ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

МАГИСТРАТУРА БӨЛИМИ

Қол жазба ҳуқықында

НУРЖАНОВА АРЗАЙЫМ ОРЫНБАЕВНА

«ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕРДИҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИ»

Қәнигелик: 5A460102 - «Дифференциаллық теңлемелер»

Дифференциаллық теңлемелер қәнигелиги бойынша магистр дәрежесин алыў ушын усынылған

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

МАКда жақлаўға рухсат

Магистратура бөлими баслығы

______________ю. и. к., доц. Гулимов А.

Кафедра баслығы:____________________ ф. м. и. к. Р. Жиемуратов

Илимий басшы:_________________ ф. м. и. к., доц. Ө. О. Қурбанбаев

НӨКИС – 2012

МАЗМУНЫ

КИРИСИЎ

<u>Теманың актуаллығы</u>. Механиканың, теориялық физиканың, квантлық электрониканың, сызықлы емес оптиканың, биологияның көп мәселелери интегро – дифференциаллық теңлемелерге алып келинеди.

Интегро – дифференциаллық теңлемелерди изертлеўлер В. Вольтерраның [4], Я. В. Быковтың [1], М. И. Иманалиевтиң [10], Бартонның [24, 25] ҳәм т.б. математиклердиң жумысларында алып барылды.

В. Вольтерраның жумысларынан баслап,

$$\int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds, \qquad \int_{-\infty}^{t} K(t-s)\Phi(x(s))ds$$

көринисиндеги интеграллық ағзалар қатнасқан интегро – дифференциаллық теңлемелер қарала баслады. Бундай теңлемелер шексиз шегаралы Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелер деп аталып, оларды улыўма түрде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{t} K(t-s)j\,(t,s,x(s))ds\right) \tag{1}$$

көринисте жазыў мүмкин.

Әпиўайы дифференциаллық теңлемелер теориясында да, сондай ақ, интегро – дифференциаллық теңлемелер теориясында да периодлы шешимлерди изертлеў мәселесине үлкен кеўил бөлинеди.

Периодлы шешимлерди дүзиўге ҳәм үйрениўге дыққаттың күшейиўи бундай шешимлер менен тәбияттағы тербелис қубылысларының сүўретлениўине байланыслы болады.

Әпиўайы дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлер теориясында бундай периодлы шешимлерди дүзиўдиң ҳәм оларды изертлеўдиң әмелий жақтан нәтийжели ҳәм қолайлы методлары көп. Бирақта интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеў методлары бойынша жумыслар еле де аз. Соның ушын да әпиўайы дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин үйрениўдиң методларын интегро – дифференциаллық теңлемелерге, соның ишинде шексиз шегаралы Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелер ушын улыўмаластырыў оғада актуал тема болып есапланады.

Биринши гезекте бул әпиўайы дифференциаллық теңлемелер теориясындағы Галеркин методын ҳәм Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлардың санлы-аналитикалық методын интегро – дифференциаллық теңлемелер ушын қолланыўға да тийисли болып табылады.

Магистрлик диссертацияның мақсети Вольтерра типиндеги шексиз шегаралы интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин үйрениўден ибарат.

Изертлеў ўазыйпалары. Шексиз шегаралы екинши тәртипли Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин табыўға Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар методын қолланыўдан, оны математикалық жақтан тийкарлаўдан, усындай интегро – дифференциаллық теңлемелер системасы ушын өзинде Самойленко методы менен Галеркин методын бирлестиретуғын проекциялы-итеративлик методты ислеп шығыўдан ибарат.

Изертлеў объекти. Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлери.

Изертлеўди алып барыў усыллары. Қарастырып атырған интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин үйрениў ушын әпиўайы дифференциаллық теңлемелер теориясының усыллары, атап айтқанда, Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар усылы, сондай ақ Галеркин усылы пайдаланылады.

Изертлеўдиң илимий жаңалығы. Магистрлик диссертацияда шексиз шегаралы екинши тәртипли Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелер ушын Самойленко методының алгоритми қолланылады, бул алгоритм математикалық жақтан тийкарланады. Сондай ақ, интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системалары ушын проекциялы – итеративлик метод улыўмаластырылады.

Изертлеўдиң теориялық ҳәм әмелий әҳмийети. Магистрлик диссертацияда қаралған избе-из периодлы жақынласыўлар методы ҳәм бул методтың Галеркин методы менен бирлесиўинен алынған проекциялы-итеративлик метод схемалары интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеў проблемаларын шешиў мүмкиншилигин кеңейтеди, сол себепли жумыс теориялық әҳмийетке ийе ҳәм алынған нәтийжелер бир қатар конкрет әмелий мәселелерди шешиўге де мүмкиншилик береди.

Изертлеў нәтийжелериниң апробациясы. Магистрлик диссертацияның тийкарғы нәтийжелери Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети «Алгебра ҳәм дифференциаллық теңлемелер» кафедрасының семинарларында (2011-2012 – жыллар) баянат етилди, Өзбекстан Республикасы ғәрезсизлигиниң 20 – жыллық байрамына бағышланған «Өзбекстан Республикасы экономикасы ҳәм жәмийет раўажланыўының ҳәзирги заман принциплери» атамасындағы Республикалық магистрантлардың илимий – әмелий конференциясы материаллары топламында (30–апрель 2011–жыл) [15] ҳәм университет магистрантларының илимий жумыслары топламында (2012 жыл) [16] басылып шықты.

Жумыстың көлеми ҳәм дүзилиси. Магистрлик диссертация Кирисиў бөлиминен, 2 баптан, жуўмақлаўдан ҳәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат. Жумыс көлеми 59 бет.

1 – бап «Интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеўдиң избе-из периодлы жақынласыўлар методы» деп аталады. Бул баптың биринши параграфы рефеативлик характерге ийе болып,

онда Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелер бойынша айырым изертлеўлер келтириледи, сондай ақ, периодлы шешимлерди табыўдың Самойленко усынған избе – из периодлы жақынласыўлар методы баянланады.

Ал 2, 3 – параграфларда жумыстың усы баптағы тийкарғы нәтийжелери баянланып, онда екинши тәртипли интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимин табыў ушын Самойленко методы қолланылады. 4 – параграфта конкрет интегро – дифференциаллық теңлемениң жуўық периодлы шешимин табыў мысалы келтириледи.

Жумыстың 2 – бабы «Интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин табыў ушын проекциялы-итеративлик методтың қолланылыўы» деп аталады. Бунда избе – из периодлы жақынласыўлар методы менен Галеркин методын бирлестириўден ибарат болған проекциялы – итеративлик метод интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеў ушын қолланылады.

1 – БАП

ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕРДИҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИН ИЗЕРТЛЕЎДИҢ ИЗБЕ-ИЗ ПЕРИОДЛЫ ЖАҚЫНЛАСЫЎЛАР МЕТОДЫ

Бул бапта интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеўдиң избе-из периодлы жақынласыўлар методы үйренилип, бунда дәслеп Вольтерраның интегро – дифференциаллық теңлемелериниң периодлы шешимлериниң изертленилиўи ҳәм оларды табыўдың избе-из периодлы жақынласыўлар методы ҳаққында сөз болады.

2 – параграфта екинши тәртипли интегро – дифференциаллық теңлеме сызықлы алмастырыўлар жәрдеминде теңлемелер системасына алып келинип, алынған системаға Самойленко методы қолланылады.

3 – параграфта екинши тәртипли интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин табыў ушын избе – из периодлы жақынласыўлар методы тиккелей қолланылады. Бул тиккелей қолланыў схемасы тийкарланылады.

Ал, 4 – параграфта конкрет интегро – дифференциаллық теңлемениң периодлы шешими усы алгоритм тийкарында жуўық түрде табылады.

1 - §. ВОЛЬТЕРРАНЫҢ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕРИНИҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИ ҲӘМ ОЛАРДЫ ТАБЫЎДЫҢ ИЗБЕ-ИЗ ПЕРИОДЛЫ ЖАҚЫНЛАСЫЎЛАР МЕТОДЫ

Физика ҳәм техниканың, сондай ақ, биологияның көп мәселелери қубылыстың алдыңғы дәўиринен ғәрезли болған соңғы тәсирдиң нәтийжесиндеги аўысыўларды, яғный белгисиз функция интеграл белгиси ишинде де қатнасатуғын аўысыўларды өз ишине алатуғын дифференциаллық теңлемелер менен сүўретленеди. Басқаша айтқанда, көп мәселелер интегро – дифференциаллық теңлемелерге алып келинеди [1 – 4, 9, 10, 12].

Бундай теңлемелерди биринши рет изертлеген В. Вольтерра болды.

В. Вольтерра ҳәр қыйлы биологиялық ҳәм механикалық процесслерди соңғы тәсирди есапқа алып сүўретлеў ушын математикалық моделлерди үйренди. Ол өз методын дәслеп нәсиллик серппелик теориясының мәселелерине қолланды.

1925 – жылдан 1940 – жылларға шекем В. Вольтерра биологиялық топарлардың популяцияларының бирге жасаўының нәсиллик теориясына, сондай ақ, динамикалық мәселелерге арналған көп сандағы жумысларын жәриялады. Бул жумыслардың анализи [4, 5] жумыста келтирилген. Ал 1957 – жылдан баслап жасаў ушын гүрестиң математикалық моделлери көп жумысларда үйренилди [2].

Соңғы тәсирди есапқа алыў ушын В. Вольтерра дара жағдайда

$$L_{10}(x) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds = \int_{0}^{\infty} K(q)x(t-q)dq$$

операторын қарады, ал онша узақ емес соңғы тәсирлерди есапқа алыў ушын

$$L_{20}(x) = \int_{t-h}^{t} K(t-s)x(s)ds = \int_{0}^{h} K(q)x(t-q)dq$$

операторын қарады.

Егер $K(q)=0, \forall q>h$ болса, онда $L_{10}(x)=L_{20}(x)$ болады.

Биз

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,x(t),\int_{-\infty}^{t}K(t-s)j\,(t,s,x(s))ds\right) \tag{1.1}$$

көринисиндеги Вольтерраның интегро – дифференциаллық теңлемелерин үйренемиз.

Соңғы дәўирде бул (1.1) интегро – дифференциаллық теңлемениң периодлы шешимлерин үйрениўге көп кеўил бөлинбекте. Мәселен

$$\ddot{x}(t)+w^2x(t)=f(t)+m\int_{-\infty}^{t}R(t-s)x(s)ds \tag{1.2}$$

түриндеги сызықлы теңлемелердиң периодлы шешимлериниң бар болыўы [18, 19] жумысларда үйренилди. Ал [8] жумыста

$$\ddot{x}(t)+k^2x(t)=f(t)+mF(t,x,\dot{x},m)+m\int_{-\infty}^{t}R(t-s)j\,[x(s),\dot{x}(s)]ds \tag{1.3}$$

скалярлық сызықлы емес теңлемениң периодлы шешимлериниң бар болыў мәселеси бойынша базыбир нәтийжелер алынды.

[26] жумыста

$$\dot{x}(t)=\int_{0}^{\infty}\{d[A(z)]x(t-z)\}dz+f(t) \tag{1.4}$$

теңлемесиниң бирден-бир периодлы шешиминиң бар болыўының жеткиликлери шәртлери алынды.

Я. Б. Быков ҳәм Д. Рузикуловтың [2] монографиясында (1.1) көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлери ҳәм олардың асимптотикалары изертленилди.

