 + spq + 5qn) + u^2v \cdot (pq^2 - 2p^2n - sqn + 4n^2) +$$

$$+ u^3 \cdot (q^3 - 3pqn + 3sn^2);$$

$$\begin{aligned}
D = & \omega^4 \cdot n + v\omega^2 sn + u\omega^3 \cdot (s^2 n - 2pn) + v^2 \omega^2 \cdot pn + uv\omega^2 (spn - 3qn) + \\
& + v^3 \omega qn + uv^2 \omega \cdot (sqn - 4n^2) + u^2 \omega^2 \cdot (p^2 n - 2sqn + 2n^2) + \\
& + u^2 v \omega \cdot (pqn - 3sn^2) + u^3 \omega \cdot (q^2 n - 2pn^2) + v^4 \cdot n^2 + uv^3 \cdot sn^2 + \\
& + u^2 v^2 pn^2 + u^3 v \cdot qn^2 + u^4.
\end{aligned}$$

u, v, ω, t, Δ larga qiymatlar berib, bazisning ayrim sonlariga mos keluvchi, bunda y -ga nisbatan tenglama koeffitsiyentlarini butun ratsional sonlar bo'lish kerak, barcha taqqoslashlarni oson olish mumkin, bazis koeffitsiyentlarini ifodalash uchun. Maydon bazisi, qaralayotgan ρ - ga mos holda, ya'ni qaralayotgan tenglamada hisoblab, D ning diskreminanti quyidagicha bo'ladi.

$$D = \frac{D_\rho}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}. \quad (3.10)$$

Shunday qilib, quyidagi isbotlandi.

3.1 – Teorema. Faraz qilaylik v (3.8) ko'phad ildizi bo'lib, $Q(v)$ ratsional sonlar maydoniga v -yechimni qo'shish natijasida hosil bo'lgan haqiqiy to'rtinchi darajali maydon bo'lsin. U holda $Q(v)$ maydon butun sonlar bazisi (3.9) formula bilan, $Q(v)$ maydonning diskreminanti (3.10) formula bilan hisoblanadi.

Endi ushbu 4-darajali ko'phad uchun olingan usulni qo'llaymiz:

$$f(v) = v^4 + v^3 - 3v^2 - v + 1 = 0$$

Bu ko'phadning ildizi Maple dasturida hisoblangan. Uni quyidagicha tartibda yozamiz:

$$\begin{aligned}
v_1 &:= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, \\
v_2 &:= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, \\
v_3 &:= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, \\
v_4 &:= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4},
\end{aligned}$$

$Q(v_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) - to'la haqiqiy maydonni quramiz. L_i -modulning bazisini yuqoridagi keltirilgan usul bilan hisoblaymiz.

Shunday qilib har bir modul uchun ularning yasovchilari bo'lib quyidagi sonlar hisoblanadi $\{1, v_i, v_i^2, v_i^3\}$. Vektorlarning koordinatalariga son qiymatlari berib, quyidagi 4 ta qo'shma modullarni olamiz:

$$l_i = (1, v_i, v_i^2, v_i^3), i = 1, 2, 3, 4$$

Bu modullarga mos keluvchi 4 o'lchamli panjarani qaraymiz:

$$\Lambda = \{(\sum_{i=1}^n z_i v_1^{i-1}, \sum_{i=1}^n z_i v_2^{i-1}, \sum_{i=1}^n z_i v_3^{i-1}, \sum_{i=1}^n z_i v_4^{i-1})\}.$$

bu yerda z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) - har xil butun sonli qiymatlar qabul qiladi. Bu panjarani matritsaviy shaklda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$\Lambda: \begin{bmatrix} 1, & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}\right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}\right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}\right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Bundan keyin $F(Z)$ formani tuzamiz. $F(Z)$ formaning qiymatini Maple dasturida hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
F(Z) = & \left(z_1 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right) z_2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 z_3 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 z_4 \right) \\
& \left(z_1 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right) z_2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 z_3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 z_4 \right) \\
& \left(z_1 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right) z_2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 z_3 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 z_4 \right) \\
& \left(z_1 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right) z_2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 z_3 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 z_4 \right) = \\
= & z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 + 7z_2^3 z_4 - 3z_3^2 z_4^2 - 8z_1 z_3^2 z_4 - 13z_1^2 z_3 z_4 - 16z_1 z_3 z_4^2 - \\
& - z_2^3 z_3 - 3z_2^2 z_3^2 + 7z_3^3 z_1 + z_3 z_4^3 - 15z_1 z_3 z_4 z_2 + 13z_2^2 z_4^2 + 7z_2 z_4^3 + z_2^3 z_1 + 13z_2 z_4^2 z_1 - \\
& - 16z_2 z_4 z_1^2 + 8z_2^2 z_4 z_1 - 21z_4^2 z_1^2 + 7z_4^3 z_1 - 5z_2 z_3^2 z_4 - 5z_2^2 z_1 z_3 + z_3^3 z_2 - z_3^3 z_4 + \\
& + 7z_1^3 z_3 + 13z_1^2 z_3^2 - z_1^3 z_2 - 3z_1^2 z_2^2 - 7z_1^3 z_4
\end{aligned}$$

$1 \leq z_i \leq 100, i = 1, 2, 3, 4$ oraliqlarda hisoblangan nuqtalarning butun sonli koordinatalari qaralayotgan konusda quyidagi nuqtalar bu konusni chegaralovchi $L_i, i = 1, 2, 3, 4$ gipertekislik juda ham hammasiga yaqindir:

$$\begin{aligned}
P = \{ & P_0 = (1, 8, 12, 4), P_1 = (2, 22, 35, 12), P_2 = (3, 2, 9, 16), P_3 = (3, 5, 2, 1), P_4 = (3, 13, 16, 5), \\
& P_5 = (7, 21, 21, 6), P_6 = (7, 36, 47, 15), P_7 = (9, 2, 1, 1), P_8 = (15, 33, 27, 7), P_9 = (17, 59, 62, 18), \\
& P_{10} = (32, 47, 34, 9), P_{11} = (36, 66, 27, 5), P_{12} = (36, 97, 80, 20), P_{13} = (74, 42, 43, 19) \}
\end{aligned}$$

Bu nuqtalarda $|F(Z)|$ forma o'zining eng kichik minimumiga erishadi.

