МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛИШЕРА НАВОИ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Алгебра и геометрия»

АДЫЛОВ ТИМУР САДУЛЛАЕВИЧ

Методы и приёмы построения жордановой формы матриц

выпускная квалификационная работа для получения академической степени бакалавра 5130100 – математическое направление

Научный руководитель: доц.Т.Э.Буриев

«____» _________ 2015 г

Работа выполнена на кафедре «Алгебра и геометрия»

15 мая 2015 года на заседании кафедры была обсуждена и допущена к защите (протокол № 10)

Декан факультета: доц.Х.Х.Рузимурадов

Зав.кафедры: доц.Г. Хасанов

Выпускная квалификационная работа защищена в ГАК

«____» _________ 2015 г. и оценена ______ баллом (протокол №)

Председатель ГАК: ____________

Члены комиссии: ____________

____

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

XXI век является веком информационных технологий. Принятие закона “Об образовании” и национальная программа по подготовке кадров – это шаги по претворению в жизнь принципа, провозглашенного президентом нашей страны И.А.Каримовым: “Гармонично развитое поколение – основа прогресса Узбекистана”.

В настоящее время глубоко возрастает роль знаний, и мы стали свидетелями становления информационного общества и информационной цивилизации.

Объект исследования – нормальная жорданова форма матрицы.

Предмет исследования – построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы, применение жордановой формы матрицы.

Цель работы: рассмотреть основы теории жордановой формы матрицы, изучить методы её построения, рассмотреть её применение в различных математических моделях.

Постановка задачи:

В математике рассматривается множество различных типов и видов матриц. Таковы, например, единичная, симметричная, кососимметричная, верхнетреугольная (нижнетреугольная) и тому подобные матрицы. Особое значение в теории матриц занимают всевозможные нормальные формы, то есть канонический вид, к которому можно привести матрицу заменой координат. Наиболее важной (в теоретическом значении) и проработанной является теория жордановых нормальных форм, которая и является темой данной работы. Одним из первых жорданова форма была рассмотрена известным французским математиком Мари́ Энмо́н Ками́ль Жорданом, откуда и получила своё название.

Актуальность темы:

Современный инженер, вооруженный мощными компьютерными средствами, уже не должен, как в середине XX века, тратить месяцы на численное решение инженерной задачи. Он может решить ее за полчаса. Он богат возможностями решать численно. Поэтому для инженера начала XXI века на первый план выходит знание большого набора задач, знание большого числа математических моделей, их свойств. У него проблема - систематизировать все множество решаемых им задач, чтобы не путаться в них и их решениях. Инженеру XXI века компьютер дает возможность быть творцом. А для этого надо не столько знать численный метод решения уравнения (он отработан создателями компьютерной программы), сколько знать, какова теоретически структура решения, чего ждать от поведения системы.

Наконец, современный инженер получает возможность затронуть святая святых своей прикладной науки - вопрос соответствия классических или традиционных математических моделей реальностям окружающего мира. Прогресс требует критического взгляда на пророков. И именно здесь инженер уже не может обойтись без общих методов, позволяющих ему свободно *конструировать* математические модели. Именно в этом - в возможности свободно выбирать математическую модель, конструировать новые математические модели для явлений окружающего нас мира (включая и общественные), заключается главное отличие инженера XXI века от предшественников. Более того, язык инженеров на наших глазах переходит на более высокий уровень, - от разговоров про сходимость конкретного численного метода к разговорам о множестве возможных моделей для явления. И первым шагом к такому языку, к такому искусству, безусловно, является Жорданова нормальная форма.

Цели и задачи:

В данной работе мы рассмотрим основные понятия и теоремы, необходимые для построения жордановой формы, а также непосредственно способы построения. Стоит обратить внимание на то, что проделав немалую работу в изучении данной темы, мы наткнулись как минимум на 5 различных способов конструирования жорданова базиса и жордановой формы матрицы, что весьма интересно. Однако в связи с ограничением в объёме, мы постарались выбрать три самых эффективных, интересных и показательных приёмов и изложить в данной работе.

В процессе изучения **поставленной задачи**, мы смогли убедиться в том, что жорданова форма матрицы важна не только в линейной алгебре, но и в других сферах, например, физике и химии. Но наибольшее значение она приобретает в конструировании математических моделей, необходимых для решения задач, связанных с явлениями окружающего нас мира. Примером такой задачи в данной работе послужил прогноз численности населения страны на 200 лет и оптимальный выбор демографических показателей для стабилизации роста населения.

Исследования и разработки:

Изучены методы построения жорданова базиса и жордановой формы матрицы, найдено применение жордановой формы матрицы в математической модели для оптимального прогноза численности населения страны.

Область возможного применения: всевозможные математические модели, связанные с явлениями окружающего мира (включая и общественные).

Значимость: применение жордановой формы к различным математическим моделям позволяет значительно совершенствовать данные методы решения различных задач.

Методы исследования: математические, анализа, сравнительного анализа, моделирования, обобщения, прогнозирования, синтеза.

Подтверждается, что приведённый в неё расчётно-аналитический материал правильно и объективно отражает состояние исследуемого процесса, а все заимствованные из литературных источников и других источников теоретические, методологические и методические положения и концепции сопровождаются ссылками на их автора.

Материалы электронного ресурса «Жорданова форма матрицы оператора», учебного пособия «Теория матриц» П. Ланкастера и «Теория матриц» Ф.Р. Гантмахера были использованы для написания главы «Основы теории жордановой формы», а также частично были задействованы в остальных главах. Для написания главы «Построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы» были использованы практическое пособие «Практический способ построения жордановой формы и жорданова базиса» Уховского М.К , учебное пособие «Построение жорданова базиса» Манина Ю.И. Для написания главы «Приложения жордановой формы матрицы» был использован электронный ресурс статья в журнале СПбГМТУ «Математика в ВУЗе» Сушковой М.В. Также был задействован ещё ряд ресурсов для написания работы, которые описаны в списке использованных источников.

Содержание работы: Работа состоит из введения, 5 параграфов, заключения и списка использованных источников, включающих в себя 11 наименований. Работа состоит из 60 страниц.

Во введении обосновывается тема, дается обзор литературы и формулируются цели и задачи, актуальность темы, научное и практическое значение.

§1. Основы теории жордановой формы матрицы

1.1 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

Жорданова матрица — квадратная блочно-диагональная матрица над полем $\mathbb{K}$, с блоками вида

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Каждый блок J_λ называется **жордановой клеткой** с собственным значением λ (собственные значения в различных блоках, вообще говоря, могут совпадать).

Согласно теореме о жордановой нормальной форме, для произвольной квадратной матрицы A над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ (например, полем комплексных чисел $\mathbb{K}$=C) существует квадратная невырожденная (то есть обратимая, с отличным от нуля определителем) матрица C над $\mathbb{K}$, такая, что

$$J = C^{-1}AC$$

является жордановой матрицей. При этом J называется **жордановой формой** (или **жордановой нормальной формой**) матрицы A. В этом случае также говорят, что жорданова матрица J в поле $\mathbb{K}$ *подобна* (или *сопряжена*) данной матрице A. И наоборот, в силу эквивалентного соотношения

$$A = CJC^{-1}$$

матрица A подобна в поле $\mathbb{K}$ матрице J. Нетрудно показать, что введённое таким образом отношение подобия является отношением эквивалентности и разбивает множество всех квадратных матриц заданного порядка над данным полем на непересекающиеся классы эквивалентности. Жорданова форма матрицы определена не однозначно, а с точностью до порядка жордановых клеток. Точнее, две жордановы матрицы подобны над $\mathbb{K}$ в том и только в том случае, когда они составлены из одних и тех же жордановых клеток и отличаются друг от друга лишь расположением этих клеток на главной диагонали.

Рассмотрим оператор A действует в линейном пространстве над числовым полем K. Предположим, что все корни характеристического многочлена принадлежат полю K. Рассмотрим характеристический многочлен оператора:

$f(\lambda) =$ … ,

где $\neq$ при $i \neq j$, $i,j = 1,2, \dots ,p$. Здесь

.

Число называется алгебраической кратностью собственного значения Максимальное значение линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению , называется его геометрической кратностью и обозначается .

Теорема. $\leq$.

Если , $i = 1, 2, \dots , p$,то количество линейно независимых собственных векторов оператора A равно размерности пространства, и из них можно составить базис в пространстве . В этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} m_1 \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} m_2 \text{ строк} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} m_p \text{ строк} \end{matrix} ;$$

Каждое собственное значение λ_iвстречаются на диагонали этой матрицы столько раз, какова его алгебраическая кратность. Вне диагонали все элементы матрицы равны нулю

1.2 Характеристические числа жордановой клетки.

Рассмотрим матрицу оператора размера $k \times k$:

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & & \\ & & \lambda_0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Её характеристический многочлен $J_k(\boldsymbol{\lambda_0}) - \boldsymbol{I\lambda}$, который имеет вид:

$(\lambda_0 - \lambda)^k$ - имеет корень λ_0 кратности *k*. Таким образом, данная матрица имеет собственное значение λ_0 алгебраической кратности *k*. Отвечающие ему собственные векторы – это ненулевые решения однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как ранг *B*= *k-1*, так что размерность собственного подпространства равна 1, то существует лишь один линейно независимый собственный вектор. Таким образом, при $k \leq 2$не существует базиса, состоящего из собственных векторов этого оператора, то есть ни в одном базисе матрица оператора не может иметь диагональный вид. Матрица $J_k(\lambda_0)$называется жордановой клеткой порядка *k*, соответствующей собственному значению λ_0

1.3 Присоединённые векторы

Элемент x называется присоединённым вектором оператора A, отвечающий собственному значению λ, если для некоторого натурального числа $m \geq 1$ выполняется соотношение:

$$(A-\lambda I)^{m-1}x \neq 0, (A-\lambda I)^{m}x = 0.$$

При этом число mназывается высотой присоединённого вектора x. Иными словами, если x – присоединённый вектор высоты m, то элемент $(A-\lambda I)^{m-1}x$ является собственным вектором оператора A. Очевидно, собственные векторы – это присоединённые векторы высоты 1(здесь $(A-\lambda I)^{0}=I$).