Т. А. Буртонның [24, 25] жумысларында

$$x'=A(t)x+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)ds+f(t) \tag{1.5}$$

көринисиндеги Вольтерраның теңлемелер системаларының T - периодлы шешимлери үйренилди, бунда $A(t), C(t,s)$ - $(n\times n)$ өлшемли үзликсиз матрицалар, $f(t)$ - n өлшемли үзликсиз вектор-функция, $A(t+T)=A(t)$, $f(t+T)=f(t)$, $C(t+T,s+T)=C(t,s)$ базыбир $T>0$ ушын.

Ю. А. Рябовтың [17] жумысларында шексиз соңғы тәсирли Вольтерра типиндеги сызықлы интегро – дифференциаллық теңлемелер системасы болған

$$\frac{dx}{dt}=Ax+e\int_{-\infty}^{t}R(t-s)x(s)ds \qquad (1.6)$$

системасының еки тәреплеме шешимлери үйренилди, бунда $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ - n өлшемли вектор, A - $(n\times n)$ өлшемли турақлы матрица, $R(t-s)$ - бул (1.6) системаның ядросы деп аталатуғын матрица, e - оң киши параметр. Соның менен бирге $R(t-s)$ ядро $t-s>0$ болғанда

$$\left\|R(t-s)\right\|\le C\frac{e^{-g(t-s)}}{(t-s)^{1-a}} \qquad (1.7)$$

баҳалаўын қанаатландырады, бунда C, g, a – оң турақлылар, $0<a\le 1$.

А. М. Самойленко ҳәм Б. Вуйтовичтиң [22] жумысында ҳәм Б. Вуйтович ҳәм О. Д. Нуржановтың [7] жумысында (1.1) көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системаларының периодлы шешимлерин табыў ушын Галеркин методы қолланылды ҳәм ол математикалық жақтан тийкарланылды.

Әпиўайы дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеўдиң нәтийжели методларының бири А. М. Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар методы болып табылады [20, 21]. Бул метод Б. Вуйтовичтиң [6] жумысында (1.1) көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системалары ушын улыўмаластырылған еди.

Атап айтқанда, [6] жумыста шексиз шекке ийе Вольтерра типиндеги

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t,s,x(t),x(s))ds\right) \tag{1.8}$$

интегро – дифференциаллық теңлемелер системасы қаралды, бунда $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - n өлшемли вектор; $f(t,x,u) = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $K = (K_1, ..., K_p)$, $j = (j_1, j_2, ..., j_p)$ - вектор-функциялар.

Мейли $f(t,x,y)$ вектор-функциясы

$$D_f = R \times D_1 \times D_2$$

областта анықланған ҳәм үзликсиз, бунда

$$D_1 = \{x : \|x\| \le d_1\}, \quad D_2 = \{x : \|x\| \le d_2\}$$

ҳәм j – бул $D_j = R \times R \times D_1 \times D_2$ көплигинде анықланған ҳәм үзликсиз болсын.

Бул f ҳәм j функциялары сәйкес түрде t ҳәм t, s бойынша периоды T -ға тең болған периодлы функциялар, олар шегараланған, яғный

$$\|f(t,x,u)\| \le M_1, \ \|j\,(t,s,x,y)\| \le M_2 \tag{1.9}$$

теңсизликлери орынлы ҳәм Липшиц шәртин қанаатландырады:

$$\begin{gathered} \|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| \le N_1\|x_1 - x_2\| + N_2\|u_1 - u_2\|, \\ \|j\,(t,s,x_1,y_1) - j\,(t,s,x_2,y_2)\| \le N_3\|x_1 - x_2\| + N_4\|y_1 - y_2\|. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Соның менен бирге,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t,s,x(t),x(s))ds$$

функциясы анықланған, үзликсиз ҳәм T периодлы қәлеген D_1 областынан алынған T – периодлы $x(t)$ функциясы ушын, ал $K(t-s)$ ядро барлық $t \in R$ ушын

$$\int_{-\infty}^{t} \|K(t-s)\| ds \le K, \ KM_2 \le d_2$$

шәртин қанаатландырады.

Бул шәртлерге қосымша төмендеги шәртлер де орынлансын:

$$D_1' = \left\{ x : \|x\| \le d_1 - \frac{TM_1}{2} \right\}$$

көплиги бос емес көплик, яғный

$$D_1' \ne \varnothing \qquad (1.11)$$

ҳәм

$$q = \frac{T}{2}\left[N_1 + N_2 K(N_3 + N_4) \right] < 1 \qquad (1.12)$$

теңсизлиги орынлансын.

Оң жағы $R \times D_1 \times D_2$ областында анықланған, үзликсиз, t бойынша периодлы болған (1.8) көринисиндеги системалар көплигинен (1.9) – (1.12) шәртлерин қанаатландыратуғын системаларды ажыратып аламыз ҳәм оларды D_1 областта интегро – дифференциаллық T-системалар деп атаймыз.

Шексиз шегараға ийе Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық T-системалардың периодлы шешимлерин табыў алгоритмин төмендеги теорема береди.

<u>1 – ТЕОРЕМА</u> [6]. Мейли $f(t,x,y)$ ҳәм $j(t,s,x,y)$ функциялары сәйкес түрде D_f ҳәм D_j областларында анықланған, үзликсиз, t,s өзгериўшилери бойынша T периодлы функциялар болып, (1.9) – (1.12) шәртлерин қанаатландырсын.

Сонда t бойынша T периодлы

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f\left(t, x_{m-1}(t,x_0), \int_{-\infty}^t K(t-s) j(t,s,x_{m-1}(t,x_0), x_{m-1}(s,x_0))ds\right) - \right.$$

$$\left. - \overline{f\left(t, x_{m-1}(t,x_0), \int_{-\infty}^t K(t-s) j(t,s,x_{m-1}(t,x_0), x_{m-1}(s,x_0))ds\right)} \right] dt$$

функциялар избе-излиги $m \to \infty$ да $(t, x_0) \in R \times D'_f$ шамаларына қарата тең өлшеўли түрде $x^0(t, x_0)$ функциясына жыйнақлы болады, бул шеклик функция $R \times D'_1$ областта анықланған, үзликсиз, t бойынша T периодлы болып, ол

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg[f(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, x(t, x_0), x(s, x_0)) ds) -$$

$$\overline{- f(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, x(t, x_0), x(s, x_0)) ds)} \Bigg] dt$$

теңлемелер системасын қанаатландырады, ал m-жақынласыў $x_m(t, x_0)$ диң $x^0(t, x_0)$ шеклик функциядан аўысыўы ушын

$$\left\| x^0(t, x_0) - x_m(t, x_0) \right\| \le \frac{2t(T-t)}{T} M_1 \frac{q^m}{1-q}$$

баҳалаўы барлық $m = 0,1,2,...$ ҳәм $t \in R$ ушын орынлы болады. Бул жерде $\overline{f(t, x, y)}$ – бул $[0, T]$ кесиндисиндеги ўақыт бойынша интеграллық ортаны белгилейди, яғный

$$\overline{f(t, x, y)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, y) dt.$$

Биз бул изертлеўлерди даўам етип, Самойленко методын екинши тәртипли шексиз соңғы тәсирге ийе Вольтерра типиндеги интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системаларының периодлы шешимлерин изертлеў ушын қолланамыз.

2 - §. ЕКИНШИ ТӘРТИПЛИ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕР УШЫН САМОЙЛЕНКО МЕТОДЫН ҚОЛЛАНЫЎ

Мейли екинши тәртипли интегро – дифференциаллық теңлеме болған

$$\ddot{x}+w^2x=f\left(t,x,\dot{x},\int_{-\infty}^{t}K(t-s)j\,(t,s,x(s),\dot{x}(s))ds\right) \tag{2.1}$$

теңлемеси берилген болсын, бунда $f(t,x,y,u)$ ҳәм $j\,(t,s,x,y)$ функциялары сәйкес түрде t ҳәм (t,s) бойынша T - периодлы функциялар болып, олар

$$t\in R,\ s\in R,\ x\in D,\ y\in D_1,\ u\in D_2 \tag{2.2}$$

областта анықланған ҳәм үзликсиз, бундағы D, D_1, D_2 - E_n кеңислигиндеги базыбир туйық шегараланған областлар, w - базыбир берилген турақлы, $w>0$, ал $K(t,s)$ ядросы

$$\int_0^{\infty}\|K(q)\|dq=K_0<\infty \tag{2.3}$$

шәртти қанаатландырады деп есаплаймыз.

Бул теңлемени

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=wy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-wx+\dfrac{1}{w}\,f(t,x,w,y,u)\end{cases} \tag{2.4}$$

көринисинде жазыўға болады, бунда

$$u=\int_{-\infty}^{t}K(t-s)j\,(t,s,x(s),y(s))ds. \tag{2.5}$$

Биз алынған (2.4) теңлемелер системасына избе-из периодлы жақынласыўлар методын қолланыў ушын дәслеп усы (2.4) системада

$$x = z_1 \sin \overline{w} t + z_2 \cos \overline{w} t,$$
$$y = z_1 \cos \overline{w} t - z_2 \sin \overline{w} t \tag{2.5}$$

формуласы жәрдеминде жаңа өзгериўшилерди киритемиз, бундағы $\left| w - \overline{w} \right|$ - жеткиликли киши шама болады.

Усы мақсетте (2.5) аңлатпаларын t бойынша дифференциаллап, табылған туўындыларды (2.4) системаға қойып, төмендегилерге ийе боламыз:

$$\frac{dz_1}{dt} \sin \overline{w} t + \frac{dz_2}{dt} \cos \overline{w} t + \overline{w} z_1 \cos \overline{w} t - \overline{w} z_2 \sin \overline{w} t =$$

$$= w z_1 \cos \overline{w} t - w z_2 \sin \overline{w} t,$$

$$\frac{dz_1}{dt} \cos \overline{w} t - \frac{dz_2}{dt} \sin \overline{w} t - \overline{w} z_1 \sin \overline{w} t - \overline{w} z_2 \cos \overline{w} t =$$

$$= -w z_1 \sin \overline{w} t - w z_2 \cos \overline{w} t +$$

$$+ \frac{1}{w} f\Big(t, z_1 \sin \overline{w} t + z_2 \cos \overline{w} t, w z_1 \cos \overline{w} t -$$

$$- w z_2 \sin \overline{w} t, \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, z_1 \sin \overline{w} s + z_2 \cos \overline{w} s - w z_1 \cos \overline{w} s - w z_2 \sin w s) ds \Big),$$

буннан

$$\frac{dz_1}{dt} \sin \overline{w} t + \frac{dz_2}{dt} \cos \overline{w} t = (w - \overline{w})[z_1 \cos \overline{w} t - z_2 \sin \overline{w} t],$$

$$\frac{dz_1}{dt} \cos \overline{w} t - \frac{dz_2}{dt} \sin \overline{w} t = -(w - \overline{w})[z_1 \sin \overline{w} t + z_2 \cos \overline{w} t] +$$

$$+ \frac{1}{w} f\Big(t, z_1 \sin \overline{w} t + z_2 \cos \overline{w} t, w z_1 \cos \overline{w} t -$$

$$-wz_2 \sin \bar{w} t, \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, z_1 \sin \bar{w} s + z_2 \cos \bar{w} s - w z_1 \cos \bar{w} s - w\, z_2 \sin w\, s) ds \Bigg)$$