Endi $\Delta(\Lambda)$ determinantni Λ panjara uchun hisoblaymiz. Bu

Vandermondning 4-tartibli determinantdir

$$\Delta(\Lambda) = \begin{vmatrix} 1, & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^2, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2, & \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 \\ 1, & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^2, & \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4} \right)^3 \end{vmatrix}$$

Ushbu determinantni hisoblab $\Delta(\Lambda) = \frac{5}{4}\sqrt{464}$ ga teng qiymatni olamiz.

Shunday qilib,

$$\mu(F) = \frac{1}{\Delta(\Lambda)} \min_{X \in Z^n \setminus 0} |F(X)| = \frac{4}{5\sqrt{464}}.$$

Endi Maple dasturidan quyidagilarni olamiz, bu Kleyn ko'pyoqliklariga mos keladi va ular quyidagi gipertekislikdan iborat:

1. **3 o'lchamli gipertekisliklar:**

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_2; P_3\} & \Gamma_1^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_2; P_7\} & \Gamma_2^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_3; P_{12}\} \\ \Gamma_3^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_6; P_{12}\} & \Gamma_4^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_6; P_{13}\} & \Gamma_5^{(3)} &= \{P_0; P_1; P_7; P_{13}\} \\ \Gamma_6^{(3)} &= \{P_0; P_2; P_3; P_7\} & \Gamma_7^{(3)} &= \{P_0; P_3; P_7; P_8\} & \Gamma_8^{(3)} &= \{P_0; P_3; P_8; P_{11}\} \\ \Gamma_9^{(3)} &= \{P_0; P_3; P_{11}; P_{12}\} & \Gamma_{10}^{(3)} &= \{P_0; P_5; P_8; P_{11}\} & \Gamma_{11}^{(3)} &= \{P_0; P_5; P_8; P_{12}\} \\ \Gamma_{12}^{(3)} &= \{P_0; P_5; P_{11}; P_{12}\} & \Gamma_{13}^{(3)} &= \{P_0; P_6; P_9; P_{12}\} & \Gamma_{14}^{(3)} &= \{P_0; P_6; P_9; P_{13}\} \\ \Gamma_{15}^{(3)} &= \{P_0; P_7; P_8; P_{10}\} & \Gamma_{16}^{(3)} &= \{P_0; P_7; P_{10}; P_{13}\} & \Gamma_{17}^{(3)} &= \{P_0; P_8; P_{10}; P_{12}\} \\ \Gamma_{18}^{(3)} &= \{P_0; P_9; P_{12}; P_{13}\} & \Gamma_{19}^{(3)} &= \{P_0; P_{10}; P_{12}; P_{13}\} & \Gamma_{20}^{(3)} &= \{P_1; P_2; P_3; P_{12}\} \\ \Gamma_{21}^{(3)} &= \{P_1; P_2; P_6; P_{12}\} & \Gamma_{22}^{(3)} &= \{P_1; P_2; P_6; P_{13}\} & \Gamma_{23}^{(3)} &= \{P_1; P_2; P_7; P_{13}\} \\ \Gamma_{24}^{(3)} &= \{P_2; P_3; P_7; P_{11}\} & \Gamma_{25}^{(3)} &= \{P_2; P_3; P_{11}; P_{12}\} & \Gamma_{26}^{(3)} &= \{P_2; P_6; P_9; P_{12}\} \\ \Gamma_{27}^{(3)} &= \{P_2; P_6; P_9; P_{13}\} & \Gamma_{28}^{(3)} &= \{P_2; P_7; P_{11}; P_{13}\} & \Gamma_{29}^{(3)} &= \{P_2; P_9; P_{12}; P_{13}\} \\ \Gamma_{30}^{(3)} &= \{P_2; P_{11}; P_{12}; P_{13}\} & \Gamma_{31}^{(3)} &= \{P_3; P_7; P_8; P_{11}\} & \Gamma_{32}^{(3)} &= \{P_5; P_8; P_{11}; P_{12}\} \\ \Gamma_{33}^{(3)} &= \{P_7; P_8; P_{10}; P_{11}\} & \Gamma_{34}^{(3)} &= \{P_7; P_{10}; P_{11}; P_{13}\} & \Gamma_{35}^{(3)} &= \{P_8; P_{10}; P_{11}; P_{12}\} \\ \Gamma_{36}^{(3)} &= \{P_{10}; P_{11}; P_{12}; P_{13}\} \end{aligned}$$

