

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**Qo'lyozma huquqida
517.9+519.21**

RAXIMOVA UMIDA ZIYODULLAEVNA

**INTERVAL AKSLANTIRISHLARIGA DOIR BA'ZI EHTIMOLLIK
MASALALARI**

**5A460104- «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» mutaxassisligi bo'yicha
magistr akademik darajasini olish uchun yozgan**

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

**Dissertatsiya kafedra komissiyasida ko'rib
chiqildi va himoyaga tavsiya etildi**

**ilmiy rahbar: A.S. Begmatov
ilmiy maslahatchi: H.A. Ahadqulov**

**Ehtimollar nazariyasi va matematik
statistika kafedrsi mudiri**

prof. J.I.Abdullaev

SAMARQAND- 2013

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
-------------	---

I- BOB. DINAMIK SISTEMALAR NAZARIYASIDAN KERAQLI TUSHUNCHALAR

§1.1. Dinamik sistema ta'rifi	8
§1.2. Bir o'lchovli dinamik sistema traektoriyalari	18
§1.3. Belgilar dinamikasi	25

II- BOB. DINAMIK SISTEMANING QAYTISH VAQTI VA CHIQISH KO'RSATKICHI

§2.1. Puankare qaytish vaqti.....	32
§2.2. Ochiq dinamik sistema. Chiqish ko'rsatkichi.....	34
§2.3. $\bar{T}_m$ interval akslantirishning davriy nuqtalari.....	39

III- BOB. INTERVAL AKSLANTIRISHLARI UCHUN CHIQISH KO'RSATKICHI

§3.1. Markov bo'linishlari ketma-ketligi.....	43
§3.2. Markov bo'linishi uchun belgilar dinamikasi, chiqish ko'rsatkichi va so'zlar kombinatorikasi.....	47
§3.3. T_m interval akslantirishi uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichi.....	52

XULOSA.....	56
-------------	----

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	58
---	----

KIRISH

1. Masalaning dolzarbligi. Bir o'lchovli dinamik sistemalar nazariyasi noxiziqli dinamikaning eng foydali vositasidan biri hisoblanadi, chunki, bir tomondan, bunday sistemalar bir o'lchovli dinamik sistemalarni yetarlicha to'la ifodalashga imkon beradi, ikkinchi tomondan esa, noxiziqlilik ta'sirlarining asosiy qiyinchiliklarini aks ettiradi. Intervalni o'ziga o'tkazuvchi uzluksiz akslantirishlar iteratsiyalari dinamik sistemaga eng oddiy misol bo'ladi. Interval akslantirishlar orqali aniqlanadigan ochiq dinamik sistemalar uchun faqatgina invariant o'lchovlar va chiqish ko'rsatkichining mavjudligi va xossalari o'rganilgan([2], [7], [8], [11], [12], [13], [14], [15], [25], [28], [30]).

Bir o'lchovli dinamik sistemalar nazariyasida nuqtaning (yoki to'planning) Puankare qaytish vaqti muhim hisoblanib, u turli akslantirishlar uchun o'rganilgan. Shu bilan birga dinamik sistemaning tirqishdan chiqish ko'rsatkichi deb ataluvchi ehtimollik o'lchovini o'rganish dinamik sistemalar nazariyasining navbatdagi muhim masalalardan biri hisoblanadi.

Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining xossalari $\bar{T}x = \{2x\}$, $x \in [0,1]$ akslantirish uchun L.A. Bunimovich va A. Yurchenko ishlarida o'rganilgan bo'lib, chiqish ko'rsatkichi tirqishning o'lchamiga bog'liq bo'lmasdan faqat uning joylashish o'rniga bog'liq ekanligi ko'rsatilgan([9]). Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining bunday xossalarini $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in Z_+ \setminus \{0,1\}$ akslantirish uchun o'rganish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi.

2. Masalaning qo'yilishi. $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in Z_+ \setminus \{0,1\}$ interval akslantirishi bilan berilgan $([0,1], \bar{T}_m)$ dinamik sistemaning Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining xossalarini $[0,1]$ intervalning Markov bo'linishlari elementlari uchun o'rganish.

3. Ishning maqsad va vazifalari. $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0,1\}$ akslantirish yordamida $[0,1]$ intervalning Markov bo'linishlari ketma-ketligi kiritilib, bu bo'linish elementlarining Puankare qaytish vaqti, so'zlar kombinatorikasi va belgilar dinamikasining xossalarini, $\bar{T}_m$ akslantirish davriy nuqtalarning ko'rinishi va xossalarini o'rganish, $[0,1]$ intervalning Markov bo'linishlari elementlarining va $\bar{T}_m$ akslantirishning bu xossalaridan foydalanib, $([0,1], \bar{T}_m)$ dinamik sistemaning tirqishdan chiqish ko'rsatkichlari xossalari haqidagi teoremlarni isbotlash.

4. Ilmiy tadqiqot metodlari. Maskur dissertatsiya ishini bajarishda bir o'lchovli dinamik sistemalar, ergodiklik nazariyasining usullaridan hamda nochiziqli analizning so'zlar kombinatorikasi, belgilar dinamikasi usullaridan foydalaniladi.

5. Ishning ilmiy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiya ishida olingan natijalar yangi bo'lib, ulardan bir o'lchovli dinamik sistemalar va interval akslantirishlarning ehtimollik xossalarini o'rganishda foydalanish mumkin.

6. Ishning amaliy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiya ishida olingan natijalardan bir o'lchovli dinamik sistemalar va interval akslantirishlarning amaliyotdagi tadbirlarida foydalaniladi.

7. Ishning tuzilishi. Ushbu magistrlik dissertatsiya ishi kirish qismi, 9 ta paragrafga ajratilgan 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Birinchi bob uchta(1.1-1.3) paragrafdan iborat bo'lib, bir o'lchovli dinamik sistemalar nazariyasining muhim obyektlaridan bo'lgan dinamik sistema, trayektoriya va nuqtalarning (intervalarning) trayektoriylarini belgilar orqali ifodalashga asoslangan belgilar dinamikasi tushunchalari va xossalari organilgan.

Ikkinchi bob uchta(2.1- 2.3) paragrafdan iborat bo'lib, bu paragraflarda diskret vaqtli dinamik sistemalar uchun Puankare qaytish vaqti va o'tish ko'rsatkichlari o'rganilgan. Shu bilan birga bu bobning oxirgi bo'limida $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ interval akslantirishining davriy nuqtalari o'rganilgan.

Uchunchi bob uchta(3.1- 3.3) paragrafdan iborat bo‘lib, avval unda $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0,1\}$ formula bilan berilgan $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ interval akslantirishi uchun Markov bo‘linishlari ketma-ketligi aniqlangan bo‘lib, Markov bo‘linishi elementlari uchun belgilar dinamikasi va so‘zlar kombinatorikalarining xossalari o‘rganilgan. Bu xossalardan foydalanib, oxirgi bo‘limda $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ akslantirish uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko‘rsatkich o‘rtasidagi munosabatni ifodalovchi teoremlar isbotlangan. Ularga asosan, Markov bo‘linishi $I_{i,N}$ elementlarining $\rho(I_{i,N})$ chiqish ko‘rsatkichlari $I_{i,N}$ elementning o‘lchamiga bog‘liq bo‘lmasdan, uning joylashish holatiga bog‘liq bo‘ladi. Shu bilan birga, tirqishning chiqish ko‘rsatkichi tirqishning o‘lchamiga asimptotik proporsional bo‘ladi.

8. Olingan natijalarning qisqacha bayoni. Ushbu magistrlik dissertatsiya ishida $[0,1]$ intervalning Markov bo‘linishlari ketma-ketligi elementlarining $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ akslantirish uchun chiqish ko‘rsatkichlarining xossalari o‘rganilgan.

$(\bar{M}, G, \lambda)$ - o‘lchovli fazo va $\bar{T} : M \rightarrow M$ akslantirish berilgan bo‘lsin. $A \in G$ qism to‘plamning *Puankare qaytish vaqti* deb, ushbu

$$\tau(A) = \inf_{n \geq 1} \left\{ n : \lambda(\bar{T}^n(A) \cap A) > 0 \right\}$$

tenglik bilan aniqlanadigan butun musbat $\tau(A)$ songa aytiladi.

Faraz qilaylik, $A \in G$ o‘lchovli to‘plam va $M = \bar{M} \setminus A$ bo‘lsin. Ochiq dinamik sistema(A «tirqishli» sistema)ni quyidagicha aniqlayniz:

$$T : M \rightarrow \bar{M}$$

bu yerda $T := T|_M$ - akslantirish $\bar{T}$ ning M to‘plamdagi qisqarishi.

Ixtiyoriy $n \geq 0$ va $A \in B$ to‘plam uchun ushbu to‘plamlarni kiritamiz:

$$\Omega_n(A) = \left\{ x \in \bar{M} : \exists j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n, \bar{T}^j(x) \in A \right\} = \bigcup_{i=0}^n \bar{T}^{-i}(A)$$

Agar $\rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(\overline{M} \setminus \Omega_n(A))$ limit mavjud bo'lsa, bu limitning qiymatiga (M, T) dinamik sistemaning A to'plamdan (tirqishdan) *chiqish ko'rsatkichi* deb ataladi.

Ixtiyoriy N natural sonni tayinlaymiz va $[0,1]$ ning $\tilde{I}_N = \{I_{i,N}\}_{i=1}^{m^N}$ Markov bo'linish elementlarini $\left\{ \left[0, \frac{1}{m}\right], \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \dots, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right] \right\}$ intervalning T^N ga nisbatan proobrazlaridan tuzilgan $I_{i,N} = \left[\frac{i-1}{m^N}, \frac{i}{m^N}\right]$, $i = 1, \dots, m^N$ ko'rinishdagi to'plamlar orqali hosil qilamiz.

Endi Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlari orasidagi bog'liqlikni ko'rsatadigan asosiy teoremlarni keltiramiz.

3.3.1-teorema. Faraz qilaylik, $I_{i,N}$ va $I_{j,N}$ to'plamlar T akslantirishning ikkita Markov tirqishlari bo'lib, ular uchun $\tau(I_{j,N}) > \tau(I_{i,N})$ bo'lsin. U holda

$$\rho(I_{j,N}) \geq \rho(I_{i,N})$$

munosabat o'rinli. Bundan tashqari, barcha $n \geq \tau(I_{i,N})$ lar uchun

$$1 - \lambda(\Omega_n(I_{j,N})) < 1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N}))$$

bo'ladi.

Bu teorema chiqish ko'rsatkichi faqat tirqishning o'lchamiga bog'liq bo'lib, uning joylashish holatiga bog'liq emasligi tasdiqlaydi.

Quyidagi teorema tirqishning o'lchami kichraygan sari chiqish ko'rsatkichi ham asimptotik ravishda unga proporsional bo'lishini ko'rsatadi.

3.3.2-teorema. $x \in [0,1]$ va $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - ichma-ich joylashgan to'plamlar ketma-ketligi bo'lib, $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) agar x nuqta davri m ga teng bo'lgan davriy nuqta bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1 - \frac{1}{2^m};$$

b) agar x nuqta davriy nuqta bo'lmasa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1.$$

I- BOB.
DINAMIK SISTEMALAR NAZARIYASIDAN
KERAKLI TUSHUNCHALAR

§1.1. Dinamik sistema ta'rifi

Ergodik nazariya o'lchovli fazolardgi harakatlarni o'rganadi. Shuning uchun dastlab o'lchovli fazo tushunchasiga to'xtalib o'tamiz.

Biz M abstrakt fazo berilgan deb hisoblaymiz, uning nuqtalarini $x, y, z, \dots$ harflar bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, μ o'lchov aniqlangan M fazoning G qism to'plamlari sistemasida biror σ -algebra ajratilgan bo'lsin. Odatda μ o'lchov normallashtirilgan deb faraz qilamiz $\mu(M)=1$ va to'la, ya'ni o'lchovi nolga teng to'plamlarning barcha qism to'plamlari G ga tegishli bo'lsin deb faraz qilinadi.

Ba'zida biz μ o'lchovi cheksizga teng bo'lgan, lekin M ni chekli o'lchovli sanoqli sondagi to'plamlar birlashmasi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lgan M fazolarni qaraymiz. Bunday fazolar σ -chekli o'lchovli fazolar deb ataladi.

O'lchovli fazo odatda (M, G, μ) ko'rinishda yoziladi. Agar M fazoda G , σ -algebra ajratilgan bo'lsa, μ o'lchov esa berilmagan bo'lsa, u holda (M, G) o'lchovli fazo deb ataladi.

Endi ergodik nazariyada ko'p uchraydigan o'lchovli fazolarga misollar keltirish maqsadga muvofiq.

1.1.1-misol. M - normallashtirilgan μ Xaar o'lchovli kompakt topologik guruppa. G , σ -algebra sifatida μ o'lchov bo'yicha M fazoning borel σ -algebrasining to'ldiruvchisini olamiz. Bu algebrani borel σ -algebrasi deb ataymiz.

Xususan, M fazo m -o'lchovli bo'lishi mumkin. $Tor^m = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{m \text{ marta}}$, unda

$x_1, \dots, x_m$ tabiiy siklik koordinatalar kiritilgan. Bu koordinatalarda $d\mu = dx_1 \dots dx_m$.

1.1.2-misol. M fazo- C^∞ sinfning m -o'lchovli kompakt yopiq yo'nalishli ko'pxilligi. μ o'lchovning differensial $d\mu = p(x)dx_1 \dots dx_m$ ko'rinishda beriladi, bu yerda $x_1, \dots, x_m$ yo'l qo'yiladigan lokal koordinatalar sistemasi, $p(x)$ - cheksiz differensiallanuvchi funksiya.

Bu yerda G -borel σ -algebra, ya'ni μ o'lchov bo'yicha borel to'plamlar σ -algebrasining to'ldiruvchisi.

Bu misollarni aniqlashtiramiz. Faraz qilaylik, M fazo- C^∞ sinfning m -o'lchovli kompakt yopiq yunalishli ko'pxilligi bo'lsin. Yo'l qo'yiladigan koordinatalarda metrika $ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}dx_i dx_j$ ko'rinishda bo'ladi. Riman metrikasi

bilan hosil bo'lgan μ_0 o'lchovning differensial $d\mu_0 = \sqrt{\det\|g_{ij}\|} dx_1 \dots dx_m$ ko'rinishga ega. Ko'pincha biz $d\mu = p(x)d\mu_0$, ya'ni μ_0 o'lchov bo'yicha zichlik bilan berilgan o'lchovlarni qaraymiz.

Ergodik nazariyaning markaziy tushunchasi o'lchovli fazoning avtomorfizm tushunchasi hisoblanadi.

1.1.1-ta'rif. (M, G, μ) o'lchovli fazoning avtomorfizmi deb, M fazoni o'z-o'ziga shunday o'zaro bir qiymatli T akslantirishiga aytiladiki, har qanday $A \in G$ to'plam uchun TA , $T^{-1}A$ to'plamlar G ga tegishli bo'ladi va

$$\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A)$$

Bu holda μ o'lchov T avtomorfizmning invariant o'lchovi deb ataladi.

1.1.3-misol. M fazo normallashtirilgan μ Lebeg o'lchovi aniqlangan m -o'lchovli tor Tor^m va T almashtirish $x_1, \dots, x_m$ siklik koordinatalarda

$$T(x_1, \dots, x_m) = (x_1 + \alpha_1 \pmod{1}, \dots, x_m + \alpha_m \pmod{1})$$

formula bilan berilgan bo'lsin. Bu yerda $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - haqiqiy sonlar. Ravshanki, T - avtomorfizm (ya'ni μ o'lchov invariant). Bu avtomorfizm *tordagi siljish* deb ataladi. $m=1$ bo'lganda (ya'ni $M = S^1$) T avtomorfizm *aylanada burish* deb ataladi.

1.1.4-misol. M fazo C^∞ sinfnining m -o'lchovli kompakt yopiq yunalishli ko'pxilligi. T akslantirish C^∞ sinfnining diffeomorfizmi. Agar $x^{(0)} \in M$ nuqtaning atrofida yo'l qo'yiladigan koordinatalar $(x_1, \dots, x_m)$, $y^{(0)} = Tx^{(0)}$ nuqtaning atrofida yo'l qo'yiladigan koordinatalari $(y_1, \dots, y_m)$ bo'lsa, u holda T akslantirish C^∞ funksiyalar $f_k, k=1, 2, \dots, m$ bilan lokol beriladi:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_m), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Agar $d\mu$ o'lchov differensial $p > 0$ zichlik bilan berilsa (2-misol), u holda μ o'lchovning invariantligi

$$\det \left\| \frac{df_k}{dx_l} \right\|_{x=x^{(0)}} = \frac{p(y^{(0)})}{p(x^{(0)})}$$

ko'rinishni bo'ladi.