Бул системаны $\frac{dz_1}{dt}$ ҳәм $\frac{dz_2}{dt}$ туўындыларына қарата шешсек, онда

$$\frac{dz_1}{dt} = (w - \bar{w})[z_1 \cos \bar{w} t - z_2 \sin \bar{w} t] \sin \bar{w} t -$$

$$-(w - \bar{w})[z_1 \sin \bar{w} t - z_2 \cos \bar{w} t] \cos \bar{w} t +$$

$$+\frac{1}{w} f\Big(t, z_1 \sin \bar{w} t + z_2 \cos \bar{w} t, w z_1 \cos \bar{w} t -$$

$$-wz_2 \sin \bar{w} t, \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, z_1 \sin \bar{w} s + z_2 \cos \bar{w} s - w z_1 \cos \bar{w} s - w\, z_2 \sin w\, s) ds \Bigg) \cos \bar{w} t,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (w - \bar{w})[z_1 \cos \bar{w} t - z_2 \sin \bar{w} t] \cos \bar{w} t +$$

$$+(w - \bar{w})[z_1 \sin \bar{w} t + z_2 \cos \bar{w} t] \sin \bar{w} t +$$

$$+\frac{1}{w} f\Big(t, z_1 \sin \bar{w} t + z_2 \cos \bar{w} t, w z_1 \cos \bar{w} t -$$

$$-wz_2 \sin \bar{w} t, \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\,(t, s, z_1 \sin \bar{w} s + z_2 \cos \bar{w} s - w z_1 \cos \bar{w} s - w\, z_2 \sin w\, s) ds \Bigg) \sin \bar{w} t.$$

Соңғы теңлемелер системасын әпиўайыластырып,

$$\frac{dz_1}{dt} = -(w - \bar{w}) z_2 + \frac{1}{w} f\Big(t, z_1 \sin \bar{w} t + z_2 \cos \bar{w} t, w z_1 \cos \bar{w} t -$$

$$-wz_2\sin\overline{w}t,\int\limits_{-\infty}^{t}K(t-s)j\,(t,s,z_1\sin\overline{w}s+z_2\cos\overline{w}s-wz_1\cos\overline{w}s-w\,z_2\sin w\,s)ds\Bigg)\cos\overline{w}t,$$

$$\frac{dz_2}{dt}=(w-\overline{w})z_1+\frac{1}{w}f\Big(t,z_1\sin\overline{w}t+z_2\cos\overline{w}t,wz_1\cos\overline{w}t- \qquad (2.6)$$

$$-wz_2\sin\overline{w}t,\int\limits_{-\infty}^{t}K(t-s)j\,(t,s,z_1\sin\overline{w}s+z_2\cos\overline{w}s-wz_1\cos\overline{w}s-w\,z_2\sin w\,s)ds\Bigg)\sin\overline{w}t$$

системасын аламыз.

Бул системада $\left|w-\overline{w}\right|$ жеткиликли киши болғанда оны избе-из жақынласыўлар усылы менен шешиўге болады. Бул методқа сәйкес (2.6) теңлемелер системасының дәл периодлы шешимине избе-из жақынласыўлар төмендеги қатнаслар арқалы табылады:

$$z_{1m}(t)=z_{10}-(w-\overline{w})\int\limits_0^t\left[z_{2(m-1)}(t)-\frac{\overline{w}}{2p}\int\limits_0^{\frac{2p}{w}}z_{2(m-1)}(t)dt\right]dt+$$

$$+\frac{1}{w}\int\limits_0^t\Big[f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}t,wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}t-$$

$$-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}t,\int\limits_{-\infty}^{t}K(t,s)j\,(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}s,-wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}s-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}s)ds)\cos\overline{w}t-$$

$$-\frac{\overline{w}}{2p}\int\limits_0^{\frac{2p}{w}}f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}t,wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}t-$$

$$-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}t,\int\limits_{-\infty}^{t}K(t,s)j\,(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}s,-wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}s-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}s)ds)\cos\overline{w}tdt]dt,$$

$$z_{2m}(t)=z_{20}+(w-\overline{w})\int_0^t\left[z_{1(m-1)}(t)-\frac{\overline{w}}{2p}\int_0^{\frac{2p}{w}}z_{1(m-1)}(t)dt\right]dt+$$

$$+\frac{1}{w}\int_0^{2p}\left[f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}t,wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}t-\right.$$

$$-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}t,\int_{-\infty}^{t}K(t,s)j\,(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}s,-wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}s-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}s)ds)\sin\overline{w}t-$$

$$-\frac{\overline{w}}{2p}\int_0^{\frac{2p}{w}}f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}t,wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}t-$$

$$-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}t,\int_{-\infty}^{t}K(t,s)j\,(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}s,-wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}s-wz_{2(m-1)}\sin\overline{w}s)ds)\sin\overline{w}tdt]dt,$$

$$z_{10}(t)=z_{10},\ \ z_{20}(t)=z_{20.} \tag{2.7}$$

Ал бундағы z_{10} ҳәм z_{20} мәнислери

$$\Delta_m^{(1)}(z_0)=\int_0^{\frac{2p}{w}}[z_{2m}(t)+\frac{1}{w}f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{w}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{w}t,wz_{1(m-1)}\cos\overline{w}t-$$

$$-\omega z_{2(m-1)}\sin\overline{\omega}t,\int_{-\infty}^{t}K(t,s)\varphi(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{\omega}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{\omega}s,-\omega z_{1(m-1)}\cos\overline{\omega}s-\omega z_{2(m-1)}\sin\overline{\omega}s)ds)\cos\overline{\omega}t]dt=0,$$

$$\Delta_m^{(2)}(z_0)=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}[z_{1m}(t)+\frac{1}{\omega}f(t,z_{1(m-1)}\sin\overline{\omega}t+z_{2(m-1)}\cos\overline{\omega}t,\omega z_{1(m-1)}\cos\overline{\omega}t- \qquad (2.8)$$

$$-\omega z_{2(m-1)}\sin\overline{\omega}t,\int_{-\infty}^{t}K(t,s)\varphi(t,s,z_{1(m-1)}\sin\overline{\omega}s+$$

$$+z_{2(m-1)}\cos\overline{\omega}s,-\omega z_{1(m-1)}\cos\overline{\omega}s-\omega z_{2(m-1)}\sin\overline{\omega}s)ds)\sin\overline{\omega}t]dt=0$$

анықлаўшы теңлемелерден табылады, бунда $z_0=(z_{10},z_{20})$.

3 - §. ИЗБЕ-ИЗ ПЕРИОДЛЫ ЖАҚЫНЛАСЫЎЛАР МЕТОДЫНЫҢ ТИККЕЛЕЙ ҚОЛЛАНЫЛЫЎЫ

Мейли

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \int_{-\infty}^{t} K(t-s)j\,(t, s, x(s), \dot{x}(s))ds\right) \tag{3.1}$$

көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлеме берилген болсын, бундағы $f(t,x,y,u)$ ҳәм $j\,(t,s,x,y)$ функциялары сәйкес түрде t ҳәм (t,s) бойынша T - периодлы функциялар болып, олар

$$(t,s,y,u) \in R \times R \times D \times D_1 = R \times R \times I_1 \times I_2 \times I_3,$$

$$t \in R = (-\infty, \infty)\, s \in R, x \in [a,b] = I_1, y \in [c,d] = I_2, \tag{3.2}$$

$$\in I_3 : \|U\| \le s\ ,\ s\ > K_0 |j\,|_0 .$$

Мейли

$$|f(t,x,y,u)| \le M,$$

$$|f(t,x',y',u') - f(t,x'',y'',u'')| \le K_1|x'-x''| +$$

$$+K_2|y'-y''| + K_3|u'-u|, \tag{3.3}$$

$$|j\,(t,s,x',y') - j\,(t,s,x'',y'')| \le K_4|x'-x''| + K_5|y'-y''|$$

теңсизликлери орынлансын, бунда $M,\ K_i,\ i = \overline{1,5}$ - базыбир оң турақлылар.

Соның менен бирге,

$$b - a \ge \frac{MT^2}{4}, \quad c \le -\frac{5MT}{6} \tag{3.4}$$

$$Q_0 = \frac{T}{2}\begin{bmatrix} \frac{T}{2}\left(K_1 + K_0K_3K_4\right) & \frac{T}{2}\left(K_2 + K_0K_3K_5\right) \\ \frac{5}{3}\left(K_1 + K_0K_3K_4\right) & \frac{5}{3}\left(K_2 + K_0K_3K_5\right) \end{bmatrix}$$

матрицаның ең үлкен меншикли мәниси

$$l\,(Q_0) < 1 \tag{3.5}$$

шәртлери де орынлансын.

Екинши тәртипли дифференциаллық теңлемелерди ямаса олардың системаларын дәслеп оларға эквивалент болған биринши тәртипли дифференциаллық теңлемелер системаларына алып келип, кейин избе-из периодлы жақынласыўлар методын қолланыўға болады. Бирақ та мәселениң көп өлшемлилиги менен байланыслы қыйыншылықлар пайда болыўы мүмкин. Бул қыйыншылықлардан қутылыў мақсетинде А. М. Самойленко екинши тәртипли теңлемеге тиккелей қолланыў мүмкин болған схеманы да ислеп шыққан еди [20].

Биз усы схеманы (3.1) көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлемениң периодлы шешимин жуўық табыў ушын қолланамыз.

Мейли үзликсиз T- периодлы $f(t)$ - функцияларын үзликсиз T-периодлы функцияларға өткериўши

$$L : C(0,T) \to CP_T = CP_T(R)$$

операторы

$$(Lf)(t) = \int_0^t [\,f(t\,) - Sf\,]dt \tag{3.7}$$

формуласы менен анықлансын, бунда

$$Sf = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{3.8}$$

интеграллық ортаны аңлатады.

Ал

$$x_{m+1}(t,z) = z + \left(L^2 \left(f \left(t, x_m(t,z), \frac{dx_m(t,z)}{dt}, u_m(t,z) \right) \right) \right)(t) \tag{3.9}$$
$$m = 0,1,2,..., \quad z(t,z) = z$$

рекуррентлик қатнаслары менен анықланатуғын $x_{m+1}(t,z)$ функциялары еки рет үзликсиз дифференциалланатуғын ҳәм T - периодлы функциялар болады, яғный $x_m(t,z) \in C^2 P_T$, бунда

$$\left(L^2 f \right)(t) = \left(L \left(Lf \right) \right)(t), \tag{3.10}$$

$$u_m(t,z) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j \left(t, s, x(s,z), \frac{dx(s,z)}{ds} \right) ds. \tag{3.11}$$

Бул (3.9) қатнасынан $m = 0$ болғанда

$$\left| x_1(t,z) - z \right| \leq \left| L^2 f(t,z,0,u_0) \right| \tag{3.12}$$

теңсизлигин алыўға болады, бунда

$$u_0 = \int_{-\infty}^{t} K(t,s) j \, (t,s,z(s),0) ds.$$

3.1 – леммаға [20] муўапық, барлық $t \in [0,T]$ ушын

$$\left| Lf(t) \right| \leq a_1(t) \left| f(t) \right|_0, \tag{3.13}$$

$$\left| L^2 f(t) \right| \leq a_1(t) \left| L(f(t)) \right|_0 \leq$$
$$\leq \frac{T}{2} a_1(t) \left| f(t) \right|_0 \leq \frac{T}{4} \left| f(t) \right|_0 \tag{3.14}$$

теңсизликлери орынлы. Бул (3.14) теңсизлиги тийкарында (3.12) теңсизлигинен

$$\left| x_1(t,z) - z \right| \leq \frac{T^2 M}{4} \tag{3.15}$$

теңсизлиги келип шығады, буннан $z\in I_1'$ болғанда барлық $t\in R$ ушын

$$a\le x_1(t,z)\le b$$

екенин аламыз. Соның менен бирге, $x_1(t,z)$ аңлатпасын t бойынша дифференциалласақ, онда

$$\frac{dx_1(t,z)}{dt}=Lf(t,z,0,u_0)-L\overline{f(t,z,0,u_0)} \tag{3.16}$$

болады, буннан

$$\left|\frac{dx_1(t,z)}{dt}\right|\le a_1(t)M+\frac{1}{T}\int_0^T a_1(t)Mdt\le$$

$$\le\left(a_1(t)+\frac{T}{3}\right)M\le\frac{5TM}{6} \tag{3.17}$$

теңсизлиги келип шығады. Демек, бул (3.17) теңсизлиги $t\in R$ ушын

$$c\le\frac{dx_1(t,z)}{dt}\le d$$

екенин аңлатады. Усындай жол менен математикалық индукция усылы жәрдеминде барлық $m=0,1,2,...$ ушын $x(t,z)$ ҳәм $\dfrac{dx_m(t,z)}{dt}$ функциялары $t\in R$ болғанда $I_1\times I_2$ областынан мәнислер қабыл ететуғынын көрсетиўге болады.