Рассмотрим последовательность векторов e_1, e_2, … ,e_m, для которых выполняется соотношение $e_1 \neq 0$:

$$Ae_1 = \lambda e_1$$

$$Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$$

$$Ae_2 = \lambda \mathrm{e}_2 + e_1$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$Ae_m = \lambda e_m + e_{m-1}$$

или эквивалентно:

$$(A-\lambda I)e_1 = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)e_1 = 0,$$

$$(A-\lambda I)e_2 = e_1 \Rightarrow (A-\lambda I)^2 e_2 = 0,$$

$$(A-\lambda I)e_3 = e_2 \Rightarrow (A-\lambda I)^3 e_3 = 0,$$

…………… …………….

$$(A-\lambda I)e_m = e_{m-1} \Rightarrow (A-\lambda I)^m e_m = 0.$$

Таким образом, цепочка векторов e_1, e_2, … ,e_m состоит из собственного вектора e_1 и присоединённых векторов e_2, … ,e_m.

Введём обозначение $B=A-\lambda I$ и запишем предыдущие соотношения в виде:

$$\mathrm{B}e_1=0 \Rightarrow \mathrm{B}e_1=0,$$

$$\mathrm{B}e_2=e_1 \Rightarrow B^2 e_2=0,$$

$$\mathrm{B}e_3=e_2 \Rightarrow B^3 e_3=0,$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$Be_m = e_{m-1} \Rightarrow B^m e_m = 0.$$

Теорема. Векторы $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы.

Отметим, что в случае, когда количество векторов $e_1, \ldots, e_m$ равно размерности пространства, т.е. $m=n$, эти векторы образуют базис в R_n, *а матрица* оператораA в этом базисе имеет вид жордановой клетки порядка n с числом λ на диагонали (см. (1))

1.4 Жорданов блок

Жордановым блоком, отвечающим собственному значению λ_0,называется блочно-диагональная матрица, каждый блок которой представляет собой жорданову клетку вида (1.1):

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i_1}(\lambda_0)} & & & \\ & \boxed{J_{i_2}(\lambda_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i_s}(\lambda_0)} \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали матрицы расположены sжордановых клеток $\lambda_{i1}(\lambda_0)$, $\lambda_{i1}(\lambda_0)$, $\ldots$, $\lambda_{is}(\lambda_0)$ порядков $i_1, i_2, \ldots, i_s$, где s – геометрическая кратность собственного значения λ_0. Сумма порядков этих клеток равна алгебраической кратности собственного значения λ_0, т.е.

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_s = m.$$

Все элементы матрицы вне жордановых клеток равны нулю. Порядок расположения жордановых клеток в матрице $A(\lambda_0)$ определён неоднозначно.

Утверждение. Алгебраическая кратность собственного значения λ_0 равна сумме жордановых клеток с этим собственным значением. А геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна числу жордановых клеток с собственным значением λ_0 или числу линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0.

Рассмотрим простой случай, когда характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$$

и геометрическая кратность собственного значения λ_0равна *s*.

Пример 1. Пусть *m=2, s=1*. Тогда:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть *m=3, s=2*. Тогда имеем жорданов блок, состоящий из двух жордановых клеток порядков 1 и 2:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ либо } A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть *m=4, s=1*. В данном случае имеется одна жорданова клетка:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть *m=4, s=2*. В этой ситуации жорданов блок состоит из двух клеток, но порядки этих клеток однозначно не определяются: либо имеем две клетки порядка 2 каждая, либо две клетки, одна из которых имеет порядок 1, а вторая – 3:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \text{ либо } A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

1.5 Теорема о жордановой форме матрицы оператора

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве над полем комплексных чисел размерности nи его характеристический многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$при $j \neq k$,

$$m_1 + m_1 + \dots m_p = n.$$

Тогда в этом пространстве существует базис, состоящий из собственных и присоединённых векторов оператора *A,* в котором матрица оператора имеет блочно-диагональную форму (называется жордановой формой)

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{A(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A(\lambda_p)} \end{pmatrix},$$

Блочно-диагональная матрица

где $A(\lambda_j)$ – жорданов блок, соответствующий собственному значению λ_j. Указанный базис называется жордановым.

Сформулированная теорема верна и в случае, когда линейный оператор действует в линейном пространстве над произвольным полем, но все корни характеристического многочлена принадлежат этому полю .

Рассмотрим несколько примеров. Обозначим через nразмерность пространства, m_jи s_j – алгебраическую и геометрическую кратности собственного значения λ_j соответственно.

Пример 1. Пусть *n=2,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда матрица оператора может быть приведена к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $n=4$ и оператор имеет два различных собственных значения $\lambda_1\,(m_1 = 2,\ s_1 = 1)$ и $\lambda_2\,(m_2 = \ s_2 = \ 1)$. Тогда:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $n=4$ и оператор имеет два различных собственных значения $\lambda_1\,(m_1 = \ s_1 = 2)$ и $\lambda_2\,(m_2 = \ s_2 = \ 2)$. Тогда:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $n=4$ и оператор имеет два различных собственных значения $\lambda_1\,(m_1 = 2,\ s_1 = 1)$ и $\lambda_2\,(m_2 = 2,\ s_2 = \ 2)$. Тогда:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

1.6. Первый способ построения жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Пусть λ – собственное значение оператора, m и s алгебраическая и геометрическая кратности числа λ. Опишем построение линейно независимой совокупности из mсобственных и присоединённых векторов, отвечающих данному λ. Этой совокупности векторов в жордановой матрице A' будет соответствовать жорданов блок $A(\lambda)$.

Обозначим:

$$B=A-\lambda I,\ B^k=(A-\lambda I)^k,\ N_k=\ker B^k,\ n_k=\dim N_k,\ r_k=rang B^k.$$

Ясно, что $n_k + r_k = n$, Для удобства считаем, что $B^0 = I$, так что $r_0 = n$, $n_0=0$.

Поскольку ранг $B^{k+1} \le B^k$, имеем $n_{k+1} \ge n_k$, так что:

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$$

Теорема. Существует такое натуральное число q, что:

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_q = N_{q+1} = N_{q+2} \ldots,$$

т.е. все ядра с номером, большим, чем q, совпадают с ядром N_q. При этом $n_1 < s, n_q = m$.

Построим часть жорданова базиса, соответствующую данному собственному значению λ, следующим образом:

1) Возводя матрицу B в последовательные натуральные степени, найдём показатель q, начиная с которого ранг степеней матрицы B перестаёт уменьшаться.
2) Рассмотрим ядра N_q и N_{q-1}. Пусть векторы $f_1, f_2, \ldots \in N_q$ достраивают произвольный базис пространства N_{q-1} до базиса пространства N_q; Их количество равно $n_q - n_{q-1}$. Эти векторы являются присоединёнными векторами высоты q, и каждый из них порождает цепочку, состоящую из q векторов, которые войдут в состав жорданова базиса. Каждой такой цепочке будет соответствовать жорданова клетка порядка q; Таким образом, в состав жордановой формы матрицы оператора A войдёт $n_q - n_{q-1}$ жордановых клеток порядка q.
3) Рассмотрим ядра N_{q-1} и N_{q-2}, а также векторы $Bf_1, Bf_2 \ldots$; Их количество равно:

$$n_q - n_{q-1} = (n - r_q) - (n - r_{q-1}) = r_{q-1} - r_q.$$

К этим векторам добавим векторы $g_1, g_2 \ldots$ из пространства N_{q-1} так, чтобы система векторов

$$Bf_1, Bf_2, \ \ldots\ , g_1, g_2, \ \ldots\ \in N_{q-1}$$

дополняла произвольный базис ядра N_{q-2} до базиса N_{q-1}. Векторы $g_1, g_2, \ldots$ являются присоединёнными векторами высоты *q-1*, и каждому из них будет соответствовать, во-первых, цепочка векторов жорданова базиса, и во-вторых, жорданова клетка порядка *q-1*. Количество добавляемых векторов g_1, g_2 ... равно:

$$n_{q-1} - n_{q-2} - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2} = r_q - 2r_{q-1} + r_{q-2}$$

Таким же будет количество жордановых клеток порядка *q-1.*

4) Рассмотрим ядра N_{q-2} и N_{q-3} и векторы $B^2 f_1$, $B^2 f_2$ ... Bg_1, Bg_2 ... .К этим векторам (если их не хватает) добавим векторы h_1, h_2 ... из пространства N_{q-2} так, чтобы совокупность векторов

$$B^2 f_1, B^2 f_2 \ldots Bg_1, Bg_2 \ldots, h_1, h_2 \ldots \in N_{q-2}$$

дополняла произвольный базис пространства N_{q-3} до базиса пространства N_{q-2}. Количество добавляемых векторов $h_1, h_2, \ldots$ равно:

$$n_{q-2} - n_{q-3} - (n_{q-1} - n_{q-2}) = -n_{q-1} + 2n_{q-2} - n_{q-3} = r_{q-1} - 2r_{q-2} + r_{q-3}$$

Таким же будет количество жордановых клеток порядка *q-2.*

Процесс продолжаем аналогично. Наконец, рассмотрим ядро N_1 и векторы:

$$\left.\begin{array}{l} B^{q-1}\boldsymbol{f}_1,\ B^{q-1}\boldsymbol{f}_2,\ \ldots, \\ B^{q-2}\boldsymbol{g}_1,\ B^{q-2}\boldsymbol{g}_2,\ \ldots, \\ B^{q-3}\boldsymbol{h}_1,\ B^{q-3}\boldsymbol{h}_2,\ \ldots, \\ B\boldsymbol{v}_1,\ B\boldsymbol{v}_2,\ \ldots \end{array}\right\} \in N_1.$$

Система векторов, принадлежащих N_1

Если эта система не образует базис пространства N_1, то добавим собственные векторы $u_1, u_2, \ldots$ так, чтобы пополненная система являлась базисом в N_1.