2. 2 o'ldamli yoqlar:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_2\} \subset \Gamma_0^{(3)} \cap \Gamma_1^{(3)} & \Gamma_1^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_3\} \subset \Gamma_0^{(3)} \cap \Gamma_2^{(3)} & \Gamma_2^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_6\} \subset \Gamma_3^{(3)} \cap \Gamma_4^{(3)} \\
\Gamma_3^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_7\} \subset \Gamma_1^{(3)} \cap \Gamma_5^{(3)} & \Gamma_4^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_{12}\} \subset \Gamma_2^{(3)} \cap \Gamma_3^{(3)} & \Gamma_5^{(2)} &= \{P_0; P_1; P_{13}\} \subset \Gamma_4^{(3)} \cap \Gamma_5^{(3)} \\
\Gamma_6^{(2)} &= \{P_0; P_2; P_3\} \subset \Gamma_0^{(3)} \cap \Gamma_6^{(3)} & \Gamma_7^{(2)} &= \{P_0; P_2; P_7\} \subset \Gamma_1^{(3)} \cap \Gamma_6^{(3)} & \Gamma_8^{(2)} &= \{P_0; P_3; P_7\} \subset \Gamma_6^{(3)} \cap \Gamma_7^{(3)} \\
\Gamma_9^{(2)} &= \{P_0; P_3; P_8\} \subset \Gamma_7^{(3)} \cap \Gamma_8^{(3)} & \Gamma_{10}^{(2)} &= \{P_0; P_3; P_{11}\} \subset \Gamma_8^{(3)} \cap \Gamma_9^{(3)} & \Gamma_{11}^{(2)} &= \{P_0; P_3; P_{12}\} \subset \Gamma_2^{(3)} \cap \Gamma_9^{(3)} \\
\Gamma_{12}^{(2)} &= \{P_0; P_5; P_8\} \subset \Gamma_{10}^{(3)} \cap \Gamma_{11}^{(3)} & \Gamma_{13}^{(2)} &= \{P_0; P_5; P_{11}\} \subset \Gamma_{10}^{(3)} \cap \Gamma_{12}^{(3)} & \Gamma_{14}^{(2)} &= \{P_0; P_5; P_{12}\} \subset \Gamma_{11}^{(3)} \cap \Gamma_{12}^{(3)} \\
\Gamma_{15}^{(2)} &= \{P_0; P_6; P_9\} \subset \Gamma_{13}^{(3)} \cap \Gamma_{14}^{(3)} & \Gamma_{16}^{(2)} &= \{P_0; P_6; P_{12}\} \subset \Gamma_3^{(3)} \cap \Gamma_{13}^{(3)} & \Gamma_{17}^{(2)} &= \{P_0; P_6; P_{13}\} \subset \Gamma_4^{(3)} \cap \Gamma_{14}^{(3)} \\
\Gamma_{18}^{(2)} &= \{P_0; P_7; P_8\} \subset \Gamma_7^{(3)} \cap \Gamma_{15}^{(3)} & \Gamma_{19}^{(2)} &= \{P_0; P_7; P_{10}\} \subset \Gamma_{15}^{(3)} \cap \Gamma_{16}^{(3)} & \Gamma_{20}^{(2)} &= \{P_0; P_7; P_{13}\} \subset \Gamma_5^{(3)} \cap \Gamma_{16}^{(3)} \\
\Gamma_{21}^{(2)} &= \{P_0; P_8; P_{10}\} \subset \Gamma_{15}^{(3)} \cap \Gamma_{17}^{(3)} & \Gamma_{22}^{(2)} &= \{P_0; P_8; P_{11}\} \subset \Gamma_8^{(3)} \cap \Gamma_{10}^{(3)} & \Gamma_{23}^{(2)} &= \{P_0; P_8; P_{12}\} \subset \Gamma_{11}^{(3)} \cap \Gamma_{17}^{(3)} \\
\Gamma_{24}^{(2)} &= \{P_0; P_9; P_{12}\} \subset \Gamma_{13}^{(3)} \cap \Gamma_{18}^{(3)} & \Gamma_{25}^{(2)} &= \{P_0; P_9; P_{13}\} \subset \Gamma_{14}^{(3)} \cap \Gamma_{18}^{(3)} & \Gamma_{26}^{(2)} &= \{P_0; P_{10}; P_{12}\} \subset \Gamma_{17}^{(3)} \cap \Gamma_{19}^{(3)} \\
\Gamma_{27}^{(2)} &= \{P_0; P_{10}; P_{13}\} \subset \Gamma_{16}^{(3)} \cap \Gamma_{19}^{(3)} & \Gamma_{28}^{(2)} &= \{P_0; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_9^{(3)} \cap \Gamma_{12}^{(3)} & \Gamma_{29}^{(2)} &= \{P_0; P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{18}^{(3)} \cap \Gamma_{19}^{(3)} \\
\Gamma_{30}^{(2)} &= \{P_1; P_2; P_3\} \subset \Gamma_0^{(3)} \cap \Gamma_{20}^{(3)} & \Gamma_{31}^{(2)} &= \{P_1; P_2; P_6\} \subset \Gamma_{21}^{(3)} \cap \Gamma_{22}^{(3)} & \Gamma_{32}^{(2)} &= \{P_1; P_2; P_7\} \subset \Gamma_1^{(3)} \cap \Gamma_{23}^{(3)} \\
\Gamma_{33}^{(2)} &= \{P_1; P_2; P_{12}\} \subset \Gamma_{20}^{(3)} \cap \Gamma_{21}^{(3)} & \Gamma_{34}^{(2)} &= \{P_1; P_2; P_{13}\} \subset \Gamma_{22}^{(3)} \cap \Gamma_{23}^{(3)} & \Gamma_{35}^{(2)} &= \{P_1; P_3; P_{12}\} \subset \Gamma_2^{(3)} \cap \Gamma_{20}^{(3)} \\
\Gamma_{36}^{(2)} &= \{P_1; P_6; P_{12}\} \subset \Gamma_3^{(3)} \cap \Gamma_{21}^{(3)} & \Gamma_{37}^{(2)} &= \{P_1; P_6; P_{13}\} \subset \Gamma_4^{(3)} \cap \Gamma_{22}^{(3)} & \Gamma_{38}^{(2)} &= \{P_1; P_7; P_{13}\} \subset \Gamma_5^{(3)} \cap \Gamma_{23}^{(3)} \\