(3.9) избе-излигиниң жоқарыда келтирилген шәртлер орынланғанда тең өлшеўли жыйнақлы избе-излик болатуғынын көрсетейик. Усы мақсетте (3.9) тийкарында $x_{m+1}(t,z)-x_m(t,z)$ айырмасын дүзип, оны (3.3) теңсизликлери жәрдеминде баҳалаймыз. Төмендеги белгилеўлерди киритейик:

$$W_m(t) = f\left(t, x_m(t,z), \frac{dx_m(t,z)}{dt}, u_m(t,z)\right) -$$

$$- f\left(t, x_{m-1}(t,z), \frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}, u_{m-1}(t,z)\right), \tag{3.18}$$

$$u_m(t,z) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\left(t, s, x_m(s,z), \frac{dx_m(s,z)}{ds}\right) ds.$$

Сонда (3.13) ҳәм (3.14) баҳалаўларының жәрдеминде төмендеги баҳалаўға ийе боламыз:

$$|x_{m+1}(t,z) - x_m(t,z)| \le |L^2 W_m(t)| \le a_1(t)|LW_m(t)|_0 \le$$

$$\le a_1(t)\frac{T}{2}|W_m(t)|_0 \le a_1(t)\frac{T}{2}\Big[K_1|x_m(t,z) - x_{m-1}(t,z)|_0 +$$

$$+K_2\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt} - \frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0 +$$

$$+K_3\left|\int_{-\infty}^{t} K(t-s)\left[j\left(t, s, x_m(s,z), \frac{dx_m(s,z)}{ds}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-j\left(t, s, x_{m-1}(s,z), \frac{dx_{m-1}(s,z)}{ds}\right)\right] ds\right|_0\Bigg] \le$$

$$\le a_1(t)\frac{T}{2}\Big[K_1|x_m(t,z) - x_{m-1}(t,z)|_0 + K_2\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt} - \frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0 +$$

$$+K_3\int_{-\infty}^{t}|K(t-s)|\Big[K_4|x_m(s,z) - x_{m-1}(s,z)|_0 +$$

$$+K_5\left|\frac{dx_m(s,z)}{ds}-\frac{dx_{m-1}(s,z)}{ds}\right|_0\Bigg]ds\Bigg]\le$$

$$\le a_1(t)\frac{T}{2}\Big[\left(K_1+K_0K_3K_4\right)\left|x_m(t,z)-x_{m-1}(t,z)\right|_0+$$

$$+\left(K_2+K_0K_3K_5\right)\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt}-\frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0\Bigg],$$

яғный

$$\left|x_{m+1}(t,z)-x_m(t,z)\right|\le$$

$$\le a_1(t)\frac{T}{2}\Big[(K_1+K_0K_3K_4)\left|x_m(t,z)-x_{m-1}(t,z)\right|_0+ \tag{3.19}$$

$$+(K_2+K_0K_3K_5)\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt}-\frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0\Bigg].$$

Енди (3.9) теңлигин дифференциаллап,

$$\dot{x}_{m+1}(t,z)-\dot{x}_{m-1}(t,z)$$

айырмасын дүзип ҳәм оны баҳалап, төмендегини аламыз:

$$\left|\frac{dx_{m+1}(t,z)}{dt}-\frac{dx_m(t,z)}{dt}\right|\le\left|LW_m(t)-L\overline{W}_m(t)\right|\le$$

$$\le\left(a_1(t)+\frac{T}{3}\right)\left|W_m(t)\right|_0\le$$

$$\le\left(a_1(t)+\frac{T}{3}\right)\Big(K_1\left|x_m(t,z)-x_{m-1}(t,z)\right|_0+ \tag{3.20}$$

$$+K_2\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt}-\frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0+$$

$$+K_0K_3K_4\left|x_m(t,z)-x_{m-1}(t,z)\right|_0+$$

$$+K_0K_3K_5\left|\frac{dx_m(t,z)}{dt}-\frac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|_0\Bigg).$$

Алынған соңғы (3.19) ҳәм (3.20) теңсизликлерин төмендегише векторлық көринисте жазыўға болады:

$$u_{m+1}(t)\le Q(t)u_m^0, \tag{3.21}$$

бунда

$$u_{m+1}(t)=\begin{pmatrix}\left|x_{m+1}(t,z)-x_m(t,z)\right| \\ \left|\dfrac{dx_{m+1}(t,z)}{dt}-\dfrac{dx_m(t,z)}{dt}\right|\end{pmatrix},$$

$$Q(t)=\begin{pmatrix} a_1(t)\dfrac{T}{2}(K_1+K_0K_3K_4) & a_1(t)\dfrac{T}{2}(K_1+K_0K_3K_5) \\ \left(a_1(t)+\dfrac{T}{2}\right)(K_2+K_0K_3K_4) & \left(a_1(t)+\dfrac{T}{2}\right)(K_2+K_0K_3K_5)\end{pmatrix},$$

$$u_m^0=\begin{pmatrix}\left|x_m(t,z)-x_{m-1}(t,z)\right|_0 \\ \left|\dfrac{dx_m(t,z)}{dt}-\dfrac{dx_{m-1}(t,z)}{dt}\right|\end{pmatrix},$$

$$u_1^0\le\frac{T}{2}M\begin{pmatrix}\dfrac{T}{2} \\ \dfrac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

Ал (3.21) теңсизликтен

$$u_{m+1}^0\le Q_0u_m^0 \tag{3.22}$$

теңсизлиги келип шығады, бунда

$$Q_0 = \frac{T}{2}\begin{pmatrix} \frac{T}{2}(K_1 + K_0K_3K_4) & \frac{T}{2}(K_2 + K_0K_3K_5) \\ \frac{5}{3}(K_1 + K_0K_3K_4) & \frac{5}{3}(K_2 + K_0K_3K_5) \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Соңғы (3.22) теңсизлигин итерацияласақ, онда

$$u_{m+1}^0 \le Q_0^m u_1^0 \tag{3.24}$$

теңсизлиги келип шығады, буннан

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^0 \le \sum_{i=1}^{m} Q_0^{i-1} u_1^0 \tag{3.25}$$

баҳалаўы алынады.

Бул Q_0 матрицасының меншикли мәнислерин

$$\frac{T}{2}\begin{vmatrix} \frac{T}{2}(K_1 + K_0K_3K_4) - l & \frac{T}{2}(K_2 + K_0K_3K_5) \\ \frac{5}{3}(K_1 + K_0K_3K_4) & \frac{5}{3}(K_2 + K_0K_3K_5) - l \end{vmatrix} = 0$$

теңлемесин шешип табамыз:

$$l_1 = 0, \qquad l_2 = \frac{T}{2}\left[\frac{T}{2}(K_1 + K_0K_3K_4) + \frac{5}{3}(K_2 + K_0K_3K_5)\right].$$

Ал шәрт бойынша

$$l_2 < 1$$

болғанлықтан (3.25) қатары тең өлшеўли түрде жыйнақлы болады:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} Q^{i-1}u_1^0 = \sum_{i=1}^{\infty} Q_0^{i-1}u_1^0 = (E - Q_0)^{-1}u_1^0 \tag{3.26}$$

Бул (3.26) шеклик қатнасы

$$\left\{ x_m(t,z),\ \frac{dx_m(t,z)}{dt} \right\}$$

избе-излигиниң тең өлшеўли жыйнақлығын аңлатады:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,z) = x^0(t,z),$$
$$\lim_{m\to\infty} \frac{dx_m(t,z)}{dt} = \frac{dx^0(t,z)}{dt} \qquad (3.27)$$

Соның менен бирге, (3.26) теңсизлиги тийкарында

$$\begin{pmatrix} \left| x^0(t,z) - x_m(t,z) \right| \\ \left| \dfrac{dx^0(t,z)}{dt} - \dfrac{dx_m(t,z)}{dt} \right| \end{pmatrix} \le Q_0^m (E - Q_0)^{-1} U_1^0. \qquad (3.28)$$

баҳалаўына ийе боламыз. Ал (3.9) рекуррентлик қатнаста $m \to \infty$ да шекке өтип, $x^0(t,z)$ шеклик функцияның

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, u \right) - \Delta(z) \qquad (3.29)$$

теңлемени қанаатландыратуғынын көриўге болады, бунда

$$y = \int_{-\infty}^{t} K(t-s) j\left(t, s, x(s), \frac{dx(s)}{ds} \right) ds,$$
$$\Delta(z) = sf\left(t, x^0(t,z), \frac{dx^0(t,z)}{dt}, y^0(t,z) \right), \qquad (3.30)$$
$$y^0(t,z) = \int_{-\infty}^{t} j\left(t, s, x^0(s,z), \frac{dx^0(s,z)}{ds} \right) ds.$$

Солай етип, төмендеги тастыйықлаў орынлы.

<u>2 – ТЕОРЕМА</u>. Мейли (3.1) интегро – дифференциаллық теңлемеси (1.3), (3.3) – (3.5) шәртлерин қанаатландырсын. Сонда (3.9) қатнасы менен анықланатуғын $x_{m+1}(t,z)$ функциялар избе-излиги T - периодлы функциялар көплигинде (3.29) теңлемесин қанаатландыратуғын $x^0(t,z)$ функциясына жыйнақлы болады. Соның менен бирге, (3.28) баҳалаўы орынлы болады.

Бул теоремадан төмендеги салдар келип шығады:

<u>САЛДАР</u>. Мына

$$\Delta(z)=0 \tag{3.31}$$

скалярлық теңлемесиниң $z=z^0$ нольлери (3.1) теңлемесиниң $x=x(t)$ периодлы шешиминиң

$$x(0)=z^0,$$

$$\frac{dx(0)}{dt}=-s\int_0^t f\left(t\,,x^0(t\,,z^0),\frac{dx^0(t,z^0)}{dt},u^0(t\,,z^0)\right)dt\,, \tag{3.32}$$

$$u^0(t\,,z^0)=\int_{-\infty}^{t} j\left(t\,,s,x^0(s,z^0),\frac{dx^0(s,z^0)}{ds}\right)ds$$

басланғыш мәнислерин анықлайды, бунда $\Delta(z)$ аңлатпасы (3.30) қатнасы менен анықланады.