Итак, мы описали процесс построения жорданова базиса и выяснили, что количество жордановых клеток порядка k, входящих в состав жордановой формы матрицы оператора, может быть найдено по формуле:

$$t_k = -n_{k+1} + 2n_k - n_{k-1} = r_{k+1} - 2r_k + r_{k-1}. (1.2)$$

Построенную часть жорданова базиса, состоящую из mвекторов, соответствующих данному λ (m–алгебраическая кратность этого собственного значения), запишем лестницу («жорданова лестница»).

N_q	$\boldsymbol{f}_1$	$\boldsymbol{f}_2$	$\dots$									
N_{q-1}	$B\boldsymbol{f}_1$	$B\boldsymbol{f}_2$	$\dots$	$\boldsymbol{g}_1$	$\boldsymbol{g}_2$	$\dots$						
N_{q-2}	$B^2\boldsymbol{f}_1$	$B^2\boldsymbol{f}_2$	$\dots$	$B\boldsymbol{g}_1$	$B\boldsymbol{g}_2$	$\dots$	$\boldsymbol{h}_1$	$\boldsymbol{h}_2$	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
N_1	$B^{q-1}\boldsymbol{f}_1$	$B^{q-1}\boldsymbol{f}_2$	$\dots$	$B^{q-2}\boldsymbol{g}_1$	$B^{q-2}\boldsymbol{g}_1$	$\dots$	$B^{q-3}\boldsymbol{h}_1$	$B^{q-3}\boldsymbol{h}_2$	$\dots$	$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{u}_2$	$\dots$

Жорданова лестница

Все векторы таблицы линейно независимы, и их число равно m (алгебраической кратности собственного значения λ). Каждому столбцу этой таблицы соответствует одна жорданова клетка, порядок которой равен высоте столбца. Количество столбцов жордановой лестницы, т.е. полное количество жордановых клеток в блоке, соответствующем собственному значению λ, равно геометрической кратности sэтого собственного значения.

Будем нумеровать векторы построенной части базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке.

Например, пусть e_1, … ,e_q–векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда:

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{e}_1 = B^{q-1}\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}, & & A\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_1, \\
\boldsymbol{e}_2 = B^{q-2}\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, & & A\boldsymbol{e}_2 = \lambda\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1, \\
\vdots & \Rightarrow & \vdots & \Rightarrow & \vdots \\
\boldsymbol{e}_{q-1} = B\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_{q-1} = \boldsymbol{e}_{q-2}, & & A\boldsymbol{e}_{q-1} = \lambda\boldsymbol{e}_{q-1} + \boldsymbol{e}_{q-2}, \\
\boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{e}_{q-1}, & & A\boldsymbol{e}_q = \lambda\boldsymbol{e}_q + \boldsymbol{e}_{q-1}.
\end{array}
$$

Этой группе векторов (собственный вектор e_1и присоединённые к нему векторы e_1, … ,e_q) жорданова базиса соответствуют первые qстолбцов матрицы A', которые имеют вид:

$$\begin{bmatrix} J_q(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

где $J_q(\lambda)$ – жорданова клетка порядка q с числом λ на главной диагонали.

В следующих столбцах q столбцах матрицы A', определённых векторами второго столбца жордановой лестницы, расположена жорданова клетка $J_q(\lambda)$ так, что числа λ стоят на главной диагонали матрицы A', а элементы вне клетки равны нулю. Подобным образом для данного λ получаем mстолбцов матрицы A'. На этих mстолбцах находится жорданов блок A(λ).

Для других значений эта схема повторяется, в результате чего получим жорданову матрицу A'и соответствующий жорданов базис.

1.7. Второй способ построения жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Можно строить жорданов базис, начиная с собственных векторов, решая систему

$$(A - \lambda I)X = 0 \qquad (1.3)$$

для нахождения собственных векторов, систему

$$(A - \lambda I)Y = X. \qquad (1.4)$$

для нахождения присоединённых векторов высоты 1 и т.д. Трудность заключается в том, что система (1.4) может оказаться разрешимой не при любом собственном векторе X (если собственное подпространство не одномерно), так что приходится заботиться о надлежащем выборе этого собственного вектора, что приводит к решению систем линейных уравнений с параметром. Это трудность усугубляется в случае, когда собственному вектору отвечает длинная цепочка присоединённых векторов

.

1.8. Третий способ построения жордановой формы матрицы

В некоторых случаях не требуется построения жорданова базиса, а нужно лишь определить жорданову форму матрицы. Тогда можно сократить объём вычислений. Для этого по каждому характеристическому корню λ_iматрицы A необходимо выполнить следующие действия:

1) Составить матрицу $A-\lambda_i E$и возводить её последовательно в степени $m = 1,2,\dots,n$ до тех пор, пока не получится равенство

$$r(A-\lambda_i E)^m = n - m_i, \qquad (1.5)$$

где $r(A-\lambda_i E)^m -$ ранг матрицы$A-\lambda_i E,$ n – порядок матрицы A, m_i – кратность характеристического корня λ_i матрицы A. Наименьшее натуральное число m, при котором выполняется равенство (1.5), даст максимальный порядок k_i жордановых клеток по λ_i в матрице J.

2) По формуле

$$q_h = 2m_h - m_{h-1} - m_{h+1},\ h = 1,2,\dots,k_i, \qquad (1.6)$$

или по формуле

$$q_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1},\ h = 1,2,\dots,k_i, \qquad (1.7)$$

определить число q_h жордановых клеток по λ_i порядка h, $h = 1,2,\dots,k_i$, i=1,2, … ,s. Здесь $q_h -$число жордановых клеток порядка h в жордановой форме матрицы A, m_0=0, m_p–дефект оператора с матрицей $(A-\lambda_i E)^p$, $r_0 = n, r_p -$ранг матрицы$(A-\lambda_i E)^p$.

3) По найденным числам q_h, $h = 1,2,\dots,k_i$, для всех λ_i матрицы A составить матрицу J.

Таким образом, в данном параграфе мы рассмотрели основные понятия, необходимые для построения жорданова базиса и жордановой формы матрицы: алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения, жорданова клетка, жорданов блок, присоединённые векторы, теорема о жордановой форме матрицы оператора. А также описали три способа построения жордановой формы матрицы.

§2. Построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Дана матрица Aлинейного оператора в некотором базисе. Требуется найти жорданов базис и жорданову форму матрицы оператора в этом базисе. Рассмотрим примеры решения такой задачи методом, описанным в пункте 1.6

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$ имеет корень λ = 2 кратности 3, т.е. m = 3. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $r_1 =$ rang B = 1, $n_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2$.

Находим собственные векторы, решив однородную систему линейных уравнений $BX = 0$; фундаментальная совокупность решений состоит из двух векторов, например:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Количество этих векторов (т.е. геометрическая кратность собственного значения) равно двум, s = 2, так что для построения жорданова базиса требуется ещё один присоединённый вектор.

Так как $B^2 = 0$, то ядро N_2 оператора B^2 совпадает со всеми пространствами, т.е. $n_2 = 3$, и при этом $q = 2$.

Дополним базис ядра N_1, т.е. набор векторов (1), до базиса ядра N_2, например, вектором

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_2, \notin N_1.$$

тогда

$$Bf_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in N_2.$$

Дополним вектор Bf_1 до базиса пространства N_1 вектором

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Построим жорданову лестницу:

N_2	f_1	
N_1	Bf_1	g

Жорданов базис:

Соответствует жорданова клетка порядка 2 $\Rightarrow \begin{cases} e_1 = Bf_1 \\ e_2 = f_1 \end{cases}$

Соответствует жорданова клетка порядка 1 $\Rightarrow e_3 = g$

При этом

$$Be_1 = 0, Be_2 = e_1, Be_3 = 0,$$

т.е. e_1 – собственный вектор, e_2 — его присоединённый вектор, e_3 — собственный вектор.

В жордановом базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица оператора A' имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 3, т.е. $m = 3$. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

и мы имеем $r_1 = 2, n_1 = 1.$

Фундаментальная совокупность решений системы $BX = 0$ состоит из одного вектора, например

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Следовательно, геометрическая кратность равна 1. Далее матрица B^2 равна:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Для неё имеем $r_2 = 1, n_2 = 2,$ и базис ядра N_2 из двух векторов, например:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $B^3 = 0$, так что $r_3 = 0, n_3 = 3$, то ядро N_3оператора B^2 совпадает со всем пространством, т.е. $q = 3$.

Вектором $f_1 = (1, 0,0)^T$дополним базис ядра N_2 до базиса пространства N_3. Вектор $Bf_1 = (0, -2, -1)^T$ дополняет базис ядра N_1 до базиса ядра N_2. Вектор $B^2 f_1 = (3, 1, 1)^T$образует базис пространства N_1. Жорданова лестница имеет вид:

N_3	f_1
N_2	Bf_1
N_1	$B^2 f_1$

Жорданов базис:

$$e_1 = B^2 f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = Bf_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь e_1 – собственный вектор, e_2 и e_1 – два его присоединённых вектора. Матрица оператора A'имеет вид жордановой клетки:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь построим жорданов базис и жорданову форму матрицу способом, описанным в пункте 1.7.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 = 0.$$

Имеет корень $\lambda = 3$ кратности $m = 3$. Система $(A - \lambda I)X = 0$принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x^1 = 0$, x^2 и x^3 $-$ произвольны. Значит, собственные векторы имеют вид:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

где C_1и C_2 – произвольные числа, не равные нулю одновременно. Линейно независимых собственных векторов два, так что геометрическая кратность данного собственного значения равна 2. Остаётся найти $m - s = 1$присоединённый вектор. Он должен удовлетворять уравнению $(A - \lambda I)Y = X$. Подставляя в него λ = 3 и найденный X из (1), получим систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Эта система совместна, если выполнены условия теоремы Кронекера-Капелли:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 3 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Откуда$C_1 = 0, C_2 \neq 0$. Достаточно найти одно из решений системы (2.3), например:

$$Y = \begin{pmatrix} C_2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это и будет вектор, присоединённый к собственному вектору

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Выберем $C_2 = 3$. Жорданов базис будет состоять из собственного вектора e_1, присоединённого к нему вектора e_2 и ещё одного собственного вектора, линейно независимого с e_1.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора имеет жорданову форму:

$$A_e = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Жорданова клетка:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

соответствует собственному вектору e_1 и присоединённому к нему вектору e_2, жорданова клетка

$$J_2 = (3).$$

соответствует собственному вектору e_3.