1.1.2-ta'rif. M fazoning endomorfizmi deb, M fazoni o'z-o'ziga bir qiymatli (o'zaro bir qiymatili bo'lishi shart emas) shunday T akslantirishga aytiladiki, har qanday $A \in G$ uchun $T^{-1}A$ to'plam G ga tegishli bo'ladi va

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda $T^{-1}A$ - A to'plamning to'la proobrazi.

1.1.5-misol. M fazo μ Lebeg o'lchovli S^1 birlik aylana bo'lsin. M ni $0 \leq x < 1$ yarim oraliq bilan ayniylashtiramiz va T almashtirishni $Tx = 2x \pmod{1}$ formula bilan aniqlaymiz. Bunday almashtirishda uzunligi $\frac{1}{2}$ dan kichik har bir $\Delta \in S^1$ kesma ikkilangan uzunlikdagi kesmaga o'tadi va har bir $\Delta^1 \in S^1$ kesma uchun T ta'sirida Δ^1 ga o'tadigan yarim uzunlikdagi ikkita kesma mavjud bo'ladi. Bundan μ Lebeg o'lchovining T ga nisbatan invariantligi kelib chiqadi.

1.1.3-ta'rif. $\{T^t\}, t \in R^1$ akslantirishlar o'lchovli (M, G, μ) fazoning bir parametri avtomorfizmlar gruppasi bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $t, s \in R^1$ va $x \in M$ lar uchun $T^{t+s}x = T^t(T^s x)$ bo'lsin. U holda $\{T^t\}, t \in R^1$ akslantirishlar oqim deb ataladi, agar M dagi ixtiyoriy $f(x)$ o'lchovli funksiya uchun $f(T^t x)$ funksiya $M \times R^1$ to'g'ri ko'paytmada o'lchovli bo'lsa.

Bu ta'rifdagi o'lchovlilik shartini unga teng kuchli quyidagi shaklda bayon etish mumkin: $\psi(x, t) = T^t x$ formula bilan berilgan $\psi: M \times R_+^1 \rightarrow M$ akslantirish o'lchovli.

1.1.4-ta'rif. $\{T^t\}, t \in R_+^1$ akslantirishlar o'lchovli (M, G, μ) fazoning bir parametri avtomorfizmlar yarim gruppasi bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $t, s \in R_+^1$ va $x \in M$ lar uchun $T^{t+s}x = T^t(T^s x)$ bo'lsin. U holda $\{T^t\}, t \in R_+^1$ akslantirishlar yarim oqim deb ataladi, agar M dagi ixtiyoriy $f(x)$ o'lchovli funksiya uchun $f(T^t x)$ funksiya $M \times R_+^1$ to'g'ri ko'paytmada o'lchovli bo'lsa.

1.1.1-1.1.4 ta'riflarda ergodik nazariyada o'rganiladigan to'rtta obyekt kiritilgan: avtomorfizm, endomorfizm, oqim va yarim oqim. Quyida «dinamik sistema» deb bu obyektlardan ixtiyoriy bittasiga aytiladi. O'lchovli fazolarning o'zi esa, dinamik sistemaning fazoviy fazosi deb ataladi.

Bitta avtomorfizm(endomorfizm) bilan hosil qilingan siklik gruppalar(yarim gruppalar) ko'pincha diskret vaqtli dinamik sistema deb, oqim(yarim oqim) esa uzluksiz vaqtli dinamik sistema deb ataladi.

Ba'zida μ o'lchov berilmasa, (M, G) o'lchovli fazoda almashtirishlar (hamda bir parametrli gruppalar va o'rin almashtirishlar gruppalar) qaraladi. Agar bunday almashtirishlar (gruppalar, yarim gruppalar) uchun 1.1.1-1.1.4 ta'riflardagi o'lchovlik shartlar bajarilsa, u holda biz ularni o'lchovli dinamik sistemalar deb ataymiz.

Ba'zi hollarda yuqorida kiritilgan oqim tushunchasida umumiyroq «uzluksiz oqim» tushunchasi muhim hisoblanadi. (M, G, μ) fazoda amal qiluvchi ikkita T_1, T_2 avtomorfizmlarni ustma-ust tushuvchi (mod 0) deb aytishni shartlashib

olamiz, agar shunday $M' \in G$, $\mu(M')=1$ to'plam topilsaki, barcha $x \in M'$ lar uchun $T_1 x = T_2 x$ tenglik o'rili bo'lsa.

1.1.5-ta'rif. O'lchovli (M, G, μ) fazoning $\{T^t\}$, $t \in R_+^1$ avtomorfizmlar oilasi uzluksiz oqim deyiladi, agar ixtiyoriy $t_1, t_2 \in R^1$ uchun $T^{t_1+t_2}$ va $T^{t_1} T^{t_2}$ avtomorfizmlar ustma-ust tushsa (mod 0).

1.1.6-misol. M fazo C^∞ sinfnining m -o'lchovli kompakt yopiq yo'nalishli ko'pxilligi. X fazo C^∞ ning M dagi vektor maydoni bo'lsin. Ushbu differensial tenglamalar sistemasini

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

yoki lokal koordinatalarda

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, \dots, x_m), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, \dots, x_m), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= X_m(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$T^t (-\infty < t < +\infty)$ avtomorfizm ta'siri shunday bo'lsinki, ixtiyoriy $x \in M$ nuqtani $x(0) = x$ boshlang'ich shartli (1) sistema yechimining t momentdagi qiymati bo'lgan $x(t)$ nuqtaga o'tkazsin. Gruppa munosabati bajarilsini oson ko'rish mumkin, chunki (1) sistemaning o'ng qismlari t ga bog'liq emas.

Ravshanki, $\{T^t\}$ akslantirish oqim bo'ladi. Bu oqim uchun invariantlik sharti quyidagi teorema bilan beriladi.

1.1.1-teorema(Liuvill teoremasi [1], [2]). C^∞ sinfdagi p zichlikka ega μ o'lchov, ya'ni $d\mu = p(x)dx_1 \dots dx_m$ differensialli μ o'lchov $\{T^t\}$ ga nisbatan invariant bo'lishi uchun $\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \{pX_k\} = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

(1.1.1) ko'rinishdagi sistemalarning muhim xususiy holini qaraymiz. M fazo m – o'lchovli tor Tor^m tor bo'lsin va (1.1.1) differensial tenglamalar sistemasi $x_1, \dots, x_m$ koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dt} &= \alpha_1, \\ \frac{dr_2}{dt} &= \alpha_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dr_m}{dt} &= \alpha_m\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

bu yerda $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ -haqiqiy sonlar. $\{T^t\}$ oqimga mos keluvchi invariant o'lchov Lebeg o'lchovi bo'lishi aniq. (1.1.2) tenglamalar sistemasiga mos keluvchi tordagi harakat shartli davriy harakat deb ataladi, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sonlar esa bu harakatning chastotalari deyiladi.

1.1.7-misol. M fazo $x(s)$, $s \in R^1$ haqiqiy qiymatli funksiyalar fazosi, $\{T^t\}$ akslantirish siljishlarning bir parametrlil gruppasi, ya'ni $T^t x(s) = x(s+t)$. M da

$$\{x(s) : a_1 < x(s_1) < b_1, \dots, a_r < x(s_r) < b_r\}$$

ko'rinishdagi barcha mumkin bo'lgan to'plamlarni ochiq deb, topologiya kiritish mumkin, bu yerda $s_1, \dots, s_r, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in R^1$. Bu topologiya M ning qism to'plamlaridan tuzilgan G borel σ – algebrasi ni hosil qiladi. G da berilgan va $\{T^t\}$ gruppasi nisbatan invariant μ o'lchov statsionar deb ataladi(yoki tor ma'noda statsionar). $\{T^t\}$ akslantirish μ invariant o'lchovli oqim bo'lishini tekshirish mumkin.

Dinamik sistema tushunchasi shunchalik umumiyki, mazmunli natijalar olish uchun sistemaga u yoki bu qo'shimcha shartlar qo'yiladi. Lekin umumiy holda o'rinli bo'lgan muhim, lekin oddiy tasdiq – qaytish haqidagi Puankare teoremasi mavjud.

1.1.6-ta'rif. T akslantirish (M, G, μ) fazoning endomorfizmi va $A \in G$ bo'lsin. $x \in A$ nuqta qaytuvchi (A to'plamga) deyiladi, agar hech bo'lmaganda bitta $n > 0$ uchun $T^n x \in A$ bo'lsa.

1.1.2-teorema(qaytish haqidagi Puankare teoremasi, [2]). Ixtiyoriy T endomorfizm va ixtiyoriy $A \in G$ uchun deyarli barcha (μ o'lchov bo'yicha) $x \in A$ nuqtalar qaytuvchi.

Isbot. N orqali A ga qaytmaydigan barcha nuqtalardan iborat A to'plamning qism to'plamini belgilaymiz. U holda $N \in G$, chunki $N = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(M \setminus A) \right)$. Agar $x \in N$ bo'lsa, $T^n x$, $n=1,2,\dots$ ko'rinishdagi nuqtalar A ga tegishli bo'lmayadi va $T^n x \notin N$, ya'ni $x \notin T^{-n}N$. Demak, $N \cap T^{-n}N = \emptyset$, $n=1,2,\dots$. Bundan $N, T^{-1}N, T^{-2}N, \dots$ to'plamlar juft-juft bilan kesishmasligi kelib chiqadi. Haqiqatdan, $0 \leq n_1 \leq n_2$ bo'lganda $T^{-n_1}N \cap T^{-n_2}N = T^{-n_1}(N \cap T^{-(n_2-n_1)}N) = \emptyset$. Shuning uchun

$$1 \geq \mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}N \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N).$$

Oxirgi tengsizlik faqat $\mu(N) = 0$ bo'lganda bajarilishi mumkin. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan barcha $x \in A$ nuqtalar A ga cheksiz ko'p marta qaytishi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $k \geq p$ larda $T^k x \notin A$ bo'lsa, u holda x nuqata T^p endamorfizm uchun qaytmaydigan nuqta. 1.1.2 teoremaga ko'ra bunday nuqtalar o'lchovi 0 ga teng.

Bu eslatmadan foydalanib quyidagi foydali tasdiqni isbotlaymiz.

1.1.1-lemma. Agar $f(x)$ - M dagi musbat o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in M$ lar uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(T^k x) = \infty \quad (1.1.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $A_m = \left\{ x \in M : f(x) \geq \frac{1}{m} \right\}$, $m=1,2,\dots$ to'plamlarni qaraymiz. A_m ga

cheksiz marta qatuvchi ixtiyoriy $x \in A_m$ nuqta uchun ravshanki, (1.1.3) tenglik

o‘rinli. Lekin deyarli barcha $x \in A_m$ nuqtalar bu xossaga ega. $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = M$ bo‘lganligidan, lemma isbotiga kelamiz.

Abstrakt ergodik nazariyada markaziy muammo dinamik sistemalarni sinflash hisoblanadi. Ba’zida turli fazoviy fazolarda amal qilayotgan dinamik sistemalkarni aynanlashtirish imkoniyatiga ega bo‘lish foydali. Shuning uchun quyidagi ta’rif kiritiladi.

1.1.7-ta’rif. $\{T_1^t\}, \{T_2^t\}$ akslantirishlar mos ravishda (M_1, G_1, μ_1) va (M_2, G_2, μ_2) fazolarda amal qiluvchi va ikkalasi ham bir vaqtda yoki diskret vaqtli yoki uzluksiz vaqtli dinamik sistemalar bo‘lsin. Bu sistemalar metrik izomorf deyiladi, agar shunday $M'_1 \in G_1, \mu_1(M'_1)=1$ va $M'_2 \in G_2, \mu_2(M'_2)=1$ to‘plamlar hamda ixtiyoriy $t, x^{(1)} \in M'_1, x^{(2)} \in M'_2$ lar uchun $T_2^t \varphi(x^{(1)}) = \varphi(T_1^t x^{(1)})$, $T_1^t \varphi^{-1} x^{(2)} = \varphi^{-1} T_2^t x^{(2)}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladigan o‘lchovli fazolarning $\varphi: (M'_1, G_1, \mu_1) \rightarrow (M'_2, G_2, \mu_2)$ izomorfizmi mavjud bo‘lsa.

1.1.8-misol. M_1 fazo y_i koordinatalari 0 yoki 1 ga teng ikki tomonli $x = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ ketma-ketliklar fazosi va M_1 dagi μ o‘lchov $\{0,1\}$ dagi sanoqli sondagi bir xil σ o‘lchovlar to‘g‘ri ko‘paytmasidan: $\sigma(\{0\}) = \sigma(\{1\}) = \frac{1}{2}$ iborat bo‘lsin. T_1 avtomorfizm- bu siljish, ya’ni $T_1(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) = (\dots, y'_{-1}, y'_0, y'_1, \dots)$, bu yerda $y'_i = y_{i+1}, -\infty < i < \infty$.

M_2 fazo sifatida normallangan Lebeg o‘lchovli $0 \leq x_1, x_2 < 1$ birlik kvadratik olamiz, unda T_2 avtomorfizm

$$T_2(x_1, x_2) = \begin{cases} (2x_1 \pmod{1}, \frac{1}{2}x_2), & \text{agar } x_1 \in [0, \frac{1}{2}), \\ (2x_1 \pmod{1}, \frac{1}{2}(x_2 + 1) \pmod{1}), & \text{agar } x_1 \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu avtomorfizm ba’zida *Pikar almashtirishi* deb ataladi.

Ushbun

$$\varphi(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{2^{k+1}}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{-k}}{2^k} \right)$$

ko‘rinishda aniqlangan va butun M_1 dagi sanoqli sondagi nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda bir qiymatli bo‘lgan $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ almashtirish T_1 va T_2 avtomorfizmlarning metrik izomorfizmini aniqlashini tekshirib ko‘rish mumkin.

1.1.9-misol. M_1 fazo y_i koordinatalari 0 yoki 1 ga teng bir tomonli $x = (y_0, y_1, \dots)$ ketma-ketliklar fazosi va M_1 dagi μ o‘lchov $\{0,1\}$ dagi sanoqli sondagi bir xil σ o‘lchovlar to‘g‘ri ko‘paytmasidan: $\sigma(\{0\}) = \sigma(\{1\}) = \frac{1}{2}$ iborat bo‘lsin. T_1 endomorfizm- bu bir tomonli siljish, ya‘ni $T_1(y_0, y_1, \dots) = (y_1, y_2, \dots)$. T_2 endomorfizm normallashtirilgan Lebeg o‘lchovli $M_2 = [0, 1]$ fazoda $T_2 x = 2x \pmod{1}$ formula bilan beriladi. Ishonch hosil qilish mumkinki, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ izomorfizm

$$\varphi(y_0, y_1, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{2^{k+1}}$$

formula bilan beriladi.

Agar ixtiyoriy dinamik sistema uchun ham qandaydir xossa(sonli harakteristika va h.k.lar) metrik izomorf sistemalarda bir xil bo‘lsa, u holda bu xossa(sonli harakteristika va h.k.lar) dinamik sistemaning metrik invariantlari deb ataladi.

UMUMLASHTIRISHLAR

G - grupp(yoki yarim grupp) bo‘lib, uning qism to‘plamlaridan borel σ - algebrasi ajratilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy M o‘lchovli fazo uchun $M \times G$ to‘g‘ri ko‘paytmani qism to‘plamlari tabiiy σ -algebrasi aniqlangan bo‘ladi.

1.1.8-ta’rif. O‘lchovli M fazo G -fazo deyiladi, agar quyidagi xossalarga ega bo‘lgan $\varphi: G \times M \rightarrow M$ o‘lchovli akslantirish aniqlangan bo‘lsa:

1. ixtiyoriy $g \in G$ da $T_g x = \varphi(g, x)$ munosabat bilan aniqlangan $T : M \rightarrow M$ akslantirish M fazoning endomorfizmi bo'ladi.

2. T_g akslantirishlar G gruppasi(yarim gruppasi) ifodalanishni beradi, ya'ni barcha $g_1, g_2 \in G$ larda $T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$.