\Gamma_{39}^{(2)} &= \{P_2; P_3; P_7\} \subset \Gamma_6^{(3)} \cap \Gamma_{24}^{(3)} & \Gamma_{40}^{(2)} &= \{P_2; P_3; P_{11}\} \subset \Gamma_{24}^{(3)} \cap \Gamma_{25}^{(3)} & \Gamma_{41}^{(2)} &= \{P_2; P_3; P_{12}\} \subset \Gamma_{20}^{(3)} \cap \Gamma_{25}^{(3)} \\
\Gamma_{42}^{(2)} &= \{P_2; P_6; P_9\} \subset \Gamma_{26}^{(3)} \cap \Gamma_{27}^{(3)} & \Gamma_{43}^{(2)} &= \{P_2; P_6; P_{12}\} \subset \Gamma_{21}^{(3)} \cap \Gamma_{26}^{(3)} & \Gamma_{44}^{(2)} &= \{P_2; P_6; P_{13}\} \subset \Gamma_{22}^{(3)} \cap \Gamma_{27}^{(3)} \\
\Gamma_{45}^{(2)} &= \{P_2; P_7; P_{11}\} \subset \Gamma_{24}^{(3)} \cap \Gamma_{28}^{(3)} & \Gamma_{46}^{(2)} &= \{P_2; P_7; P_{13}\} \subset \Gamma_{23}^{(3)} \cap \Gamma_{28}^{(3)} & \Gamma_{47}^{(2)} &= \{P_2; P_9; P_{12}\} \subset \Gamma_{26}^{(3)} \cap \Gamma_{29}^{(3)} \\
\Gamma_{48}^{(2)} &= \{P_2; P_9; P_{13}\} \subset \Gamma_{27}^{(3)} \cap \Gamma_{29}^{(3)} & \Gamma_{49}^{(2)} &= \{P_2; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_{25}^{(3)} \cap \Gamma_{30}^{(3)} & \Gamma_{50}^{(2)} &= \{P_2; P_{11}; P_{13}\} \subset \Gamma_{28}^{(3)} \cap \Gamma_{30}^{(3)} \\
\Gamma_{51}^{(2)} &= \{P_2; P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{29}^{(3)} \cap \Gamma_{30}^{(3)} & \Gamma_{52}^{(2)} &= \{P_3; P_7; P_8\} \subset \Gamma_7^{(3)} \cap \Gamma_{31}^{(3)} & \Gamma_{53}^{(2)} &= \{P_3; P_7; P_{11}\} \subset \Gamma_{24}^{(3)} \cap \Gamma_{31}^{(3)} \\
\Gamma_{54}^{(2)} &= \{P_3; P_8; P_{11}\} \subset \Gamma_8^{(3)} \cap \Gamma_{31}^{(3)} & \Gamma_{55}^{(2)} &= \{P_3; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_9^{(3)} \cap \Gamma_{25}^{(3)} & \Gamma_{56}^{(2)} &= \{P_5; P_8; P_{11}\} \subset \Gamma_{10}^{(3)} \cap \Gamma_{32}^{(3)} \\
\Gamma_{57}^{(2)} &= \{P_5; P_8; P_{12}\} \subset \Gamma_{11}^{(3)} \cap \Gamma_{32}^{(3)} & \Gamma_{58}^{(2)} &= \{P_5; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_{12}^{(3)} \cap \Gamma_{32}^{(3)} & \Gamma_{59}^{(2)} &= \{P_6; P_9; P_{12}\} \subset \Gamma_{13}^{(3)} \cap \Gamma_{26}^{(3)} \\
\Gamma_{60}^{(2)} &= \{P_6; P_9; P_{13}\} \subset \Gamma_{14}^{(3)} \cap \Gamma_{27}^{(3)} & \Gamma_{61}^{(2)} &= \{P_7; P_8; P_{10}\} \subset \Gamma_{15}^{(3)} \cap \Gamma_{33}^{(3)} & \Gamma_{62}^{(2)} &= \{P_7; P_8; P_{11}\} \subset \Gamma_{31}^{(3)} \cap \Gamma_{33}^{(3)} \\
\Gamma_{63}^{(2)} &= \{P_7; P_{10}; P_{11}\} \subset \Gamma_{33}^{(3)} \cap \Gamma_{34}^{(3)} & \Gamma_{64}^{(2)} &= \{P_7; P_{10}; P_{13}\} \subset \Gamma_{16}^{(3)} \cap \Gamma_{34}^{(3)} & \Gamma_{65}^{(2)} &= \{P_7; P_{11}; P_{13}\} \subset \Gamma_{28}^{(3)} \cap \Gamma_{34}^{(3)} \\
\Gamma_{66}^{(2)} &= \{P_8; P_{10}; P_{11}\} \subset \Gamma_{33}^{(3)} \cap \Gamma_{35}^{(3)} & \Gamma_{67}^{(2)} &= \{P_8; P_{10}; P_{12}\} \subset \Gamma_{17}^{(3)} \cap \Gamma_{35}^{(3)} & \Gamma_{68}^{(2)} &= \{P_8; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_{32}^{(3)} \cap \Gamma_{35}^{(3)} \\
\Gamma_{69}^{(2)} &= \{P_9; P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{18}^{(3)} \cap \Gamma_{29}^{(3)} & \Gamma_{70}^{(2)} &= \{P_{10}; P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_{35}^{(3)} \cap \Gamma_{36}^{(3)} & \Gamma_{71}^{(2)} &= \{P_{10}; P_{11}; P_{13}\} \subset \Gamma_{34}^{(3)} \cap \Gamma_{36}^{(3)} \\
\Gamma_{72}^{(2)} &= \{P_{10}; P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{19}^{(3)} \cap \Gamma_{36}^{(3)} & \Gamma_{73}^{(2)} &= \{P_{11}; P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{30}^{(3)} \cap \Gamma_{36}^{(3)} & &
\end{aligned}$$