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 == -1$ кратности $m_2 = 2$.Собственному значению $\lambda_1 = 1$ отвечают собственные векторы

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C_1 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 1. Присоединённый к X_1 вектор Y_1находится из системы $(A - \lambda_1 I)Y_1 = X_1$, которая совместна при всех C_1. Например,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} C_1/2 \\ 0 \\ C_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_1 = 2$.

Корню $\lambda_2 = -1$ отвечают собственные векторы

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C_2 \neq 0,$$

Т.е. геометрическая кратность собственного значения λ_2 равна 1. Присоединённый к X_2 вектор Y_2находится из системы $(A - \lambda_2 I)Y_2 = X_2$ совместной при всех C_2. Например,

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -C_2/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_2 = 4$.

Теперь строим жорданов базис:

$$e_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся методом, описанным в пункте 1.8. Дана матрица:
Пример 5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен равен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -2 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

имеет корень $\lambda_1 = 2$ кратности $m_1 = 2$ и корень $\lambda_2 = 1$ кратности $m_2 = 1$. При λ_1 имеем:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r(A - 2E) = r_1 = 2 \neq n - m_1 = 3 - 2 = 1,$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, r(A - 2E)^2 = r_2 = 1 = n - m_1,$$

$$(A-2E)^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, r(A-2E)^3=r_3=1.$$

Следовательно, наибольший порядок жордановых клеток по $\lambda_1=2$ равен $k_1=2$ и по формуле(1.7) находим:

$$q_1=r_0-2r_1+r_2=3-2*2+1=0,$$
$$q_2=r_1-2r_2+r_3=2-2*1+1=0.$$

Поэтому в жордановой форме матрицы A'матрицыA по характеристическому числу $\lambda_1=2$ будет всего лишь одна жорданова клетка

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2=1$ имеем:

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, r(A-2E)=r_1=2=n-m_1$$

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix}-3 & -8 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, r(A-2E)^2=r_2=2.$$

Поэтому в жордановой форме по характеристическому числу $\lambda_2=1$ будет $q_1=r_0-2r_1+r_2=3-2*2+2=1$ жордановых клеток порядка 1. Из полученных жордановых клеток составляем жорданову форму матрицы *A:*

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В данной главе мы на практике применили все три способа построения жорданова базиса и жордановой формы, смогли оценить и найти достоинства и недостатки каждого из них. Безусловно, самым надёжным является метод, описанный в подпункте 1.6, однако он требует большого количества времени и занимает большой объём. Второй способ более лаконичный, чем первый, но с помощью него не всегда можно построить жорданову форму матрицы. И наконец, третий способ, который является самым удобным и быстрым, но посредством него можно построить лишь жорданову форму матрицы, исключая построение жорданова базиса.

§3. Элементарные делители жордановой матрицы

Пусть A — числовая квадратная матрица n-го порядка. Характеристическая матрица $(A-\lambda E)$ приводится (элементарными преобразованиями) к

нормальн $\operatorname{diag}\big(e_1(\lambda),\ldots,e_n(\lambda)\big)$ $e_i(\lambda)$ —

инвариан $(A-\lambda E)$ многочлен

можно пр

$$\Delta_A(\lambda)=(-1)^n\cdot e_1(\lambda)\cdot e_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot e_n(\lambda).$$

Разлож $e_i(\lambda)$ и:

$$\begin{aligned}
e_1(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{a_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{a_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{a_k},\\
e_2(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{b_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{b_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{b_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_{n-1}(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{\ell_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{\ell_k},\\
e_n(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{m_k}.
\end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ ы A; показатели степеней, удовлетворяют неравенствам $0\leqslant a_i\leqslant b_i\leqslant\ldots\leqslant\ell_i\leqslant m_i$ $(i=1,\ldots,k)$ так как каждый последующий инвариантный множитель делится на предыдущий. Некоторые из множителей $(\lambda-\lambda_i)^j$ в (3.1) могут иметь нулевую степень, т.е. быть равными единице. Исключение составляют

$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ $\mu_A(\lambda)=e_n(\lambda)$

$(m_i\geqslant 1,\ i=1,\ldots,k)$

$(-1)^n$

$$\Delta_A(\lambda)=(-1)^n\cdot(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{n_k}=(-1)^n\cdot e_1(\lambda)\cdot e_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot e_n(\lambda),$$

получаем, что $a_i + b_i + \ldots + \ell_i + m_i = n_i \ (i = 1, \ldots, k)$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, т.е. сумма степеней всех инвариантных множителей равна порядку квадратной матрицы A.

Каждый отличный от единицы многочлен вида $(\lambda - \lambda)^J$, указанный в | разложениях (3.1) инвариантных множителей, называется ***элементарным делителем характеристической матрицы*** $(A - \lambda E)$ (или просто ***элементарным делителем матрицы*** A).

По формулам (3.1) можно составить таблицу элементарных делителей:

$$\begin{array}{ccccc}
(\lambda-\lambda_1)^{m_1}, & (\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_1)^{b_1}, & (\lambda-\lambda_1)^{a_1}, \\
(\lambda-\lambda_2)^{m_2}, & (\lambda-\lambda_2)^{\ell_2}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_2)^{b_2}, & (\lambda-\lambda_2)^{a_2}, \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
(\lambda-\lambda_k)^{m_k}, & (\lambda-\lambda_k)^{\ell_k}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_k)^{b_k}, & (\lambda-\lambda_k)^{a_k}.
\end{array}$$

(3.2)

Составление таблицы элементарных делителей по таблице инвариантных множителей.

Для составления таблицы (3.2) элементарных делителей по таблице (3.1) инвариантных множителей нужно:

а) в первый столбец таблицы (3.2) записать элементарные делители последнего инвариантного множителя $e_n(\lambda)$ из таблицы (3.1);

б) во второй столбец (3.2) записать элементарные делители предпоследнего инвариантного множителя $e_{n-1}(\lambda)$ из таблицы (3.1) так, чтобы в i-й строке (3.2) были степени одного и того же двучлена $(\lambda - \lambda_i)$, и т.д. 18 последний столбец (3.2) записать элементарные делители первого инвариантного множителя $e_1(\lambda)$ из таблицы (3.1) так, чтобы в i-й строке (3.2) были степени одного и того же двучлена $(\lambda - \lambda_i)$.

Элементы, тождественно равные единице, не являются элементарными делителями и в таблицу (3.2) не заносятся. Поэтому в каждой строке таблицы может быть разное количество элементарных делителей, точнее, в каждом последующем столбце количество делителей не больше, чем в предыдущем. В каждой строке таблицы (3.2) стоят делители $(\lambda-\lambda_i)^j$, относящиеся к одному собственному значению λ_i. Поскольку собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ могут быть упорядочены по-разному, то и строки таблицы (3.2) можно переставлять. Это не будет в дальнейшем иметь существенного значения.

Составление таблицы инвариантных множителей по таблице элементарных делителей

По таблице (3.2) элементарных делителей можно восстановить таблицу (3.1) инвариантных множителей. Для этого нужно:

а) перемножая элементарные делители первого столбца таблицы (3.2), получить последний инвариантный множитель $e_n(\lambda)$ в таблице (3.1);

б) перемножая элементарные делители второго столбца таблицы (3.2), получить предпоследний инвариантный множитель $e_{n-1}(\lambda)$ в таблице (3.1) и т.д. Исчерпав столбцы таблицы (3.2), дописываем недостающие инвариантные множители, полагая их равными единице (количество инвариантных множителей равно сумме степеней всех элементарных делителей, т.е. порядку матрицы).

Заметим, что, составляя таблицу (3.1) по таблице (3.2), можно переставлять строки таблицы (3.2), так как это не приведет к изменению таблицы (3.1). Столбцы таблицы (3.2) переставлять нельзя.

Согласно теореме об инвариантных множителях, эквивалентные характеристические матрицы $(A-\lambda E)$ и $(B-\lambda E)$ имеют одинаковые инвариантные множители (3.1). Тогда они имеют и одинаковые элементарные делители (3.2). Следовательно, критерий подобия числовых матриц можно сформулировать следующим образом.

Теорема (критерий подобия матриц). *Числовые матрицы подобны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые элементарные делители.*

Таким образом, нахождение подобных матриц связано с умением составлять матрицы, элементарные делители которых совпадают с заданной таблицей (3.2).

Жордановы клетки и матрицы

Квадратную матрицу (r-го порядка) вида

$$J_r(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

называют ***жордановой клеткой*** r-го порядка, соответствующей собственному значению λ_0. Все элементы на главной диагонали этой верхней треугольной матрицы равны λ_0, элементы над главной диагональю равны единице, а остальные элементы равны нулю.

Найдем элементарные делители жордановой клетки. Для этого составим характеристическую матрицу

$$J_r(\lambda_0) - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

и найдем наибольшие общие делители $d_i(\lambda)$ миноров i-го порядка. Среди ненулевых миноров первого порядка есть минор, равный единице $(M_2^1 = 1)$.