Agar G – gruppasi bo'lsa, u holda gruppasi xossasidan T_g akslantirishlar M fazoning avtomorfizmlar bo'lishi kelib chiqadi.

$\{T_g\}$ almashtirishlar gruppasi(yarim gruppasi) M dagi G -oqim(G -yarim oqim) deb ataladi.

Faraz qilaylik, M da G , σ -algebradan tashqari qandaydir qo'shimcha tuzilma mavjud bo'lsin, masalan, M kompakt metrik fazo bo'lsin. U holda M dagi ixtiyoriy o'lchov M dagi uzluksiz funksiyalar komutativ normallashtirilgan $C(M)$ xalqasida chiziqli musbat normallashtirilgan funksionalni hosil qiladi. Ixtiyoriy T avtomorfizm bu funksionalni saqlovchi halqaning avtomorfizmini hosil qiladi.

Agar endi berilgan obyekt deb komutativ normallashtirilgan halqani, masalan, nokomutativ C^* -algebrani va unda chiziqli musbat normallashtirishga funksionalni olsak, so'ngra bu C^* -algebraning avtomorfizmlarini qarasak, u holda biz nokomutativ ergodik nazariyaga kelamiz. Bu nazariya nazariy fizikaning qator bo'limlari uchun muhim hisoblanadi. Hozirgi paytda u intensiv rivojlanmoqda.

§1.2. Bir o'lchovli dinamik sistema traektoriyalari

Dinamik sistema haqida gapirganda odatda biror X fazoning (topologik yoki metrik) o'z-o'ziga f^t akslantirishning bir parametrlil gruppasi yoki yarimgruppasi nazarda tutiladi. Agar bunda $t \in R$ yoki R^+ bo'lsa, u holda dinamik sistema ba'zida oqim, agar $t \in Z$ yoki Z^+ bo'lsa, kaskad deb ataladi. Bu nomlar f^t ta'sirida X fazoning nuqtalarining harakatga kelishi ($x \mapsto f^t(x)$) va fazo harakat ro'y beradigan traektoriyalarga ajralishi bilan bog'liq.

(X, f) juftlik diskret vaqli dinamik sistemani $\{f^n, n \in Z^+\}$ akslantirishlar yarim gruppasini beradi, bu yerda f akslantirish X fazoni o'z-o'ziga biror akslantirishi $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n=1, 2, \dots$. Agar X fazo R haqiqiy o'q yoki $I \subset R$ oraliq bo'lsa, u holda bunday bir o'lchovli fazoviy fazoli va diskret vaqtli dinamik sistema ma'lum ma'noda eng oddiy bo'lsada, ko'p hollarda juda murakkab dinamikaga ega bo'ladi. Ba'zi holatlardan, masalan, deskriptiv to'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan, bir o'lchovli dinamik sistemalar kabi murakkab.

Dinamik sistemalar nazariyasidagi asosiy obyektlardan biri bu- *traektoriya* (yoki *orbita*, biz ikkala atamani ham ishlatamiz) hisoblanadi.

1.2.1-ta'rif. (X, f) dinamik sistemaning $x \in X$ nuqtadan o'tuvchi traektoriyasi deb, $orb(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(x)$ to'plamga aytiladi.

$n \mapsto f^n(x)$ akslantirish traektoriya bo'yicha harakat tushunchasiga yaqin bo'lgani uchun, ba'zida traektoriyani to'plam emas, $x, f(x), f^2(x), \dots$ nuqtalar ketma-ketligi deb tushunish qulay.

Ko'pincha u yoki bu traektoriya yoki biror traektoriyalar to'plami chekli yoki cheksiz vaqt oralig'ida o'zini qanday tutishini aniqlash talab etiladi. Qaysi atamalarda va qanday shaklda bu yoki bunga o'xshash savollarga javob berish mumkin?

Dinamik sistemalar nazariyasida traektoriyani asimptotik holati ω – limitik to‘plamlar yordamida xarakterlanadi.

1.2.2- ta’rif. $x' \in X$ nuqta $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ traektoriyaning ω – limitik nuqtasi deyiladi, agar ixtiyoriy $n' > 0$ va x' nuqtaning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday $n'' > n'$ topiladiki, uning uchun $f^{n''}(x) \in U$ o‘rinli bo‘ladi, boshqacha aytganda shunday $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty$ ketma-ketlik mavjudki, $i \rightarrow \infty$ da $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

x nuqta orqali o‘tuvchi traektoriyaning barcha ω – limitik nuqtalar to‘plami $\omega_t(x)$ yoki $\omega(x)$ deb belgilanadi. X - kompakt bo‘lgan holda $\omega(x)$ to‘plam yopiq, invariant va bo‘sh bo‘lmagan to‘plam. Agar X kompakt bo‘lmasa, u holda $\omega(x) = \emptyset$ bo‘lishi mumkin, ya’ni vaqt o‘tishi bilan traektoriya X ni tark etishga harakat qiladi. Shunday qilib, agar X -kompakt bo‘lsa, u holda $\omega(x)$ to‘plam- ixtiyoriy atrofi n dan boshlab (tanlangan atrofga bog‘liq) $\{f^n(x)\}$ traektoriyaning barcha nuqtalarini o‘z ichiga olgan eng kichik yopiq to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Davriy traektoriyalar yoki sikllar o‘zlarini eng oddiy tutadilar.

1.2.3- ta’rif. Agar $f^m(x_0) = x_0$ va $0 < n < m$ da $f^n(x_0) \neq x_0$ bo‘lsa, u holda $x_0 \in X$ nuqta m davrli davriy nuqta deyiladi.

Bu holda $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, \dots, m-1$ nuqtalarning har biri m davrli davriy nuqta bo‘ladi va $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ nuqtalar davriy trayektoriyani yoki m davrli siklni tashkil qiladi.

Davriy trayektoriyalar dinamik sistemalar nazariyasida muhim rol o‘ynaydi, ayniqsa bu bir o‘lchovli dinamik sistemalarga taaluqli.

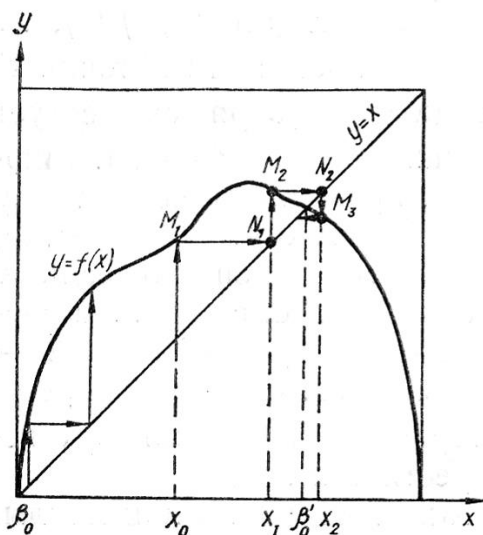
Davriy traektoriyalar uchun ω – limitik to‘plam trayektoriyaning o‘zi bilan ustma-ust tushadi. Umuman, agar uning qandaydir trayektoriyasi uchun ω – limitik to‘plam sikldan iborat bo‘lsa, u holda bu traektoriya yoki davriy yoki asimptotik davriy bo‘ladi, ya’ni davriy trayektoriyaga tortiladi.

Intervalda berilgan dinamik sistemalar nazariyasi uchun trayektoriyalarni grafik tasvirlashning oddiy usuli mavjud. Bunday yasash, masalan qo'zg'almas nuqta yoki sikl atrofida traektoriyalar holatini tekshirishda foydali bo'lishi mumkin.

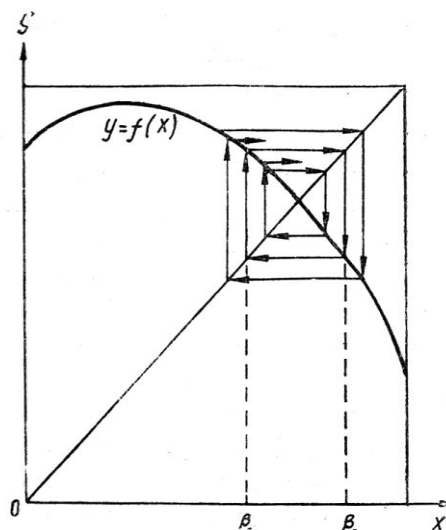
I oraliqda $x \mapsto f(x)$ akslantirish va $x_0 \in I$ nuqta berilgan bo'lsin. Kyonigsa-Lamerey diagrammasi deb ataluvchi, $x_0 \in I$ nuqtaning traektoriyasini grafigini tasvirlash usuli quyidagilardan iborat. (x, y) tekislikda $y = f(x)$ va $y = x$ funksiyalari grafiklari tasvirlanadi. $x_0 \in I$ nuqtaning traektoriyasi koordinata o'qlariga parallel bo'lgan $M_1N_1M_2N_2M_3N_3\dots$, siniq chiziq bilan tasvirlanadi (1-rasm). M_1, N_1 va M_2, N_2 va M_3 va h.k. nuqtalar absissalari x_0 nuqtaning ketma-ket iteratsiyalaridan iborat va mos ravishda $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ larga teng. M_1 va N_1, M_2 va N_2, M_3 va N_3 va h.k. nuqtalar koordinatalari ham mos ravishda $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$ larga teng. $M_1N_1M_2N_2M_3N_3\dots$ siniq chiziqni x_0 nuqtadan boshlab ketma-ket yasash mumkin.

f akslantirishning qo'zg'almas nuqtalariga $y = f(x)$ va $y = x$ funksiyalar grafiklarini kesishish nuqtalari mos keladi. 1.2.1-rasmda bunday nuqtalar β_0, β'_0 nuqtalar hisoblanadi. Bunda β_0 nuqta itaruvchi, β'_0 tortuvchi nuqta, chunki, β_0 ga yaqin nuqtalar traektoriyalari undan uzoqlashadi, β_0 ga yaqinlari aksincha, yaqinlashadi.

$M_{n+1} = M_1$ bo'ladigan $M_1N_1M_2N_2M_3N_3\dots$ yopiq siniq chiziqqa, n davrli sikl mos keladi. 1.2.2-rasmda $n = 2$ davrli yopiq siniq chiziq tasvirlangan. U ikki davrli β_1, β_2 nuqtalarga mos keladi va $f(\beta_1) = \beta_2, f(\beta_2) = \beta_1$ bo'ladi. Bu sikl tortuvchi, chunki siniq chiziqlar ularga mos keluvchi yopiq siniq chiziqli siklga yaqinlashadi.



1.2.1-rasm.



1.2.2-rasm.

Grafiklari 1- va 2-rasmlarda tasvirlangan akslantirishlar uchun har bir trayektoriyaning ω - limit to'plami oson topiladi: har qanday trayektoriya yo qo'zg'almas nuqta bilan, yoki 2 davrli sikl bilan tortiladi. Agar akslantirish kattaroq davrli siklga ega bo'lsa, u holda bu siklning atrofida traektoriyalar holatini tekshirish uchun kalkulyator yoki EHMDan foydalanish mumkin. Lekin ko'p hollarda na Kyonigsa-Lamerey usuli, na katta kalkulyatorda hisoblash tajribasi bilan trayektoriyalar holatining qandaydir qonuniyatlarini: qo'zg'almas nuqtalarga yoki sikllarga yaqinlashishlarini aniqlashga imkon bermaydi. Bundan tashqari boshlang'ich nuqtalarga yaqin traektoriyalar holati juda turlicha bo'ladi. Ushbu

$$x \mapsto f_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x) \quad (1.2.1)$$

akslantirishlar traektoriyalarini $\lambda > 0$ parametrning turli qiymatlarida (kalkulyator yordamida) tekshirib bunga ishonch hosil qilish mumkin. $x_0 \in (0,1)$ nuqtani tanlab ketma-ket $\lambda \in \{1,5; 2,9; 3,4; 3,57; 3,83; 4\}$ hollarni qarash foydali bo'lar edi.

(1.2.1) oiladagi akslantirishlar $x \in R$ lar uchun aniqlangan. Bunda $f_{\lambda}(0) = f_{\lambda}(1) = 0$ va $\lambda > 0$ bo'lganda $\max_{x \in R} f_{\lambda}(x) = f_{\lambda}(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$. Natijada, $\lambda \in (0,4]$ bo'lganda $[0,1]$ oraliq o'z-o'ziga akslanadi. Kyonigsa-Lamerey usulidan foydalanib, bu holda $[0,1]$ oraliqda yotmagan nuqtalar traektoriyalari ∞

ga intilishini tekshirib ko'rish qiyin emas. $[0,1]$ dagi nuqtalar traektoriyasini qaraymiz. Bizni davriy nuqtalar va ular hosil qiladigan sikllar qiziqtiradi.

1.2.4- ta'rif. $f : I \rightarrow I$ akslantirishning $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ sikli *tortuvchi* deyiladi, agar bu siklning shunday U atrofi mavjud bo'lib, $f(U) \subset U$ va $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = B$ o'rinli bo'lsa. Bu holda har bir $x \in U$ nuqta uchun $\omega(x_0) = B$ va $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ trayektoriya mos ravishda $\beta_1, \dots, \beta_m$ nuqtalarga yaqinlashuvchi m ta ketma-ketlikka ajraladi.

1.2.5- ta'rif. B sikl *itaruvchi* deyiladi, agar uning shunday U atrofi mavjud bo'lib, $U \setminus B$ to'plamdagi har bir nuqta chekli vaqtdan (iteratsiyadan) keyin $U \setminus B$ to'plamga qaytib kelsa, ya'ni har bir $x \in U \setminus B$ uchun shunday $n = n(x)$ topiladiki, $f^n(x) \notin U$ munosabat o'rinli bo'ladi.

f - differensiallanuvchi akslantirish bo'lganda *tortuvchi* va *itaruvchi* sikllarni farqlash uchun yetarli shartlar mavjud: B siklning multiplikatori deb atalgan

$$\mu(B) = \frac{d}{dx} f^m(x)|_{x=x_0 \in B} = f'(\beta_1) \cdot \dots \cdot f'(\beta_m)$$

kattalikni hisoblash va agar $|\mu(B)| < 1$ bo'lsa, B sikl- *tortuvchi*, agar $|\mu(B)| > 1$ bo'lsa, B sikl- *itaruvchi* bo'ladi. $|\mu(B)| = 1$ bo'lganda B sikl *nogiperbolik* deb ataladi. Bunday sikl *tortuvchi* ham, *itaruvchi* ham bo'lishi mumkin, uning atrofida traektoriyalar yanada murakkab holatda ham bo'lishi mumkin.

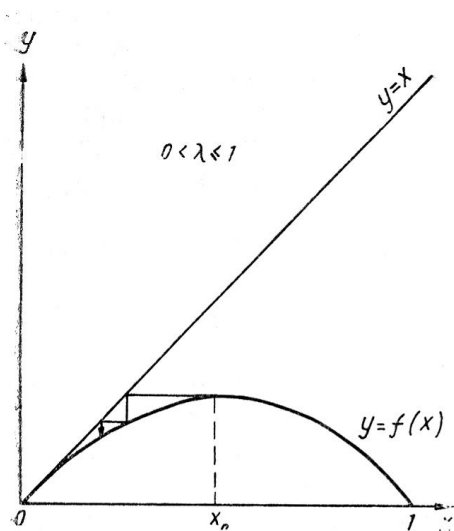
Quyidagi misollar (1.2.1) oiladagi f_λ akslantirishlar traektoriyalar holati λ parametr o'zgarganda qanday o'zgarishini ko'rsatadi. Bu misollarda f_λ o'rniga oddiygina qilib, f deb yozamiz.

1. $0 < \lambda \leq 1$ bo'lsin. Bu holda $I = [0,1]$ intervalda bitta $x = 0$ qo'zg'almas nuqta bor va u *tortuvchidir*. $x \in I \setminus \{0\}$ da $f(x) < x$ bo'lgani uchun $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I \setminus \{0\}) = \{0\}$ bo'ladi. $x \in I \setminus \{0\}$ nuqta qanday bo'lmasin $n \rightarrow \infty$ da

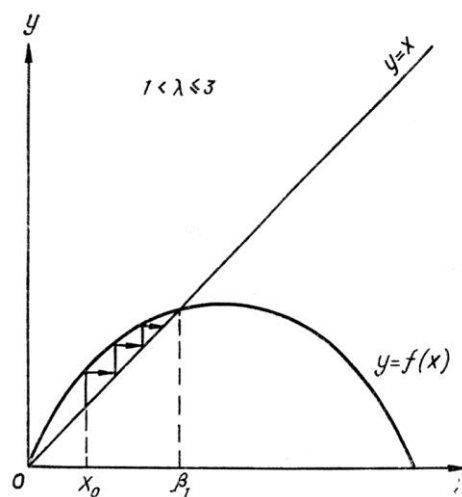
$f^n(x) \rightarrow 0$ bo'ladi. Demak, har bir $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^\infty$ traektoriya $x=0$ qo'zg'almas nuqta bilan tortiladi (1.2.3- rasm).