3. 1 o'Ichamli yoqlar - (kirralar)

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(1)} &= \{P_0; P_1\} \subset \Gamma_0^{(2)} \cap \Gamma_1^{(2)} \cap \Gamma_2^{(2)} \cap \Gamma_3^{(2)} \cap \Gamma_4^{(2)} \cap \Gamma_5^{(2)} & \Gamma_1^{(1)} &= \{P_0; P_2\} \subset \Gamma_0^{(2)} \cap \Gamma_6^{(2)} \cap \Gamma_7^{(2)} \\
\Gamma_2^{(1)} &= \{P_0; P_3\} \subset \Gamma_1^{(2)} \cap \Gamma_6^{(2)} \cap \Gamma_8^{(2)} \cap \Gamma_9^{(2)} \cap \Gamma_{10}^{(2)} \cap \Gamma_{11}^{(2)} & \Gamma_3^{(1)} &= \{P_0; P_5\} \subset \Gamma_{12}^{(2)} \cap \Gamma_{13}^{(2)} \cap \Gamma_{14}^{(2)} \\
\Gamma_4^{(1)} &= \{P_0; P_6\} \subset \Gamma_2^{(2)} \cap \Gamma_{15}^{(2)} \cap \Gamma_{16}^{(2)} \cap \Gamma_{17}^{(2)} & \Gamma_5^{(1)} &= \{P_0; P_7\} \subset \Gamma_3^{(2)} \cap \Gamma_7^{(2)} \cap \Gamma_8^{(2)} \cap \Gamma_{18}^{(2)} \cap \Gamma_{19}^{(2)} \cap \Gamma_{20}^{(2)} \\
\Gamma_6^{(1)} &= \{P_0; P_8\} \subset \Gamma_9^{(2)} \cap \Gamma_{12}^{(2)} \cap \Gamma_{18}^{(2)} \cap \Gamma_{21}^{(2)} \cap \Gamma_{22}^{(2)} \cap \Gamma_{23}^{(2)} & \Gamma_7^{(1)} &= \{P_0; P_9\} \subset \Gamma_{15}^{(2)} \cap \Gamma_{24}^{(2)} \cap \Gamma_{25}^{(2)} \\
\Gamma_8^{(1)} &= \{P_0; P_{10}\} \subset \Gamma_{19}^{(2)} \cap \Gamma_{21}^{(2)} \cap \Gamma_{26}^{(2)} \cap \Gamma_{27}^{(2)} & \Gamma_9^{(1)} &= \{P_0; P_{11}\} \subset \Gamma_{10}^{(2)} \cap \Gamma_{13}^{(2)} \cap \Gamma_{22}^{(2)} \cap \Gamma_{28}^{(2)} \\
\Gamma_{10}^{(1)} &= \{P_0; P_{12}\} \subset \Gamma_4^{(2)} \cap \Gamma_{11}^{(2)} \cap \Gamma_{14}^{(2)} \cap \Gamma_{16}^{(2)} \cap \Gamma_{23}^{(2)} \cap \Gamma_{24}^{(2)} \cap \Gamma_{26}^{(2)} \cap \Gamma_{28}^{(2)} \cap \Gamma_{29}^{(2)} \\
\Gamma_{11}^{(1)} &= \{P_0; P_{13}\} \subset \Gamma_5^{(2)} \cap \Gamma_{17}^{(2)} \cap \Gamma_{20}^{(2)} \cap \Gamma_{25}^{(2)} \cap \Gamma_{27}^{(2)} \cap \Gamma_{29}^{(2)} & \Gamma_{12}^{(1)} &= \{P_1; P_2\} \subset \Gamma_0^{(2)} \cap \Gamma_{30}^{(2)} \cap \Gamma_{31}^{(2)} \cap \Gamma_{32}^{(2)} \cap \Gamma_{33}^{(2)} \cap \Gamma_{34}^{(2)} \\
\Gamma_{13}^{(1)} &= \{P_1; P_3\} \subset \Gamma_1^{(2)} \cap \Gamma_{30}^{(2)} \cap \Gamma_{35}^{(2)} & \Gamma_{14}^{(1)} &= \{P_1; P_6\} \subset \Gamma_2^{(2)} \cap \Gamma_{31}^{(2)} \cap \Gamma_{36}^{(2)} \cap \Gamma_{37}^{(2)} \\
\Gamma_{15}^{(1)} &= \{P_1; P_7\} \subset \Gamma_3^{(2)} \cap \Gamma_{32}^{(2)} \cap \Gamma_{38}^{(2)} & \Gamma_{16}^{(1)} &= \{P_1; P_{12}\} \subset \Gamma_4^{(2)} \cap \Gamma_{33}^{(2)} \cap \Gamma_{35}^{(2)} \cap \Gamma_{36}^{(2)} \\
\Gamma_{17}^{(1)} &= \{P_1; P_{13}\} \subset \Gamma_5^{(2)} \cap \Gamma_{34}^{(2)} \cap \Gamma_{37}^{(2)} \cap \Gamma_{38}^{(2)} & \Gamma_{18}^{(1)} &= \{P_2; P_3\} \subset \Gamma_6^{(2)} \cap \Gamma_{30}^{(2)} \cap \Gamma_{39}^{(2)} \cap \Gamma_{40}^{(2)} \cap \Gamma_{41}^{(2)} \\
\Gamma_{19}^{(1)} &= \{P_2; P_6\} \subset \Gamma_{31}^{(2)} \cap \Gamma_{42}^{(2)} \cap \Gamma_{43}^{(2)} \cap \Gamma_{44}^{(2)} & \Gamma_{20}^{(1)} &= \{P_2; P_7\} \subset \Gamma_7^{(2)} \cap \Gamma_{32}^{(2)} \cap \Gamma_{39}^{(2)} \cap \Gamma_{45}^{(2)} \cap \Gamma_{46}^{(2)} \\
\Gamma_{21}^{(1)} &= \{P_2; P_9\} \subset \Gamma_{42}^{(2)} \cap \Gamma_{47}^{(2)} \cap \Gamma_{48}^{(2)} & \Gamma_{22}^{(1)} &= \{P_2; P_{11}\} \subset \Gamma_{40}^{(2)} \cap \Gamma_{45}^{(2)} \cap \Gamma_{49}^{(2)} \cap \Gamma_{50}^{(2)} \\
\Gamma_{23}^{(1)} &= \{P_2; P_{12}\} \subset \Gamma_{33}^{(2)} \cap \Gamma_{41}^{(2)} \cap \Gamma_{43}^{(2)} \cap \Gamma_{47}^{(2)} \cap \Gamma_{49}^{(2)} \cap \Gamma_{51}^{(2)} & \Gamma_{24}^{(1)} &= \{P_2; P_{13}\} \subset \Gamma_{34}^{(2)} \cap \Gamma_{44}^{(2)} \cap \Gamma_{46}^{(2)} \cap \Gamma_{48}^{(2)} \cap \Gamma_{50}^{(2)} \cap \Gamma_{51}^{(2)} \\