Рассматривая его как многочлен нулевой степени, заключаем, что наибольший общий делитель миноров первого порядка должен быть также многочленом нулевой степени, т.е. $d_1(\lambda)=1$. Среди миноров второго порядка также имеется минор, равный единице: $M_{2\,3}^{1\,2}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0-\lambda & 1 \end{vmatrix}$, следовательно, $d_2(\lambda)=1$и т.д.

Минор $M_{2\,3\,\ldots\,r}^{1\,2\,\ldots\,r-1}$ ыми

элемен $M_{2\,3\,\ldots\,r}^{1\,2\,\ldots\,r-1}=1$ $d_{r-1}(\lambda)=1$.

Минор

равен $(\lambda_0-\lambda)^r$ $d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r$

инвари

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=\ldots=e_{r-1}(\lambda)=1, \quad e_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r.$$

Сле

делите $(\lambda-\lambda_0)^r$

норма

$$\Big(J_A(\lambda_0)-\lambda E\Big)\sim \operatorname{diag}\underbrace{\Big(1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_0)^r\Big)}_{r}.$$

Зам $\Delta_{J_A(\lambda_0)}=(\lambda-\lambda_0)^r$.

единственный корень λ_0 кратности r, т.е. λ_0 — собственное значение матрицы (3.3).

Рассмотрим теперь блочно-диагональную матрицу

$$J=\operatorname{diag}\Big(J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2)\Big)=\left(\begin{array}{c|c} J_{r_1}(\lambda_1) & O \\ \hline O & J_{r_2}(\lambda_2) \end{array}\right), \tag{3.5}$$

где $J_{r_1}(\lambda_1)$ и $J_{r_2}(\lambda_2)$ — жордановы клетки, а O — нулевые матрицы соответствующих размеров. Для определенности считаем, что $r_1 \geqslant r_2$. Характеристическая матрица $(J - \lambda E)$ также имеет блочно-диагональный вид. С помощью элементарных преобразований каждого блока матрица $(J - \lambda E)$, учитывая (3.4), приводится к диагональному виду

$$(J-\lambda E) \sim \operatorname{diag}\underbrace{(1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_1)^{r_1}}_{r_1},\underbrace{1,\ldots,1,(\lambda-\lambda_2)^{r_2})}_{r_2}$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$,то

$d_1(\lambda) = \ldots = d_{r_1+r_2-1}(\lambda) = 1,\ d_{r_1+r_2}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$

Тогда . $e_1(\lambda) = \ldots = e_{r_1+r_2-1}(\lambda) = 1,\ e_{r_1+r_2}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$

Следовательно, матрица (3.5) имеет два элементарных делителя $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$ и $(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$d_1(\lambda) = \ldots = d_{r_1+r_2-2}(\lambda) = 1,\ d_{r_1+r_2-1}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_2},\ d_{r_1+r_2}(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)^{r_1+r_2}$

Тогда .

$e_1(\lambda) = \ldots = e_{r_1+r_2-2}(\lambda) = 1,\ e_{r_1+r_2-1}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_2},\ e_{r_1+r_2}(\lambda) = (\lambda-\lambda_2)^{r_1}$

Следовательно, матрица (3.5) имеет два элементарных делителя $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}$ и $(\lambda-\lambda_2)^{r_2}$.

Таким образом, элементарные делители блочно-диагональной матрицы (3.5) получаются объединением элементарных делителей каждого блока.

Пример. Найти элементарные делители и инвариантные множители жордановых матриц

$$A = \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Решение. Матрица $A = \operatorname{diag}\Big(J_1(1),\ J_1(2),\ J_2(3)\Big)$ состоит из трех жордановых клеток с разными собственными значениями $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Для каждого собственного значения запишем жорданову клетку и соответствующий элементарный делитель:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 = 1 & \Rightarrow & J_1(1) & \Rightarrow & (\lambda - 1); \\ \lambda_2 = 2 & \Rightarrow & J_1(2) & \Rightarrow & (\lambda - 2); \\ \lambda_3 = 3 & \Rightarrow & J_2(3) & \Rightarrow & (\lambda - 3)^2. \end{array}$$

Получили таблицу элементарных делителей, которая состоит из одного столбца. По этой таблице составляем инвариантные множители (количество которых равно порядку матрицы A). Записываем последний инвариантный множитель $e_4(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, перемножая элементарные делители первого столбца. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (второго столбца в таблице нет), то остальные инвариантные множители полагаем равными единице: $e_3(\lambda) = e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1$.

] $B = \operatorname{diag}\Big(J_2(1),\ J_1(1),\ J_1(2)\Big)$ еток,

($\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

даново

]

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 = 1 & \Rightarrow & J_2(1),\ J_1(1) & \Rightarrow & (\lambda - 1)^2,\ (\lambda - 1); \\ \lambda_2 = 2 & \Rightarrow & J_1(2) & \Rightarrow & (\lambda - 2). \end{array}$$

ух

(чество

] B ный

] $e_4(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ и первого

столбца. Записываем предпоследний инвариантный множитель $e_3(\lambda) = \lambda - 1$ по второму столбцу таблицы. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (третьего столбца в таблице нет), то остальные инвариантные множители полагаем рав $e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1$.

Матрица $C = \mathrm{diag}\Big(J_2(1),\ J_2(1)\Big)$ з двух одинаковых жордановых клеток, со $\lambda_1 = 1$ этого собственн щие элементар

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad J_2(1),\, J_2(1) \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2,\, (\lambda-1)^2.$$

Получи х столбцов. чество которых р C ый множител $e_4(\lambda) = (\lambda-1)^2$ предпоследний инвариантный множитель $e_3(\lambda) = (\lambda-1)^2$ по второму столбцу таблицы. Поскольку исчерпаны все элементарные делители (третьего столбца в таблице нет), то остальные инвариантные множители полагаем равными единице: $e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1$.

§4. Приложение жордановой формы матрицы к задачам математической статистики.

4.1 Прогноз численности населения страны

Разобьем население страны на четыре возрастные группы:

(0,20] , (20,40], (40,60], (60,) лет. (4.1)

Пусть *X(t)* = (x1 (t), x2 (t), x3 (t), x4 (t))T , - количество населения в этих группах в момент времени *t*. Нас интересует численность населения в этих подгруппах (т.е. возрастная структура населения страны) через 20, 40, 60,.. лет (т.е. X(20), X(40), X(60)...). Мы собираемся это вычислить по координатам вектора *X(0)* и по величинам рождаемости и смертности, которые мы возьмем по возможности ближе к жизни, чтобы пример дал нам хотя бы приближенное представление о будущем нашей страны.

Составляем уравнение будущего:

За 20 лет почти все люди из 1-й группы перейдут во вторую. Почти, но не все. Часть погибнет от болезней, несчастных случаев и т.п. Пусть, к примеру, за 20 лет во вторую группу перейдет 0,95 людей из 1-й группы. Это – коэффициент влияния 1-й группы на 2-ю:

$$x_2(\mathrm{t+20}) = 0{,}95 x_2(\mathrm{t})(3.2)$$

Но, кроме того, небольшая часть молодежи из этой группы успеет до 20 лет вступить в брак и завести детей, что дает вклад 1-й группы в 1-ю же группу (спустя 20 лет). Пусть, например, этот вклад составляет 0,01 от численности 1-й группы. А еще в 1-ю группу дадут вклад (в виде детей) 2-я и 3-я группы. Пусть величина вклада от 2-й группы = 0,5 от ее численности (иными словами – все состоят в браке и в каждой семье - один ребенок), а от 3-й группы вклад = 0,02 от ее численности. Тогда:

$$x_1(\mathrm{t+20}) = 0{,}01\, x_1(\mathrm{t}) + 0{,}5 \qquad x_2(\mathrm{t}) + 0{,}02\, x_3(\mathrm{t}) \qquad (4.3)$$

Выживаемость во второй группе мы положим равной 0,8, то есть:

$$x_3(\mathrm{t+20}) = 0{,}8\, x_2(\mathrm{t}) \qquad (4.4)$$

А в 3 и 4 группах, соответственно, 0,7 и 0,4:

$$x_4(\text{t+20}) = 0{,}7\ x_3(\text{t}) + 0{,}5\ x_4(\text{t}) \qquad (4.5)$$

Заданные нами соотношения (3.2 , 3.3, 3.4, 3.5) перепишем в матричной форме:

$$X(\text{t+20}) = AX(\text{t}) \qquad (4.6)$$

где матрица A коэффициентов влияния такова:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}5 & 0{,}02 & 0 \\ 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Замечание по составлению матриц .Обращаем на то, что в подобных задачах матрицу можно составлять сразу, не выписывая явно формул вида (4.2) - (4.5). Принцип составления матрицы: номер входа = номер столбца, номер выхода = номер строки. Так, коэффициент влияния 1-ой группы на 2-ю мы должны писать в 1-й столбец, 2-ю строку. Благодаря такому правилу можно легко составлять матрицы для подобных моделей.

Согласно формуле (4.6), если подействовать оператором A на состав X(t) населения в момент t, то получится состав населения X(t+20) через 20 лет. Поэтому оператор A называют оператором сдвига (в этой задаче - сдвига на 20 лет). В итоге из формулы (4.6) получаем:

$$X\,(\text{t+20n}) = A^n X\,(\text{t}) \qquad (4.8)$$

Итак, мы хотим вычислить состав населения через 20, 40, 60,... лет (при условии, что ни рождаемость, ни смертность не меняются), - т.е. вычислить $AX(0)$, $A^2X(0)$,A^3X(0), ...

Произведение $A^nX(0)=AAAA...AX(0)$ можно вычислять в разной последовательности. Можно так:

$$A\ (A...(AX(0))) \qquad (4.9)$$

А можно сначала найти A^n, а затем воспользоваться формулой:

$$A^nX(0) \qquad (4.10)$$

Пусть количество населения сегодня (при t=0) таково:

x_1 (0) = 30, x_2 (0) = 40, x_3 (0) = 30, x_4 (0) = 25 (миллионов человек).