2. $1 < \lambda \leq 3$ bo'lsin. $\lambda > 1$ da $x=0$ qo'zg'almas nuqta itaruvchi bo'ladi ($f'(x) > 1$) va I oraliqda yana bitta $\beta_1 = 1 - \frac{1}{\lambda}$ qo'zg'almas nuqta hosil bo'ladi (1.2.4-rasm). $f'(x) = \lambda(1-2x)$ bo'lgani uchun $\mu(\beta_1)$ multiplikator $2-\lambda$ ga teng va demak, $1 < \lambda \leq 3$ da $x = \beta_1$ qo'zg'almas nuqta tortuvchi bo'ladi. $x_0 \in (0,1)$ nuqta qanday bo'lmasin $n \rightarrow \infty$ da $f^n(x) \rightarrow \beta_1$ bo'ladi. $1 < \lambda < 2$ bo'lganda $\mu(\beta_1) > 0$ va $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^\infty$ traektoriya β_1 ga monoton yaqinlashadi. $2 < \lambda \leq 3$ bo'lganda $\mu(\beta_1) < 0$ va $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^\infty$ traektoriya β_1 ga yaqinlashib, β_1 dan katta va kichik qiymatlarni navbatma-navbat qabul qilib, β_1 ga nisbatan tebranadi.

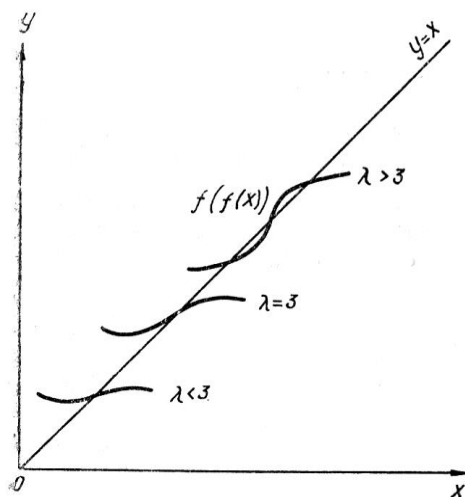
$\lambda = 3$ bo'lganda $x = \beta_1$ qo'zg'almas nuqta, $|\mu(\beta_1)| = 1$ bo'lsada tortuvchi bo'ladi.



1.2.3-rasm.



1.2.4-rasm.



1.2.5-rasm.

3. $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$ bo'lsin. λ parameter $\lambda_1 = 3$ qiymatdan o'tishda yangi ko'rinish hosil qiladi: $x = \beta_1$ qo'zg'almas nuqta tortuvchidan itaruvchiga aylandi ($\lambda > 3$ bo'lganda $|\mu(\beta_1)| > 1$) va undan davri 2 bo'lgan tortuvchi sikl paydo bo'ladi. $x = \beta_1$ nuqta atrofida f akslantirish qanday o'zgarishi 1.2.5- rasmda keltirilgan, bu yerda $y = f(f(x))$ funksiya grafigi parameter $\lambda_1 = 3$ qiymatdan o'tishdagi holati tasvirlangan.

§1.3. Belgilar dinamikasi

Belgilar dinamika deganda

$$\Theta = (\dots \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) \text{ yoki } \Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$$

ketma-ketliklarning, bu yerda θ_n lar biror $A = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m\}$ alifboning harflari, turli fazolardagi siljishlari bilan hosil bo'lgan kaskadlar o'rganiladigan dinamik sistemalar umumiy nazariyasining maxsus bo'lishi tushuniladi. Belgilar dinamika usullari hozirgi paytda turli dinamik sistemalarni o'rganishda keng foydalaniladi.

Π - fazo $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$ ko'rinishdagi barcha mumkin bo'lgan bir tomonlama ketma-ketlikalar (yoki velgullarni tashlab yuborish zarur bo'lganda cheksiz so'zlar) fazosi bo'lsin va bu fazoda metrika

$$\rho(\Theta', \Theta'') = \sum_{n \geq 0} \frac{r(\theta'_n \theta''_n)}{m^n}$$

ko'rinishda, bu yerda

$$r(\theta'_n \theta''_n) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \theta'_n = \theta''_n \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } \theta'_n \neq \theta''_n \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Π fazoda $\sigma: \Pi \rightarrow \Pi$ siljishni quyidagicha aniqlaymiz: agar $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$ bo'lsa, u holda $\sigma(\Theta) = (\theta_1, \theta_2, \dots)$.

(Π, σ) dinamik sistema uchun dinamik sistemalar nazariyasida odatda qaraladigan ko'pgina misollar, xususan, davriy trayektoriyalarga taaluqli masalalar deyarli triviyal yechiladi.

Masalan, (Π, σ) dinamik sistema uchun eng kichik k davrli $\theta_1 \dots \theta_k \theta_1 \dots \theta_k \theta_1 \dots$ davriy ketma-ketlikka mos keluvchi har qanday Θ nuqta Π fazoda k davrli davriy trayektoriya hosil qiladi (chunki $\sigma^k(\Theta) = \Theta$ va $1 \leq i \leq k$ da $\sigma^i(\Theta) \neq \Theta$). Demak, bu dinamik sistema ixtiyoriy davrli davriy nuqta trayektoriyaga ega va bu davriy trayektoriyalar Π ning barcha joyda zich yotadi.

Bu natija, $\Theta \in \Pi$ va $\varepsilon > 0$ qanday bo'lsin, agar k shunday bo'lsaki, $(\frac{1}{2})^k < \varepsilon$ va $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_k, \dots)$ bo'lsa, u holda $\Theta' = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \dots)$ nuqta Θ nuqtaning ε -atrofida yotishi va davriy bo'lishidan kelib chiqadi.

Π fazoda barcha joyda zich trayektoriyalar mavjud. Masalan,

$$\Theta^* = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m \Gamma^{11} \Gamma^{12} \dots \Gamma^{mm} \Gamma^{111} \dots \Gamma^{mmm} \Gamma^{1111} \dots)$$

nuqtadan o'tuvchi traektoriya shunday traektoriyaki, bu yerda

$$\Gamma^{i_1 i_2 \dots i_{s-1} i_s} = \Gamma^{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} \theta^{i_s}; s = 2, 3, \dots; \Gamma^{i_1} = \theta^{i_1}; i_1, i_2, \dots, i_s = 1, \dots, m.$$

Θ^* ketma-ketlik ketma-ket yozilgan barcha mumkin bo'lgan so'zlardan tuzilgan, dastlab 1 uzunlikdagi keyin 2 uzunlikdagi va h.k. $\Theta^*, \sigma(\Theta^*), \sigma^2(\Theta^*), \dots$ traektoriya Π da zich, chunki

$$D^{i_1 i_2 \dots i_{s-1} i_s} = \{\Theta \in \Pi : \Theta = \Gamma^{i_1 i_2 \dots i_s} \theta_{s+1} \theta_{s+2} \dots\}, 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq m, s = 2, 3, \dots$$

“silindr” Π fazoning bazasini tashkil etadi va $i'_1, i'_2, \dots, i'_s$ lar qanday bo'lsin shunday k topiladiki, $\sigma^k(\Theta^*) \in D^{i'_1, i'_2, \dots, i'_s}$.

Qanday qilib, belgilar dinamikasidan konkret dinamik sistemalarni masalan, R to'g'ri chiziqda tekshirish uchun foydalanish mumkin?

$I = [0, 1]$ intervalda

$$f : x \mapsto mx \pmod{1} \quad (1.3.1)$$

akslantirish(1.3.1- rasm) bilan berilgan dinamik sistema $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$ alifboli siljishlar dinamik sitemaga izomorf bo'ladi. Ravshanki, agar $x \in [0, 1]$ nuqtalar uchun m -yozuvdan foydalansak, u holda $i = 1, \dots, m$ da $\theta^i \sim i - 1$.

Demak, (1.3.1) bilan berilgan dinamik sistema siljishlar dinamikasi xossalriga ega: yetarlicha katta davrli davriy traektoriyalar mavjud va ular $[0, 1]$ ning hamma joyda zich yotadi. $[0, 1]$ da zich traektoriya mavjud, masalan,

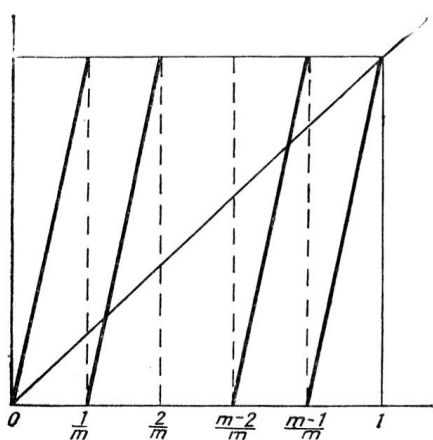
$$\Theta^* \sim x^* = 0, 01 \dots m - 100 01 \dots m - 1m - 1000 001 \dots = \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \dots$$

(1.3.1) bilan berilgan dinamik sistema biz qarayotgan bir o'lchovli sistemaga tegishli emas. Lekin belgilar dinamikasi usullarini uzluksiz akslantirishlar tahlilida muvaffaqiyatli qo'llash mumkin. Buni bir necha misollarda ko'rsatamiz.

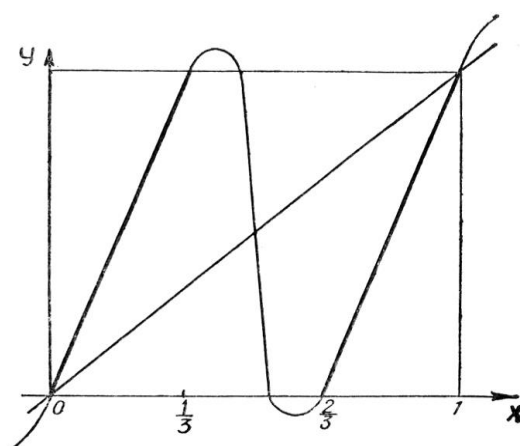
f funksiya ushbu

$$f(x) = 3x \pmod{1}, \quad x \in \mathfrak{I} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \quad (1.3.2)$$

shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f : R \rightarrow R$ uzluksiz funksiya bo'lsin (1.3.2-rasm).



1.3.1- rasm.



1.3.2- rasm.

Ravshanki, (1.3.2) bilan berilgan dinamik sistemani tadqiq etishda belgilar dinamikadan foydalanish mumkin: agar $\mathfrak{I}$ dagi nuqtalar uchun uchlik yozuvdan foydalansak, ya'ni $x \in \mathfrak{I}$ uchun $x = \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4, \dots$ (bu yerda $\theta_i \in \{0, 1, 2\}$, $\theta_1 \neq 1$) bo'lsa, u holda $f(x) = 0, \theta_2 \theta_3 \theta_4, \dots$.

$\mathfrak{I}$ dagi nuqtalar vaqt o'tishi bilan f ta'sirida $\mathfrak{I}$ ni tark etadi, bular θ_i lari birga teng bo'lgan $0, \theta_2 \theta_3 \theta_4, \dots$ nuqtalargina bo'ladi, ularning har biri $\mathfrak{I}$ ni $l = l(\Theta)$ qadamdan so'ng tark etadi, bu yerda $l(\Theta) = \min \{i : \theta_i = 1\}$.

$K = \{0, \theta_1 \theta_2 \dots \theta_i \dots : \theta_i \in \{0, 2\}\}$ (K - bu Kantorning standart to'plami) to'plamning nuqtalari va faqat ular $\mathfrak{I}$ ni tark etmaydi, ya'ni $f(K) = K$.

K to'plamda f akslantirish $\{0,2\}$ alifboli siljishlar dinamik sistemasi kabi amal qiladi. Demak, $f : R \rightarrow R$ akslantirishda ($\mathfrak{S}$ da) har bir davrdagi davriy nuqtalar bor:

2 davrli $-0,20202 \dots = 3/4$,

3 davrli $-0,2002002 \dots = 9/13$,

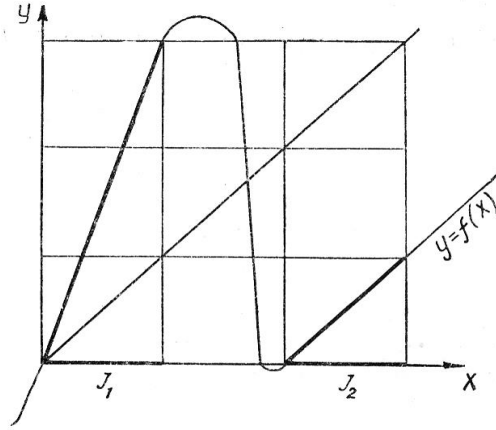
m davrli $-0, \underbrace{20\dots 0}_{m} \underbrace{20\dots 0}_{m} 2 \dots = \frac{2}{3} \frac{3^m}{3^m - 1}, \dots$) va h.k.

(1.3.2) akslantirishni tadqiq etishga belgilar dinamikasini (ikki harfli) usullarini qo'llash imkoniyati f akslantirishning $\mathfrak{S}$ dagi maxsus ko'rinishi bilan emas, $\mathfrak{S} - f(\mathfrak{S}_1) \supset \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ va $f(\mathfrak{S}_2) \supset \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ munosabatlar o'rinli bo'lgan ikkita $\mathfrak{S}_1$ va $\mathfrak{S}_2$ oraliqlar birlashmasidan iboratligiga bog'liq. Bu shuni bildiradiki, ikkita θ^1, θ^2 harflardan iborat alifbo asosida tuzilgan $\theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_k}$ so'z qanday bo'lmasin unga $\mathfrak{S}_1$ va $\mathfrak{S}_2$ oraliqlar bo'yicha ko'rsatilgan tartibda o'tadigan f akslantirish traektoriyalari mavjud bo'lgan $\mathfrak{S}_{i_1}, \mathfrak{S}_{i_2}, \dots, \mathfrak{S}_{i_k}$, bu yerda $i_s = 1$ yoki 2 , $s = 1, \dots, k$ oraliqlar ketma-ketligini mos qo'yish mumkinligini bildiradi. Bunday traektoriyalar ko'p, ular $\mathfrak{S}_{i_k}, \mathfrak{S}_{i_{k-1}}, \dots, \mathfrak{S}_i : \mathfrak{S}^{t_s} = \mathfrak{S}_l \cap f^{-1} \mathfrak{S}^{i_{s+1}}$, $s = k-1, k-2, \dots, 1$; $\mathfrak{S}^{i_k} = \mathfrak{S}_{i_k}$ oraliqlar bo'yicha ketma-ket tuziladigan $\mathfrak{S}^{i_1} = \mathfrak{S}_{i_1}$ to'plamlar nuqtalari orqali o'tadi; $\mathfrak{S}^{i_1}$ to'plam hamma vaqt aynimagan oraliqni o'z ichiga oladi.

Bu yerda asosiy etiborni quyidagi holatga qaratish lozim: boshidan boshlab siljish akslantirishi butun Π fazoda berilgan deb faraz qilingan edi.

Konkret dinamik sistemalarni tahlil qilish uchun belgilar dinamika qo'llanilganda ko'proq σ siljish akslantirishi butun Π fazoda emas, faqat Π' qism fazoda beriladi (yo'l qo'yilgan $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4, \dots$ ketma-ketliklar qism fazosida).

Masalan, 1.3.3- rasmda berilgan akslantirish uchun shunday $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ oraliqlar mavjudki, $f(\mathfrak{S}_1) \supset \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ va $f(\mathfrak{S}_2) \supset \mathfrak{S}_1$ bo'ladi.



1.3.3-rasm.