<u>3 – ТЕОРЕМА</u>. Мейли 3 – теорема шәртлери орынлансын. Сонда

$$\begin{aligned}\Delta_m(z)&=sf\left(t,x_m(t,z),\frac{dx_m(t,z)}{dt},y_m(t,z)\right),\\ y_m(t,z)&=\int_{-\infty}^{t} j\left(t,s,x_m(s,z),\frac{dx_m(s,z)}{ds}\right)ds\end{aligned} \tag{3.33}$$

формулаға муўапық анықланған $\Delta_m(z)$ функциясы базыбир $m\geq 0$ пүтин саны ушын

$$\begin{aligned}&\min_{z\in I_1}\Delta_m(z)\leq -d_m,\\ &\max_{z\in I_1}\Delta_m(z)\geq d_m,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$d_m=\left\langle\begin{bmatrix}K_1+K_0K_3K_4\\ K_2+K_0K_3K_5\end{bmatrix},\,Q_0^m(E-Q_0)^{-1}z_1^0\right\rangle$$

теңсизликлерин қанаатландырса, онда (3.1) теңлемеси T - периодлы шешимге ийе болады, бул шешим $t\in R$ болғанда

$$\left(x(t),\frac{dx(t)}{dt}\right)\in I_1\times I_2,$$

ал оның басланғыш мәнислери ушын $x(0)=z\in I_1,\ \left|\frac{dx(0)}{dt}\right|\leq\frac{5TM}{6}$ қатнаслары орынлы болады.

4 - §. МЫСАЛ

Мысал сыпатында

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-0,05\frac{dx(t)}{dt}-0,02\sin t\cdot x^2(t)+0,06\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}\dot{x}(s)ds+y\ (t), \qquad (4.1)$$

көринисиндеги интегро – дифференциаллық теңлемени қарайық, бунда

$$y\ (t)=0,00005\sin t\cdot\cos^2 t-0,0515\cos t-0,001\sin t. \qquad (4.2)$$

Мейли (4.1) теңлемениң оң жағы

$$(t,x,y,u)\in[0,2p\,]\times D\times D_1\times D_2 \qquad (4.3)$$

областта анықланған ҳәм үзликсиз болсын, бунда

$$D:|x|\le 1,3;\ D_1:|y|\le 0,3; D_2:|u|\le 0,5 \qquad (4.4)$$

$$y=\frac{dx}{dt},u=0,06\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}\dot{x}(s)ds.$$

Берилген (4.1) теңлемениң оң жағы M турақлысы менен шегараланған ҳәм $K_i,\ i=\overline{1,5}$ турақлылары менен Липшиц шәртин қанаатландырады:

$$M=0,11935;\ K_1=0,052;\ K_2=0,05;\ K_3=1;\ K_4=0,\ K_5=0,018$$

$$Q_0=p\begin{pmatrix} p\,K_1 & p\left(K_2+K_0K_3K_5\right)\\ \frac{5}{3}K_1 & \frac{5}{3}\left(K_2+K_0K_3K_5\right)\end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

$$l\,(Q)=p\left[p\,K_1+\frac{5}{3}\left(K_2+K_0K_3K_5\right)\right]=p\left(0,052p+\frac{5}{3}\cdot 0,068\right)<1.$$

Демек, (4.1) теңлемесиниң $t=0$ болғанда

$$-0{,}12325674 \le x_0 \le 0{,}12325674 \tag{4.6}$$

областының x_0 точкасы арқалы өтиўши ҳәр қандай $2p$ периодлы шешими төмендеги тең өлшеўли жыйнақлы функциялар избе-излигиниң шеги болады:

$$\begin{aligned}
x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ \int_0^t \Bigg[-0{,}05\frac{dx_{m_1}(t,x_0)}{dt} - 0{,}02\sin t\cdot x_{m-1}^2(t,x_0) + \\
+0{,}06\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \overset{\mathrm{g}}{x}_{m-1}(s,x_0)ds + y(t) - \\
-\frac{1}{2p}\int_0^{2p} \Bigg[-0{,}05\frac{dx_{m-1}(t,x_0)}{dt} - 0{,}02\sin t\cdot x_{m-1}^2(t,x_0) + \\
+0{,}06\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \overset{\mathrm{g}}{x}_{m-1}(s,x_0)ds + y(t) \Bigg) dt \Bigg] dt - \\
-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\int_0^t \Bigg[-0{,}05\frac{dx_{m-1}(t,x_0)}{dt} - 0{,}02\sin t\cdot x_{m-1}^2(t,x_0) + \qquad (4.7) \\
+0{,}06\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \overset{\mathrm{g}}{x}_{m-1}(s,x_0)ds + y(t) - \\
-\frac{1}{2p}\int_0^{2p} \Bigg[-0{,}05\frac{dx_{m-1}(t,x_0)}{dt} - 0{,}02\sin t\cdot x_{m-1}^2(t,x_0) + \\
+0{,}06\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} \overset{\mathrm{g}}{x}_{m-1}(s,x_0)ds + y(t) \Bigg) dt \Bigg] dt \Bigg\} dt,
\end{aligned}$$

$$x_0(t,x_0)=x_0,\ \ m=1,2,3,...$$

Бул (4.7) қатнасында $m=1$ деп есаплап, биринши жақынласыўды есаплаймыз:

$$x_1(t,x_0)=x_0+\int_0^t\left\{\int_0^t\left[-0,05\dot{x}-0,02\sin t\cdot x_0^2\ +\right.\right.$$

$$+0,06\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}\dot{x}_0\,ds\ +y\ (t)-$$

$$-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\left[-0,05\dot{x}_0-0,02\sin t\cdot x_0^2+0,06\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}\dot{x}_0\,ds\ +y\ (t)\right)dt\left.\right]dt-$$

$$-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\left[\int_0^t\left(-0,05\dot{x}_0-0,02\sin t\cdot x_0^2+0,06\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}\dot{x}_0\,ds\ +y\ (t)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\left[-0,05\dot{x}_0-0,02\sin t\cdot x_0^2+0,06\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)}\dot{x}_0\,ds\ +y\ (t)\right)dt\left.\right]dtdt\left.\right\}dt=$$

$$=x_0+\int_0^t\left\{\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+y\ (t)\right)dt-\right. \tag{4.8}$$

$$\left.-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+y\ (t)\right)dtdt\right\}dt.$$

Ал,

$$\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+y\ (t)\right)dt=$$

$$=\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+0,00005\sin t\cdot\cos^2 t-0,0515\cos t-0,001\sin t\right)dt=$$

$$=0,02(\cos t-1)x_0^2+\frac{0,00005}{3}\left(-\cos^3 t+1\right)-$$

$$-0,0515\sin t+0,001(\cos t-1)=$$

$$=(0,02x_0^2+0,001)\cos t-0,0515\sin t-\frac{0,00005}{3}\cos^3 t+$$

$$+\frac{0,00005}{3}-0,02x_0^2-0,001.$$

Буннан

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+y\ (t)\right)dtdt=$$

$$=\frac{0,00005}{3}-0,02x_0^2-0,001.$$

Сонда буны есапқа алсақ, (4.8) ден төмендегиге ийе боламыз:

$$x_1(t,x_0)=x_0+\int_0^t\left\{\int_0^t\left(-0,02\sin t\cdot x_0^2+y\ (t)\right)dt-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{0,00005}{3}-0,02x_0^2-0,001\right)\right\}dt=$$

$$=x_0+\int_0^t\left[(0,02\cdot x_0^2+0,001)\cdot\cos t-0,0515\sin t-\right.$$

$$-\frac{0,00005}{3}\cos^3 t+\frac{0,00005}{3}-0,02x_0^2-0,001-$$

$$-\left(\frac{0,00005}{3}-0,02x_0^2-0,001\right)\bigg]dt=$$

$$=x_0+\int_0^t\left[(0,02\cdot x_0^2+0,001)\cos t-0,0515\sin t-\frac{0,00005}{3}\cos^3 t\right]dt=$$

$$=x_0+(0,02x_0^2+0,001)\sin t+0,0515(\cos t-1)-$$

$$-\frac{0,00005}{3}\left(\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{12}\sin 3t\right)=x_0+0,0515\cos t+$$

$$+\left(0,02x_0^2+0,001-\frac{0,00005}{4}\right)\sin t+$$

$$+\frac{0,00005}{36}\sin 3t-0,0515=$$

$$=x_0+0,0515\cos t+(0,02x_0^2+0,0009875)\sin t+$$

$$+0,0000013888...\sin 3t-0,0515,$$

яғный, биринши жақынласыў

$$x_1(t,x_0)=x_0+0,0515\cos t+$$

$$+(0,02x_0^2+0,0009875)\sin t+ \tag{4.9}$$

$$+0,0000013888...\sin 3t-0,0515$$

көринисинде жазылады.

Енди $m=1$ болғанда $\Delta_1(x_0)$ ди есаплаймыз:

$$\Delta_1(x_0)=\frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p}\Big\{-0,05(-0,0515\sin t+(0,02\cdot x_0^2+0,0009875)\cos t+$$

$$+0,0000013888...\cdot 3\cos 3t\big)-0,02\sin t\big[x_0+0,0515\cos t+$$

$$+(0,02x_0^2+0,0009875)\sin t+$$

$$+0,0000013888...\sin 3t-0,0515\big]^2+$$

$$+0,006\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)}\big[-0,0515\sin s+(0,02x_0^2+0,0009875)\cos s+$$

$$+0,0000013888...\cdot 3\cos 3s\big]ds+y\ (t)\Big\}dt=$$

$$=-0,02(x_0-0,0515)(0,02x_0^2+0,0009875),$$

буннан

$$x_0=0,0515 \tag{4.10}$$

болғанда

$$\Delta_1(x_0)=0$$

болады.

Солай етип, берилген (4.1) интегро – дифференциаллық теңлемениң дәл периодлы шешимине биринши жақынласыў (4.9) түрине ийе болады, бунда x_0 басланғыш мәнис (4.10) мәниси менен анықланады:

$$x_1(t,x_0)=0,0515\cos t+0,001040545\sin t+0,0000013888...\sin 3t \tag{4.11}$$

Қарастырып атырған теңлемениң дәл периодлы шешими

$$x^*(t)=0,05\cos t \tag{4.12}$$

екенин тиккелей теңлемеге қойыў арқалы тексерип көриўге болады. Бул (4.12) дәл шешимди (4.11) жуўық шешим менен салыстырып көриў, биринши жақынласыўдың өзи ақ, дәл шешимге жеткиликли жақын екенин көрсетеди.

2 – БАП

ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕРДИҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИН ТАБЫЎ УШЫН ПРОЕКЦИЯЛЫ - ИТЕРАТИВЛИК МЕТОДТЫҢ ҚОЛЛАНЫЛЫЎЫ

Бул бапта интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системалары қаралып, олардың периодлы шешимлерин табыў ушын итерациялық метод болған Самойленконың избе – из периодлы жақынласыўлар методы менен проекциялық метод болған Галеркин методын бирлестириўден алынған проекциялы – итеративлик метод қолланылады.

Бул бап 2 параграфтан ибарат.

1 – параграфта сызықлы емес интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системалары проекциялы – итеративлик метод жәрдеминде үйрениледи.

2 – параграфта сызықлы интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин изертлеў ушын усы проекциялы – итеративлик метод қолланылады.