Теперь проведем вычисления для n = 2, 3...10 по формуле (4.9) в какой – либо из математических компьютерных программ, например MathCAD. В итоге мы получаем результаты (в млн. человек), которые помещаем в таблицу:

Таблица – 4.1 – Динамика численности населения за 200 лет

N	t	x_1	x_2	x_3	x_4	население
0	0	30,00	40,00	30,00	25,00	125,0
1	20	20,29	28,50	32,00	31,00	112,4
2	40	15,10	19,86	22,80	34,80	92,55
3	60	10,53	14,34	15,88	29,88	70,64
4	80	7,595	10,01	11,48	23,07	52,15
5	100	5,309	7,215	8,006	17,26	37,79
6	120	3,821	5,044	5,772	12,51	27,15
7	140	2,676	3,630	4,035	9,044	19,38
8	160	1,922	2,542	2,904	6,442	13,81
9	180	1,348	1,826	2,033	4,610	9,817
10	200	0,9672	1,281	1,461	3,267	6,976

Видим, что за 200 лет страна с населением, как в современном Узбекистане, сжалась до населения Ташкентской области. Обратите внимание, как стареет население (доля стариков становится все больше). Это – обязательный спутник убывания населения. В реальности, конечно, все гораздо хуже: уменьшение населения при прежней территории затрудняет знакомства и заключение браков молодежи, уменьшает богатство страны и как следствие ухудшается медицинское обслуживание и т.д. Иными словами, уменьшение населения привело бы еще и к уменьшению чисел в матрице *A*. Из-за притязаний соседних стран на территорию и ресурсы такая страна исчезнет лет через 50. Можно видеть, что в начале нашей таблицы уменьшение населения идет даже медленнее

– 0,63 млн. в год, и убыль населения составляет 10% за 20 лет. Но в конце таблицы убыль составляет уже около 30% за 20 лет.

Для сравнения по-другому зададим рождаемость во 2-й группе – на уровне 4 детей на семью.Тогда те же вычисления дают нам совершенно иной результат. За 140 лет нынешний Узбекистан догнал бы по населению миллиардный Китай и наполовину состояла бы из юной молодежи.

Разумеется, если бы нас интересовал лишь такой простейший прогноз, мы могли бы ограничиться простым вычислением по формуле (4.9) и теория Жордановой формы не была бы нужна. Но нас интересует возможность управлять процессом, не допуская ни гибели страны, ни катастрофического увеличения населения. Поэтому нас интересуют (в самом простейшем случае) три вопроса:

1) Можно ли выбором величины рождаемости стабилизировать население.
2) Какой должна быть рождаемость для того, чтобы население страны стабилизировалось.
3) Какова установится структура населения (соотношение между молодежью и стариками) при стабильной его численности (это соотношение определяет, скольких пенсионеров должен кормить каждый работник, и, следовательно, оно вместе с производительностью труда определяет уровень жизни).

Согласно формуле (4.8) население страны через 20n лет равно:

$$X(20n)=A^n X(0), \qquad (4.11)$$

где матрица A задана в (4.7).A^nможно вычислить по следующей формуле:

$$A^n = SJ^nS^{-1} \qquad (4.12)$$

где S – матрица перехода к новому базису, состоящая из постоянных чисел, а J - жорданова нормальная форма матрицы A. Любую натуральную степень матрицы J можно представить по формуле:

$$J_1^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \qquad (4.13)$$

где J_1^n – блок некоторой матрицы *J,* которая содержит 3 клетки и будет иметь вид:

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & 0 \\ 0 & J_2^n & 0 \\ 0 & 0 & J_3^n \end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

Аналогично выглядит эта формула и для клеток других размеров.

Для вычисления *J* нам нужны собственные числа матрицы *A*.Матрица *A* даёт 4 собственных значения:

$$\lambda_1 = 0,7095891332$$

$$\lambda_2 = 0,6674978750$$

$$\lambda_3 = 0,4000000000$$

$$\lambda_4 = 0,-0320912582$$

Для быстроты их нахождения мы воспользовались программой MathCAD. Поскольку количество различных собственных чисел равно 4 и это равно порядку матрицы, это означает, что все Жордановы клетки в матрице J имеют порядок 1, то есть матрица *J* чисто диагональна и ее n-ая степень имеет вид:

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n \end{pmatrix}.$$

Значит, для формулы (4.11) мы получим:

$$X(20n) = \lambda_1^n V_1 + \lambda_2^n V_2 + \lambda_3^n V_3 + \lambda_4^n V_4 (4.15)$$

где буквами *V* обозначены некоторые числовые (постоянные) вектор-столбцы.

Структура формулы (4.15) объясняет нам поведение *X* при растущем n. Все слагаемые убывают из-за того, что собственные числа по модулю меньше 1, т.е. *X* стремится к 0- вектору. Три последних слагаемых убывают быстрее первого. При достаточно больших n первое слагаемое будет главным слагаемым в этой сумме. Второе слагаемое убывает быстрее первого, но из – за отрицательности второго собственного числа оно либо прибавляется к первому (при четных n), либо вычитается из него (при нечетных n), то есть создает затухающие колебания в поведении X. Вряд ли эти колебания соответствуют действительности, ведь цикл этих колебаний определен произвольно выбранным нами интервалом (20 лет). При разбиении населения на большее число возрастных групп отрицательные собственные числа порождали бы колебания с более коротким периодом. Поэтому мы должны смотреть на эти колебания, как на издержки математической модели.

В случае большой рождаемости формула для $X(20\text{n})$ по-прежнему имеет вид (4.15), но в ней стоят другие по величине собственные числа и векторы. При большой рождаемости первое собственное число оказывается больше единицы и поэтому мы наблюдаем экспоненциальный рост населения. Отсюда легко сделать вывод: если мы хотим стабилизировать население страны, мы должны так подобрать рождаемость, чтобы первое собственное число равнялось 1, а все остальные собственные числа были бы по модулю меньше, чем 1. Это обеспечит стремление к нулю последних трех слагаемых в формуле (4.15), и тогда V_1 окажется искомым стабильным состоянием населения.

Итак, будем подбирать рождаемость. Вернемся к матрице A, заданной в (4.7). Рождаемость детей во 2 группе (первая строка второй столбец) заменим буквой g. Как известно, собственное число матрицы A должно быть корнем ее характеристического уравнения. Поскольку нам нужно, чтобы $\lambda = 1$, вычисляем определитель $\det(A - E)$. Получаем det = 0.584880 - 0.57006 g и из равенства det=0 находим g = 1,026. Подставляем это значение рождаемости в матрицу A (первая строка, 2-й столбец) и опять (как мы это уже дважды делали) вычисляем население страны на интервале 200 лет по формуле (4.9).

Таблица – 4.2 – Динамика численности населения за 200 лет (новый расчёт)

n	t	x_1	x_2	x_3	x_4	Население
0	0	30,00	40,00	30,00	25,00	125,0
1	20	41,94	28,50	32,00	31,00	133,4
2	40	30,30	39,85	22,80	34,80	127,8
3	60	41,65	28,79	31,88	29,88	132,2
4	80	30,59	39,56	23,03	34,27	127,5
5	100	41,36	29,06	31,65	29,83	131,9
6	120	30,87	39,30	23,25	34,09	127,5
7	140	41,09	29,33	31,44	29,91	131,8
8	160	31,13	39,04	23,46	33,96	127,6
9	180	40,84	29,57	31,23	30,01	131,7
10	200	31,38	38,80	23,66	33,87	127,7

Таким образом, подбором рождаемости мы на 200 лет обеспечили стабильность населения страны. Оно колеблется около 130 миллионов. Колебания численности отдельных групп при этом довольно значительны: их размах порядка 14-15 процентов от средней величины. Причина этих колебаний в том, что, у матрицы A теперь имеются два собственных числа, по модулю близких к единице, и одно из них отрицательно. То есть мы имеем результат примерно такого вида:

$$X(20n) = V_1 + (-1)^n V_2 + \lambda_3^n V_3 + \lambda_4^n V_4 \qquad (4.16)$$

Последние два слагаемых затухают с ростом n из-за того, что модули третьего и четвертого собственных числе меньше, чем 1. А второе слагаемое обеспечивает колебания X от значения V_1 - V_2 к значению V_1+ V_2и обратно.

При заданном нами приближенном значении g матрица A не имеет собственного числа, в точности равного 1. Поэтому численность в группах медленно меняется на фоне этих больших колебаний. Можно, конечно, пытаться подобрать рождаемость, чтобы добиться собственного числа, еще точнее равного 1, и затем выяснять, насколько второе собственное число близко к (-1). Но, разумеется, уточнения собственных чисел в этой задаче не имеют смысла, так как и начальные значения и сама матрица *A* заданы с большой погрешностью (а точное измерение рождаемости и смертности в принципе не дает нам основы для точных вычислений, так как зафиксировать их невозможно). Уточнение этой модели должно идти по пути учета других зависимостей в обществе .

Таким образом, на примере прогнозирования численности населения, мы доказали возможным применения жордановой формы матрицы в этой области. При помощи жордановой формы можно непосредственно управлять процессом, не допуская ни гибели страны, ни катастрофического увеличения населения. В конечном итоге мы добились того, что обеспечили на 200 лет стабильность демографической ситуации.

§5. Построение общего решения системы дифференциальных уравнений с помощью жордановой формы.

Рассмотрим линейную систему *n* дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$X'(t) = AX(t),$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений такой системы должна включать в себя *n* линейно-независимых функций. При построении решения с использованием метода собственных значений и собственных векторов часто оказывается, что число собственных векторов меньше *n*, т.е. для таких систем не существует базиса, состоящего лишь из собственных векторов. В этом случае решение можно искать, например, методом неопределенных коэффициентов. Однако существует более общий и элегантный способ построения общего решения. Он основан на том факте, что любую квадратную матрицу можно привести к так называемой *жордановой нормальной форме* (строго говоря, это справедливо над полем комплексных чисел). Зная жорданову форму матрицы и *жорданов базис*, можно составить общее решение системы уравнений.