\Gamma_{25}^{(1)} &= \{P_3; P_7\} \subset \Gamma_8^{(2)} \cap \Gamma_{39}^{(2)} \cap \Gamma_{52}^{(2)} \cap \Gamma_{53}^{(2)} & \Gamma_{26}^{(1)} &= \{P_3; P_8\} \subset \Gamma_9^{(2)} \cap \Gamma_{52}^{(2)} \cap \Gamma_{54}^{(2)} \\
\Gamma_{27}^{(1)} &= \{P_3; P_{11}\} \subset \Gamma_{10}^{(2)} \cap \Gamma_{40}^{(2)} \cap \Gamma_{53}^{(2)} \cap \Gamma_{54}^{(2)} \cap \Gamma_{55}^{(2)} & \Gamma_{28}^{(1)} &= \{P_3; P_{12}\} \subset \Gamma_{11}^{(2)} \cap \Gamma_{35}^{(2)} \cap \Gamma_{41}^{(2)} \cap \Gamma_{55}^{(2)} \\
\Gamma_{29}^{(1)} &= \{P_5; P_8\} \subset \Gamma_{12}^{(2)} \cap \Gamma_{56}^{(2)} \cap \Gamma_{57}^{(2)} & \Gamma_{30}^{(1)} &= \{P_5; P_{11}\} \subset \Gamma_{13}^{(2)} \cap \Gamma_{56}^{(2)} \cap \Gamma_{58}^{(2)} \\
\Gamma_{31}^{(1)} &= \{P_5; P_{12}\} \subset \Gamma_{14}^{(2)} \cap \Gamma_{57}^{(2)} \cap \Gamma_{58}^{(2)} & \Gamma_{32}^{(1)} &= \{P_6; P_9\} \subset \Gamma_{15}^{(2)} \cap \Gamma_{42}^{(2)} \cap \Gamma_{59}^{(2)} \cap \Gamma_{60}^{(2)} \\
\Gamma_{33}^{(1)} &= \{P_6; P_{12}\} \subset \Gamma_{16}^{(2)} \cap \Gamma_{36}^{(2)} \cap \Gamma_{43}^{(2)} \cap \Gamma_{59}^{(2)} & \Gamma_{34}^{(1)} &= \{P_6; P_{13}\} \subset \Gamma_{17}^{(2)} \cap \Gamma_{37}^{(2)} \cap \Gamma_{44}^{(2)} \cap \Gamma_{60}^{(2)} \\
\Gamma_{35}^{(1)} &= \{P_7; P_8\} \subset \Gamma_{18}^{(2)} \cap \Gamma_{52}^{(2)} \cap \Gamma_{61}^{(2)} \cap \Gamma_{62}^{(2)} & \Gamma_{36}^{(1)} &= \{P_7; P_{10}\} \subset \Gamma_{19}^{(2)} \cap \Gamma_{61}^{(2)} \cap \Gamma_{63}^{(2)} \cap \Gamma_{64}^{(2)} \\
\Gamma_{37}^{(1)} &= \{P_7; P_{11}\} \subset \Gamma_{45}^{(2)} \cap \Gamma_{53}^{(2)} \cap \Gamma_{62}^{(2)} \cap \Gamma_{63}^{(2)} \cap \Gamma_{65}^{(2)} & \Gamma_{38}^{(1)} &= \{P_7; P_{13}\} \subset \Gamma_{20}^{(2)} \cap \Gamma_{38}^{(2)} \cap \Gamma_{46}^{(2)} \cap \Gamma_{64}^{(2)} \cap \Gamma_{65}^{(2)} \\
\Gamma_{39}^{(1)} &= \{P_8; P_{10}\} \subset \Gamma_{21}^{(2)} \cap \Gamma_{61}^{(2)} \cap \Gamma_{66}^{(2)} \cap \Gamma_{67}^{(2)} & \Gamma_{40}^{(1)} &= \{P_8; P_{11}\} \subset \Gamma_{22}^{(2)} \cap \Gamma_{54}^{(2)} \cap \Gamma_{56}^{(2)} \cap \Gamma_{62}^{(2)} \cap \Gamma_{66}^{(2)} \cap \Gamma_{68}^{(2)} \\
\Gamma_{41}^{(1)} &= \{P_8; P_{12}\} \subset \Gamma_{23}^{(2)} \cap \Gamma_{57}^{(2)} \cap \Gamma_{67}^{(2)} \cap \Gamma_{68}^{(2)} & \Gamma_{42}^{(1)} &= \{P_9; P_{12}\} \subset \Gamma_{24}^{(2)} \cap \Gamma_{47}^{(2)} \cap \Gamma_{59}^{(2)} \cap \Gamma_{69}^{(2)} \\
\Gamma_{43}^{(1)} &= \{P_9; P_{13}\} \subset \Gamma_{25}^{(2)} \cap \Gamma_{48}^{(2)} \cap \Gamma_{60}^{(2)} \cap \Gamma_{69}^{(2)} & \Gamma_{44}^{(1)} &= \{P_{10}; P_{11}\} \subset \Gamma_{63}^{(2)} \cap \Gamma_{66}^{(2)} \cap \Gamma_{70}^{(2)} \cap \Gamma_{71}^{(2)} \\
\Gamma_{45}^{(1)} &= \{P_{10}; P_{12}\} \subset \Gamma_{26}^{(2)} \cap \Gamma_{67}^{(2)} \cap \Gamma_{70}^{(2)} \cap \Gamma_{72}^{(2)} & \Gamma_{46}^{(1)} &= \{P_{10}; P_{13}\} \subset \Gamma_{27}^{(2)} \cap \Gamma_{64}^{(2)} \cap \Gamma_{71}^{(2)} \cap \Gamma_{72}^{(2)} \\
\Gamma_{47}^{(1)} &= \{P_{11}; P_{12}\} \subset \Gamma_{28}^{(2)} \cap \Gamma_{49}^{(2)} \cap \Gamma_{55}^{(2)} \cap \Gamma_{58}^{(2)} \cap \Gamma_{68}^{(2)} \cap \Gamma_{70}^{(2)} \cap \Gamma_{73}^{(2)} \\
\Gamma_{48}^{(1)} &= \{P_{11}; P_{13}\} \subset \Gamma_{50}^{(2)} \cap \Gamma_{65}^{(2)} \cap \Gamma_{71}^{(2)} \cap \Gamma_{73}^{(2)} & \Gamma_{49}^{(1)} &= \{P_{12}; P_{13}\} \subset \Gamma_{29}^{(2)} \cap \Gamma_{51}^{(2)} \cap \Gamma_{69}^{(2)} \cap \Gamma_{72}^{(2)} \cap \Gamma_{73}^{(2)}
\end{aligned}$$