1 - §. СЫЗЫҚЛЫ ЕМЕС СИСТЕМАЛАРДЫҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИ

Бул параграфта

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \int_{-\infty}^{t} B(t-s) j\,(t, s, x(s)) ds \right) \tag{1.1}$$

көринисиндеги сызықлы емес интегро – дифференциаллық теңлемелер системасының периодлы шешимлери үйрениледи, бунда $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $f(t, x, y) = (f_1, f_2, ..., f_n)$ ҳәм $j\,(t, s, x) = (j_1, j_2, ..., j_n)$ - n өлшемли вектор – функциялар, олар сәйкес түрде t ҳәм (t, s) бойынша T - периодлы болып, барлық $t, s \in R,\ x \in D,\ D \in E_n$ ушын анықланған ҳәм үзликсиз, ал $B(t)$ ядро

$$\int_{0}^{\infty} \| B(q) \| dq \le B_0 < \infty \tag{1.2}$$

шәртин қанаатландырады.

Мейли $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - бул E_n евклидлик кеңисликтиң точкасы, D - усы E_n кеңисликтиң туйық шегараланған областы, Γ_D - оның шегарасы болсын. $x \in E_n$ точка ушын $|x|$ арқалы $|x| = (|x_1|, ..., |x_n|)$ векторды, ал $\|x\|$ арқалы евклидлик норманы белгилеймиз:

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathring{C}$ арқалы $2p$ - периодлы n - өлшемли $V(t)$ векторлық функциялардың

$$|V(t)|_0 = \max_{0 \le t \le 2p} \|V(t)\|$$

нормаға ийе кеңислигин белгилеймиз.

Мейли $\mathring{C}_D = \{x(t) \in \mathring{C},\ x(t) \in D, -\infty < t < \infty\}$ болсын. Бул $\mathring{C}$ кеңислиги толық кеңислик болады, ал $\mathring{C}_D$ – усы $\mathring{C}$ кеңислигинде туйық көплик болады.

Ҳәр қандай $V(t)\in \mathring{C}$ функцияға оның

$$V(t) : a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

Фурье қатарын сәйкес қойыўға болады.

$P_0V(t),\ V(t)\in \mathring{C}$ деп усы жайылманың нольлик ағзасын түсинемиз, яғный

$$P_0V(t)=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}V(s)ds.$$

Ҳәр қандай пүтин $m\geq 1$ саны ушын

$$P_mV(t)=\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

$$\overline{P_m}V(t)=a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

Төмендеги тастыйықлаў орынлы.

<u>1 – ЛЕММА</u> [13]. $V(t)\in \mathring{C}$ функциясы ушын төмендеги баҳалаўлар орынлы:

$$\left|\int_0^t\left(I-\overline{P_m}\right)V(s)ds\right|_0\leq 2\sqrt{2}s\ (m)\left|V(t)\right|_0, \qquad (m=0,1,...,P_0=\overline{P_0});$$

$$\left|\int_0^t P_mV(s)ds\right|_0\leq p\left|V(t)\right|_0,$$

бунда

$$s^2(m)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{8},\ m=0 \text{ bolg'anda,}\\[2ex](m+1)^{-2}+(m+2)^{-2}+...,\ m=1,2,... \text{ bolg'anda,}\end{cases}$$

$s\ (m)<m^{-\frac{1}{2}}$ болып, $m\to\infty$ да $s\ (m)\to 0$.

Биз (1.1) теңлемелер системасының периодлы шешимлерин табыўға өзинде Галеркин методын [23] ҳәм Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар методын [20] бирлестиретуғын проекциялы-итеративлик методты қолланамыз.

Бул методқа муўапық, (1.1) теңлемелер системасының периодлы шешими

$$x_{n+1}(t,x_0)=x_0+\int_0^t P_m\left[f\left(t\,,x_{n+1}(t\,,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t\,,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\right]dt\;+$$

$$+\int_0^t\left(I-P_0+P_m\right)f\left(t\,,x_n(t\,,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t\,,s,x_n(s,x_0))ds\right)dt\,,\quad(1.3)$$

$$x_0(t,x_0)=x_0,\;\; x_0\in D$$

теңлемелеринен анықланатуғын $x_n(t,x_0)$ функциялар избе-излигиниң $n\to\infty$ дағы шеги сыпатында изленеди, бунда I - бирдейлик оператор. Бул жерде

$$P_m\left[f\left(t,x_{n+1}(t,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_{k,(n+1)}(x_0)\cos kt+b_{k,(n+1)}(x_0)\sin kt),$$

$$a_{k,(n+1)}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p}f\left(t,x_{n+1}(t,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\cos ktdt,\qquad(1.4)$$

$$b_{k,(n+1)}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p}f\left(t,x_{n+1}(t,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\sin ktdt,$$

$$(k=1,2,...,m;\;\; n=0,1,2,...).$$

Солай етип, (1.1) системаның периодлы шешимлерин табыў (1.3) көринисиндеги $2mn$ белгисизли $2mn$ алгебралық ямаса транцендентлик теңлемелер системасын шешиўге алып келинди. Усы алгоритмди түсиндирейик.

(1.4) қатнасында $n=0$ деп есаплап, $x_1(t,x_0)$ функциясы ушын төмендеги теңлемени аламыз:

$$x_1(t,x_0)=x_0+\int_0^t P_m\left[f\left(t\,,x_1(t\,,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t\,-s)j\,(t\,,s,x_1(s,x_0))ds\right)\right]dt\;+$$

$$+\int_0^t (I-P_0-P_m)\left[f\left(t,x_0,\int_{-\infty}^t B(t-s)j(t,s,x_0)ds\right)\right]dt. \qquad (1.5)$$

Ал P_m операторының анықламасы бойынша

$$P_m\left[f\left(t,x_1(t,x_0),\int_{-\infty}^t B(t-s)j(t,s,x_1(s,x_0))ds\right)\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^m [a_{n1}(x_0)\cos nt+b_{n1}(x_0)\sin nt], \qquad (1.6)$$

бунда

$$a_{n1}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f\left(t,x_1(t,x_0),\int_{-\infty}^t B(t-s)j(t,s,x_1(s,x_0))ds\right)\cos nt\,dt,$$
$$b_{n1}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f\left(t,x_1(t,x_0),\int_{-\infty}^t B(t-s)j(t,s,x_1(s,x_0))ds\right)\sin nt\,dt. \qquad (1.7)$$

Сонда (1.5) теңлеме шешимин төмендегише жазыўға болады:

$$x_1(t,x_0)=x_0+\int_0^t\sum_{n=1}^m [a_{n1}(x_0)\cos nt+b_{n1}(x_0)\sin nt]dt+y_0(t,x_0)=$$
$$=x_0+\sum_{n=1}^m\left[a_{n1}(x_0)\frac{1}{n}\sin nt-b_{n1}(x_0)\frac{1}{n}\cos nt+\frac{1}{n}b_{n1}(x_0)\right]+y_0(t,x_0), \qquad (1.8)$$

бунда

$$y_0(t,x_0)=\int_0^t (I-P_0-P_m)f\left(t,x_0,\int_{-\infty}^t B(t-s)j(t,s,x_0)ds\right)dt. \qquad (1.9)$$

Бул (1.8) қатнасынан $x_1(t,x_0)$ шешим $2mn$ белгисиз $a_{n1}(x_0), b_{n1}(x_0), n=1,2,...,m$ коэффициентлерин өз ишине алатуғыны келип шығады. Бул коэффициентлер берилген m де $2mn$ белгисизли алгебралық теңлемелер системасын шешип табылады.

Усыған уқсас түрде, $(n+1)$ - жақынласыў

$$x_{n+1}(t,x_0)=x_0+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\Big[a_{n,n+1}(x_0)\sin nt-$$
$$-b_{n,n+1}(x_0)\cos nt+b_{n,n+1}(x_0)\Big]+y_n(t,x_0) \tag{1.10}$$

теңлемесинен анықланады, бунда $a_{n,n+1}(x_0),\ b_{n,n+1}(x_0)$ коэффициентлер төмендеги теңлемелер системасынан анықланады:

$$a_{n,n+1}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f\left(t,x_{n+1}(t,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\cos nt\,dt,$$
$$b_{n,n+1}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p} f_{n+1}\left(t,x_{n+1}(t,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\sin nt\,dt, \tag{1.11}$$

бунда

$$y_n(t,x_0)=\int_0^t\big(I-P_0-P_m\big)\,f_n\left(t,x_0,\int_{-\infty}^{t}B(t-s)j\,(t,s,x_0)ds\right)dt. \tag{1.12}$$

Мейли $f(t,x,y)$ ҳәм $j\,(t,s,x)$ функциялары $t,s\in R=(-\infty;\infty),\ x\in D,\ y\in D$ областта анықланған болып, усы областта төмендеги шәртлерди қанаатландырсын:

$$\|f(t,x,y)\|\le M,$$
$$\|f(t,\bar{x},\bar{y})-f(t,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})\|\le K_1\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|+K_2\|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\|, \tag{1.13}$$
$$\|j\,(t,s,\bar{x})-j\,(t,s,\bar{\bar{x}})\|\le K_3\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|,$$

$$q_m=\frac{2\sqrt{2}s\,(m)Q}{1-pQ}<1 \tag{1.14}$$

$$pQ<1,\quad Q=K_1+B_0K_2K_3. \tag{1.15}$$

Төмендеги белгилеўлерди пайдаланамыз:

$$a(m)=[p+2\sqrt{2}s\,(m)]MB_0,$$
$$s^2(m)=2[(m+1)^{-2}+(m+2)^{-2}+\dots].$$

Ал $s(m) < \sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}}$ екени, яғный $m \to \infty$ да $s(m) \to 0$ болыўы айқын.

D - $a(m)$ арқалы өзиниң $a(m)$ – дөгереги менен D областында жататуғын точкалар көплигин белгилеймиз, бунда $\bar{x}$ точкасының $a(m)$ дөгереги деп

$$\|x - \bar{x}\| \le a(m) \quad \text{ямаса} \quad \|x_{n+1}(t, x_0) - x_0\|_0 \le a(m)$$

теңсизлигин қанаатландыратуғын x точкалар көплиги түсиниледи.

Төмендеги тастыйықлаў орынлы.

4 – ТЕОРЕМА. Мейли $x = x^0(t, x_0)$ - берилген (1.1) теңлемелер системасының $t = 0$ болғанда $x_0 \in D$ - $a(m)$ точкасы арқалы өтетуғын $2p$ - периодлы шешими болсын ҳәм (1.13), (1.14), (1.15) қатнаслары орынлансын. Сонда $x_n(t, x_0)$ избе-из жақынласыўлар (1.4) теңлемелеринен бир мәнисли анықланады ҳәм $(t, x_0) \in R \times D$ - $a(m)$ ге қарата тең өлшеўли түрде $x^0(t, x_0)$ функциясына жыйнақлы болады, яғный $x^0(t) = x^0(t, x_0) = \lim_{n \to \infty} x_n(t, x_0)$ қатнасы орынлы болады. Соның менен бирге,

$$\left|x^0(t, x_0) - x_n(t, x_0)\right|_0 \le \frac{q_m^n}{1 - q_m}\left|x_1(t, x_0) - x_0\right|_0 \tag{1.16}$$

баҳалаўы орынланады, бунда $m \to \infty$ да $q_m \to 0$ болады.

ДӘЛИЛЛЕЎ. Қәлеген n ушын (1.4) қатнасынан $x_{n+1}(t, x_0)$ функциясын бир мәнисли анықлаўға болады.