Shuning uchun $\mathfrak{T}_1$ va $\mathfrak{T}_2$ oraliqlarda akslantirishni tadqiq etish uchun $\{\theta^1, \theta^2\}$ alifboli belgilar dinamik sistemaga o'tilsa, u holda siljish akslantirishi faqat: agar $\theta_n = \theta^2$ bo'lsa, u holda $\theta_{n+1} = \theta^1$ shartni qanoatlantiruvchi $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_n \dots$ ketma-ketliklarda aniqlanadi. Albatta bu'nday tipdagi cheklashlar belgilar dinamik sistemaning o'zini o'rganishni ham murakkablashtirishi mumkin.

Eng oddiy (Markov) hollarida Π yo'l qo'yiladigan ketma-ketliklar qism fazosi yo'l qo'yiladigan o'tishlar (m tartibli) matritsa bilan berilishi mumkin.

Oxirgi misolda bu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsadan iborat (faqat $\mathfrak{T}_2 \rightarrow \mathfrak{T}_2$ o'tish man etilgan, chunki $f(\mathfrak{T}_2) \supseteq \mathfrak{T}_2$).

$(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m)$ alifboli Π ketma-ketliklar to'plamida tabiiy ravishda leksikiografik tartib kiritiladi: $\Theta' = (\theta'_1 \theta'_2 \theta'_3 \dots) < \Theta'' = (\theta''_1 \theta''_2 \theta''_3 \dots)$, agar $i < n$ da biror n uchun $\theta'_i = \theta''_i$ va $\theta'_n = \theta^{s'}$, $\theta''_n = \theta^{s''}$, $s' < s''$ bo'lsa.

Yuqorida qaralgan misollarda f akslantirish $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ oraliqlarda monoton o'suvchi edi. Shunday qilib, biz dinamik sistemaga o'tganda, $x \in \bigcup_r \mathfrak{T}_r$ nuqtalar bilan $\Theta(x) = (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots)$ ketma-ketliklar orasidagi moslik monoton edi: agar $x', x'' \in \bigcup_r \mathfrak{T}_r$ va $x' < x''$ bo'lsa, u holda leksikiografik tartibda $\Theta(x') < \Theta(x'')$ bo'ladi.

Bir o'lchovli dinamik sistemalari tadqiq etishda ko'proq bo'lakli monoton akslantirishlar bilan ish ko'riladi va bu holat f ning o'tish oraliqlari bilan bir qatorda kamayish oraliqlar ham mavjud. Ularning ikkalasining ham mavjudligi tifayli murakkab dinamik holat ro'y beradi. Lekin belgilar dinamikani qurishda f ning kamayish oraliqlari qatnashsa, x va $\Theta(x)$ orasidagi moslikning monotonligi buziladi. Shuning uchun belgilar ketma-ketliklar tuzish usulini o'zgartirish zarurati paydo bo'ladi.

Endi biz eng sodda bo'lakli- monoton akslantirishlar- *unimodal* akslantirishlar uchun belgilar dinamika usulining imkoniyatlarini tahlil etamiz.

$f : I \rightarrow I$ -unimodal akslantirish va $I = \mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2$ bo'lsin; $\mathfrak{I}_1$ oraliqda f monoton o'sadi, $\mathfrak{I}_2$ oraliqda monoton kamayadi, c – ekstremum nuqta.

$x \in I$ nuqtaning *manzilini* aniqlaymiz:

$$A(x) = \begin{cases} \mathfrak{I}_s, & \text{agar } x \in \mathfrak{I}_s, x \neq c, \\ c, & \text{agar } x = c. \end{cases}$$

Yo'nalish bu-

$$A_f(x) = (A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \dots) = (A_0, A_1, A_2, \dots)$$

manzillar ketma-ketligi. $(A_0, A_1, A_2, \dots)$ bir tomonlama ketma-ketliklar fazosida σ siljish amalini odatdagidek, $\sigma(A_0, A_1, A_2, \dots) = (A_1, A_2, \dots)$ tenglik bilan aniqlaymiz. f akslantirish va σ siljish $\sigma(A_f(x)) = A_f(f(x))$ tenglik bilan bog'langan.

Belgilar dinamikani qurishda nafaqat $A(f^n(x))$ manzilni, balki yo'nalish o'zgarishini hisobga olish foydali bo'ladi. Birinchi marta bu yondashuvni Milnor va Terston niding-invariantlar nazariyasini qurishda va A.A. Cimonov Lorens attraktorini modellashtiruvchi kesmalar akslantirishlarining tadqiq etishda qo'llashgan.

$\mathfrak{I}_s$ oraliqlarga

$$\varepsilon(\mathfrak{I}_s) = \begin{cases} +1, & \text{agar } f / \mathfrak{I}_s \text{ o'ssa,} \\ -1, & \text{agar } f / \mathfrak{I}_s \text{ kamaysa} \end{cases}$$

ishoralarni mos qo'yamiz va $\varepsilon(c) = 0$ deb olamiz.

$A_f(x) = (A_0, A_1, A_2, \dots)$ yo'nalish bilan barcha $\Theta_f(x) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$ ketma-ketliklarni qaraymiz, bu yerda $\theta_0 = \varepsilon_0$, $\theta_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1, \dots, \theta_n = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_i = \varepsilon(A_i)$. $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{n-1}$ ishora f^n ning x nuqta atrofidagi lokal holatiga mos keladi, yoki x nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $+1$, -1 yoki 0 ga teng bo'ladi.

1.3.1- lemma(monotonlik haqida, [3]). $x \mapsto \Theta_f(x)$ akslantirish monoton.

Leksiografik tartib va haqiqiy sonlarning tabiiy tartibining bog'liqligini ifodalovchi bu tasdiq fazaviy fazoning bir o'lchovliligini namoyon qiladi.

II-BOB.

DINAMIK SISTEMANING QAYTISH VAQTI VA CHIQISH KO'RSATKICHI

§2.1. Puankare qaytish vaqti

O'lchovini saqllovchi $\bar{T} : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ akslantirish orqali berilgan diskret vaqtli dinamik sistemani qaraymiz, bu yerda $\bar{M}$ fazo λ o'lchovli Borel ehtimollik fazosi. Faraz qilaylik, G sistema $\bar{M}$ dagi λ ga bog'liq borel σ - algebrasi bo'lsin.

Endi dinamik sistemaning rekurent xossalriga doir tushunchalarni kiritamiz.

2.1.1-ta'rif. Musbat o'lchovli $A \in G$ qism to'plamning Puankare qaytish vaqti deb, ushbu

$$\tau_{\bar{T}}(A) = \min_{n \geq 1} \{n : \lambda(\bar{T}^n(A) \cap A) > 0\}$$

tenglik bilan aniqlanadigan butun musbat $\tau_T(A) \leq +\infty$ songa aytiladi.

Agar qaysi to'plamni qarayotganimiz aniq bo'lmasa, ya'ni qarayotgan to'plam ixtiyoriy to'plam bo'lsa, u holda $\tau_T(A)$ ning o'rniga $\tau(A)$ belgilash ishlatiladi.

Puankare qaytish vaqtining topologiyaga bog'liq ta'rifi ham mavjud bo'lib, u $\bar{\tau}_T(A) = \inf_{n \geq 1} \{n : \bar{T}^n(A) \cap A \neq \emptyset\}$ ko'rinishda aniqlanadi([4], [5]).

Agar Puankare qaytish vaqti chekli bo'lsa, u holda shunday kichik n butun son borki, A to'plamning n marta itaratsiyasi notrival bo'ladi (bu yerda notrival deganda itaratsiyaning to'plamning kesishmasi nolmas o'lchovga ega deb tushunamiz).

Puankarening rekurent teoremasiga ko'ra chekli o'lchovli fazolar uchun ixtiyoriy o'lchovli to'plamning Puankare qaytish vaqti chekli bo'ladi.

Endi Puankare qaytish vaqtining biz keyinchalik foydalanadigan bir nechta xossalari keltiramiz. Bu tasdiqlar taʼrifdan oson kelib chiqadi va topologik Puankare qaytish vaqtining xossalari oʻxshash([4] dagi 2- teorema).

2.1.1-teorema. *Musbat oʻlchovli $A \in G$ qism toʻplam berilgan boʻlsin.*

a) agar $A \subset B$ boʻlsa, u holda $\tau(A) \geq \tau(B)$ boʻladi.

b) agar T akslantirish nol oʻlchovli toʻplamga nol oʻlchovli toʻplamni mos qoʻyuvchi boʻlsa, u holda $\tau(A) \geq \tau(T^{-1}(A))$ boʻladi, bu yerda $T^{-1}(A)$ toʻplam A toʻplamning toʻla proobrazi.

Ixtiyoriy $n \geq 0$ va $A \in G$ toʻplam uchun quyidagi toʻplamlarni kiritamiz ([15]):

$$\Omega_n(A) = \left\{ x \in \overline{M} : \exists j \in N, 0 \leq j \leq n, \bar{T}^j(x) \in A \right\} = \bigcup_{i=0}^n \bar{T}^{-i}(A),$$

$$\Theta_n(A) = \left\{ x \in \overline{M} : \bar{T}^n(x) \in A, \bar{T}^j(x) \notin A, j = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

bu yerda $\bar{T}^{-i}(A)$ toʻplam A toʻplamning $\bar{T}^i$ dagi toʻla probrazi. $\Omega_n(A)$ toʻplam n dan koʻp boʻlmagan iteratsiyadan keyin A toʻplamga kelib tushadigan $x \in \overline{M}$ nuqtalar toʻplamidan iborat boʻladi. $\Theta_n(A)$ toʻplam aynan n iteratsiyadan keyin A toʻplamga kelib tushadigan $x \in \overline{M}$ nuqtalar toʻplamidan iborat boʻladi. Taʼkidlayamizki, $\Omega_0(A) = A$ va $A \subset \Omega_n(A), \forall n \in N$. Bu toʻplamlar quyidagi xossalarga ega ekanligini osongina tekshirib koʻrish mumkin.

2.1.2-teorema. *$A \in G$ oʻlchovli toʻplam boʻlsin. U holda*

a) $\Omega_i(A)$ kamayuvchi toʻplamlar ketma-ketligi;

b) agar $i \neq j, i, j > 0$ boʻlsa, $\Theta_i(A) \cap \Theta_j(A) = \emptyset$;

c) $\Omega_n(A) = \bigcup_{i=0}^n \Theta_i(A)$.

§2.2. Ochiq dinamik sistema. Chiqish ko'rsatkichi

Faraz qilaylik, $A \in G$ o'lchovli to'plam va $M = \overline{M} \setminus A$ bo'lsin. Ochiq dinamik sistema (A «tirqishli» sistema)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$T: M \rightarrow \overline{M}$$

bu yerda $T := T|_M$ - akslantirish $\overline{T}$ ning M to'plamdagi qisqarishi. Biz trayektorianing yo'lini ular A to'plamdan tashqarida bo'lgunicha qaraymiz, va ular A to'plamga tushgandan so'ng biz bu trayektoriyani boshqa qaramaymiz (ular chiqib ketadi, ya'ni yo'qoladi). Demak, biz trayektoriya A to'plamdan tashqarida bo'lgunicha $\overline{T}$ ning o'rniga T ning itaratsiyasi haqida gapira olamiz, va $\overline{T}$ akslantirish A dagi yagona to'plam bo'lganda uni qayta aniqlash mumkin. Eslatib o'tamizki, chiziqchali harf bilan yopiq sistemadagi va chiziqchasiz harf bilan ochiq sistemadagi obektlarni belgiladik.

2.2.1-ta'rif. (M, T) dinamik sistemaning A to'plamdan (tirqishdan) chiqish ko'rsatkichi deb, ushbu

$$\rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(\overline{M} \setminus \Omega_n(A)),$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi, agar bu limit mavjud bo'lsa.

$\lambda(\overline{M} \setminus \Omega_n(A)) = 1 - \lambda(\Omega_n(A))$ - son n iteratsiyasidan so'ng A to'plamga (tirqishga) kelib tushmaydiga nuqtalar to'plamining o'lchovidan iborat bo'lib u ba'zida *yashash ehtimolligi*. Demak, chiqish ko'rsatkichi- tirqishga tushadigan trayektoriyalarning o'rtcha ko'rsatkichi ekan. Chiqish ko'rsatkichi qancha katta bo'lsa, sistemadan shunchalik katta «massa» tezda tirqishga tushadi.

Biz kelgusida deyarli barcha traektoriyalari tasodifiy ravishda tirqishga kelib tushadigan sistemani qaraymiz, ya'ni ushbu

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(\theta_i(A)) = 1, \quad (2.2.1)$$

shartni qanoatlantiruvchi sistemalarni qaraymiz.

Barcha ergodik sistemalar bunday sistemaga misol bo'ladi. Bu holda (2.2.1) shart musbat o'lchovli ixtiyoriy tirqish uchun bajariladi. Boshqacha aytganda, agar

biz A to‘plamning global attraktorli sistemani qarasak, u holda (2.2.1) shart faqat A to‘plam va bu to‘plamni saqllovchi barcha to‘plamlar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Quyidagi teoremda chiqish ko‘rsatkichlarining oddiy va oson tekshiriladigan, lekin foydali xossalari keltiriladi.

2.2.1-teorema. A va B o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsin. Faraz qilaylik, $\rho(A)$ va $\rho(B)$ chiqish ko‘rsatkichlar mavjud bo‘lsin. U holda

$$a) \rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(1 - \sum_{i=0}^n \lambda(\theta_i(A))),$$

$$b) \text{ agar } A \subset B \text{ bo‘lsa, u holda } \rho(A) \leq \rho(B).$$

$$c) \rho(A) = \rho(\bar{T}^{-1}(A));$$

$$d) \text{ ixtiyoriy chekli } m \text{ butun son uchun, } \rho(A) = \rho(\bigcup_{i=0}^m \bar{T}^{-i}(A));$$

$$e) \text{ agar biror } k > 0 \text{ uchun } B \subset \bar{T}^{-k} A \text{ bo‘lsa, u holda } \rho(A \cup B) = \rho(A);$$

$$f) \text{ agar shunday } m \text{ mavjud bo‘lib, } \bar{M} = \bigcup_{i=0}^m \bar{T}^{-i}(A) \text{ bo‘lsa, u holda}$$

$$\rho(A) = +\infty.$$

Teoremaning birinchi qismi shuni ko‘rsatadiki, tirqishning o‘lchami chiqish ko‘rsatkichini aniqlashning asosiy xususiyatlaridan biri ekan. c) va d) tasdiqlardan ko‘rinadiki, har xil o‘lchamli tirqishlar bir xil chiqish ko‘rsatkichlariga ega bo‘ladigan tirqishlardan iborat sistemaga ega bo‘lishimiz mumkin.

Dastlabki n iteratsiyagacha tirqishga borib tushmaydigan nuqtalar to‘plamining o‘lchovi o‘rniga ba‘zida, tirqishga faqat n iteratsiyadan so‘ng tushadigan nuqtalar to‘plamining o‘lchovini qarash qulayroq bo‘ladi. Buni qanday qilishni quyidagi teorema ko‘rsatadi.

2.2.2-teorema. Faraz qilaylik, (2.2.1) shart o‘rinli bo‘lsin va $\rho(A)$ chiqish ko‘rsatkichi mavjud bo‘lin. U holda

$$\rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda(\theta_n(A))$$

Isbot. $a_n = \lambda(\theta_n(A))$ belgilashni kiritamiz. Faraz qilaylik,

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n = \alpha$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon \in (0, 1)$ uchun shunday $n \in N$ mavjud bo‘lib, barcha $n \geq N$ lar uchun

$$-\varepsilon - \alpha \leq \frac{1}{n} \ln a_n \leq \varepsilon - \alpha$$

yoki bunga ekvivalent, ushbu

$$e^{-n(\alpha + \varepsilon)} \leq a_n \leq e^{-n(\alpha - \varepsilon)} \quad (2.2.2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Endi $\rho(A)$ ning mavjudligini hisobga olsak, u holda

$$\begin{aligned} \rho(A) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 - \sum_{i=0}^n \lambda(\theta_i(A)) \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda(\theta_i(A)) \right) = \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

tengliklarni yozish mumkin. (2.2.2) munosabatdan barcha $n \geq N$ lar uchun

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-i(\alpha + \varepsilon)} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-i(\alpha - \varepsilon)}$$

yoki bunga ekvivalent, ushbu

$$\frac{e^{-(n+1)(\alpha + \varepsilon)}}{1 - e^{-(\alpha + \varepsilon)}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq \frac{e^{-(n+1)(\alpha - \varepsilon)}}{1 - e^{-(\alpha - \varepsilon)}} \quad (2.2.4)$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

(2.2.4) tengsizlikni n ga bo‘lib, $n \rightarrow \infty$ da limitga o‘tsak, (2.2.3) dan teoremaning isbotiga kelamiz.