Рассмотрим эту технику решения более подробно. Предварительно введем некоторые базовые определения.

Жорданову форму можно рассматривать как обобщение квадратной диагональной матрицы. На ее диагонали размещаются т.н. *жордановы клетки*, соответствующие собственным значениям λ_i исходной матрицы. Собственные числа λ_i могут быть равными в различных клетках. Структура жордановой матрицы может выглядеть, например, так:

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & & \\
0 & \lambda_1 & & & 0 & \\
\hline
 & & \lambda_2 & & & \\
\hline
 & & & \lambda_3 & 1 & 0 \\
 & 0 & & 0 & \lambda_3 & 1 \\
 & & & 0 & 0 & \lambda_3
\end{array}\right).$$

Сами собственные значения матрицы λ_i находятся на главной диагонали, причем каждое собственное число λ_i встречается столько раз, какова его *алгебраическая кратность* k_i. В каждой клетке размером более 1 имеется параллельный ряд над главной диагональю, состоящий из единиц. Все остальные элементы жордановой матрицы равны нулю. Порядок расположения жордановых клеток в матрице определен неоднозначно.

Присоединенные векторы и жордановы цепочки

Рассмотрим жорданову клетку размером k с собственным значением λ. Такой клетке соответствует k базисных векторов $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Вектор V_1 ($V_1 \neq 0$) среди них является *собственным* и удовлетворяет уравнению

$$AV_1 = \lambda V_1 \quad \text{или} \quad (A - \lambda I)V_1 = 0.$$

Вектор V_2 ($V_2 \neq 0$) определяется из уравнения

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1$$

и называется *присоединенным вектором первого порядка*. Аналогично находятся другие *присоединенные векторы* более высокого порядка:

$$(A - \lambda I)V_3 = V_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A - \lambda I)V_k = V_{k-1}$$

Заметим, что из соотношений

$$(A - \lambda I)V_1 = 0 \quad \text{и} \quad (A - \lambda I)V_2 = V_1$$

следует, что

$$(A-\lambda I)^2 V_2 = 0.$$

Для присоединенного вектора V_k порядка k будет справедливо равенство

$$(A-\lambda I)^k V_k = 0.$$

Цепочка векторов $V_1, V_2, \ldots, V_k$, состоящая из собственного вектора V_1 и присоединенных векторов $V_2, \ldots, V_k$, является линейно-независимой и называется *жордановой цепочкой.*

Каждой жордановой цепочке длины k соответствует k линейно-независимых решений однородной системы в виде

$$X_1 = \exp(\lambda t) V_1,$$

$$X_2 = \exp(\lambda t)\left(\frac{t}{1!}V_1 + V_2\right),$$

$$X_2 = \exp(\lambda t)\left(\frac{t^2}{2!}V_1 + \frac{t}{1!}V_2 + V_3\right),$$

....

$$X_k = \exp(\lambda t)\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}V_1 + \ldots + \frac{t}{1!}V_{k-1} + V_k\right).$$

Полное число всех решений равно сумме длин жордановых цепочек для всех клеток, т.е.

равно размеру матрицы n. Совокупность таких линейно-независимых векторных функций составляет *фундаментальную систему решений.*

Общее решение системы для матриц 2x2 и 3x3

На практике наиболее часто встречаются системы дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядка. Рассмотрим все случаи жордановых форм, которые могут встретиться в таких системах, и соответствующие им формулы общего решения. Всего существует 8 различных случаев (3 для матрицы 2x2 и 5 для матрицы 3x3). Данную классификацию удобно проиллюстрировать следующей таблицей:

#	Размер матрицы	Характеристический многочлен	Алгебраическая (k) и геометрическая (s) кратность собственных значений	Жорданова форма
1	$n=2$	$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$	$\lambda_1 \quad k_1=1 \quad s_1=1$ $\lambda_2 \quad k_2=1 \quad s_2=1$	$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$
2	$n=2$	$(\lambda-\lambda_1)^2$	$\lambda_1 \quad k_1=2 \quad s_1=2$	$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$
3	$n=2$	$(\lambda-\lambda_1)^2$	$\lambda_1 \quad k_1=2 \quad s_1=1$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
4	$n=3$	$-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$	$\lambda_1 \quad k_1=1 \quad s_1=1$ $\lambda_2 \quad k_2=1 \quad s_2=1$ $\lambda_3 \quad k_3=1 \quad s_3=1$	$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$
5	$n=3$	$-(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$	$\lambda_1 \quad k_1=2 \quad s_1=2$ $\lambda_2 \quad k_2=1 \quad s_2=1$	$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$
6	$n=3$	$-(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)$	$\lambda_1 \quad k_1=2 \quad s_1=1$ $\lambda_2 \quad k_2=1 \quad s_2=1$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$
7	$n=3$	$-(\lambda-\lambda_1)^3$	$\lambda_1 \quad k_1=3 \quad s_1=2$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$
8	$n=3$	$-(\lambda-\lambda_1)^3$	$\lambda_1 \quad k_1=3 \quad s_1=1$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Теперь обсудим, как можно вычислить собственные и присоединенные векторы в указанных случаях и построить общее решение.

Случай 1. Матрица 2x2. Два различных собственных значения λ_1, λ_2

В этом случае жорданова форма имеет обычный диагональный вид. Каждому собственному значению λ_iсоответствует один собственный вектор V_i, который находится из матричного уравнения

$$(A-\lambda_i I)V_i = 0.$$

Общее решение выражается формулой

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)V_2.$$

Случай 2. Матрица 2х2. Одно собственное значение λ_1 (k_1=2, s_1=2)

Данная матрица имеет единственное собственное значение кратностью
2. Ранг матрицы при этом значении λ_1равен 1. Поэтому геометрическая кратность будет равна

$$s_1 = n - rank(A-\lambda_1 I) = 3-1 = 2,$$

т.е. при решении уравнения

$$(A-\lambda_1 I)V = 0$$

получается два линейно-независимых собственных вектора V_1 и V_2. Общее решение
системы имеет почти такой же вид, как и в случае 1:

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t)V_2.$$

Случай 3. Матрица 2х2. Одно собственное значение λ_1 (k_1=2, s_1=1)

Здесь ранг матрицы равен 2. Следовательно, геометрическая кратность собственного
числа λ_1 и количество собственных векторов равно

$$s_1 = n - rank(A-\lambda_1 I) = 3-2 = 1.$$

Этот собственный вектор $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$ находится из уравнения

$$(A-\lambda_1 I)V_1 = 0.$$

Для построения фундаментальной системы решений не хватает еще одного
линейно-независимого вектора.В качестве такого вектора возьмем
присоединенный вектор $V_2 = (V_{21}, V_{22})^T$, удовлетворяющий уравнению

$$(A-\lambda_1 I)V_2 = V_1.$$

Если из найденных собственного и присоединенного векторов составить матрицу H, равную

$$H = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

то жорданова форма J находится с помощью соотношения

$$H^{-1}AH = J,$$

где H^{-1} − матрица, обратная к H. Это свойство можно использовать для проверки правильности определения собственных и присоединенных векторов.

Общее решение системы представляется в виде:

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t)(tV_1 + V_2).$$

Случай 4. Матрица 3х3. Три различных собственных значения λ_1, λ_2, λ_3

Здесь жорданова форма имеет диагональный вид. Каждому собственному числу λ_i соответствует свой собственный вектор V_i, который определяется из уравнения

$$(A - \lambda_i I) V_i = 0.$$

Общее решение системы 3-х дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) V_2 + C_3 \exp(\lambda_3 t) V_3.$$

Случай 5. Матрица 3х3. Два собственных значения λ_1 ($k_1=2$, $s_1=2$), λ_2 ($k_2=1$, $s_2=1$)

В данном случае характеристическое уравнение имеет два корня, один из которых кратный ($k_1 = 2$). При подстановке этого кратного корня λ_1 матрица $A - \lambda_1 I$ имеет ранг

В результате у числа λ_1 геометрическая кратность и количество ассоциированных с ним собственных векторов равно

$$s_1 = n - rank(A - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2.$$

Оба линейно-независимых собственных вектора V_1 и V_2 (им соответствуют две жордановы клетки) определяются из уравнения

$$\left(A-\lambda_1 I\right)V=0.$$

Третья клетка в жордановой форме состоит из простого собственного значения λ_2 ($k_2 = 1$, $s_2 = 1$). Собственный вектор V_3 для этого числа находится из уравнения

$$\left(A-\lambda_2 I\right)V_3=0.$$

Общее решение системы выражается формулой

$$X(t)=C_1\exp\left(\lambda_1 t\right)V_1+C_2\exp\left(\lambda_1 t\right)V_2+C_3\exp\left(\lambda_2 t\right)V_3.$$

Случай 6. Матрица 3x3. Два собственных значения λ_1 (k_1=2, s_1=1), λ_2 (k_2=1, s_2=1)

Этот случай отличается от предыдущего тем, что для первого собственного числа

λ_1 удается найти лишь один собственный вектор V_1, который удовлетворяет уравнению

$$\left(A-\lambda_1 I\right)V_1=0.$$

Здесь ранг матрицы для числа λ_1 равен 2:

$$rank\left(A-\lambda_1 I\right)=2,\quad \Rightarrow\; s_1=n-rank\left(A-\lambda_1 I\right)=3-2=1.$$

Недостающий линейно-независимый вектор находится как вектор V_2, присоединенный к V_1:

$$\left(A-\lambda_1 I\right)V_2=V_1.$$

Другое собственное значение λ_1 (соответствующее второй жордановой клетке) обеспечивает

еще один собственный вектор V_3. Общее решение системы имеет вид:

$$X(t)=\underbrace{C_1\exp\left(\lambda_1 t\right)V_1+C_2\exp\left(\lambda_1 t\right)\left(tV_1+V_2\right)}_{1-я\ жорданова\ клетка}+\underbrace{C_3\exp\left(\lambda_2 t\right)V_3}_{2-я\ жорданова\ клетка}.$$

Случай 7. Матрица 3x3. Одно собственное значение λ_1 (k_1=3, s_1=2)

Здесь жорданова форма состоит из двух клеток с одинаковым собственным значением

λ_1. Первая клетка имеет один собственный вектор V_1 и один присоединенный вектор

V_2. Они находятся из соотношений

$$(A-\lambda_1 I)V_1 = 0, \qquad (A-\lambda_1 I)V_2 = V_1.$$

Первое уравнение имеет два решения в виде двух собственных векторов (поскольку

rank $(A - \lambda_1 I) = 1$). Второй собственный вектор (обозначим его как V_3) связан со второй жордановой клеткой.