Ҳақыйқатында да (1.4) теңлемесиниң оң жағы менен анықланатуғын операторды киритемиз:

$$\begin{aligned} T(x,z) = x_0 &+ \int_0^t P_m\left[f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, x(s)) ds\right)\right] dt \, + \\ &+ \int_0^t (I - P_0 - P_m)\left[f\left(t, z(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, z(s)) ds\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Бул оператор ушын Липшиц турақлысы баҳалаўын табамыз:

$$\left\| T(x,z) - T(\overline{x},z) \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^t P_m f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,x(s))ds \right) dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^t P_m f\left(t, \overline{x}(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,\overline{x}(s))ds \right) dt \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^t P_m \left[f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,x(s))ds \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f\left(t, \overline{x}(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,\overline{x}(s))ds \right) \right] dt \right\|.$$

Енди 1 – лемма бойынша

$$\left\| \int_0^t P_m V(s) ds \right\| \le p \left\| V(t) \right\|$$

болғанлықтан, соңғы қатнастан (1.13) теңсизликлерин есапқа алсақ, төмендегиге ийе боламыз:

$$\left\| T(x,z) - T(\overline{x},z) \right\|_0 \le$$

$$\le p \left\| f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,x(s))ds \right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t, \overline{x}(t), \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,\overline{x}(s))ds \right) \right\| \le$$

$$\le p \left[K_1 \left\| x(t) - \overline{x}(t) \right\| + K_2 \left\| \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,x(s))ds - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_{-\infty}^t B(t-s) j\,(t,s,\overline{x}(s))ds \right\| \right] \le p \left[K_1 \left\| x(t) - \overline{x}(t) \right\| + \right.$$

$$+K_2\int_{-\infty}^{t}\|B(t-s)\|\|j\,(t,s,x(s))-j\,(t,s,\overline{x}(s))\|ds\Bigg]\leq$$

$$\leq p\left[K_1\|x(t)-\overline{x}(t)\|+K_2K_3\int_{-\infty}^{t}\|B(t-s)\|\|x(s)-\overline{x}(s)\|ds\right].$$

Буннан

$$\left|T(x,z)-T(\overline{x},z)\right|_0\leq$$

$$\leq p\left[K_1\left|x(t)-\overline{x}(t)\right|_0+B_0K_2K_3\left|x(t)-\overline{x}(t)\right|_0\right]=$$

$$=p\,(K_1+B_0K_2K_3)\left|x(t)-\overline{x}(t)\right|_0=p\,Q\left|x(t)-\overline{x}(t)\right|_0,$$

бунда $Q=K_1+B_0K_2K_3$.

Бул соңғы (1.18) теңсизликтен (1.15) шәртке муўапық, S_D көплигинде $T(x,t)$ операторының x бойынша қысылыўшы оператор екени келип шығады, бунда

$$S_D=\{x(t)\in\mathring{C},\ x(t)\in D,\ -\infty<t<\infty\}.$$

Ал $TS_D\subset S_D$ болғанлықтан Банах теоремасына муўапық, (1.4) қатнасы $x_{n+1}(t,x_0)$ ге қарата S_D да бир мәнисли шешиледи.

Соның менен бирге, 1-лемма тийкарында

$$\left|x_{n+1}(t,x_0)-x_0\right|_0\leq a(m) \tag{1.19}$$

теңсизлигин аламыз.

Ҳақыйқатында да (1.4) қатнасынан $x_{n+1}(t,x_0)-x_0$ айырмасын 1-лемма жәрдеминде баҳалап, төмендегиге ийе боламыз:

$$\left|x_{n+1}(t,x_0)-x_0\right|_0\leq$$

$$\leq\left|\int_0^t P_m\left[f\left(t\,,x_{n+1}(t\,,x_0),\int_{-\infty}^{t}B(t\,-s)j\,(t\,,s,x_{n+1}(s,x_0))ds\right)\right]dt\right|_0+$$

$$+\left|\int_0^t\left(I-P_0+P_m\left[f\left(t, x_n(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_n(s, x_0))ds\right)\right]\right)dt\right|_0 \leq$$

$$\leq [p+2\sqrt{2}s(m)],$$

$$MB_0 = a(m),$$

яғный (1.19) теңсизлигин аламыз.

Енди (1.4) избе-излигиниң жыйнақлылығын дәлиллеймиз. 1 – лемманы пайдаланып, (1.4) қатнасынан төмендеги теңсизликти аламыз:

$$|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)|_0 \leq$$

$$\leq \left|\int_0^t P_m\left\{f\left(t, x_2(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_2(s, x_0))ds\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_1(s, x_0))ds\right)\right\}\right|_0 +$$

$$+\left|\int_0^t (I-P_0-P_m)\left\{f\left(t, x_1(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_1(s, x_0))ds\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f\left(t, x_0, \int_{-\infty}^t j(t, s, x_0)ds\right)\right\}dt\right|_0 \leq$$

$$\leq p\left|f\left(t, x_2(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_2(s, x_0))ds\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(t, x_1(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_1(s, x_0))ds\right)\right|_0 +$$

$$-2\sqrt{2}s(m)\left|f\left(t, x_1(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s)j(t, s, x_1(s, x_0))ds\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(t, x_0, \int_{-\infty}^t j(t, s, x_0)ds\right)\right|_0 \leq pQ|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)|_0 +$$

$$+2\sqrt{2}s\,(m)Q\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0,$$

яғный

$$\left|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)\right|_0 \le pQ\left|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)\right|_0 + \\ +2\sqrt{2}s\,(m)Q\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0 \quad (1.20)$$

Алынған бул (1.20) теңсизлигин шешип, төмендеги баҳалаўға ийе боламыз:

$$\left|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)\right|_0 \le \frac{2\sqrt{2}s\,(m)Q}{1-pQ}\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0 = \\ = q_m\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0, \quad (1.21)$$

бунда

$$q_m = \frac{2\sqrt{2}s\,(m)Q}{1-pQ} \quad (1.22)$$

усындай жол менен

$$\left|x_3(t,x_0)-x_2(t,x_0)\right|_0 \le q_m^2\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0$$

теңсизлигин аламыз. Математикалық индукцияны қолланып, барлық $n=1,2,3,\dots$ ушын

$$\left|x_{n+1}(t,x_0)-x_n(t,x_0)\right|_0 \le q_m^n\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0 \quad (1.23)$$

теңсизлигиниң орынлы екенин көрсетиўге болады.

Ал

$$x_{n+j}(t,x_0)-x_n(t,x_0) = (x_{n+j}(t,x_0)-x_{n+j-1}(t,x_0)) + \\ +(x_{n+j-1}(t,x_0)-x_{n+j-2}(t,x_0)) + \dots + (x_{n+1}(t,x_0)-x_n(t,x_0))$$

қатнасынан (1.23) теңсизлигине муўапық барлық $j \ge 1$ ушын

$$\left|x_{n+j}(t,x_0)-x_n(t,x_0)\right|_0 \le q_m^n\sum_{i=0}^{j-1}q_m^i\left|x_1(t,x_0)-x_0\right|_0 \quad (1.24)$$

баҳалаўын аламыз.

Бул (1.24) теңсизлигинен (1.14), (1.15) шәртлериниң орынланыўына муўапық ҳәм S_D көплиги туйық көплик болғанлықтан $(t, x_0) \in (-\infty; \infty) \times D$ - $a(m)$ ге қарата тең өлшеўли түрде $x_n(t, x_0)$ функциялар көплигиниң базыбир $x^0(t, x_0) \in S_D$ периодлы функцияға жыйнақлы болатуғыны, яғный

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t, x_0) = x^0(t, x_0) \tag{1.25}$$

қатнасының орынланатуғыны ҳәм соның менен бирге, (1.24) баҳалаўынан

$$\left| x^0(t, x_0) - x_n(t, x_0) \right|_0 \le \frac{q_m^n}{1 - q_m} \left| x_1(t, x_0) - x_0 \right|_0 \tag{1.26}$$

баҳалаўы келип шығады.

Ал (1.4) қатнасында $n \to \infty$ да шекке өтсек ҳәм (1.25) қатнасын есапқа алсақ, онда $x^0(t, x_0)$ шеклик қатнасының

$$\begin{aligned} x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, x(s, x_0)) ds \right) - \\ - P_0 \left[f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, x(s, x_0)) ds \right) \right] \Bigg\} dt \end{aligned} \tag{1.27}$$

теңлемесиниң периодлы шешими болатуғынын көриўге болады. Ал $x^0(t)$ функциясы (1.1) теңлемесиниң периодлы шешими болғанлықтан ҳәм оның ушын

$$x^0(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, x(s)) ds \right) dt \tag{1.28}$$

бирдейлиги орынлы ҳәм ол

$$P_0 \left[f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t B(t-s) j(t, s, x(s, x_0)) ds \right) \right] = 0 \tag{1.29}$$

қәсийетине ийе болғанлықтан, $x^0(t)$ функциясы (1.27) теңлемесин де қанаатландырады. Ал бул (1.27) теңлемеси бирден-бир шешимге ийе болғаны ушын $x^0(t) = x^0(t, x_0)$ болады, демек,

$$x^0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t, x_0) \tag{1.30}$$

қатнасы орынланады, бунда $x_n(t, x_0)$ функциялары (1.4) қатнасы менен анықланады. Теорема дәлилленди.

2 – §. СЫЗЫҚЛЫ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕРДИҢ ПЕРИОДЛЫ ШЕШИМЛЕРИ

Мейли сызықлы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds + f(t) \qquad (2.1)$$

интегро – дифференциаллық теңлемелер системасы берилсин, бунда $x(t)$, $f(t)$ - n - өлшемли матрицалар, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i, j = \overline{1,n}$ - матрица, $K(q) = \{K_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$ - матрица, $A(t)$ ҳәм $f(t)$ - t бойынша $2p$ - периодлы, үзликсиз деп есапланады, ал $K(q)$ ядро

$$\int_{0}^{\infty} \|K(q)\| dq \le K_0 < \infty \qquad (2.2)$$

теңсизлигин қанаатландырады.

Избе-из жақынласыўлар $x_{n+1}(t, x_0)$ мына теңлемелеринен анықланатуғын методты қараймыз:

$$x_{n+1}(t,x_0) = x_0 + \int_0^t P_m \left[A(t)x_{n+1}(t,x_0) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x_{n+1}(s,x_0)ds\right]dt +$$

$$+\int_0^t (J - P_0 - P_m)\left[A(t)x_n(t,x_0) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x_n(s,x_0)ds\right]dt +$$

$$+\int_0^t (J - P_0) f(s)ds \qquad (n = 0,1,...),$$

$x_0(t, x_0) = x_0$, $x_0 \in E^n$, $J -$ бирдейлик оператор. Бул жерде

$$P_m\left[A(t)x_{n+1}(t,x_0) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x_{n+1}(s,x_0)ds\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(a_{k_{n+1}}(x_0)\cos kt + b_{k_{n+1}}(x_0)\sin kt\right),$$

$$a_{k_{n+1}}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\left[A(t)x_{n+1}(t,x_0)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x_{n+1}(s,x_0)ds\right]\cos ktdt, \qquad (2.4)$$

$$b_{k_{n+1}}(x_0)=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\left[A(t)x_{n+1}(t,x_0)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x_{n+1}(s,x_0)ds\right]\sin ktdt,$$

$$k=1,\dots,m;\quad n=0,1,\dots .$$

Берилген (2.1) теңлемелер системасының $2p$ периодлы шешимлерин табыў (2.4) түриндеги $2pn$ белгисизли сызықлы алгебралық ямаса трансцендент теңлемелердиң системасын шешиўге алып келинеди.