Kelgusida muhim bo‘lgan metrik qo‘shma tushunchasini keltiramiz. Ta’kidlash lozimki, Lebeg ehtimollik fazosi uchun metrik qo‘shma tushunchasi ikkita akslantirishning izomorfligiga ekvivalent hisoblanadi([31]).

2.2.2-ta’rif. T_i akslantirish (X_i, G_i, λ_i) , $i=1,2$ - Lebeg ehtimollik fazosining o‘lchovini saqlovchi akslantirishi bo‘lsin, bu yerda G_i - X_i to‘plamning Borel σ -algebrasi, λ_i -ehtimollik o‘lchovi. T_1 va T_2 lar metrik qo‘shma deyiladi, agar $\lambda_i(M_i)=1$ va $T_i(M_i) \subset M_i$ bo‘ladigan shunday $M_i \in G_i$ to‘plamlar va

teskarilanuvchi o'lchovni saqllovchi $F: M_2 \rightarrow M_1$ akslantirish (metrik qo'shma deyiladi) mavjud bo'lib,

$$F \circ T_2(x) = T_1 \circ F(x), \forall x \in M_2$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Agar ikkita sistema metrik qo'shma bo'lsa, bu sistemalarning mos tirqishga chiqish ko'rsatkichlari va Puankare qaytish vaqtlari bir xil bo'lishini quyidagi teorema ko'rsatadi.

2.2.3- teorema. (X_1, B_1, λ_1) va (X_2, B_2, λ_2) Borel ehtimollik fazolaridagi o'lchovni saqllovchi T_1 va T_2 akslantirishlar $F: (B_2, \lambda_2) \rightarrow (B_1, \lambda_1)$ qo'shma akslantiruvchi metrik qo'shma bo'lsin. Faraz qilaylik, T_2 akslantirish (2.2.1) shart ni qanoatlantirsin. U holda ixtiyoriy $A \in B_2$ uchun

$$a) \rho_{T_2}(A) = \rho_{T_1}(F(A)),$$

$$b) \tau_{T_2}(A) = \tau_{T_1}(F(A)).$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Isbot. a) $A \in B_2$ bo'lsin va xuddi yuqoridagidek, ushbu ikkita

$$\Theta_n^2(A) = \{x \in X_2: T_2^n(x) \in A, T_2^j(x) \notin A, j = 0, \dots, n-1\},$$

$$\Theta_n^1(F(A)) = \{y \in X_1: T_1^n(y) \in F(A), T_1^j(y) \notin F(A), j = 0, \dots, n-1\},$$

to'plamlarni kiritamiz. U holda bu sistemalarning chiqish ko'rsatkichlari uchun

$$\rho_{T_1}(A) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda_1(\Theta_n^1(F(A))),$$

$$\rho_{T_2}(A) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda_2(\Theta_n^2(A)),$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Quyidagi yordamchi lemmani keltiramiz.

2.2.1-lemma. Ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$F(\Theta_n^2(A)) = \Theta_n^2(F(A)).$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Lemma isboti. $\Theta_n^2(A)$, $\Theta_n^1(F(A))$ to'plamlarning ta'rifidan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
\Theta_n^1(F(A)) &= \{y \in X_1: T_1^n(y) \in F(A), T_1^j(y) \notin F(A), j = 0, \dots, n-1\} = \\
&= \{y \in X_1: F^{-1}T_1^n(y) \in A, F^{-1}T_1^j(y) \notin A, j = 0, \dots, n-1\} = \\
&= \{y \in X_1: T_2^n F^{-1}(y) \in A, T_2^j F^{-1}(y) \notin A, j = 0, \dots, n-1\} = \\
&= \{F(x) \in X_1: T_2^n(x) \in A, T_2^j(x) \notin A, j = 0, \dots, n-1\} = \\
&= F\left(\{x \in X_2: T_2^n(x) \in A, T_2^j(x) \notin A, j = 0, \dots, n-1\}\right) = F(\Theta_n^2(A)).
\end{aligned}$$

Lemma isbotlandi. Endi teoremaning isbotida davom etamiz. Oxirgi lemmaga va qo'shma akslantirish ta'rifidan

$$\lambda_2(\Theta_n^2(A)) = \lambda_1(F(\Theta_n^2(A))) = \lambda_1(\Theta_n^1(F(A)))$$

ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $\rho_{T_2}(A) = \rho_{T_1}(F(A)), \forall A \in B_2$.

b) Faraz qilaylik, $\tau_{T_2}(A) = N < \infty$ bo'lsin. Buning ma'nosi shundan iboratki,

$$\lambda(T_2^N(A) \cap A) > 0 \quad \text{va} \quad \lambda(T_2^k(A) \cap A) = 0, \quad k < N.$$

Ammo, oson ko'rish mumkinki, ushbu

$$\lambda(T_1^N(F(A) \cap F(A))) = \lambda(F(T_2^N(A)) \cap F(A)) > 0$$

va xuddi shunday,

$$\lambda(T_1^k(A) \cap A) = 0, \quad k < N$$

munosabatlar o'rinli. Shuning uchun, $\tau_{T_1}(F(A)) = N$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

§2.3. $\bar{T}_m$ interval akslantirishning davriy nuqtalari

Bu bo‘limda biz $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in Z_+ \setminus \{0,1\}$ akslantirishning davriy nuqtalarining xossalarini o‘rganamiz.

Belgilar dinamikasidan ma’lumki, har qanday $x \in [0,1]$ sonni $x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots = \frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^n} + \dots$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\varepsilon_i = 0 \vee 1 \vee \dots \vee m-1$.

Ta’kidlab o‘tamizki, $\bar{T}_m$ akslantirishning k -davrlı davriy nuqtalari $\bar{T}_m^k(x) = x$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo‘ladi. $\bar{T}_m(x) = x$ tenglamaning yechimlar to‘plami $\bar{T}_m$ akslantirishning davri 1 ga teng bo‘lgan nuqtalaridan, ya’ni qo‘zg‘almas nuqtalaridan iborat bo‘ladi.

Dastlab, $\bar{T}_m(x) = \{mx\} = x$ tenglamaning yechimlarini topamiz. Ixtiyoriy $x \in [0,1]$ sonni olib, uni $x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots = \frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^n} + \dots$ ko‘rinishda yozsak,

$$\begin{aligned} \{mx\} &= \left\{ m \left(\frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^n} + \dots \right) \right\} = \left\{ \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-1}} + \dots \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-1}} + \dots = 0, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. $\{mx\} = x$ tenglamadan, $0, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots$ ekanligini ko‘ramiz. Bu tenglik bajarilishi uchun

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_3 \\ &\dots \\ \varepsilon_n &= \varepsilon_{n-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \dots$, ya’ni

$$x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1 \dots = \frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_1}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_1}{m^n} + \dots$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasidan foydalanib $x = \frac{\varepsilon_1}{m-1}$ ekanligini aniqlaymiz.

Agar $\bar{T}_m$ akslantirishning davri 1 ga teng bo‘lgan davriy nuqtalari to‘plamini A_1 orqali belgilasak, u holda bu to‘plamning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A_1 = \left\{ \frac{\varepsilon_1}{m-1}, \varepsilon_1 = \overline{0, m-1} \right\}$$

Endi $\bar{T}_m$ akslantirishning davri 2 ga teng bo‘lgan davriy nuqtalari to‘plamini topamiz. Buning uchun $\bar{T}_m^2(x) = x$ tenglamaning yechimlarini topamiz. Xuddi yuqoridagidek,

$$\begin{aligned} \bar{T}_m^2(x) &= \bar{T}_m(\bar{T}_m(x)) = \bar{T}_m(\{mx\}) = \bar{T}_m\left(\left\{m\left(\frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^n} + \dots\right)\right\}\right) = \\ &= \bar{T}_m\left(\left\{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-1}} + \dots\right\}\right) = \bar{T}_m\left(\frac{\varepsilon_2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-1}} + \dots\right) = \\ &= \left\{m\left(\frac{\varepsilon_2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-1}} + \dots\right)\right\} = \left\{\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_3}{m} \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-2}} + \dots\right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_3}{m} \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-2}} + \dots = 0, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n \dots \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. $\bar{T}_m^2(x) = x$ tenglamadan, $0, \varepsilon_3 \varepsilon_4 \dots \varepsilon_n \dots = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots$ ekanligini ko‘ramiz. Bu tenglik bajarilishi uchun

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_3$$

...

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-2}$$

...

munosabatlar o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan $\varepsilon_{2i-1} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{2i} = \varepsilon_2$, $i \geq 1$, ya’ni

$$x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots = \frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_1}{m^{2n-1}} + \frac{\varepsilon_2}{m^{2n}} \dots$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari

yig‘indisi formulasidan foydalanib, $x = \frac{\varepsilon_1 m}{m^2 - 1} + \frac{\varepsilon_2}{m^2 - 1} = \frac{\varepsilon_1 m + \varepsilon_2}{m^2 - 1}$ ekanligini

aniqlaymiz.

Agar $\bar{T}_m$ akslantirishning davri 2 ga teng bo‘lgan davriy nuqtalari to‘plamini A_2 orqali belgilasak, u holda bu to‘plamning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A_2 = \left\{ \frac{\varepsilon_1 m + \varepsilon_2}{m^2 - 1}; \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \overline{0, m-1} \right\}$$

Xuddi shunday, $\bar{T}_m$ akslantirishning davri k ga teng bo‘lgan davriy nuqtalari to‘plamini topamiz. Buning uchun $\bar{T}_m^k(x) = x$ tenglamaning yechimlarini topamiz:

$$\begin{aligned} \bar{T}_m^k(x) &= \bar{T}_m(\bar{T}_m^k(x)) = \bar{T}_m \left(\left(m \left(\frac{\varepsilon_{k-1}}{m} + \frac{\varepsilon_k}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k+2}} + \dots \right) \right) \right) = \\ &= \bar{T}_m \left(\left\{ \varepsilon_{k-1} + \frac{\varepsilon_k}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k+1}} + \dots \right\} \right) = \bar{T}_m \left(\frac{\varepsilon_k}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k+1}} + \dots \right) = \\ &= \left\{ m \left(\frac{\varepsilon_k}{m} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k+1}} + \dots \right) \right\} = \left\{ \varepsilon_k + \frac{\varepsilon_{k+1}}{m} \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k}} + \dots \right\} = \\ &= \frac{\varepsilon_{k+1}}{m} \dots + \frac{\varepsilon_n}{m^{n-k}} + \dots = 0, \varepsilon_{k+1} \dots \varepsilon_n \dots \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. $\bar{T}_m^k(x) = x$ tenglamadan, $0, \varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+2} \dots \varepsilon_n \dots = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots$ ekanligini ko‘ramiz. Bu tenglik bajarilishi uchun

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k+1} &= \varepsilon_1 \\
\varepsilon_{k+2} &= \varepsilon_2 \\
\varepsilon_{k+3} &= \varepsilon_3 \\
&\dots \\
\varepsilon_n &= \varepsilon_{n-k} \\
&\dots
\end{aligned}$$

munosabat o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan

$$x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots = \frac{\varepsilon_1}{m} + \frac{\varepsilon_2}{m^2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{m^k} + \frac{\varepsilon_1}{m^{k+1}} + \frac{\varepsilon_2}{m^{k+2}} \dots$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig‘indisi formulasidan foydalanib,

$$x = \frac{\varepsilon_1 m^{k-1}}{m^k - 1} + \frac{\varepsilon_2 m^{k-2}}{m^k - 1} + \dots + \frac{\varepsilon_{k-1} m}{m^k - 1} + \frac{\varepsilon_k}{m^k - 1} = \frac{\varepsilon_1 m^{k-1} + \varepsilon_2 m^{k-2} + \dots + \varepsilon_{k-1} m + \varepsilon_k}{m^k - 1}$$

ekanligini aniqlaymiz.

Agar $\bar{T}_m$ akslantirishning davri k ga teng bo‘lgan davriy nuqtalari to‘plamini

A_k orqali belgilasak, u holda bu to‘plamning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A_k = \left\{ \frac{\varepsilon_1 m^{k-1} + \varepsilon_2 m^{k-2} + \dots + \varepsilon_{k-1} m + \varepsilon_k}{m^k - 1}, \varepsilon_i = \overline{0, m-1}, i = \overline{1, k}, k = 1, 2, \dots \right\}$$

Demak, quyidagi teorema o‘rinli.

2.3.1-teorema. A_k to‘plam $\bar{T}_m$ akslantirishning k davrli davriy nuqtalar to‘plami bo‘lsa, u holda bu to‘plam quyidagi ko‘rinishga ega:

$$A_k = \left\{ \frac{\varepsilon_1 m^{k-1} + \varepsilon_2 m^{k-2} + \dots + \varepsilon_{k-1} m + \varepsilon_k}{m^k - 1}, \varepsilon_i = \overline{0, m-1}, i = \overline{1, k}, k = 1, 2, \dots \right\}$$

III-BOB.

INTERVAL AKSLANTIRISHLARI UCHUN CHIQISH KO'RSATKICHI

§3.1. Markov bo'linishlari ketma-ketligi

Biz chekli Markov bo'linishini hosil qiluvchi interval akslantirishlarning ba'zi sinfini qaraymiz. Bunday sistemalar xoatik dinamik sistemalar deb ataluvchi sistemalar misol bo'ladi.

Ushbu

$$\bar{T}_m(x) = mx \pmod{1} = \{mx\}, \quad x \in [0,1], \quad m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0,1\}$$

formula bilan berilgan $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirish $[0,1]$ da Lebeg o'lchovini saqlaydi.

Endi $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ akslantirishdan foydalanib, $[0,1]$ da Markov bo'linishlari ketma-ketligini quyidagicha aniqlaymiz: $N \in \mathbb{N}$ sonni fiksirlaymiz va $[0,1]$ ning Markov bo'linishlari $\left\{ \left[0, \frac{1}{m}\right], \left[0, \frac{2}{m}\right], \dots, \left[\frac{1}{m}, 1\right] \right\}$ ning probrozlaridan

tuzilgan $\tilde{I}_N = \{I_{i,N}\}_{i=1}^{m^N}$ bo'linishni qaraymiz. Bu yerda

$$I_{i,N} = \left[\frac{i-1}{m^N}, \frac{i}{m^N} \right], \quad i = 1, \dots, m^N.$$

$\bar{T}_m$ akslantirish va $I_{i,N}$ tirqish orqali aniqlanadigan ushbu

$$T_m^{i,N} : [0,1] \setminus I_{i,N} \rightarrow [0,1]$$

ochiq dinamik sistemani qaraymiz. Har bir $i (i = 1, 2, \dots, m^N)$ uchun $I_{i,N}$ tirqishga mos turli xil ochiq dinamik sistemalar ega bo'lamiz. $I_{i,N}$ tirqish Markov bo'linishining elementi bo'lganligi uchun uni biz Markov tirqishi deb ataymiz.

Endi $I_{i,N}$ tirqish uchun Puankare qaytish vaqti $\tau(I_{i,N})$ ni, chiqish ko'rsatkichi $\rho(I_{i,N})$ ni va ushbu

$$\Omega_n(I_{i,N}) = \{x \in [0,1]: \exists j, 0 \leq j \leq n, \bar{T}_m^j x \in I_{i,N}\}, n \geq 0$$

to'plamni aniqlaymiz.

$I_{i,N}$ tirqishdagi davri n ga teng bo'lgan davriy nuqtalar sonini $p_{i,N}(n)$ orqali belgilaymiz. $\tilde{I}_N$ - Markov bo'linishi bo'lganligi uchun har bir $j, j=1,...,m^{N+k}$ va biror $s=1,...,m^N$ uchun $\bar{T}_m^k(I_{j,N+k})=I_{s,N}$ bo'ladi. $\tilde{I}^{N+k}$ bo'linishning birinchi k ta intervalidan so'ng $I_{i,N}$ tirqishga borib tushmaydigan elementlari sonini $f_{i,N}^k$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$f_{i,N}^k = \#\{j: I_{j,N+k} \in \tilde{I}_N^k; \lambda(\bar{T}^s(I_{j,N+k}) \cap I_{i,N}) = 0, s=0,1,...,k\}.$$

Quyidagi tasdiqlar Markov bo'linishi uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining qanday hisoblanishini ko'rsatadi.