Общее решение системы описывается выражением

$$X(t) = \underbrace{C_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t)(tV_1 + V_2)}_{1-я\ клетка} + \underbrace{C_3 \exp(\lambda_1 t)V_3}_{2-я\ клетка}.$$

Случай 8. Матрица 3x3. Одно собственное значение λ_1 (k_1=3, s_1=1)

В этом случае линейный оператор A имеет одно собственное значение λ_1 кратностью $k_1 = 3$.

При этом ранг матрицы A равен 2. Это приводит к тому, что уравнение

$$(A-\lambda_1 I)V_1 = 0$$

имеет решение в виде единственного собственного вектора V_1. Недостающие 2 линейно-независимых вектора определяются как присоединенные векторы из цепочки

соотношений

$$(A-\lambda_1 I)V_2 = V_1, \qquad (A-\lambda_1 I)V_3 = V_2.$$

Общее решение имеет вид:

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t)(tV_1 + V_2) + C_3 \exp(\lambda_1 t)\left(\frac{t^2}{2!}V_1 + tV_2 + V_3\right).$$

Ниже мы рассмотрим примеры систем уравнений, соответствующие случаям.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 4y.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение для данной матрицы и найдем собственные значения:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda + 8 - 3 = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5.$$

Вычислим собственные векторы для каждого собственного числа.

Подставляя $\lambda_1 = 1$, найдем вектор $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 \\ -1 & 4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} V_{11} - 3V_{21} = 0 \\ -V_{11} + 3V_{21} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow V_{11} - 3V_{21} = 0.$$

Видно, что ранг этой матрицы равен 1. Следовательно, геометрическая кратность
собственного значения$\lambda_1 = 1$ составляет

$$s_1 = n - rank(A - \lambda_1 I) = 2 - 1 = 1.$$

Соответственно, существует один собственный вектор. Его координаты равны:

$$V_{21} = t, \quad \Rightarrow V_{11} = 3V_{21} = 3t, \quad \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычислим собственный вектор $V_2 = (V_{12}, V_{22})^T$ для собственного числа $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 2-5 & -3 \\ -1 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} -3V_{12} - 3V_{22} = 0 \\ -V_{12} - V_{22} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow V_{12} + V_{22} = 0.$$

Пусть $V_{22} = t$. Тогда

$$V_{12} = -V_{22} = -t, \quad \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, здесь мы имеем случай простых собственных чисел (случай 1). Общее решение системы выражается в виде

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) V_2 = C_1 \exp(t)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(5t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2

Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Решение.

Как обычно, определим сначала собственные значения, решив характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (-1-\lambda)^2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = -1.$$

Следовательно, матрица системы имеет одно собственное значение $\lambda_1 = -1$ кратности $k_1 = 2$.

Найдем собственные векторы для этого значения λ_1.

$$\begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 \\ 0 & -1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0 \\ 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow 0\cdot V_{11} + 0\cdot V_{21} = 0.$$

Как видно, в данном случае любой вектор является собственным. Поэтому в качестве пары

линейно-независимых собственных векторов можно выбрать единичные орты:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы встречаемся со случаем 2: у системы двух дифференциальных уравнений имеется

одно собственное значение, алгебраическая и геометрическая кратность которого равны

Общее решение системы записывается в виде:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t) V_2 = C_1 \exp(-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 3

Найти общее решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 4y.$$

Решение.

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0, \quad \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_1 = 3.$$

Матрица системы имеет одно собственное значение $\lambda_1 = 3$ с алгебраической кратностью $k_1 = 2$.

Определим собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_1 = 3$. Пусть $V_1 = (V_{11}, V_{21})^T$. Получаем:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} -V_{11} - V_{21} = 0 \\ V_{11} + V_{21} = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow V_{11} + V_{21} = 0.$$

Пусть $V_{21} = t$. Тогда координаты вектора V_{11} равны

$$V_{11} = -V_{21} = -t, \quad \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, правильно ли мы вычислили собственный вектор V_1. По определению,

для собственного вектора должно быть справедливо соотношение

$$AV_1 = \lambda_1 V_1.$$

Подставляя известные значения, получаем:

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 V_1.$$

Данная комбинация величин ($k_1 = 2$, $s_1 = 1$) соответствует случаю 3, в котором решение

Описывается одной жордановой клеткой. Для построения общего решения системы нужно

определить присоединенный вектор$V_2 = (V_{12}, V_{22})^T$. Найдем его из матричного уравнения

$$(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -V_{12} - V_{22} = -1 \\ V_{12} + V_{22} = 1 \end{cases}, \quad \Rightarrow V_{12} + V_{22} = 1, \quad \Rightarrow \text{для } V_{22} = 0,\ V_{11} = 1 \text{ имеем } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем еще одну проверку, чтобы убедиться, что присоединенный

вектор V_2 вычислен верно.

Воспользуемся формулой преобразования исходной матрицы A к жордановой нормальной форме J :

$$H^{-1}AH = J.$$

Здесь матрица H составляется из найденных векторов:

$$H = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица H^{-1} будет равна:

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам матрицы H, Δ – ее определитель.

После подстановки убеждаемся, что результатом преобразований является жорданова форма:

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 2+1 & -1+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+4 & 1+0 \\ -3+3 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} = J.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений описывается формулой

$$X(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + C_2 \exp(\lambda_1 t)(tV_1 + V_2) = C_1 \exp(3t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \exp(3t)\left[t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, чтобы понять сущность жордановой формы матрицы и её построения, мы рассмотрели такие понятия, как: алгебраическая кратность, геометрическая кратность, жорданова клетка, присоединённые векторы, жорданов блок и т.д. Выяснили и доказали на практике, что жорданов базис и жорданову форму матрицы можно построить несколькими способами, однако выбрать самый надёжный и быстрый способ нельзя, поскольку каждый из них имеет как достоинства, так недостатки. Если один способ даёт нам стопроцентную гарантию построения жордановой формы матрицы, то в тоже время он отнимает достаточно много времени и занимает большой объём. Второй способ более лаконичный и легче применяется на практике, но посредством него ни при всех случаях можно добиться построения жордановой формы матрицы. И наконец, третий способ, который, как мы успели убедиться, самый быстрый, но с мощью него можно построить только лишь жорданову форму матрицы, исключая построения жорданова базиса.

Безусловно, обилие способов построения жордановой формы матрицы весьма захватывает, хочется рассмотреть их все и применить на практике, однако самая весомая часть в данной работе отнюдь не построение блочно-диагональных матриц. Именно применение жордановой формы в математической модели для оптимального прогноза численности населения страны самая значимая и интересная часть данной работы. На примере прогнозирования численности населения, мы доказали возможным применение жордановой формы матрицы в этой области. При помощи жордановой формы можно непосредственно управлять процессом, не допуская ни гибели страны, ни катастрофического увеличения населения. В конечном итоге мы добились того, что обеспечили на 200 лет стабильность демографической ситуации. И это действительно удивляет и захватывает, ведь мы от простых преобразований матрицы перешли к таким глобальным проблемам.

Таким образом, мы добились всех поставленных целей и доказали значимость жордановой формы матрицы не только в области математики, но и в совершенно противоположных ей сферах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1) Жорданова форма матрицы оператора[Электронный ресурс]/ Режим доступа: http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_gen/6/JF.pdf. – Дата доступа:29.04.12.

2) Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц: учеб.пособие / Ф.Р.Гантмхер. — М.: Наука, 1966. – 576 с.

3) Ланкастер, П. Теория матриц: учеб.пособие / П.Ланкастер. — М.: Наука, 1973. – 282 с.

4) Халмош П. Конечномерные векторные пространства: учеб.пособие / П.Халмош. — М.: Физматгиз, 1963. – 264 с.

5) Жордановы матрицы [Электронный ресурс]/ Режим доступа: http://dep805.ru/education/kk/jmatrix/part2.htm#def7. – Дата доступа:29.04.12.

6) Удоденко, Н.Н. Руководство к решению задач по алгебре часть 2: учеб.пособие /Н.Н. Удоденко, Т.Н. Глушакова. - ВГУ, 2003г. - 44с.

7) Jordannormalform[Электронный ресурс]/ Режим доступа:http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form. – Дата доступа: 28.04.12

8)Уховский, М.К. Практический способ построения жордановой формы и жорданова базиса: практическое пособие / М.К. Уховский. - РГУ, 2000. – 36 с.

9) Манин Ю.И. Построение жорданова базиса: учеб.пособие / Ю.И. Манин. - МИЭМ, 2009. – с. 44

10) Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты: учеб.пособие / Г.С. Шевцов. - 2003. – 576 с.

11)Сушкова, М.В. Приложение жордановой нормальной формы. / М.В. Сушкова // СПбГТУ. Журнал «Математика в ВУЗе» [Электронный ресурс]. – 2002. - № 2. - Режим доступа:http://www.spbstu.ru/publications/m_v/N_002/ Sushkova/par_02.html.