4. 0 o'lchamli yoqlar – uchlari (nuqtalari):

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(0)} &= \{P_0\} \subset \Gamma_0^{(1)} \cap \Gamma_1^{(1)} \cap \Gamma_2^{(1)} \cap \Gamma_3^{(1)} \cap \Gamma_4^{(1)} \cap \Gamma_5^{(1)} \cap \Gamma_6^{(1)} \cap \Gamma_7^{(1)} \cap \Gamma_8^{(1)} \cap \Gamma_9^{(1)} \cap \Gamma_{10}^{(1)} \cap \Gamma_{11}^{(1)} \\
\Gamma_1^{(0)} &= \{P_1\} \subset \Gamma_0^{(1)} \cap \Gamma_{12}^{(1)} \cap \Gamma_{13}^{(1)} \cap \Gamma_{14}^{(1)} \cap \Gamma_{15}^{(1)} \cap \Gamma_{16}^{(1)} \cap \Gamma_{17}^{(1)} \\
\Gamma_2^{(0)} &= \{P_2\} \subset \Gamma_1^{(1)} \cap \Gamma_{12}^{(1)} \cap \Gamma_{18}^{(1)} \cap \Gamma_{19}^{(1)} \cap \Gamma_{20}^{(1)} \cap \Gamma_{21}^{(1)} \cap \Gamma_{22}^{(1)} \cap \Gamma_{23}^{(1)} \cap \Gamma_{24}^{(1)} \\
\Gamma_3^{(0)} &= \{P_3\} \subset \Gamma_2^{(1)} \cap \Gamma_{13}^{(1)} \cap \Gamma_{18}^{(1)} \cap \Gamma_{25}^{(1)} \cap \Gamma_{26}^{(1)} \cap \Gamma_{27}^{(1)} \cap \Gamma_{28}^{(1)} \\
\Gamma_4^{(0)} &= \{P_5\} \subset \Gamma_3^{(1)} \cap \Gamma_{29}^{(1)} \cap \Gamma_{30}^{(1)} \cap \Gamma_{31}^{(1)} \\
\Gamma_5^{(0)} &= \{P_6\} \subset \Gamma_4^{(1)} \cap \Gamma_{14}^{(1)} \cap \Gamma_{19}^{(1)} \cap \Gamma_{32}^{(1)} \cap \Gamma_{33}^{(1)} \cap \Gamma_{34}^{(1)} \\
\Gamma_6^{(0)} &= \{P_7\} \subset \Gamma_5^{(1)} \cap \Gamma_{15}^{(1)} \cap \Gamma_{20}^{(1)} \cap \Gamma_{25}^{(1)} \cap \Gamma_{35}^{(1)} \cap \Gamma_{36}^{(1)} \cap \Gamma_{37}^{(1)} \cap \Gamma_{38}^{(1)} \\
\Gamma_7^{(0)} &= \{P_8\} \subset \Gamma_6^{(1)} \cap \Gamma_{26}^{(1)} \cap \Gamma_{29}^{(1)} \cap \Gamma_{35}^{(1)} \cap \Gamma_{39}^{(1)} \cap \Gamma_{40}^{(1)} \cap \Gamma_{41}^{(1)} \\
\Gamma_8^{(0)} &= \{P_9\} \subset \Gamma_7^{(1)} \cap \Gamma_{21}^{(1)} \cap \Gamma_{32}^{(1)} \cap \Gamma_{42}^{(1)} \cap \Gamma_{43}^{(1)} \\
\Gamma_9^{(0)} &= \{P_{10}\} \subset \Gamma_8^{(1)} \cap \Gamma_{36}^{(1)} \cap \Gamma_{39}^{(1)} \cap \Gamma_{44}^{(1)} \cap \Gamma_{45}^{(1)} \cap \Gamma_{46}^{(1)} \\
\Gamma_{10}^{(0)} &= \{P_{11}\} \subset \Gamma_9^{(1)} \cap \Gamma_{22}^{(1)} \cap \Gamma_{27}^{(1)} \cap \Gamma_{30}^{(1)} \cap \Gamma_{37}^{(1)} \cap \Gamma_{40}^{(1)} \cap \Gamma_{44}^{(1)} \cap \Gamma_{47}^{(1)} \cap \Gamma_{48}^{(1)} \\
\Gamma_{11}^{(0)} &= \{P_{12}\} \subset \Gamma_{10}^{(1)} \cap \Gamma_{16}^{(1)} \cap \Gamma_{23}^{(1)} \cap \Gamma_{28}^{(1)} \cap \Gamma_{31}^{(1)} \cap \Gamma_{33}^{(1)} \cap \Gamma_{41}^{(1)} \cap \Gamma_{42}^{(1)} \cap \Gamma_{45}^{(1)} \cap \Gamma_{47}^{(1)} \cap \Gamma_{49}^{(1)} \\
\Gamma_{12}^{(0)} &= \{P_{13}\} \subset \Gamma_{11}^{(1)} \cap \Gamma_{17}^{(1)} \cap \Gamma_{24}^{(1)} \cap \Gamma_{34}^{(1)} \cap \Gamma_{38}^{(1)} \cap \Gamma_{43}^{(1)} \cap \Gamma_{46}^{(1)} \cap \Gamma_{48}^{(1)} \cap \Gamma_{49}^{(1)}
\end{aligned}$$