3.1.1- teorema([9]). $I_{i,N}$ tirqishning Puankare qaytish vaqti $I_{i,N}$ dagi eng kichik davrli davriy nuqtaning davriga teng, ya'ni

$$\tau(I_{i,N}) = \min_{n \geq 1} \{n: p_{i,N}(n) > 0\}.$$

Isbot. Faraz qilaylik, $x \neq 0$ nuqta $I_{i,N}$ tirqishdagi eng kichik davrli davriy nuqta bo'lib, unung davri $p > 0$ bo'lsin ($p=1$ hol alohida qaraladi). Barcha davriy nuqtalar $\frac{l}{m^k - 1}, k \in N, l \in N, 0 \leq l \leq m^k - 1$ ko'rinishda, Markov bo'linishi

elementlarining chetki nuqtalari esa $\frac{n}{m^k}, k \in N, l \in N, 0 \leq l \leq m^k - 1$ ko'rinishda edi. Shuning uchun 0 va 1 dan boshqa barcha davriy nuqtalar bo'linish elementlarining ichida joylashgan bo'ladi. Bundan,

$$\lambda(\bar{T}^p(I_{i,N}) \cap I_{i,N}) > 0,$$

va natijada $\tau(I_{i,N}) \leq p$ ekanligini hosil qilamiz.

Teskari tengsizlikni hosil qilish uchun bo'linishning Markov xossasidan foydalanishimiz kerak. Faraz qilaylik, biror $k \leq p$ uchun $\lambda(\bar{T}^k(I_{i,N}) \cap I_{i,N}) > 0$ bo'lsin. Bo'linishning Markov xossasiga asosan, $I_{i,N} \in \bar{T}^k(I_{i,N})$. Bundan o'rta qiymat haqidagi teorema asosan $I_{i,N}$ tirqish davri k ga teng davriy nuqtani o'z ichiga olishni kelib chiqadi. Shuning uchun $\tau(I_{i,N}) \geq p$.

Endi $x = 0$ qo'zg'almas nuqta bo'lgan holni qaraymiz ($x = 1$ xuddi shunga o'xshash bo'ladi). Oson ko'rish mumkinki,

$$\lambda(\bar{T}^k(I_{0,N}) \cap I_{0,N}) = \lambda(I_{0,N}) > 0.$$

munosabat o'rinli va shuning uchun $\tau(I_{0,N}) = 1$. Teorema isbotlandi.

3.1.2-teorema([9]). $I_{i,N}$ tirqishdan chiqish ko'rsatkichi uchun ushbu

$$\rho(I_{i,N}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{f_{i,N}^n}{m^n}$$

tenglik o'rinli, agar bu limit mavjud bo'lsa.

Isbot. Birlik intervalning $\tilde{I}_N$ Markov bo'linishini qaraymiz. Bu bo'linishning T_m akslantirish yordamida birinchi n ta iteratsiyasi $I_{i,N}$ tirqishga tushmaydigan $f_{i,N}^n$ ta elementi mavjud ($f_{i,N}^n$ ning ta'rifiga asosan). Bo'linish har bir elementining o'lchovi $\frac{1}{m^{n+N}}$ ga teng bo'lgani uchun

$$1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N})) = \frac{f_{i,N}^n}{m^{n+N}}$$

tenglik o'rinli. Natijada

$$\rho(I_{i,N}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N}))) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{f_{i,N}^n}{m^n}.$$

Teorema isbotlandi.

$\bar{T}_m$ akslantirishning davriy nuqtalar haqidagi quyidagi teoremlarning o'rinli ekanligini osongina ko'rish mumkin.

3.1.3-teorema. *Birlik interval $\bar{T}$ akslantirishning davri k ga teng davriy nuqtalari soni $p(k) = m^k - 1$ ga va bir xil davrli ikkita qo'shni davriy nuqtalar orasidagi masofa $\frac{1}{m^k - 1}$ ga teng. Boshqacha aytganda, bir xil davrli davriy nuqtalar birlik intervalda tekis taqsimlangan.*

3.1.4-teorema. $\frac{1}{m^N}, N \geq 1$ o'lchamli ixtiyoriy interval hech bo'lmaganda bitta davri $k \leq N$ bo'lgan davriy nuqtani saqlaydi.

3.1.5-teorema. *Faraz qilaylik, x - davriy bo'lmagan nuqta bo'lsin. U holda ixtiyoriy butun musbat n uchun shunday $\delta(x, n) > 0$ son mavjudki, x nuqta δ -atrofida davri n dan oshmaydigan birorta ham davriy nuqtani saqlaydi.*

§3.2. Markov bo‘linishi uchun belgilar dinamikasi, chiqish ko‘rsatkichi va so‘zlar kombinatorikasi

Belgilar dinamikasi. Bizga ma’lumki, $[0,1]$ kesmadagi har qanday sonni bir qiymatli ravishda m lik kasrga yoyish mumkin. Bundan foydalanib, biz o‘rganayotgan akslantirish uchun belgilar dinamikasini kiritamiz.

$\Omega(m)$ - hajmi m bo‘lgan chekli alifbo(belgilar to‘plami) bo‘lsin. $\Omega(m)$ to‘plamlardagi belgilarning chekli yoki cheksiz ketma-ketligini ω so‘z deb olamiz, ya’ni $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^j$, $\omega_i \in \Omega(m)$. $|\omega|$ orqali ω so‘zning uzunligini belgilaymiz. $\Lambda_{\Omega(m)}^+$ orqali bir tomonli cheksiz uzunlikdagi so‘zlar to‘plamini belgilaymiz, ya’ni $\Lambda_{\Omega(m)}^+ = \{\{\omega_i\}_{i=1}^\infty : \omega_i \in \Omega(m)\}$.

Uzunligi chekli va $|\omega| = k$ bo‘lgan $\omega = \{\omega_i\}_{i=1}^j$ so‘z hamda musbat butun n uchun $\Lambda_{\Omega(m)}^+$ da silindrik to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$C_\omega(n) = \{W \in \Lambda_{\Omega(m)}^+ : W_{n+i-1} = \omega_i, i=1, \dots, |\omega|\} \subset \Lambda.$$

Endi silindrik to‘plamlar sistemasida $\bar{\lambda}$ Bernulli o‘lchovi qaraladi va uning bu o‘lchovini shu sistemani saqllovchi minimal σ – algebragacha davom ettiriladi. Aniqrog‘i, $C_\omega(1)$ silindrning o‘lchovi

$$\bar{\lambda}(C_\omega(1)) = m^{-k}$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Λ to‘plamdagi siljish akslantirishi $(\sigma(\omega))_i = \omega_{i+1}$ ko‘rinishda aniqlanadi, ya’ni σ – akslantirish so‘zning birinchi elementini o‘chirib, qolgan qismini chapga siljitar ekan. Bu akslantirish Bernulli o‘lchovini saqlaydi. U holda $(\Lambda_{\Omega(m)}^+, \sigma, \bar{\lambda})$ uchlik o‘lchovli dinamik sistemani aniqlaydi.

$T_m(x) = \{mx\}$ akslantirish m ta belgili cheksiz ketma-ketliklar fazosidagi bir tomonlama siljishga ekvivalent bo‘ladi([23]).

Hajmi m^{-N} bo‘lgan Markov tirqishiga hajmi N bo‘lgan ω so‘z orqali aniqlanadigan va birinchi holatda joylashgan $C_\omega(1)$ silindr mos keladi. $T_m(x)$ akslantirishning davriy nuqtalariga belgilar fazosidagi davriy so‘zlar mos keladi.

Chiqish ko'rsatkichi. Faraz qilaylik, $I_{i,N}$ Markov tirqishiga $C_\omega(1)$, $|\omega| = N$ silindr mos kelsin. U holda $T_m(x)$ akslantirish bo'yicha birinchi n iteratsiyada $I_{i,N}$ tirqishga kelib tushmaydigan nuqtalar to'plamiga $\Lambda_{\Omega(m)}^+$ fazodagi siljish akslantirishni n marta ta'siridan so'ng $C_\omega(1)$ silindrga kelib tushmaydigan nuqtalar to'plami mos keladi, ya'ni dastlabki, $n + N$ holatda ω so'zni saqlamaydigan cheksiz so'zlar mos keladi. Bunday cheksiz so'zlar sonini $C_\omega(n + N)$ orqali belgilaymiz:

$$C_\omega(k) = \text{card} \{v \in \Lambda_{\Omega(m)}^+ : \sigma^i(v) \notin C_\omega(1), i = 1, \dots, k - |\omega| + 1\}.$$

Yuqoridagilardan kelib chiqadiki, $I_{i,N}$ tirqishning $T_m(x)$ akslantirish uchun chiqish ko'rsatkichi, $I_{i,N}$ tirqishga mos $C_\omega(1)$ silindrik to'planning siljish akslantirishi uchun chiqish ko'rsatkichiga teng bo'ladi. Shuning uchun

$$\rho(I_{i,N}) = \rho(C_\omega(1)) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{C_\omega(n + N)}{m^{n+N}}, \quad (3.2.1)$$

tenglik o'rinli ekanligini hosil qilamiz, agar bu limit mavjud bo'lsa.

Bizga ma'lumki([23]), shunday musbat butun n_0 mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ va biror C_1, C_2 o'zgarmaslar uchun

$$C_1 \theta_\omega^n \leq C_\omega(n) \leq C_2 \theta_\omega^n, \quad (3.2.2)$$

munosabat o'rinli va θ_ω o'zgarmas faqat ω ga bog'liq bo'lib, $\theta_\omega < m$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Quyidagi lemma (3.2.1) limitning mavjudligini tasdiqlaydi.

3.2.1-teorema. $\rho(C_\omega(1))$ chiqish ko'rsatkichi aniqlangan va faqat ω ga bog'liq bo'ladi. Bundan tashqari,

$$\rho(C_\omega(1)) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{C_\omega(n + N)}{m^n} = - \ln \frac{\theta_\omega}{m},$$

tenglik o'rinli, bu yerda θ_ω o'zgarmas faqat ω ga bog'liq bo'lib, $\theta_\omega < m$.

Isbot. (3.2.2) munosabatning o'rinli ekanligidan

$$\frac{n + N}{n} \ln \frac{\theta_\omega}{m} + \frac{1}{n} \ln c_1 \leq \frac{1}{n} \ln \frac{C_\omega(n + N)}{m^n} \leq \frac{n + N}{n} \ln \frac{\theta_\omega}{m} + \frac{1}{n} \ln c_2.$$

Bu munosabatdan $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{C_{\omega}(n+N)}{m^n} = \ln \frac{\theta_{\omega}}{m}$$

ekanligini hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Bizning keyingi maqsadimiz $c_{\omega}(k)$ ning ω ga qanday bog'liqligini aniqlashdan iborat.

So'zlar kombinatorikasi. Biz yuqorida ko'rdikki, chiqish ko'rsatkichini hisoblash uchun tayinlangan uzunlikdagi va $c_{\omega}(k)$ qism so'zni saqlamaydigan so'zlar sonini hisoblash kerak edi. Buni hisoblash uchun so'zlar kombinatorikasi nazariyasining ba'zi natijalaridan foydalanamiz.

Gyubas va Odlizkolar tomonidan, chekli so'zlar to'plamini o'zini-o'ziga o'tkazuvchi va avtokorrelyatsiyali funksiya deb ataladigan $corr(\omega)$ funksiya o'rganilgan([18], [19], [20], [23]).

Faraz qilaylik, ω so'z $\Omega(m)$ fazodagi uzunligi k bo'lgan so'z bo'lsin. U holda $corr(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ qiymat quyidagicha aniqlanadi. So'zning nusxasini so'zning ustiga qo'yib l ta raqam o'nga siljitamiz. Agar so'zning qismlari ustma-ust tushsa $b_{l+1} = 1$, aks holda $b_{l+1} = 0$ deb olamiz. Xususan, hamma vaqt $b_1 = 1$ deb olamiz. Agar $\omega = [10100101]$ bo'lsin, u holda $corr(\omega) = [10000101]$.

Shuni ta'kidlash kerakki, avtokorrelyatsiyali funksiya so'zlarning davriyligini tavsivlab beradi. ω so'zdan hosil qilingan $C_{\omega}(1)$ silindrni qaraymiz va faraz qilaylik, $C_{\omega}(1)$ silindr davri $l(l < |\omega|)$ bo'lgan $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty} \in C_{\omega}(1)$ davriy nuqtani o'z ichida saqlasin. v davriy nuqta bo'lganligi uchun $v_i = v_{i+l}$, $\forall i \in N$ bo'lishini va

$$v = \left[\underbrace{v_1, \dots, v_l}_{|\omega|}, \dots, v_1, \dots, v_l, \dots \right]$$

ekanligini hosil qilamiz. Natijada, agar $corr(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ bo'lsa, u holda $b_{l+1} = 1$ bo'ladi([17]).

Uzunligi k bo'ldan ω so'zdan "qochadigan"(saqlamaydigan) hajmi n ga teng so'zlar soni $C_\omega(n)$ ni hisoblash uchun $C_\omega(n)$ ning quyidagi yaratuvchi funksiyasini qaraymiz:

$$F_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_\omega(n) z^{-i}$$

[23] da $F_\omega(z)$ funksiyaning ratsional ekanligi va $C_\omega(n)$ uchun quyidagi asimptotik baholar o'rinli bo'lishi ko'rsatilgan.

3.2.1-lemma. Faraz qilaylik, u va ω lar bir xil uzunlikli va $\text{corr}(\omega) > \text{corr}(u)$ bo'ladigan so'zlar bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln c_\omega(n)}{n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln c_u(n)}{n}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

3.2.2-lemma. Faraz qilaylik, u va ω lar bir xil uzunlikli va $\text{corr}(\omega) > \text{corr}(u)$ bo'ladigan so'zlar bo'lsin. U holda shunday, $\tilde{n}_0$ mavjud bo'lib, barcha $n \geq \tilde{n}_0$ lar uchun $c_\omega(n) > c_u(n)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

[10] va [27] ishlarda bu natija $\tilde{n}_0$ ning aniq qiymayini topish bilan davom ettirilgan. Shu bilan birga ixtiyoriy uzunlikli so'zlar va ixtiyoriy chekli hajmli alifboli sistema uchun yuqoridagi tasdiqlar isbotlangan.

Uzunliklari bir xil bo'lgan u va ω so'zlarni qaraymiz. Faraz qilaylik, $\text{corr}(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_N]$ va $\text{corr}(u) = [a_1, a_2, \dots, a_N]$ bo'lsin. U holda

$$\tilde{n}_0 = N + \min \{i : b_i \neq a_i\} - 1, \quad (3.2.1)$$

bo'ladi.

3.2.2- lemma, avtokorrelyatsiyali funksiyalar bilan ularga mos so'zlarga asoslangan silindrlar va chiqish ko'rsatkichlar orasidagi munosabatli ifodalaydi.

3.2.2-teorema. Faraz qilaylik, u va ω lar bir xil uzunlikka ega so'zlar bo'lsin. $C_\omega(1)$ va $C_u(1)$ lar shu ikki so'zdan hosil qilingan silindrik to'plamlar bo'lsin. U holda agar $\text{corr}(\omega) > \text{corr}(u)$ bo'lsa, $\rho(C_\omega(1)) < \rho(C_u(1))$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. 3.2.1- teoremaga ko'ra

$$\rho(C_u(1)) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{C_u(n+N)}{m^n},$$

$$\rho(C_\omega(1)) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{C_\omega(n+N)}{m^n}.$$

3.2.1-lemmaning natijalaridan foydalansak, teoremani isbotiga kelimiz.

Yuqorida $1 - \lambda(\Omega_n(C_\omega(1)))$ sonni $C_\omega(1)$ to'plamning yashash ehtimolligi deb atagan edik.