Төмендеги операторларды киритейик:

$$Bx(t)=\int_0^t P_m\left[A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x(s)ds\right]dt,$$

$$Cx(t)=\int_0^t (J-P_0-P_m)\left[A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x(s)ds\right]dt, \qquad (2.5)$$

$$Dx(t)=\int_0^t (J-P_0)\left[A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}K(t-s)x(s)ds\right]dt,\quad (x(t)\in\Im).$$

Бул $Bx(t),Cx(t),Dx(t)\in\Im$ болатуғыны айқын. Биз $(J-B)^{-1}$ кери оператор бар ҳәм оның нормасы ушын

$$\left|(J-B)^{-1}\right|\le b \qquad (2.6)$$

баҳалаўы белгили деп есаплаймыз.

Мейли соның менен бирге,

$$|A(t)|\le a, \qquad (2.7)$$

$$q_m=2\sqrt{2}(a+K_0)b\,s\,(m)<1 \qquad (2.8)$$

шәртлери орынлансын.

Төмендеги тастыйықлаў орынлы.

<u>5 – ТЕОРЕМА</u>**.** Мейли (2.1) системасы ушын (2.6) – (2.8) қатнаслары орынлансын. Сонда $x_{n+1}(t,x_0)$ избе-из жақынласыўлары (2.3) теңлемелерден бир мәнисли анықланады ҳәм t, x_0 ге қарата тең өлшеўли түрде $n \to \infty$ да $x^0(t, x_0) \in \Im$ функцияға жыйнақлы болады, ал бул $x^0(t, x_0)$ шеклик функция

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t (J - P_0)\left[A(t)x(t, x_0) + \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s, x_0)ds + f(t) \right]dt \qquad (2.9)$$

интеграллық теңлемесин қанаатландырады ҳәм соның менен бирге,

$$\left\| x^0(t, x_0) - x_{n+1}(t, x_0) \right\| \le \frac{q_m^{n+1}}{1 - q_m} \left\| x_1(t, x_0) - x_0 \right\| \qquad (2.10)$$

баҳалаўы орынлы болады, бунда $m \to \infty$ да $q_m \to 0$.

ДӘЛИЛЛЕЎ. $(J - B)^{-1}$ кери оператордың бар болыўына муўапық, (2.3) теңлемеси $x_{n+1}(t, x_0)$ ге қарата $n = 0,1,...$ ушын бир мәнисли шешиледи, демек,

$$x_{n+1}(t, x_0) = (J - B)^{-1}\Big\{ x_0 + \int_0^t (J - P_0 - P_m)\big[A(t)x(t, x_0) + \\ + \int_{-\infty}^t K(t-s)x(s, x_0)\,ds \big]dt + \int_0^t (J - P_0) f(s)\,ds \Big\}. \qquad (2.11)$$

Бул соңғы теңликтен 1 – лемманың

$$\left\| \int_0^t P_m u(s)ds \right\| \le p \left\| u(t) \right\|$$

теңсизлигин ҳәм теореманың шәртлерин пайдаланып, төмендегини аламыз:

$$\left\| x_{n+1}(t, x_0) - x_n(t, x_0) \right\| \le \\ \le b \left\| \int_0^t (J - P_0 - P_m)\big[A(t)\big(x_n(t, x_0) - x_{n-1}(t, x_0) \big) + \\ + \int_{-\infty}^t K(t - s)\big(x_n(s, x_0) - x_{n-1}(s, x_0) \big) ds \big] dt \right\|,$$

буннан

$$\left\| x_{n+1}(t,x_0) - x_n(t,x_0) \right\|_0 \le$$

$$\le 2\sqrt{2}s\,(m)b\,\Big\| A(t)\big(x_n(t,x_0) - x_{n-1}(t,x_0)\big) +$$

$$+\int_{-\infty}^{t} K(t-s)\big(x_n(s,x_0) - x_{n-1}(s,x_0)\big)\,ds\Big\|_0 \le$$

$$\le 2\sqrt{2}s\,(m)b\,(a+K_0)\left\| x_n(t,x_0) - x_{n-1}(t,x_0) \right\|_0 =$$

$$= q_m \left\| x_n(t,x_0) - x_{n-1}(t,x_0) \right\|_0 .$$

Индукция бойынша

$$\left\| x_{n+1}(t,x_0) - x_n(t,x_0) \right\|_0 \le q_m \left\| x_1(t,x_0) - x_0 \right\|_0$$

теңсизлигин аламыз. Ал, буннан

$$\left\| x_{n+p}(t,x_0) - x_n(t,x_0) \right\| \le q_m^n \sum_{i=0}^{p-1} q_m^i \left\| x_1(t,x_0) - x_0 \right\|. \qquad (2.12)$$

Бул соңғы теңсизликтен (2.8) шәртине муўапық, $x_n(t,x_0)$ функциялар избе-излигиниң $x^0(t,x_0) \in \Im$ функциясына тең өлшеўли жыйнақлылығы келип шығады.

Ал, (2.12) баҳалаўынан (2.10) баҳалаўы келип шығады. (2.3) теңликлеринде $n \to \infty$ да шекке өтип, $x^0(t,x_0)$ шеклик функцияның (2.9) теңлемесиниң периодлы шешими екенине исенемиз.

<u>6 – ТЕОРЕМА</u>. Мейли $x = j\,(t)$ функциясы (2.1) системаның $t = 0$ болғанда $x_0 \in E^n$ точкасы арқалы өтиўши $2p$ - периодлы шешими болсын. Мейли 1 саны D операторының меншикли мәниси болмасын. Сонда, $x^0(t,x_0) = j\,(t)$, бунда $x^0(t,x_0)$ – бул (2.3) функциялар избе-излигиниң шеклик функциясы.

<u>ДӘЛИЛЛЕЎ</u>. $j(t)$ функциясы (2.1) системаның периодлы шешими сыпатында

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds \right] dt + f(s)ds$$

теңлемесин қанаатландырады ҳәм ол

$$P_0 \left[A(t)j(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)j(s)ds + f(t) \right] = 0$$

қәсийетке ийе, онда буннан $j(t)$ функциясы да $x^0(t, x_0)$ функциясындай (2.9) теңлемениң периодлы шешими болады. Ал 1 шәрт бойынша D операторының меншикли мәниси болмағанлықтан (2.9) теңлемеси бирден-бир шешимге ийе, демек, $x^0(t, x_0) = j(t)$. Теорема дәлилленди.

Берилген (2.1) системасының периодлы шешиминиң бар болыўы

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \left[A(t)x^0(t, x_0) + \int_{-\infty}^{t} K(t-s)x^0(s, x_0)ds + f(t) \right] dt \qquad (2.13)$$

функциясының нольлериниң бар болыўы менен байланыслы болады.

ЖУЎМАҚ

Бул жумыста избе-из периодлы жақынласыўлар методы ҳәм оның бир модификациясы болған проекциялы-итеративлик метод интегро–дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин үйрениў ушын қолланылды.

Магистрлик диссертацияда төмендеги тийкарғы нәтийжелер алынды:

1. Екинши тәртипли Вольтерра типиндеги шексиз шегаралы интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин табыўға Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар методы қолланылды, бул методтың алгоритми тийкарланылды, дәл периодлы шешим менен жуўық шешим арасындағы айырма баҳаланылды.

2. Бул жерде Самойленко методының еки схемасы, атап айтқанда жаңа өзгериўшилерге өтиў арқалы екинши тәртипли теңлемеден теңлемелер системасына өтиў ҳәм санлы-аналитикалық схеманы қолланыў ҳәм сондай ақ, екинши тәртипли теңлемеге санлы-аналитикалық схеманы тиккелей қолланыў мәселеси үйренилди.

3. Вольтерра типиндеги шексиз шегаралы интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы системалары ушын өзинде Самойленконың избе-из периодлы жақынласыўлар методын ҳәм Галеркин методын бирлестириўши проекциялы-итеративлик метод қолланылды. Бул метод сызықлы емес интегро – дифференциаллық теңлемелер системасы ушын ҳәм сондай ақ сызықлы теңлемелер системасы ушын да математикалық жақтан тийкарланылды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЯТЛАР

1. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – 1957. – 320с.

2. *Быков Я. В., Рузикулов Д.* Периодические решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их асимптотики. – Ф: Илим, 1986. – 280с.

3. *Вайнберг М. М.* Интегро-дифференциальные уравнения // Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. – М., 1964. – С. 5 – 37.

4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 288с.

5. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М. Наука, 1982. – 304с.

6. *Вуйтович Б.* Про чисельно – аналітичний метод дослідження інтегро-диференційних рівнянь. // Вестник КГУ, математика и механика, 1982. № 24. – С.14 – 21.

7. *Вуйтович Б., Нуржанов О. Д.* Метод Бубнова – Галеркина для нелинейных периодических систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием. – Киев: Ин-т математики, Препринт 82.50. – 1982. – 36с.

8. *Дружинина Р. М.* Метод Пуанкаре в исследовании колебаний системы интегро-дифференциальных уравнений при резонансе. // Труды Ташкентского политех.ин-та, 1978, № 249. – С. 62 – 68.

9. *Ильюшин А. А. Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970 – 280с.

10. *Иманалиев М. И.* Колебания и устойчивость решений сингулярно – возмущенных интегро – дифференциальных систем. - Ф.Илим – 1974.-356 с.

11. *Кривошеин Л. Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Ф., 1962. – 184с.

12. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1982. – 152с.

13. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – Киев: Вища школа – 1979. – 248с.

14. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартинюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами – Киев. Науко ва думка. 1984.- 216 с.

15. *Нуржанова А. О., Қурбанбаев Ө. О.* Вольтерра типиндеги сызықлы интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлери // Өзбекстан Республикасы ғәрезсизлигиниң 20 – жыллық байрамына бағышланған Республикалық магистрантлардың илимий - әмелий конференциясы материаллары топламы (30-апрель, 2011-жыл). – Нөкис: Қарақалпақстан, 2011. – 141-142 б.

16. *Нуржанова А. О., Қурбанбаев Ө. О.* Сызықлы емес интегро – дифференциаллық теңлемелердиң периодлы шешимлерин табыўға проекциялы – итеративлик методты қолланыў. // Магистрантлардың илимий мийнетлери топламы, Нөкис – 2012, 27 – 29 б.

17. *Рябов Ю. А.* Главные двусторонние решения линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием. // Укр.мат.журн., 1987, т.39, № 1. – С. 92 – 97.

18. *Рябов Ю. А., Хусанов Д. Х.* Построение и оценки по тригонометрической норме периодических решений интегро-

дифференциальных уравнений в теории вязко-упругости // Математическая физика, 1983, № 34. –С. 36-42.

19. *Рябов Ю. А., Хусанов Д. Х.* Периодические решения интегро-дифференциального уравнения второго порядка в резонансном случае // Укр.мат.журнал 1982, Т. 34, № 5. – С. 644-647.

20. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. - К.: Вища шк. изд-во при Киев. ун-те, 1976. - 179 с.

21. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев: Наук. думка, 1992. - 280 с.

22. *Самойленко А. М., Вуйтович Б.* Метод Гальоркіна пошуку періодичних рівнянь типу Вольтерра // Вест. КГУ, математика и механика, 1982. № 25.

23. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. - //. Механика. – 1966, № 3-С.3-34

24. ***Burton T. A. Periodic solutions of linear Volterra equations*** // Funkcialaj Ekvacioj, 27 (1984). – P. 229-253.

25. ***Burton T.A.*** Periodicity and limiting equations in Volterra systems // Boll. Unione mat. Ital. – 1985, C. 4, №1. – P. 31-39.

26. ***Corduneanu C.*** Almost periodic solutions for infinite delay systems. - “Spect. Theory Differ. Oper. Proc. Conf.” – Birmingham: Ala march. (26-28), 1981.