Shunday qilib quyidagi teorema o`rinlidir.

3.2-Teorema. $F(z)$ formaga mos keluvchi Kleyn ko`pyog'i $1 < z < 100$ oraliqda, 37 ta 3 o'lchamli giperyoqqa ega bo'ladi, 74 ta 2 o'lchamli yoqqa, 50 ta 1 o'lchamli yog'i (qirraga) va 13 ta uchdan (nuqtadan) iborat. Oxirgi nuqta uchi Λ -panjaraga nisbatan minimum bo'ladi. Bu nuqtalarda $F(Z)$ forma minimumiga erishadi va u 1 ga teng.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi sonlar geometriyasining bir jinsli minimumlari masalalaridan biri to'rtinchi darajali yoyiluvchi formalarning minimumini hisoblashga bag'ishlangan. Dissertatsiyada quyidagi natijalar olingan:

- Berilgan ko'phadning haqiqiy ildizlari orqali haqiqiy to'rt o'lchovli maydon qurilgan. Shu maydoning moduli qurilgan, uning bazisini qurishning umumiy sxemasi berilgan. Bu modul elementlari yordamida to'rt o'lchovli panjara qurilgan. Hosil bo'lgan panjaraning nisbiy minimumlari hisoblangan.
- Ishda panjaraning Kleyn ko'pyoqligni qurishning umumiy sxemasi ishlab chiqilgan. Berilgan panjaraning Kleyn ko'pyoqligi qurilgan. Ushbu ko'pyoqlikning uch o'lchovli gipertekisliklari, ikki o'lchovli yoqlari, bir o'lchovli qirralari va nol o'lchovli uchlari kompyuter algebrasi tizimlari yordamida hisoblab topilgan.
- Berilgan maydonda yoyiluvchan to'rtinchi darajali formaning minimumlarini beruvchi to'rt o'lchovli fazoda nuqtalarning koordinatalari topilgan. Ushbu nuqtalar Kleyn ko'pyoqligining uchlari iborat ekanligi ko'rsatilgan.

Magistrlik dissertatsiyasida ishlab chiqilgan metodlar, erishilgan natijalar va tuzilgan algoritmlardan sonlar geometriyasining bir jinsli minimumlarini tadqiqi qilishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. X.X. Рузимурадов. К проблеме подсчета числа точек алгебраических решеток в прямоугольниках. Узбекский математический журнал. 2008, №4.
2. X.X. Рузимурадов. К проблеме подсчета числа точек решетки в прямоугольниках и многогранники Клейна. Автореферат канд.диссертации.. Ташкент. 2009. 20 стр.
3. Methods of CAS for computing of projections of the four dimensional algebraic lattice. Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа. Тезисы докладов научно-практического семинара. – Самарканд, изд.СамГУ, 2012, с.79-80.
4. On the minimum of Decomposable Fourth-Degree Form. International Conference on Mathematical Sciences and statistics 2013-ICMSS2013. 5-7 February, 2013, Sunway Putra Hotel, Kuala Lumpur, Malaysia.
5. А.В.Малышев. Основные понятия и теоремы геометрии чисел. Труды Петрозаводского государственного университета. Серия математика. Выпуск 4, 1997,- 40 стр.
6. Касселс Дж. В. С Введение в геометрию чисел. М., 1965. 421с
7. Gruber P.M. Geometry of *Number*// Contributions to geometry (proc. Geom. Sump. Siegen.1978). Basel.1979. P.186-225.
8. З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич. Теория чисел, Москва 1964.
9. Parusnikov, V.I.: Klein polyhedra for complete decomposable forms. *Number theory. Dyophantine, Computational and Algebraic Aspects*. Berlin, New York (1998) 453--463.
10. В.И. Парусников. Четырехмерное обобщение цепных дробей. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.
11. Рузимурадов Х.Х., Журакулов М. Многогранник Клейна одной разложимой формы четвертой степени и ее минимумы. Материалы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения», 2015 год.
12. Рузимурадов Х.Х., Журакулов М. Вычисление минимумов разложимых форм четвертой степени методами компьютерной алгебры. Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnologiyalar yordamida o'qitish muommalari Respublika-ilmiy amaliy konferensiyasi materiallari to'plami.
13. Ro'zimurodov.X.X.,Juraqulov.M. Kleyn ko'pyoqligi va to'rtinchi daraja forma minimumlarini hisoblash.Tabiiy va aniq fanlarni o'qitishning dolzarb masalalari Respublika-ilmiy amaliy konferensiyasi materiallari to'plami.

Internet manzili:

<http://www.mapled.com>

<http://www.webmath.exponenta.ru>

<http://www.exponenta.ru>