3.2.3-teorema. Faraz qilaylik, u va ω lar bir xil uzunlikli va $\text{corr}(\omega) > \text{corr}(u)$ bo'ladigan so'zlar bo'lib, $\text{corr}(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_N]$ va $\text{corr}(u) = [a_1, a_2, \dots, a_N]$ bo'lsin. $C_\omega(1)$ va $C_u(1)$ lar shu ikki so'zdan hosil qilingan silindrik to'plamlar bo'lsin. U holda barcha $n \geq \min \{i : b_i \neq a_i\} - 1$ lar uchun

$$1 - \lambda(\Omega_n(C_\omega(1))) > 1 - \lambda(\Omega_n(C_u(1)))$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Yuqorida (3.2.2- lemmada) ko'rdikki, shunday $\tilde{n}_0 > 0$ mavjudki, barcha $n + N \geq n_0$ lar uchun $c_\omega(n + N) > c_u(n + N)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Natijada,

$$\frac{c_\omega(n + N)}{m^{n+N}} > \frac{c_u(n + N)}{m^{n+N}}, \quad n + N \geq n_0 \quad (3.2.2)$$

Boshqa tomondan

$$1 - \lambda(\Omega_n(C_\omega(1))) = \frac{c_\omega(n + N)}{m^{n+N}}, \quad 1 - \lambda(\Omega_n(C_u(1))) = \frac{c_u(n + N)}{m^{n+N}} \quad (3.2.2)$$

(3.2.1) tenglamadan $n + N \geq N + \min \{i : b_i \neq a_i\} - 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Natijada, $n \geq \min \{i : b_i \neq a_i\} - 1$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan va (3.2.2), (3.2.3) munosabatlardan teoremaning isbotiga kelimiz.

§3.3. T_m interval akslantirishi uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichi

Bu bobda biz tirqishning holati chiqish ko'rsatkichini aniqlashda muhim rol o'ynaydigan dinamik sistemaga misol keltiramiz.

Quyidagi keltiriladigan teorema Puankare qaytish vaqti katta bo'lgan tirqish uchun chiqish ko'rsatkichi asimptotik ravishda katta bo'lishini, ya'ni chiqish ko'rsatkichi faqat tirqishning o'lchamiga bog'liq bo'lib, uning joylashish holatiga bog'liq emasligini ko'rsatadi. Bundan tashqari, bu torema Puankare qaytish vaqti katta bo'lgan tirqish uchun yashash ehtimolligi kichik bo'lishini bildiradi.

3.3.1-teorema (asosiy teorema). $I_{i,N}$ va $I_{j,N}$ to'plamlar $\bar{T}_m$ akslantirish-ning ikkita Markov tirqishlari bo'lsin. Faraz qilaylik, $\tau(I_{j,N}) > \tau(I_{i,N})$ bo'lsin. U holda $\rho(I_{j,N}) \geq \rho(I_{i,N})$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, barcha $n \geq \tau(I_{i,N})$ lar uchun $1 - \lambda(\Omega_n(I_{j,N})) < 1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N}))$ munosabat o'rinli.

Isbot. $\omega, |\omega| = N$ - so'z $I_{i,N}$ tirqishning kodi va $C_\omega(1)$ - shu so'z hosil qilgan silindr bo'lsin. Xuddi shunday $u, |u| = N$ - so'z $I_{j,N}$ tirqishning kodi va $C_u(1)$ - shu so'z hosil qilgan silindr bo'lsin. u va ω so'zlarning avtokorrelyatsiyali $\text{corr}(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_N]$ va $\text{corr}(u) = [a_1, a_2, \dots, a_N]$ funksiyalarini qaraymiz. Xuddi avvalgidek $b_1 = a_1 = 1$. Shu bilan birga $b_{l+1} = 1$ deb olamiz, faqat va faqat shundaki, agar $C_\omega(1)$ silindr davri $l(1 \leq l < N)$ bo'lgan davriy nuqtani saqlasa. a_{l+1} uchun ham xuddi shunday. $[b_1, b_2, \dots, b_N]$ ning b_1 dan keyingi noldan farqli elementi $b_{\tau(I_{i,N})+1}$ bo'ladi. Shuning uchun, agar $\tau(I_{j,N}) > \tau(I_{i,N})$ bo'lsa, u holda $\text{corr}(\omega) > \text{corr}(u)$ bo'ladi. Ammo 3.2.2- teoremaga asosan

$$\rho(I_{j,N}) = \rho(C_u(1)) > \rho(C_\omega(1)) = \rho(I_{i,N})$$

munosabat o‘rinli. Yashash ehtimolliklarini solishtirish uchun 3.2.3- teoremadan foydalanamiz. Avvalgi 3.1- 3.2 bo‘limlarda keltirilganlardan ko‘rinadiki, $\min \{i : b_i \neq a_i\} = \tau(I_{i,N}) + 1$ tenglik o‘rinli. Bularni hisobga olsak va

$$\lambda(\Omega_n(I_{j,N})) = \lambda(\Omega_n(C_u(1))) \text{ va } \lambda(\Omega_n(I_{i,N})) = \lambda(\Omega_n(C_\omega(1)))$$

munosabatlar o‘rinli ekanligidan, barcha $n \geq \tau(I_{i,N})$ lar uchun

$$1 - \lambda(\Omega_n(I_{j,N})) < 1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N}))$$

bo‘lishini hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Endi tirqishning o‘lchami qisqarsa, chiqish ko‘rsatkichi qanday o‘zgarishini tekshiramiz.

$I_N(x)$ to‘plam $\tilde{I}_N$ bo‘linishning x nuqtani saqllovchi elementi bo‘lsin. Bizga ma’lumki [6], belgilar sistemasining ko‘pchilik sinfi uchun interval akslantirishni qaralganda, tirqishga Puankare qaytish vaqti tirqish N nomerining kattalashishi bilan eksponentsial ravishda oshishi ko‘rsatilgan, ya’ni

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau(I_N(x))}{N} = 1.$$

Biz shunga o‘xshash masalani chiqish ko‘rsatkichi uchun o‘rganamiz. Quyidagi teorema chiqish ko‘rsatkichi tirqishning hajmi oshishi bilan chiziqli ravishda oshishini ko‘rsatadi.

3.3.2-teorema(lokal chiqish). $x \in [0,1]$ va $\{A_n(x)\}_{n=1}^\infty$ - ichma-ich joylashgan

to‘plamlar ketma-ketligi bo‘lib, $x = \bigcap_{n=1}^\infty A_n(x)$ bo‘lsin. Quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

a) agar x nuqta davri k ga teng bo‘lgan davriy nuqta bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1 - \frac{1}{m^k};$$

b) agar x nuqta davriy nuqta bo‘lmasa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_n(x))}{\lambda(A_n(x))} = 1.$$

Isbot. 3.2.1- teoremadan va $\lambda(I_N(x)) = 2^{-N}$ ekanligidan,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho(I_N(x))}{\lambda(I_N(x))} = - \lim_{N \rightarrow \infty} m^N \ln \frac{\theta_\omega}{m}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda θ_ω - N ga bog'liq o'zgarmas.

Uzunligi N bo'lgan ixtiyoriy ω so'z uchun ushbu

$$f_\omega(z) = \sum_{i=1}^N b_i z^{N-i}$$

korrelyatsiyali ko'phadni aniqlaymiz, bu yerda $\text{corr}(\omega) = [b_1, b_2, \dots, b_N]$ va b_i lar N ga bog'liq, $b_i = b_i(N)$ va $z \in C$. $b_1 = 1$ bo'lganligidan, $\deg f_\omega(z) = N - 1$.

[18] da ko'rsatilganki, θ_ω o'zgarmas asimptotik ravishda

$$\ln \theta_\omega = \ln m - \frac{1}{m f_\omega(m)} + O(m^{-2N})$$

munosabatni qanoatlantiradi. U holda

$$\ln \theta_\omega = \ln m - \frac{1}{m^N f_\omega(m)} + O(m^{-2N}).$$

Faraz qilaylik, x davriymas nuqta bo'lsin. U holda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m^{-N} \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N) m^{N-i} = 0.$$

Haqiqatdan ham,

$$m^{-N} \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i m^{N-i} = \sum_{i=\tau(I_N(x))+1}^N b_i m^{-i} \leq 1.$$

Ammo, barcha $i \geq \tau(I_N(x))$ lar uchun $\lim_{N \rightarrow \infty} b_i(N) = 0$. Natijada

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_N(x))}{\lambda(A_N(x))} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m^N}{m^N + \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N) m^{N-i}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + m^{-N} \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N) m^{N-i}} = 1 \end{aligned}$$

Faraz qilaylik, x nuqta eng kichik davri k bo'lgan davriy nuqta bo'lsin. U holda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m^{-N} \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N) m^{N-i} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(N) m^{N-i} = \frac{1}{1 - m^{-k}} - 1.$$

Shuning uchun,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_N(x))}{\lambda(A_N(x))} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m^N}{m^N + \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N)m^{N-i}} = \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{N \rightarrow \infty} (m^{-N} \sum_{i=\tau(I_N(x))}^N b_i(N)m^{N-i})} = 1 - \frac{1}{m^k}. \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

XULOSA

Bir o'lchovli dinamik sistemalar nazariyasida interval akslantirishlar o'ziga xos xususiyatlarga egaligi bilan ajralib turadi. Interval akslantirishlar yordamida hosil qilingan diskret vaqtli dinamik sistemalarning ergodiklik xossalari, xususan invariant o'lchovning mavjudligi va uning xossalarini, hamda bu sistemlarning dinamik xususiyatlarini ochib beradigan ehtimollik o'lchovlarini o'rganish hozirgi zamon bir o'lchovli dinamik sistemalar nazariyasining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Bunday ehtimollik o'lchovlaridan biri- ochiq dinamik sistemaning yashash ehtimolligi deb ataluvchi chiqish ko'rsatkichi hisoblanadi.

Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichi turli akslantirishlar yordamida aniqlanadigan ochiq dinamik sistema, ya'ni tirqishli dinamik sistemalar uchun o'rganilgan bo'lib, bu yo'nalishda muhim masalalar V. Afraimovich, G. Altmann va T. Tel, V. Baladi, C. Bonatti va B. Schmitt, N. Chernov, L. A. Bunimovich va A. Yurchenkolar tomonidan o'rganilgan.

Xususan, $\bar{T}x = \{2x\}$, $x \in [0,1]$ interval akslantirishining iteratsiyalari yordamida hosil qilingan dinamik sistema uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining mavjudligi va ehtimollik xossalari L.A. Bunimovich va A. Yurchenko ishlarida o'rganilgan bo'lib, Puankare qaytish vaqti katta bo'lgan tirqish uchun chiqish ko'rsatkichi asimptotik ravishda katta bo'lishini isbotlangan.

Ushbu magistrlik dissertatsiya ishida $\bar{T}_m(x) = \{mx\}$, $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0,1\}$ interval akslantirishining iteratsiyalari yordamida hosil qilinadigan dinamik sistema uchun Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichlarining mavjudligi va ehtimollik xossalari o'rganilgan. Magistrlik dissertatsiya ishi kirish qismi, 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Birinchi bobning birinchi va ikkinchi bo'limlarida dinamik sistema va uning trayektoriyasi tushunchalari uning asl mohiyati ochib beradigan misollar bilan batafsil yoritilgan. Bu bobning oxirgi bo'limida dinamik sistemalar nazariyasida muhim foydalaniladigan belgilar dinamikasi tushunchasi va xossalari keltirilgan.

Ikkinchi bobda ixtiyoriy o'lchovli akslantirish itertasiyalari yordamida hosil qilinadigan dinamik sistema uchun Puankare qaytish vaqti, ochiq dinamik sistema va chiqish ko'rsatkichi tushunchalari kiritilib ularning umumiy xossalari keltirilgan va oxirgi bo'limida $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ interval akslantirishining davriy nuqtalarining ko'rinishi va xossalari o'rganilgan.

Uchunchi bob magistrlik dissertatsiya ishining asosiy qismi bo'lib, bu bobning birinchi va ikkinchi bo'limlarida $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ akslantirish yordamida hosil qilingan $[0,1]$ intervalning markov bo'linishlari ketma-ketligining elementlari uchun belgilar dinamikasi va so'zlar kombinatorikalarining xossalari o'rganilgan. Bu xossalardan foydalanib, $\bar{T}_m : [0,1] \rightarrow [0,1]$ akslantirish hosil qilgan dinamik sistema uchun Puankare qaytish vaqti katta bo'lgan tirqish uchun chiqish ko'rsatkichi asimptotik ravishda katta bo'lishini ko'rsatuvchi, ya'ni Puankare qaytish vaqti va chiqish ko'rsatkichi orasidagi bog'liqlikni ko'rsatuvchi teoremlar isbotlangan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. П. Биллинслей: *Эргодическая теория и информация*. Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 238 стр.
2. Т.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин: *Эргодическая теория*. –М.: Наука, 1980. 384 стр.
3. А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федеренко: *Динамика одномерных отображений*. Киев, Наукова Думка, 1989. 216 стр.
4. V. Afraimovich: *Pesin's dimension for Poincaré recurrences*, Chaos, **7** (1997), 12–20.
5. V. Afraimovich, J-R. Chazottes and B. Saussol: *Local dimensions for Poincaré recurrences*, Electronic Research Announcements of AMS **6** (2000), 64—74.
6. V. Afraimovich, E. Ugalde and J. Urias: *Fractal Dimensions for Poincaré Recurrences*, Elsevier Science, Amsterdam, 2006.
7. V. Baladi, C. Bonatti, and B. Schmitt: *Abnormal escape rates from nonuniformly hyperbolic sets*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19** (1999), 1111-1125.
8. H. Bruin, M. Demers, and I. Melbourne: *Existence and convergence properties of physical measures for certain dynamical systems with holes*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **3** (2010), 687- 728.
9. L. A. Bunimovich and A. Yurchenko: *Where to place a hole to achieve a maximal escape rate*. Israel journal of mathematics, **182** (2011), 229-252.
10. I. Cakir, O. Chryssaphinou, and M. Mansson: *On a conjecture by Eriksson concerning overlap in strings*, Combinatorics, Probability and Computing, **8** (1999), 429-440.
11. N. Chernov and R. Markarian: *Ergodic properties of Anosov maps with rectangular holes*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica. Nova Serie, **28** (1997), 271-314.
12. N. Chernov, R. Markarian, and S. Troubetzkoy: *Conditionally invariant measures for Anosov maps with small holes*, Ergodic Theory and Dynamical

Systems, **18** (1998), 1049-1073.

13. N. Chernov, R. Markarian, and S. Troubetzkoy: *Invariant measures for Anosov maps with small holes*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **20** (2000), 1007-1044.

14. P. Collet, S. Martinez, and B. Schmitt: *The Yorke-Pianigiani measure and the asymptotic law on the limit Cantor set of expanding systems*, Nonlinearity, **7** (1994), 1437-1443.

15. M. Demers and L.-S. Young: *Escape rates and conditionally invariant measures*, Nonlinearity, **19** (2006), 377-397.

16. M.J. Erickson: *Introduction to Combinatorics*, Wiley-Interscience, NewYork, 1996.

17. K. Eriksson: *Autocorrelation and the enumeration of strings avoiding a fixed string*, Combinatorics, Probability and Computing, **6** (1997), 45-48.

18. L. J. Guibas and A. M. Odlyzko: *Maximal prefix-synchronized codes*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **35** (1978), 401-418.

19. L. J. Guibas and A. M. Odlyzko: *Periods in strings*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **30** (1981), 19-42.

20. L. J. Guibas and A. M. Odlyzko: *String overlaps, pattern matching, and nontransitive games*. Journal of Combinatorial Theory, Series A **30** (1981), 183-208.

21. V. Halava, T. Harju and L. Ilie: *Periods and binary words*. Journal of Combinatorial Theory, Series A **89** (2000), 298-303.

22. A. Katok and B. Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1998.

23. D. Lind and B. Marcus: *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.

24. D. Lind: *Perturbation of Shifts of Finite Type*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **2** (1989), 350-365.

25. C. Liverani and V. Maume-Deschamps: *Lasota—Yorke maps with holes: conditionally invariant probability measure and invariant probability measures on*

- the survivor set*, Annales de l'Institut Henri Poincare. Probabilites et Statistiques, **39** (2003), 385-412.
26. M. Lothaire: *Applied Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2005.
27. M. Mansson: *Pattern avoidance and overlap in strings*, Combinatorics, Probability and Computing, **11** (2002), 393-402.
28. G. Pianigiani and J. Yorke: *Expanding maps on sets which are almost invariant: decay and chaos*, Transactions of the American Mathematical Society, **252** (1979) 351-366.
29. J. Schneider, T. Tel and Z. Neufeld: *Dynamics of "leaking" Hamiltonian systems*, Physical Review E, **66** (2002), 2181-2186.
30. H. Van den Bedem and N. Chernov: *Expanding maps of interval with holes*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22** (2002), 637–654.
31. P. Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, Berlin, 1982.